

# Volumina des Nef-Kegels von abelschen Flächen und von Aufblasungen der projektiven Ebene



## Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades  
der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)  
vorgelegt dem  
Fachbereich Mathematik und Informatik  
der Philipps-Universität Marburg

von

M.Sc. Carsten Bornträger  
geboren in Marburg

Marburg, im November 2017

Vom Fachbereich Mathematik und Informatik  
der Philipps-Universität Marburg (Hochschulkenziffer 1180)  
als Dissertation angenommen am 19. Januar 2018

Erstgutachter: Prof. Dr. Thomas Bauer  
Zweitgutachter: Prof. Dr. Tomasz Szemberg

Tag der Einreichung: 20. November 2017  
Tag der Disputation: 5. Februar 2018

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Kegelvolumina auf algebraischen Flächen</b>	<b>5</b>
1.1 Einführung und erste Beispiele . . . . .	5
1.2 Das Volumen des positiven Kegels . . . . .	10
<b>2 Volumina des Nef-Kegels von abelschen Flächen</b>	<b>14</b>
2.1 Einfache abelsche Flächen mit Prinzipalpolarisierung . . . . .	14
2.2 Produkte von elliptischen Kurven . . . . .	20
2.3 Ergebnisse für beliebige einfache abelsche Flächen . . . . .	27
<b>3 Volumina des Nef-Kegels von Aufblasungen der projektiven Ebene</b>	<b>36</b>
3.1 Del-Pezzo-Flächen . . . . .	36
3.1.1 Formeln zur Volumenberechnung . . . . .	39
3.1.2 Bestimmung des maximalen Volumens . . . . .	49
3.2 Aufblasungen von Punkten auf einem glatten Kegelschnitt im $\mathbb{P}^2$ . . . . .	51
3.2.1 Formeln zur Volumenberechnung . . . . .	53
3.2.2 Bestimmung des maximalen Volumens . . . . .	58
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>73</b>
<b>Anhang</b>	<b>75</b>
Maple-Code zur Berechnung von $\text{Vol}(\text{Nef}(X_C^r), H)$ . . . . .	75
Werte von $\text{Vol}(\text{Nef}(X_C^r))$ für $6 \leq r \leq 27$ . . . . .	79
English abstract . . . . .	84
Danksagung . . . . .	87
Erklärung . . . . .	88
Lebenslauf . . . . .	89

# Einleitung

In der vorliegenden Arbeit werden Nef-Kegel algebraischer Flächen auf ihre Größe hin untersucht. Dazu verwenden wir das Konzept des Nef-Kegel-Volumens, welches ursprünglich von Peyre in einem zahlentheoretischen Kontext für Fano-Varietäten eingeführt wurde (siehe [22]). Von Derenthal und Co-Autoren wurde Peyres Volumenbegriff aufgegriffen und in einer Reihe von Arbeiten auf Del-Pezzo-Flächen untersucht (siehe u.a. [12, 15, 16]). Bauer und Schmitz haben in [5] gezeigt, wie eine Verallgemeinerung dazu verwendet werden kann, die Größe von Zariski-Kammern zu messen. Konkret ist das Volumen eines konvexen Kegels  $\mathcal{C}$  im Néron-Severi-Raum  $\text{NS}_{\mathbb{R}}(X)$  einer algebraischen Fläche  $X$  in [5] definiert als das Volumen der Menge

$$\bar{\mathcal{C}} \cap (-K_X)^{\leq 1},$$

wobei  $-K_X$  den antikanonischen Divisor auf  $X$  bezeichnet und  $(-K_X)^{\leq 1}$  die Menge aller Divisorenklassen, deren Schnittprodukt mit  $-K_X$  höchstens eins ist. Volumenberechnungen sind dabei nach Basiswahl von  $\text{NS}(X)$  möglich, durch welche  $\bar{\mathcal{C}} \cap (-K_X)^{\leq 1}$  als Teilmenge von  $\mathbb{R}^{\rho(X)}$  aufgefasst werden kann (siehe Abschnitt 1.1 für Details). Peyre hat statt des Kegelstumpfes  $\text{Nef}(X) \cap (-K_X)^{\leq 1}$  die Menge  $\text{Nef}(X) \cap (-K_X)^{=1}$  betrachtet. Die Volumina dieser beiden Mengen unterscheiden sich allerdings nur um den Dimensionsfaktor  $1/\rho(X)$ , sodass letztlich Varianten desselben Volumenbegriffs vorliegen. Schmitz hat in seiner Dissertation [26] eine weitere Verallgemeinerung auf polarisierte Flächen eingeführt, welche in dieser Arbeit Verwendung findet: Statt des Halbraums  $(-K_X)^{\leq 1}$  betrachten wir  $H^{\leq 1}$  für Polarisierungen  $H$  auf  $X$ . Wir sprechen dabei vom Kegelvolumen von  $\mathcal{C}$  bezüglich  $H$  und verwenden als Notation

$$\text{Vol}(\mathcal{C}, H) := \text{Vol}(\bar{\mathcal{C}} \cap H^{\leq 1}).$$

Der verallgemeinerte Volumenbegriff hat den Vorteil, dass er Berechnungen für Flächen ermöglicht, auf denen durch den antikanonischen Divisor kein geeigneter Kegelstumpf definiert wird, wie es zum Beispiel bei abelschen Flächen der Fall ist. Um einen Volumenbegriff zu haben, der nicht von einer Polarisierung abhängt, definieren wir

$$\text{Vol}(\mathcal{C}) := \sup_H \text{Vol}(\mathcal{C}, H),$$

wobei das Supremum über alle Polarisierungen  $H$  aus der Néron-Severi-Gruppe gebildet wird. In erster Linie werden wir uns mit dem Volumen von Nef-Kegeln beschäftigen. Geometrisch kann dieses als ein Maß dafür verstanden werden, wie weit ein ample Divisor bewegt werden kann, ohne seine Positivität zu zerstören.

Die beiden ersten Hauptresultate dieser Arbeit liefern ein vollständiges Bild davon, wie sich Nef-Kegel-Volumina bei einfachen abelschen Flächen mit Prinzipalpolarisierung und bei Produkten von zwei elliptischen Kurven verhalten. Diese Resultate wurden bereits in [3] publiziert. Maßgebend für unsere Ergebnisse ist eine Aussage über das Volumen des positiven Kegels einer beliebigen glatten projektiven Fläche. Wir zeigen, dass dieses wesentlich durch die Diskriminante der Néron-Severi-Gruppe bestimmt ist (siehe Abschnitt 1.2). Auf abelschen Flächen stimmt der positive Kegel mit dem Nef-Kegel überein, sodass sich die Volumenberechnung des Nef-Kegels auf die Bestimmung der Diskriminante der Néron-Severi-Gruppe reduziert. Für einfache abelsche Flächen mit Prinzipalpolarisierung zeigen wir, wie die Diskriminante über den Endomorphismenring bestimmt werden kann, wodurch sich die verschiedenen Fälle in Theorem 1 ergeben. Bei Produkten von zwei elliptischen Kurven gehen wir ähnlich vor. Dabei ist besonders der Fall interessant, in dem die Kurven isogen sind und komplexe Multiplikation haben. In diesem Fall zeigen wir, dass die Diskriminante der Néron-Severi-Gruppe über die Führer der Endomorphismenringe der Kurven ausgedrückt werden kann.

**Theorem 1.** *Es sei  $X$  eine einfache abelsche Fläche, auf der eine Prinzipalpolarisierung existiert. Weiter sei  $H$  eine beliebige Polarisierung auf  $X$ . Das Volumen von  $\text{Nef}(X)$  bezüglich  $H$  kann über den Endomorphismenring  $\text{End}(X)$  bestimmt werden:*

- (a) *Angenommen  $X$  hat ganzzahlige Multiplikation, das heißt,  $\text{End}(X) = \mathbb{Z}$ . Dann gilt*

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X), H) = \frac{1}{\sqrt{2H^2}}.$$

- (b) *Angenommen  $X$  hat reelle Multiplikation, das heißt,  $\text{End}_{\mathbb{Q}}(X) = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  für eine quadratfreie ganze Zahl  $d > 1$ . Es sei  $f$  der Führer von  $\text{End}(X)$  (siehe Abschnitt 2.1 für Details). Dann gilt*

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X), H) = \begin{cases} \frac{1}{2f\sqrt{d}(H^2)} & \text{falls } d \equiv 2, 3 \pmod{4} \\ \frac{1}{f\sqrt{d}(H^2)} & \text{falls } d \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

*Wenn  $X$  komplexe Multiplikation hat, gilt dieselbe Formel. In diesem Fall stammen  $f$  und  $d$  von der Ordnung  $\text{End}^{\text{sym}}(X)$  in dem reell-quadratischen Unterkörper  $\text{End}_{\mathbb{Q}}^{\text{sym}}(X) = \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \subset \text{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ .*

- (c) *Angenommen  $X$  hat indefinite Quaternionenmultiplikation, das heißt,  $\text{End}_{\mathbb{Q}}(X)$  ist eine indefinite Quaternionenalgebra. Ist  $\text{End}(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}ab$  mit Rosati-invarianten Elementen  $a, b$ , so gilt*

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X), H) = \frac{\pi\sqrt{2}}{3\sqrt{|\det S_{\delta}(a, b)|}(H^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

*(Siehe Abschnitt 2.1 für Details, insbesondere für die Definition der Matrix  $S_{\delta}(a, b)$ .)*

*Das Volumen  $\text{Vol}(\text{Nef}(X))$  ergibt sich in den obigen Fällen jeweils für eine beliebige Prinzipalpolarisierung. Den konkreten Wert erhält man durch Ersetzen von  $(H^2)$  durch 2.*

**Theorem 2.** *Sei  $X = E_1 \times E_2$  ein Produkt von elliptischen Kurven und  $H$  eine beliebige Polarisierung auf  $X$ .*

(a) *Sind  $E_1$  und  $E_2$  nicht isogen, so gilt*

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X), H) = \frac{1}{(H^2)}.$$

(b) *Angenommen  $E_1$  und  $E_2$  sind isogen und haben keine komplexe Multiplikation, das heißt,  $\text{End}(E_1) = \text{End}(E_2) = \mathbb{Z}$ . Ist  $\sigma : E_1 \rightarrow E_2$  eine Isogenie von minimalem Grad, so gilt*

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X), H) = \frac{\pi}{3\sqrt{2} \deg(\sigma)(H^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

(c) *Angenommen  $E_1$  und  $E_2$  sind isogen und haben komplexe Multiplikation. Dann ist  $\text{End}_{\mathbb{Q}}(E_i) = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  für eine quadratfreie ganze Zahl  $d < 0$ . Sind  $f_1$  und  $f_2$  die Führer von  $\text{End}(E_1)$  bzw.  $\text{End}(E_2)$ , so gilt*

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X), H) = \begin{cases} \frac{\pi}{6 \cdot \text{kgV}(f_1, f_2) \sqrt{|d|} (H^2)^2} & \text{falls } d \equiv 2, 3 \pmod{4} \\ \frac{\pi}{3 \cdot \text{kgV}(f_1, f_2) \sqrt{|d|} (H^2)^2} & \text{falls } d \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

*Das Volumen  $\text{Vol}(\text{Nef}(X))$  ergibt sich in den obigen Fällen jeweils für eine beliebige Prinzipalpolarisierung. Den konkreten Wert erhält man durch Ersetzen von  $(H^2)$  durch 2.*

Die bereits publizierten Resultate erweitern wir in dieser Arbeit um Ergebnisse für beliebige einfache abelsche Flächen. Konkret erhalten wir ein vollständiges Bild davon, welche Nef-Kegel-Volumina bei einfachen abelschen Flächen mit ganzzahliger bzw. reeller Multiplikation auftreten, unabhängig davon, ob auf ihnen eine Prinzipalpolarisierung existiert oder nicht. Ebenso gelingt es, genau zu bestimmen, welche algebraischen Zahlen als Nef-Kegel-Volumen bei einfachen abelschen Flächen auftreten. Zum Abschluss unserer Betrachtungen zu abelschen Flächen zeigen wir, wie das Nef-Kegel-Volumen anhand des definierenden Gitters einer gegebenen abelschen Fläche bestimmt werden kann. Dies ermöglicht explizite Berechnungen für abelsche Flächen ohne Prinzipalpolarisierung. Alle Ergebnisse zu abelschen Flächen werden in Kapitel 2 dargestellt.

Das dritte Kapitel ist Volumenberechnungen des Nef-Kegels von Aufblasungen der projektiven Ebene gewidmet. Im ersten Abschnitt beschäftigen wir uns mit Del-Pezzo-Flächen. Derenthal hat zu diesen bereits das Nef-Kegel-Volumen bezüglich des antikanonischen Divisors bestimmt (siehe [12]). Wir bestimmen Formeln, mit denen das Volumen für beliebige Polarisierungen berechnet werden kann und beantworten die Frage, für welche Polarisierung das Volumen maximal wird. Grundlegend für diese Betrachtungen ist ein Resultat von Schmitz, welches eine rekursive Berechnung von Nef-Kegel-Volumina ermöglicht (siehe [26, Proposition 5.2.2]). Im zweiten Abschnitt von Kapitel 3 betrachten wir Aufblasungen der projektiven Ebene in Punkten, die auf einem glatten Kegelschnitt liegen. Schmitz hat in [26] bereits Formeln bestimmt, mit denen bei diesen Flächen das Nef-Kegel-Volumen bezüglich des antikanonischen Divisors berechnet werden kann. Wir leiten Formeln her,

mit denen das Volumen für beliebige Polarisierungen bestimmt werden kann. Außerdem setzen wir uns auch hier mit der Frage nach dem maximalen Volumen auseinander. Die Beantwortung gestaltet sich in diesem Fall deutlich schwieriger als im Fall der Del-Pezzo-Flächen. Aus diesem Grund führen wir den Begriff der minimalen Polarisierung ein und zeigen, wie man mit diesem zu Ergebnissen kommt.

**Theorem 3.** *Sei  $\pi : X_C^r \rightarrow \mathbb{P}^2$  eine Aufblasung des  $\mathbb{P}^2$  in  $r \geq 5$  Punkten auf einem glatten Kegelschnitt  $C \subset \mathbb{P}^2$ . Weiter seien  $E_1, \dots, E_r$  die exzeptionellen Kurven der Aufblasung und  $L = \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ . Dann gilt: Das maximale Nef-Kegel-Volumen  $\text{Vol}(\text{Nef}(X_C^r))$  wird entweder für*

$$\left\lceil \frac{r+1}{2} \right\rceil \cdot L + \left( r - 2 \cdot \left\lceil \frac{r+1}{2} \right\rceil \right) \cdot E_1 - (E_2 + \dots + E_r)$$

oder für

$$(r-2) \cdot L + (4-r) \cdot E_1 - (E_2 + \dots + E_r)$$

angenommen. Konkrete Berechnungen mit Maple zeigen: Für  $r \leq 11$  tritt der erste Fall ein, für  $12 \leq r \leq 27$  der zweite. (Für  $r \geq 28$  ist bisher unbekannt, welche der beiden Polarisierungen das maximale Volumen bestimmt.)

## Kapitel 1

# Kegelvolumina auf algebraischen Flächen

In diesem Kapitel führen wir zunächst den Volumenbegriff ein, der Grundlage für diese Arbeit ist. Als erste Beispiele werden wir Nef-Kegel-Volumina zu  $\mathbb{P}^2$ ,  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  und Regelflächen berechnen. Im zweiten Abschnitt beweisen wir eine Formel für das Volumen des positiven Kegels einer glatten projektiven Fläche. Diese Formel ermöglicht Volumenberechnungen auf abelschen Flächen im zweiten Kapitel.

### 1.1. Einführung und erste Beispiele

Es sei  $X$  eine glatte projektive Fläche über  $\mathbb{C}$  und  $H$  eine Polarisierung auf  $X$ . Wie üblich bezeichnen wir mit  $\text{NS}(X)$  die Néron-Severi-Gruppe von  $X$  und mit

$$\text{NS}_{\mathbb{R}}(X) = \text{NS}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

den Néron-Severi-Raum. Mit  $H^{\leq 1}$  bezeichnen wir den Halbraum

$$\{L \in \text{NS}_{\mathbb{R}}(X) \mid (H \cdot L) \leq 1\}.$$

Nach Basiswahl von  $\text{NS}(X)$  können wir  $\text{NS}_{\mathbb{R}}(X)$  mit  $\mathbb{R}^{\rho(X)}$  identifizieren, wobei  $\rho(X) = \dim \text{NS}_{\mathbb{R}}(X)$  die Picardzahl von  $X$  bezeichnet. Zu einem konvexen Kegel  $\mathcal{C}$  in  $\text{NS}_{\mathbb{R}}(X)$  definieren wir das *Kegelvolumen von  $\mathcal{C}$  bezüglich  $H$*  als das Volumen von

$$\bar{\mathcal{C}} \cap H^{\leq 1} \subset \mathbb{R}^{\rho(X)}.$$

Die Wohldefiniertheit des Volumenbegriffs ist dabei durch die Transformationsformel und die Tatsache, dass  $\text{NS}(X)$  ein Gitter im Néron-Severi-Raum ist, gesichert. Man beachte dazu, dass Basiswechsellmatrizen, die eine Gitterbasis in eine andere Gitterbasis überführen, Determinante  $\pm 1$  haben. Als Notation verwenden wir im Folgenden

$$\text{Vol}(\mathcal{C}, H) := \text{Vol}(\bar{\mathcal{C}} \cap H^{\leq 1}).$$

Um außerdem einen von einer Polarisierung unabhängigen Volumenbegriff zu erhalten, definieren wir

$$\text{Vol}(\mathcal{C}) := \sup_H \text{Vol}(\mathcal{C}, H), \tag{1.1}$$

wobei das Supremum über alle Polarisierungen  $H \in \text{NS}(X)$  gebildet wird.



Das obige Konzept des Kegel-Volumens ist in einer etwas anderen Form zuerst von Peyre für Fano-Varietäten definiert worden (siehe [22]). Im Unterschied zur obigen Definition hat Peyre das Volumen nicht für beliebige Polarisierungen und Kegel eingeführt, sondern hat es stattdessen ausschließlich für den antikanonischen Divisor und den Nef-Kegel betrachtet. Ebenso ist zu beachten, dass Peyre statt des Kegelstumpfes  $\text{Nef}(X) \cap (-K_X)^{\leq 1}$  die Menge  $\text{Nef}(X) \cap (-K_X)^{=1}$  untersucht hat. Die Volumina dieser beiden Mengen unterscheiden sich allerdings nur um den Dimensionsfaktor  $1/\rho(X)$ , sodass letztlich Varianten desselben Volumenbegriffs vorliegen. Von Derenthal und Co-Autoren wurde die Definition von Peyre aufgegriffen, wobei Ergebnisse für das Nef-Kegel-Volumen bei Del-Pezzo-Flächen entstanden sind (siehe dazu [12, 13, 14, 15, 16]). In einer Arbeit von Bauer und Schmitz hat Peyres Volumenbegriff eine erste Verallgemeinerung erfahren, indem er auf beliebige glatte projektive Flächen und konvexe Kegel im Néron-Severi-Raum erweitert wurde (siehe [5]). In seiner Dissertation hat Schmitz schließlich als weitere Verallgemeinerung den oben vorgestellten Volumenbegriff für polarisierte Flächen eingeführt (siehe [26, Abschnitt 5.1]). Definition (1.1) ist in der Literatur bisher nicht vorgekommen. Sie ist durch den Wunsch motiviert, einen Volumenbegriff zu haben, der nicht von einer Polarisierung abhängt. Die konkrete Definition ist durch folgende Bemerkung begründet:

**Bemerkung 1.1.1.** Ist  $H$  ample und  $r \in \mathbb{R}^+$ , so ist auch  $r \cdot H$  ample und es gilt

$$\text{Vol}(\mathcal{C}, r \cdot H) = \left(\frac{1}{r}\right)^\rho \cdot \text{Vol}(\mathcal{C}, H),$$

denn:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \cap (r \cdot H)^{\leq 1} &= \left\{ L \in \mathcal{C} \mid (H \cdot L) \leq \frac{1}{r} \right\} \\ &= \frac{1}{r} \cdot \{L \in \mathcal{C} \mid (H \cdot L) \leq 1\} \\ &= \frac{1}{r} \cdot (\mathcal{C} \cap H^{\leq 1}). \end{aligned}$$

Diese Überlegung zeigt:

- Das Volumen kann beliebig klein werden, sodass stets

$$\inf_H \text{Vol}(\mathcal{C}, H) = 0$$

gilt.

- Würde man in Definition (1.1) das Supremum über alle amplen  $\mathbb{R}$ -Divisorenklassen bilden, so würde stets

$$\text{Vol}(\mathcal{C}) = \infty$$

gelten. Um also einen sinnvollen Volumenbegriff zu erhalten, ist es nötig ausschließlich ganzzahlige Divisorenklassen zu betrachten.

Wir beginnen mit drei einfachen Beispielen.

**Beispiel 1.1.2.** (Volumen des Nef-Kegels bei  $\mathbb{P}^2$ )

Es sei  $X = \mathbb{P}^2$  und  $\mathcal{C} = \text{Nef}(X)$ . Die Néron-Severi-Gruppe  $\text{NS}(X)$  wird von der Klasse  $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$  einer beliebigen Geraden erzeugt (siehe z.B. [6, Example I.9a]). Weiter gilt  $\text{Nef}(X) = \mathbb{R}_0^+ \cdot L$ . Für eine Polarisierung  $H = a \cdot L$  mit  $a \in \mathbb{N}$  ergibt sich

$$H^{\leq 1} = \left\{ x \cdot L \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x \leq \frac{1}{a} \right\}$$

und somit das Volumen

$$\text{Vol}(\text{Nef}(\mathbb{P}^2), H) = \frac{1}{a}.$$

Für  $a = 1$  erhält man das maximale Volumen, also ist  $\text{Vol}(\text{Nef}(\mathbb{P}^2)) = 1$ .

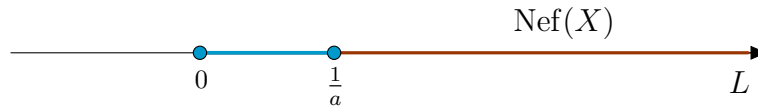


Abb. 1.1: Kegelstumpf zum Nef-Kegel-Volumen bezüglich der Polarisierung  $a \cdot L$  bei  $X = \mathbb{P}^2$ .

**Beispiel 1.1.3.** (Volumen des Nef-Kegels bei  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ )

Es sei  $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  und  $\mathcal{C} = \text{Nef}(X)$ . Die Néron-Severi-Gruppe von  $X$  wird erzeugt von den Klassen von

$$f_1 = \{(0 : 1)\} \times \mathbb{P}^1 \quad \text{und} \quad f_2 = \mathbb{P}^1 \times \{(0 : 1)\}.$$

Dabei gilt  $f_1^2 = f_2^2 = 0$  und  $f_1 \cdot f_2 = 1$  (siehe z.B. [6, Example I.9b]). Außerdem ist

$$\text{Nef}(X) = \{x f_1 + y f_2 \mid x, y \in \mathbb{R}_0^+\}.$$

Für eine Polarisierung  $H = a f_1 + b f_2$  ist die Hyperebene  $H^=1$  durch die Gleichung

$$bx + ay = 1$$

gegeben. Es ergibt sich

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X), H) = \frac{1}{2ab} \quad \text{und} \quad \text{Vol}(\text{Nef}(X)) = \frac{1}{2}.$$

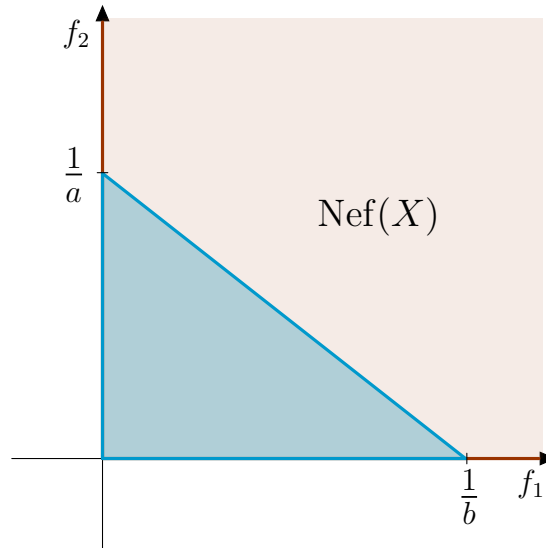


Abb. 1.2: Kegelstumpf zum Nef-Kegel-Volumen bezüglich der Polarisierung  $af_1 + bf_2$  bei  $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ .

**Beispiel 1.1.4.** (Volumina des Nef-Kegels bei Regelflächen)

Es sei  $X$  eine Regelfläche mit Basiskurve  $C$ . Die Néron-Severi-Gruppe  $NS(X)$  wird erzeugt von der Klasse einer Faser  $f$  und der Klasse eines festen Schnitts  $C_0$ . Es ist  $e := -C_0^2$  eine Invariante von  $X$ . Bezüglich der Basis  $C_0, f$  haben wir die Schnittmatrix

$$\begin{pmatrix} -e & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Siehe zum Beispiel [18, Section V.2] für Details.)

Wir unterscheiden die Fälle  $e \geq 0$  und  $e < 0$ :

- Im Fall  $e \geq 0$  ist  $aC_0 + bf$  nach [18, Proposition V.2.20] genau dann ample, wenn  $a > 0$  und  $b > ae$  gilt. Damit erhalten wir

$$\text{Nef}(X) = \mathbb{R}_0^+ \cdot f + \mathbb{R}_0^+ \cdot (C_0 + ef).$$

Für eine Polarisierung  $H = aC_0 + bf$  ist die Hyperebene  $H^{\perp=1}$  durch  $(b - ae)x + ay = 1$  gegeben. Es ergibt sich

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X), H) = \frac{1}{2ab}$$

und schließlich

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X)) = \frac{1}{2(e+1)}.$$

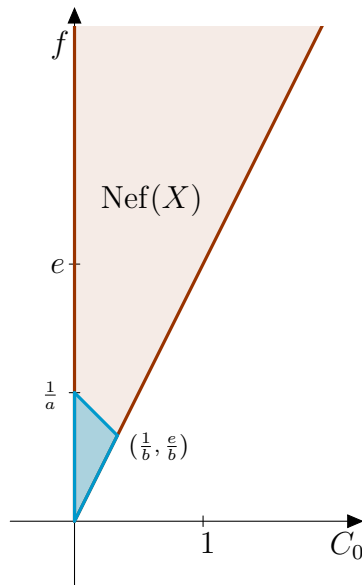


Abb. 1.3: Kegelstumpf zu  $aC_0 + bf$  im Fall  $e \geq 0$ .

- Im Fall  $e < 0$  ist  $aC_0 + bf$  nach [18, Proposition V.2.21] genau dann ample, wenn  $a > 0$  und  $b > ae/2$  gilt. Damit erhalten wir

$$\text{Nef}(X) = \mathbb{R}_0^+ \cdot f + \mathbb{R}_0^+ \cdot (2C_0 + ef).$$

Für eine Polarisierung  $H = aC_0 + bf$  ergibt sich

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X), H) = \frac{1}{a \cdot (2b - ae)} \quad \text{und damit} \quad \text{Vol}(\text{Nef}(X)) = \begin{cases} 1 & \text{falls } e + 1 \text{ gerade} \\ \frac{1}{2} & \text{falls } e + 1 \text{ ungerade.} \end{cases}$$

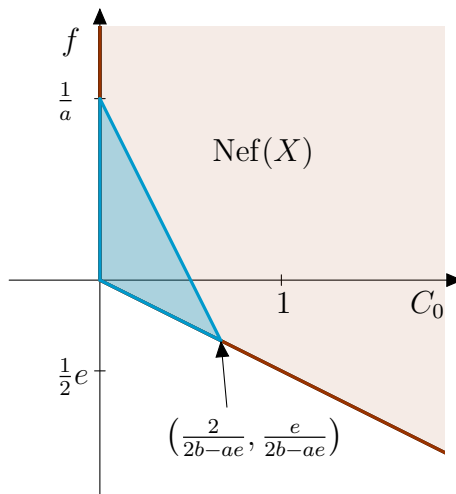


Abb. 1.4: Kegelstumpf zu  $aC_0 + bf$  im Fall  $e < 0$ .

**Bemerkung 1.1.5.** Beispiel 1.1.3 ist ein Spezialfall von Beispiel 1.1.4, da  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  eine Regelfläche ist. Bei  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  ist  $e = 0$ .

## 1.2. Das Volumen des positiven Kegels

In diesem Abschnitt beweisen wir eine Formel für das Volumen des positiven Kegels  $\text{Pos}(X)$  einer glatten projektiven Fläche  $X$ . Nach Definition ist

$$\text{Pos}(X) = \{D \in \text{NS}_{\mathbb{R}}(X) \mid D^2 \geq 0, (H \cdot D) \geq 0\},$$

wobei  $H$  ein fest gewählter ample Divisor ist.

**Satz 1.2.1.** *Sei  $X$  eine glatte projektive Fläche und  $H$  eine Polarisierung auf  $X$ . Weiter sei  $\Delta$  die Diskriminante der Néron-Severi-Gruppe (d.h. die Determinante der Gram-Matrix zu einer Basis von  $\text{NS}(X)$ ). Dann gilt:*

$$\text{Vol}(\text{Pos}(X), H) = \frac{V_{\rho}}{\sqrt{|\Delta|} \cdot (H^2)^{\rho/2}},$$

wobei  $V_{\rho}$  das Volumen des Kegelstumpfes

$$\{x \in \mathbb{R}^{\rho} \mid 0 \leq x_1 \leq 1 \quad \text{und} \quad x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_{\rho}^2 \geq 0\}$$

bezeichnet.

*Beweis.* Wir wählen eine Basis von  $\text{NS}(X)$  und fassen  $\text{Pos}(X) \cap H^{\leq 1}$  über diese als Teilmenge von  $\mathbb{R}^{\rho}$  auf. Es sei  $S$  die Matrix der Schnittform bezüglich dieser Basis. Nach dem Hodge-Index-Satz existiert eine Basis  $B_1, \dots, B_{\rho}$  von  $\text{NS}_{\mathbb{R}}(X)$  mit

$$B_1 = \frac{H}{\sqrt{(H^2)}}$$

und mit der Eigenschaft, dass für die zugehörige Basiswechselmatrix  $T \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$  die Gleichung

$$T^t S T = \text{Diag}(1, -1, \dots, -1) \quad (*)$$

gilt. Wir erhalten

$$\begin{aligned} T^{-1} \cdot (\text{Pos}(X) \cap H^{\leq 1}) &= \left\{ x \in \mathbb{R}^{\rho} \mid 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{\sqrt{H^2}} \quad \text{und} \quad x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_{\rho}^2 \geq 0 \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{H^2}} \cdot \{x \in \mathbb{R}^{\rho} \mid 0 \leq x_1 \leq 1 \quad \text{und} \quad x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_{\rho}^2 \geq 0\} \end{aligned}$$

und somit

$$|\det T^{-1}| \cdot \text{Vol}(\text{Pos}(X) \cap H^{\leq 1}) = \left( \frac{1}{\sqrt{H^2}} \right)^{\rho} \cdot V_{\rho}.$$

Wegen (\*) gilt  $|\det T^{-1}| = \sqrt{|\det S|} = \sqrt{|\Delta|}$ , womit die Behauptung folgt.  $\square$

Voriges Resultat liefert eine obere Schranke für das Nef-Kegel-Volumen bezüglich einer Polarisierung:

**Korollar 1.2.2.** *Unter den Voraussetzungen von Satz 1.2.1 gilt*

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X), H) \leq \frac{V_\rho}{\sqrt{|\Delta|} \cdot (H^2)^{\rho/2}} \leq \text{Vol}(\overline{\text{Big}}(X), H).$$

*Beweis.* Die Behauptung folgt direkt aus

$$\text{Nef}(X) \subset \text{Pos}(X) \subset \overline{\text{Big}}(X).$$

□

Weiter erhalten wir eine Formel für das Nef-Kegel-Volumen bei polarisierten abelschen Flächen:

**Korollar 1.2.3.** *Sei  $(X, H)$  eine polarisierte abelsche Fläche. Dann gilt*

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X), H) = \frac{V_\rho}{\sqrt{|\Delta|} \cdot (H^2)^{\rho/2}}.$$

*Beweis.* Da auf abelschen Flächen jeder pseudo-effektive Divisor nef ist, gilt

$$\text{Nef}(X) = \overline{\text{Big}}(X)$$

(vgl. z.B. [2, Lemma 1.1]). Die Behauptung folgt mit Korollar 1.2.2.

□

Zentral für obige Formel ist unter anderem das Volumen  $V_\rho$ . Dieses lässt sich auf elementare Weise bestimmen. Zunächst erhält man leicht:

$$V_1 = V_2 = 1.$$

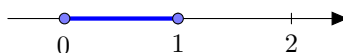
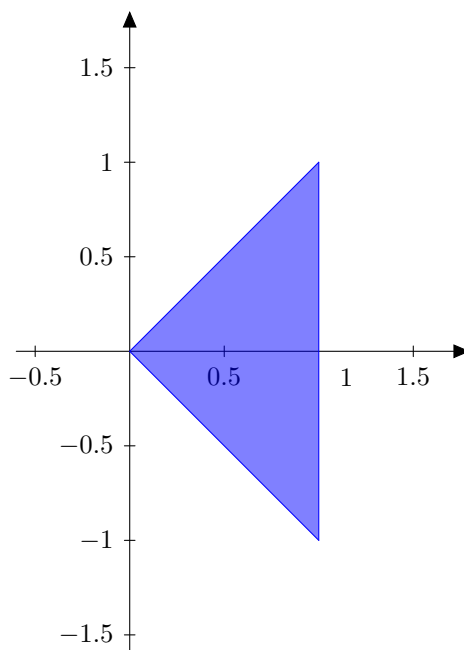


Abb. 1.5: Der Kegelstumpf  $V_1$ .


 Abb. 1.6: Der Kegelstumpf  $V_2$ .

Für größere  $\rho$  lässt sich  $V_\rho$  über das Volumen der  $(\rho - 1)$ -dimensionalen Einheitskugel bestimmen.

**Lemma 1.2.4** ([17], Beispiel 7.4). *Es bezeichne  $\tau_n$  das Volumen der  $n$ -dimensionalen Einheitskugel. Dann gilt:*

- $\tau_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$  für  $n \in \mathbb{N}$ , wobei  $\Gamma$  die Eulersche Gammafunktion bezeichnet
- $\tau_{2k} = \frac{1}{k!} \cdot \pi^k$  für  $k \in \mathbb{N}$
- $\tau_{2k+1} = \frac{2^{k+1}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k+1)} \cdot \pi^k$  für  $k \in \mathbb{N}$

**Proposition 1.2.5.** *Es gilt*

$$V_\rho = \frac{1}{\rho} \cdot \tau_{\rho-1} = \frac{\pi^{\frac{\rho-1}{2}}}{\rho \cdot \Gamma(\frac{\rho-1}{2} + 1)}.$$

*Beweis.* Es sei

$$\begin{aligned} B &:= \{x \in \mathbb{R}^\rho \mid 0 \leq x_1 \leq 1 \text{ und } x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_\rho^2 \geq 0\} \cap \{x_1 = 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^\rho \mid x_1 = 1 \text{ und } x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}. \end{aligned}$$

Die Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^\rho \mid 0 \leq x_1 \leq 1 \text{ und } x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_\rho^2 \geq 0\}$$

ist die konvexe Hülle von  $B$  und dem Nullpunkt. Damit erhalten wir

$$V_\rho = \frac{1}{\rho} \cdot \tau_{\rho-1}.$$

Die zweite Gleichung folgt mit Lemma 1.2.4. □

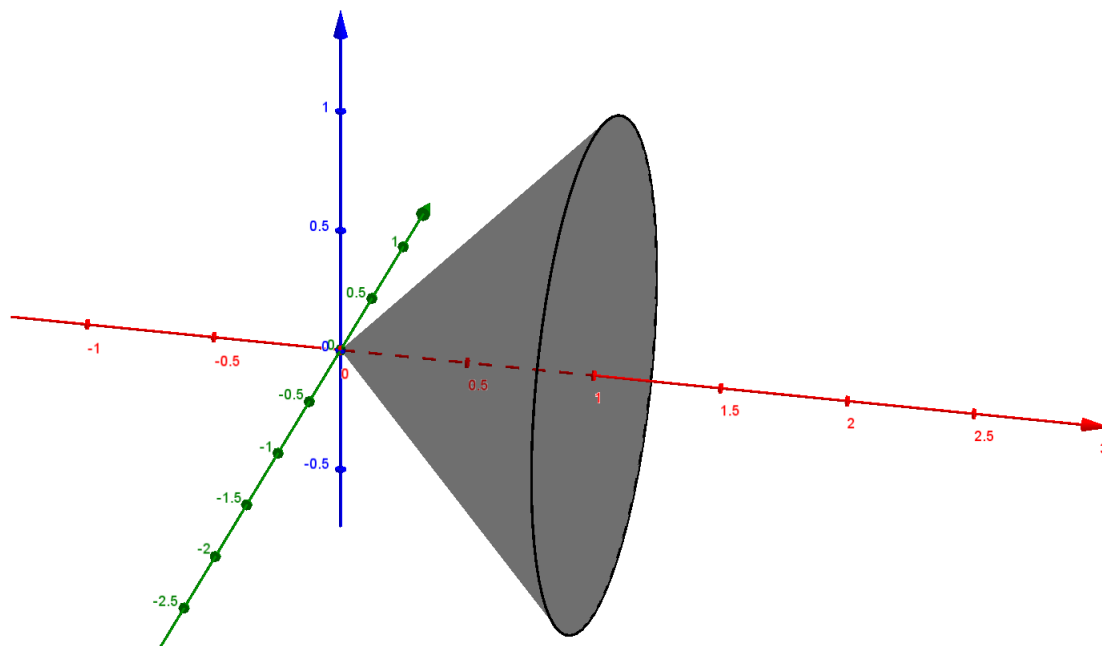


Abb. 1.7: Das Volumen  $V_3$  ergibt sich als das Volumen der 2-dimensionalen Einheitskugel multipliziert mit dem Faktor  $1/3$ .

### Bemerkung 1.2.6.

- Die ersten acht Werte von  $V_\rho$  können aus folgender Tabelle entnommen werden.

$\rho$	1	2	3	4	5	6	7	8
$V_\rho$	1	1	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi^2}{10}$	$\frac{4 \cdot \pi^2}{45}$	$\frac{\pi^3}{42}$	$\frac{2 \cdot \pi^3}{105}$

- Für  $\rho \rightarrow \infty$  strebt  $V_\rho$  gegen Null.
- Für eine abelsche Fläche  $X$  ist  $\rho = \text{Rang NS}(X) \in \{1, \dots, 4\}$  (siehe z.B. [8, Exercise 2.6.5]).



## Kapitel 2

# Volumina des Nef-Kegels von abelschen Flächen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit dem Volumen des Nef-Kegels bei abelschen Flächen. Dabei erhalten wir vollständige Resultate für Produkte von zwei elliptischen Kurven und für einfache abelsche Flächen, auf denen eine Prinzipalpolarisierung existiert (siehe Abschnitt 2.2 bzw. Abschnitt 2.1). Diese Resultate wurden bereits in [3] veröffentlicht. In dieser Arbeit gelingt es, die bereits publizierten Ergebnisse zum Teil auf beliebige einfache abelsche Flächen zu erweitern (siehe Abschnitt 2.3). Konkret erhalten wir ein vollständiges Bild davon, welche Nef-Kegel-Volumina bei einfachen abelschen Flächen mit ganzzahliger bzw. reeller Multiplikation auftreten, unabhängig davon, ob auf ihnen eine Prinzipalpolarisierung existiert oder nicht. Ebenso können wir genau bestimmen, welche algebraischen Zahlen als Nef-Kegel-Volumen einer einfachen abelschen Flächen auftreten. Davon abgesehen zeigen wir in Abschnitt 2.3, wie das Nef-Kegel-Volumen anhand des definierenden Gitters einer gegebenen abelschen Fläche bestimmt werden kann. Dies ermöglicht explizite Berechnungen für abelsche Flächen ohne Prinzipalpolarisierung. Essentiell für all unsere Betrachtungen ist die Formel für das Volumen des Nef-Kegels aus Abschnitt 1.2. Für eine polarisierte abelsche Fläche  $(X, H)$  haben wir nach dieser

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X), H) = \frac{V_\rho}{\sqrt{|\Delta|} \cdot (H^2)^{\rho/2}},$$

wobei  $\Delta$  die Diskriminante der Néron-Severi-Gruppe von  $X$  bezeichnet. Die Werte von  $V_\rho$  sind schon aus Bemerkung 1.2.6 bekannt. Somit ist die Volumenberechnung auf die Bestimmung der Diskriminante der Néron-Severi-Gruppe reduziert.

## 2.1. Einfache abelsche Flächen mit Prinzipalpolarisierung

Wir fixieren zunächst die Notation und fassen einige allgemein bekannte Resultate zu abelschen Varietäten zusammen. Details können in [8] nachgelesen werden. Es sei  $X$  eine abelsche Varietät. Mit  $\hat{X}$  bezeichnen wir die zu  $X$  duale abelsche Varietät. Zu einem Endomorphismus  $f \in \text{End}(X)$  bezeichnen wir mit  $\hat{f} \in \text{End}(\hat{X})$  den dualen Endomorphismus. Für  $L_0 \in \text{Pic}(X)$  ist wie üblich  $\phi_{L_0} : X \rightarrow \hat{X}$  der kanonische Homomorphismus  $x \mapsto t_x^* L_0 - L_0$ . Die *Rosati-Involution* bezüglich einer Polarisation  $L_0$  ist die Involution auf der Endomorphismenalgebra  $\text{End}_{\mathbb{Q}}(X) = \text{End}(X) \otimes \mathbb{Q}$ , die durch

$$f \mapsto f' = \phi_{L_0}^{-1} \hat{f} \phi_{L_0}$$

gegeben ist. Mit

$$\text{End}_{\mathbb{Q}}^{\text{sym}}(X) = \{ f \in \text{End}_{\mathbb{Q}}(X) \mid f' = f \}$$

bezeichnen wir die Untergruppe der symmetrischen Endomorphismen. Die Abbildung

$$\varphi : \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Q}}^{\text{sym}}(X), \quad L \mapsto \phi_{L_0}^{-1} \phi_L$$

ist ein Isomorphismus von  $\mathbb{Q}$ -Vektorräumen (siehe [8, Proposition 5.2.1]). Ist  $L_0$  eine Prinzipalpolarisierung, so ist  $\phi_{L_0}$  ein Isomorphismus und es liegt ein Isomorphismus von Gruppen

$$\varphi : \text{NS}(X) \rightarrow \text{End}^{\text{sym}}(X) \quad (2.1)$$

vor. Bezeichnet  $d_0$  den Grad von  $L_0$ , so haben wir für  $f = \varphi(L)$  in jedem Fall den Zusammenhang

$$d_0 a_\nu = \frac{(L_0^{g-\nu} \cdot L^\nu)}{(g-\nu)! \nu!} \quad \text{für } \nu \in \{0, \dots, g\}, \quad (2.2)$$

wobei  $g = \dim X$  ist und die Zahlen  $a_\nu$  von dem charakteristischen Polynom der analytischen Darstellung von  $f$  in der Schreibweise

$$P_f^a(t) = \sum_{\nu=0}^g (-1)^\nu a_\nu t^{g-\nu}$$

stammen (siehe [8, Proposition 5.2.3]). An dieser Stelle sei daran erinnert, dass jeder Homomorphismus  $f : X \rightarrow X'$  zwischen abelschen Varietäten  $X = V/\Lambda$  und  $X' = V'/\Lambda'$  von einem Vektorraumhomomorphismus  $\rho_a(f) : V \rightarrow V'$  mit  $\rho_a(f)(\Lambda) \subset \Lambda'$  induziert wird. Dabei bezeichnet man  $\rho_a(f)$  als die analytische Darstellung von  $f$ .

Speziell in diesem Abschnitt arbeiten wir mit der Klassifikation der Endomorphismenalgebren einfacher abelscher Varietäten (siehe z.B. [8, Proposition 5.5.7]). Mit dieser folgt, dass für eine einfache abelsche Fläche  $X$  die Endomorphismenalgebra  $\text{End}_{\mathbb{Q}}(X)$  entweder

- $\mathbb{Q}$ ,
- ein reell-quadratischer Zahlkörper,
- ein CM-Körper vom Grad 4 über  $\mathbb{Q}$  oder
- eine indefinite Quaternionenalgebra über  $\mathbb{Q}$

ist (siehe dazu auch [25]). Für den Rest des Abschnittes sei  $X$  eine einfache abelsche Fläche mit Prinzipalpolarisierung  $L_0$ . Im Folgenden unterscheiden wir die durch die Klassifikation der Endomorphismenalgebren gegebenen Fälle und bestimmen jeweils über (2.1) eine Basis von  $\text{NS}(X)$ . Die zu den Basiselementen gehörigen Schnittzahlen bestimmen wir über (2.2). Dafür ist es entscheidend, die charakteristischen Polynome der analytischen Darstellungen von Endomorphismen zu kennen. Wir zeigen auf, wie man diese in den einzelnen Fällen gewinnt.

**Ganzzahlige Multiplikation.** Es sei  $\text{End}(X) = \mathbb{Z}$ . Die Prinzipalpolarisierung  $L_0$  ist eine Basis von  $\text{NS}(X)$ , sodass wir  $\Delta(X) = L_0^2 = 2$  für die Diskriminante der Néron-Severi-Gruppe erhalten. Mit Korollar 1.2.3 folgt

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X), H) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{H^2}}.$$

Alternativ kann man dieses Ergebnis auch direkt erhalten: Es ist  $\text{NS}_{\mathbb{R}}(X) = \mathbb{R} \cdot L_0$  und  $\text{Nef}(X) = \mathbb{R}_0^+ \cdot L_0$ . Für  $H = c \cdot L_0$  mit  $c > 0$  ergibt sich

$$\begin{aligned} H^{\leq 1} &= \{ L \in \text{NS}_{\mathbb{R}}(X) \mid (H \cdot L) \leq 1 \} \\ &= \left\{ x \cdot L_0 \mid x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad x \leq \frac{1}{2c} \right\} \end{aligned}$$

und somit das Volumen

$$\frac{1}{2c} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2c^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{H^2}}.$$

**Reelle Multiplikation.** Es sei  $\text{End}_{\mathbb{Q}}(X) = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  für eine quadratfreie ganze Zahl  $d \geq 2$ . Der Endomorphismenring  $\text{End}(X)$  ist eine Ordnung in  $\text{End}_{\mathbb{Q}}(X)$  (das heißt, ein Gitter im  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum  $\text{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ , welches eine Ringstruktur hat). Somit haben wir

$$\text{End}(X) = \mathbb{Z} + f\omega\mathbb{Z}$$

für eine ganze Zahl  $f \geq 1$  und

$$\omega = \begin{cases} \sqrt{d} & \text{falls } d \equiv 2, 3 \pmod{4} \\ \frac{1}{2}(1 + \sqrt{d}) & \text{falls } d \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

Weiter gilt  $\text{End}_{\mathbb{Q}}^{\text{sym}}(X) = \text{End}_{\mathbb{Q}}(X)$  (siehe z.B. [8, Proposition 5.5.7]). Der Isomorphismus von Gruppen

$$\varphi : \text{NS}(X) \rightarrow \text{End}^{\text{sym}}(X) = \text{End}(X)$$

liefert die Basis  $L_0 = \varphi^{-1}(1)$ ,  $L_{f\omega} := \varphi^{-1}(f\omega)$  von  $\text{NS}(X)$ . Für die Berechnung der Schnittzahlen benötigen wir das folgende Lemma, welches auch in höheren Dimensionen gültig ist.

**Lemma 2.1.1.** *Es sei  $K = \mathbb{Q}(\alpha)$  ein total reeller Zahlkörper mit  $[K : \mathbb{Q}] = g$ . Weiter sei  $X$  eine  $g$ -dimensionale abelsche Varietät mit  $\text{End}_{\mathbb{Q}}(X) = K$ . Dann gilt: Das charakteristische Polynom der analytischen Darstellung des Endomorphismus  $\alpha$  stimmt mit dem Minimalpolynom des Zahlkörperelements  $\alpha$  überein.*

*Beweis.* Nach [8, Proposition 5.5.7] haben wir

$$\text{End}_{\mathbb{Q}}(X) = \text{End}_{\mathbb{Q}}^{\text{sym}}(X).$$

Wegen (2.2) ist das charakteristische Polynom des Endomorphismus  $\alpha$  somit ein Polynom über  $\mathbb{Q}$ . Außerdem hat es Grad  $g$  und das Zahlkörperelement  $\alpha$  als Nullstelle. Da  $\alpha$  ein primitives Element von  $K$  ist, hat das Minimalpolynom von  $\alpha$  ebenfalls Grad  $g$ , womit die Gleichheit folgt.  $\square$

**Bemerkung 2.1.2.**

- Gibt man einen beliebigen total reellen Zahlkörper  $K$  mit  $[K : \mathbb{Q}] = g$  vor, so existiert zu diesem eine  $g$ -dimensionale abelsche Varietät  $X$  mit

$$\text{End}_{\mathbb{Q}}(X) = K.$$

(Siehe dazu z.B. [8, Section 9.2].).

- Lemma 2.1.1 hat sich als nützlich erwiesen, um zu zeigen, dass zu gegebenem total reellen Zahlkörper ein primitives Element des Zahlkörpers als Volumen eines Divisors auf einer glatten projektiven Varietät auftritt. Siehe dazu [10], insbesondere Lemma 5.

Die Schnittmatrix bezüglich der Basis  $L_0, L_{f\omega}$  ist

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2f^2d \end{pmatrix} \quad \text{falls } d \equiv 2, 3 \pmod{4}$$

und

$$\begin{pmatrix} 2 & f \\ f & \frac{1}{2}f^2(1-d) \end{pmatrix} \quad \text{falls } d \equiv 1 \pmod{4}.$$

Wir erhalten diese, indem wir das Minimalpolynom von  $f\omega$  in  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$  betrachten. Dieses stimmt nach Lemma 2.1.1 mit dem charakteristischen Polynom der analytischen Darstellung von  $f\omega$  überein. Konkret haben wir

$$P_{f\omega}^a(t) = \begin{cases} t^2 - f^2d & \text{falls } d \equiv 2, 3 \pmod{4} \\ t^2 - ft + \frac{f^2(1-d)}{4} & \text{falls } d \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

Schließlich liefert (2.2) die angegebenen Schnittzahlen. Insgesamt erhalten wir

$$\Delta(X) = \begin{cases} -4f^2d & \text{falls } d \equiv 2, 3 \pmod{4} \\ -f^2d & \text{falls } d \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

Mit Korollar 1.2.3 ergibt sich für eine beliebige Polarisierung  $H$  die Formel

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X), H) = \begin{cases} \frac{1}{2f\sqrt{d}(H^2)} & \text{falls } d \equiv 2, 3 \pmod{4} \\ \frac{1}{f\sqrt{d}(H^2)} & \text{falls } d \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

**Komplexe Multiplikation.** Es sei  $\text{End}_{\mathbb{Q}}(X)$  ein CM-Körper vom Grad 4 über  $\mathbb{Q}$ , das heißt eine quadratische Erweiterung eines reell-quadratischen Zahlkörpers, die total imaginär ist. Es ist  $\text{End}_{\mathbb{Q}}^{\text{sym}}(X) = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  für eine quadratfreie ganze Zahl  $d \geq 2$  (siehe z.B. [8, Section 5.5]). Weiter ist  $\text{End}^{\text{sym}}(X)$  eine Ordnung in  $\text{End}_{\mathbb{Q}}^{\text{sym}}(X)$ , sodass hier wie im Fall der reellen Multiplikation argumentiert werden kann.

**Indefinite Quaternionenmultiplikation.** Es sei  $\text{End}_{\mathbb{Q}}(X)$  eine indefinite Quaternionenalgebra. Das bedeutet, es existieren  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  mit  $\alpha \geq \beta$  und  $\alpha > 0$ , sodass

$$\text{End}_{\mathbb{Q}}(X) = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} + j\mathbb{Q} + ij\mathbb{Q}$$

gilt, wobei  $i$  und  $j$  die Relationen  $i^2 = \alpha$ ,  $j^2 = \beta$  und  $ij = -ji$  erfüllen.

Nach [24, Theorem 7] haben wir  $\text{End}(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}ab$  für Rosati-invariante Elemente  $a$  und  $b$ . Nach [8, Proposition 5.5.7] ist dann

$$\text{End}^{\text{sym}}(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b.$$

In einer rationalen Quaternionenalgebra genügt jedes Element der Gleichung

$$x^2 - t(x)x + n(x) = 0,$$

wobei  $t(x)$  und  $n(x)$  die reduzierte Spur bzw. Norm bezeichnen (siehe dazu z.B. [28]). Die analytische Darstellung  $\rho_a : \text{End}_{\mathbb{Q}}(X) \rightarrow M_2(\mathbb{C})$  ist ein Ringhomomorphismus. Somit ist die Matrix  $\rho_a(a)$  Nullstelle von  $x^2 - t(a)x + n(a)$ . Aus diesem Grund stimmt das charakteristische Polynom von  $\rho_a(a)$  mit  $x^2 - t(a)x + n(a)$  überein. Dasselbe gilt für  $b$  und  $a + b$ . Erneut erhalten wir über den Isomorphismus

$$\varphi : \text{NS}(X) \rightarrow \text{End}^{\text{sym}}(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b$$

eine Basis

$$L_0 = \varphi^{-1}(1), \quad L_a := \varphi^{-1}(a), \quad L_b := \varphi^{-1}(b)$$

von  $\text{NS}(X)$  und mit (2.2) die Schnittmatrix

$$\begin{pmatrix} 2 & t(a) & t(b) \\ t(a) & 2n(a) & n(a+b) - n(a) - n(b) \\ t(b) & n(a+b) - n(a) - n(b) & 2n(b) \end{pmatrix}.$$

Dabei erhalten wir die Schnittzahl  $(L_a \cdot L_b)$  durch folgende Überlegung:

$$\begin{aligned} 2n(a+b) &\stackrel{2.2}{=} (\varphi^{-1}(a+b))^2 \\ &= (L_a + L_b)^2 \\ &= L_a^2 + 2(L_a \cdot L_b) + L_b^2 \\ &= 2n(a) + 2(L_a \cdot L_b) + 2n(b). \end{aligned}$$

Durch Nachrechnen zeigt sich, dass die Determinante der obigen Schnittmatrix der Hälfte der Determinante der Diskriminanten-Matrix

$$S_{\delta}(a, b) = \begin{pmatrix} \delta(a, a) & \delta(a, b) \\ \delta(a, b) & \delta(b, b) \end{pmatrix}$$

entspricht, wobei die (Quaternionen-)Diskriminante durch

$$\delta(x, y) = t(x)t(y) - 2n(x, y) \quad \text{und} \quad \delta(x) = \delta(x, x)$$

mit  $n(x, y) = n(x + y) - n(x) - n(y)$  gegeben ist. Insgesamt erhalten wir

$$\Delta(X) = \frac{1}{2} \det(S_\delta(a, b)).$$

Korollar 1.2.3 liefert schließlich für eine beliebige Polarisierung  $H$  die Formel

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X), H) = \frac{\pi\sqrt{2}}{3\sqrt{|\det S_\delta(a, b)|}(H^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nehmen wir alle betrachteten Fälle zusammen, so erhalten wir Theorem 1 der Einleitung:

**Theorem 2.1.3.** *Es sei  $X$  eine einfache abelsche Fläche, auf der eine Prinzipalpolarisierung existiert. Weiter sei  $H$  eine beliebige Polarisierung auf  $X$ . Das Volumen von  $\text{Nef}(X)$  bezüglich  $H$  kann über den Endomorphismenring  $\text{End}(X)$  bestimmt werden:*

- (a) *Angenommen  $X$  hat ganzzahlige Multiplikation, das heißt,  $\text{End}(X) = \mathbb{Z}$ . Dann gilt*

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X), H) = \frac{1}{\sqrt{2}H^2}.$$

- (b) *Angenommen  $X$  hat reelle Multiplikation, das heißt,  $\text{End}_{\mathbb{Q}}(X) = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  für eine quadratfreie ganze Zahl  $d > 1$ . Es sei  $f$  der Führer von  $\text{End}(X)$ . Dann gilt*

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X), H) = \begin{cases} \frac{1}{2f\sqrt{d}(H^2)} & \text{falls } d \equiv 2, 3 \pmod{4} \\ \frac{1}{f\sqrt{d}(H^2)} & \text{falls } d \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

*Dieselbe Formel gilt, wenn  $X$  komplexe Multiplikation hat. In diesem Fall stammen  $f$  und  $d$  von der Ordnung  $\text{End}^{\text{sym}}(X)$  in dem reell-quadratischen Unterkörper  $\text{End}_{\mathbb{Q}}^{\text{sym}}(X) = \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \subset \text{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ .*

- (c) *Angenommen  $X$  hat indefinite Quaternionenmultiplikation, das heißt,  $\text{End}_{\mathbb{Q}}(X)$  ist eine indefinite Quaternionenalgebra. Ist  $\text{End}(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}ab$  mit Rosati-invarianten Elementen  $a, b$ , so gilt*

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X), H) = \frac{\pi\sqrt{2}}{3\sqrt{|\det S_\delta(a, b)|}(H^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

*Das Volumen  $\text{Vol}(\text{Nef}(X))$  ergibt sich in den obigen Fällen jeweils für eine beliebige Prinzipalpolarisierung. Den konkreten Wert erhält man durch Ersetzen von  $(H^2)$  durch 2.*

## 2.2. Produkte von elliptischen Kurven

Wir fixieren zunächst die Notation und fassen einige grundlegende Aussagen zu elliptischen Kurven zusammen. Siehe dazu zum Beispiel [19]. Es seien  $E_1 = \mathbb{C}/\Lambda_1$  und  $E_2 = \mathbb{C}/\Lambda_2$  elliptische Kurven. Über die analytische Darstellung können wir die Homomorphismengruppe  $\text{Hom}(E_1, E_2)$  mit

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z \cdot \Lambda_1 \subset \Lambda_2\}$$

identifizieren. Das Duale  $\hat{\lambda}$  eines Homomorphismus  $\lambda : E_1 \rightarrow E_2$  verstehen wir in diesem Abschnitt als Abbildung  $E_2 \rightarrow E_1$ , wobei die natürliche Identifikation von  $E_1$  und  $E_2$  mit ihren Dualen Verwendung findet. Die Funktion  $\lambda \mapsto \hat{\lambda}$  ist dann ein Gruppenhomomorphismus  $\text{Hom}(E_1, E_2) \rightarrow \text{Hom}(E_2, E_1)$ . Für  $\lambda \in \text{Hom}(E_1, E_2)$  gilt

- $\deg(\lambda) = \deg(\hat{\lambda})$ ,
- $\hat{\hat{\lambda}} = \lambda$ ,
- $\lambda\hat{\lambda} = \deg(\lambda) \in \text{End}(E_2)$     und     $\hat{\lambda}\lambda = \deg(\lambda) \in \text{End}(E_1)$ .

Zu einem Gitter  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  bezeichnen wir mit  $a(\Lambda)$  den Flächeninhalt eines Fundamentalparallelogramms von  $\Lambda$ . Für einen Homomorphismus  $\lambda : E_1 \rightarrow E_2$  gilt dann

$$\hat{\lambda} = \frac{a(\Lambda_1)}{a(\Lambda_2)} \cdot \bar{\lambda}.$$

Wir wollen nun Nef-Kegel-Volumina zu Produkten von zwei elliptischen Kurven bestimmen. Sei also  $X = E_1 \times E_2$  ein Produkt von elliptischen Kurven. Entweder sind die beiden Kurven  $E_1$  und  $E_2$

- nicht isogen,
- isogen und beide ohne komplexe Multiplikation oder
- isogen und beide mit komplexer Multiplikation.

Diese drei Fälle werden wir im Folgenden unterscheiden. Wir wollen erneut den Isomorphismus  $\varphi : \text{NS}(X) \rightarrow \text{End}^{\text{sym}}(X)$  zur Anwendung bringen. Es sei daran erinnert, dass

$$\text{End}(X) = \begin{pmatrix} \text{End}(E_1) & \text{Hom}(E_2, E_1) \\ \text{Hom}(E_1, E_2) & \text{End}(E_2) \end{pmatrix}$$

gilt. Essentiell für die weiteren Betrachtungen ist die folgende Beschreibung der symmetrischen Endomorphismen.

**Lemma 2.2.1.** *Es sei  $L_0$  die Prinzipalpolarisierung auf  $X$ , die durch die Prinzipalpolarisierungen auf den  $E_i$  induziert wird. Bezüglich der Rosati-Involution zu  $L_0$  gilt dann*

$$\text{End}^{\text{sym}}(X) = \left\{ \begin{pmatrix} a & \hat{\sigma} \\ \sigma & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad \sigma \in \text{Hom}(E_1, E_2) \right\}.$$

*Beweis.* Es seien  $\Lambda_1, \Lambda_2 \subset \mathbb{C}$  die Gitter, die  $E_1$  bzw.  $E_2$  definieren. Die zur Prinzipalpolarisierung gehörige hermitesche Form auf  $E_i$  ist

$$H_i : (x, y) \mapsto \frac{1}{a(\Lambda_i)} x \bar{y}.$$

Die zur Prinzipalpolarisierung  $L_0$  gehörige hermitesche Form auf  $X$  ist somit gegeben durch

$$(x, y) \mapsto x^t \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{a(\Lambda_1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a(\Lambda_2)} \end{pmatrix} \cdot \bar{y}.$$

Für einen Endomorphismus

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \in \text{End}(X)$$

erhalten wir damit

$$\begin{aligned} \alpha' = \phi_{L_0}^{-1} \widehat{\alpha} \phi_{L_0} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{a(\Lambda_1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a(\Lambda_2)} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \overline{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}}^t \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{a(\Lambda_1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a(\Lambda_2)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_{11} & \frac{a(\Lambda_1)}{a(\Lambda_2)} \cdot \bar{\alpha}_{21} \\ \frac{a(\Lambda_2)}{a(\Lambda_1)} \cdot \bar{\alpha}_{12} & \bar{\alpha}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_{11} & \widehat{\alpha}_{21} \\ \widehat{\alpha}_{12} & \bar{\alpha}_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt, da entweder  $\text{End}(E_i) = \mathbb{Z}$  oder  $\text{End}(E_i) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega_i$  für  $\omega_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  gilt.  $\square$

**Produkte nicht-isogener elliptischer Kurven.** Es sei  $E_1$  nicht isogen zu  $E_2$ . Die Klassen von  $F_1 = E_1 \times \{0\}$  und  $F_2 = \{0\} \times E_2$  bilden eine Basis von  $\text{NS}(X)$ . Die zugehörige Schnittmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\Delta(X) = -1.$$

Mit Korollar 1.2.3 ergibt sich für eine beliebige Polarisation  $H$  die Formel

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X), H) = \frac{1}{(H^2)}.$$

**Produkte von isogenen elliptischen Kurven ohne komplexe Multiplikation.**

Es seien  $E_1$  und  $E_2$  isogen und ohne komplexe Multiplikation. Wir haben also  $\text{End}(E_i) = \mathbb{Z}$  für  $i \in \{1, 2\}$ . Weiter sei  $\sigma : E_1 \rightarrow E_2$  eine Isogenie von minimalem Grad.

**Lemma 2.2.2.** *Es gilt:*

$$\text{Hom}(E_1, E_2) = \mathbb{Z} \cdot \sigma.$$



*Beweis.* Es sei  $\alpha : E_2 \rightarrow E_1$  eine beliebige Isogenie. Die Abbildung

$$\mathrm{Hom}(E_1, E_2) \rightarrow \mathrm{End}(E_1), \quad \delta \mapsto \alpha \cdot \delta$$

ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus. Aus diesem Grund hat  $\mathrm{Hom}(E_1, E_2)$  Rang 1. Die Behauptung folgt mit der Minimalität von  $\sigma$ .  $\square$

Nach Lemma 2.2.1 haben wir nun

$$\mathrm{End}^{\mathrm{sym}}(X) = \left\{ \left( \begin{array}{cc} a & b\widehat{\sigma} \\ b\sigma & c \end{array} \right) \middle| a, b, c \in \mathbb{Z} \right\},$$

sodass die Endomorphismen

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & \widehat{\sigma} \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis von  $\mathrm{End}^{\mathrm{sym}}(X)$  bilden. Über

$$\varphi : \mathrm{NS}(X) \rightarrow \mathrm{End}^{\mathrm{sym}}(X), \quad L \mapsto \phi_{L_0}^{-1} \phi_L$$

erhalten wir die Basis

$$F_1 = \varphi^{-1}(\alpha_1), \quad F_2 = \varphi^{-1}(\alpha_2), \quad F_3 = \varphi^{-1}(\alpha_3)$$

von  $\mathrm{NS}(X)$ . Dabei ist  $L_0 = F_1 + F_2$ .

Weiter haben wir die charakteristischen Polynome

$$P_{\alpha_1}^a(t) = P_{\alpha_2}^a(t) = t^2 - t \quad \text{und} \quad P_{\alpha_3}^a(t) = t^2 - \sigma\widehat{\sigma} = t^2 - \deg(\sigma),$$

sodass sich mit (2.2) die Schnittzahlen

$$0 = F_1^2 = F_2^2 \quad \text{und} \quad 1 = L_0 \cdot F_1 = (F_1 + F_2) \cdot F_1 = F_1 \cdot F_2$$

sowie

$$-2 \deg(\sigma) = F_3^2 \quad \text{und} \quad 0 = L_0 \cdot F_3 = F_1 \cdot F_3 + F_2 \cdot F_3$$

ergeben. Zusätzlich betrachten wir  $\alpha := \alpha_1 + \alpha_3$  mit  $P_\alpha^a(t) = t^2 - t - \deg(\sigma)$  und erhalten

$$-2 \deg(\sigma) = (F_1 + F_3)^2 = F_1^2 + 2F_1 \cdot F_3 + F_3^2 = 2F_1 \cdot F_3 - 2 \deg(\sigma),$$

also  $F_1 \cdot F_3 = 0$  und somit auch  $F_2 \cdot F_3 = 0$ . Insgesamt haben wir damit die Schnittmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \cdot \deg(\sigma) \end{pmatrix}$$

und es folgt

$$\Delta(X) = 2 \cdot \deg(\sigma).$$

Mit Korollar 1.2.3 erhalten wir für eine beliebige Polarisierung  $H$  die Formel

$$\mathrm{Vol}(\mathrm{Nef}(X), H) = \frac{\pi}{3 \cdot \sqrt{2 \cdot \deg(\sigma)} \cdot (H^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

**Bemerkung 2.2.3.** In obiger Formel tritt jede natürliche Zahl als minimaler Grad auf. Um dies einzusehen, kann man die elliptischen Kurven  $E_1$  und  $E_2$  mit

$$\Lambda_1 = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\pi i \quad \text{und} \quad \Lambda_2 = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}k\pi i$$

für festes  $k \in \mathbb{N}$  betrachten. Die Multiplikation mit  $k$  liefert eine Isogenie  $E_1 \rightarrow E_2$  vom Grad  $k$ . Weiter überlegt man sich schnell, dass es keine Isogenien von kleinerem Grad gibt.

**Bemerkung 2.2.4.** Ein Selbstprodukt  $X = E \times E$  einer elliptischen Kurve ohne komplexe Multiplikation ist ein Spezialfall der obigen Betrachtungen. Dieser Fall kann auch direkt behandelt werden, ohne mit der Gestalt des Endomorphismenrings zu arbeiten. Die Klassen von  $E_1 \times \{0\}$ ,  $\{0\} \times E_2$  und der Diagonale bilden eine Basis von  $\text{NS}(X)$ . Die zugehörige Schnittmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ergibt sich  $\Delta(X) = 2$  und für eine beliebige Polarisierung  $H$  folgt die Formel

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X), H) = \frac{\pi}{3 \cdot \sqrt{2} \cdot (H^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

**Produkte von isogenen elliptischen Kurven mit komplexer Multiplikation.**

Es seien  $E_1$  und  $E_2$  isogen und mit komplexer Multiplikation, das heißt, es existiert eine quadratfreie ganze Zahl  $d < 0$  mit

$$\text{End}_{\mathbb{Q}}(E_i) = \mathbb{Q}(\sqrt{d}).$$

Weiter existieren ganze Zahlen  $f_1, f_2 \geq 1$  mit  $\text{End}(E_i) = \mathbb{Z} + f_i\omega\mathbb{Z}$ , wobei

$$\omega = \begin{cases} \sqrt{d} & \text{falls } d \equiv 2, 3 \pmod{4} \\ \frac{1}{2}(1 + \sqrt{d}) & \text{falls } d \equiv 1 \pmod{4} \end{cases}$$

ist. Unser Ziel ist es, die Diskriminante der Néron-Severi-Gruppe von  $X = E_1 \times E_2$  über  $\omega, f_1, f_2$  auszudrücken, ohne explizit auf eine Isogenie zu verweisen. Wir werden zeigen:

**Satz 2.2.5.** Die Diskriminante von  $\text{NS}(X)$  ist

$$\Delta(X) = -4 \cdot \text{kgV}(f_1, f_2)^2 \cdot \text{Im}(\omega)^2.$$

Mit Korollar 1.2.3 erhalten wir dann für eine beliebige Polarisierung  $H$  die Formel

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X), H) = \begin{cases} \frac{\pi}{6 \cdot \text{kgV}(f_1, f_2) \sqrt{|d|} (H^2)^2} & \text{falls } d \equiv 2, 3 \pmod{4} \\ \frac{\pi}{3 \cdot \text{kgV}(f_1, f_2) \sqrt{|d|} (H^2)^2} & \text{falls } d \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

Um Satz 2.2.5 beweisen zu können, benötigen wir einige Vorbereitungen.

**Lemma 2.2.6.** *Die Homomorphismengruppe  $\text{Hom}(E_1, E_2)$  ist ein Gitter in  $\mathbb{C}$ .*

*Beweis.* Für jedes  $\lambda \in \Lambda_1$  mit  $\lambda \neq 0$  ist die Abbildung

$$\psi : \text{Hom}(E_1, E_2) \rightarrow \Lambda_2, \quad \sigma \mapsto \sigma(\lambda)$$

ein injektiver Homomorphismus von Gruppen. Aus diesem Grund ist der Rang von  $\text{Hom}(E_1, E_2)$  höchstens 2. Somit hat  $\text{Hom}(E_1, E_2)$  die Gestalt

$$\mathbb{Z}\sigma_1 + \mathbb{Z}\sigma_2.$$

Wir zeigen, dass  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  linear unabhängig über  $\mathbb{R}$  sind: Angenommen es existiert ein  $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  mit  $\sigma_1 = r\sigma_2$ . Dann finden wir ein  $r' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  mit

$$f_2\omega\sigma_2 = r'\sigma_2,$$

da  $f_2\omega\sigma_2$  ein Homomorphismus  $E_1 \rightarrow E_2$  ist. Es folgt  $f_2\omega = r'$ , wodurch sich wegen  $f_2\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  ein Widerspruch ergibt.  $\square$

Wir können nun  $\mathbb{R}$ -linear unabhängige  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{C}$  mit  $\text{Hom}(E_1, E_2) = \mathbb{Z}\sigma_1 + \mathbb{Z}\sigma_2$  fixieren und haben dann

$$\text{Hom}(E_2, E_1) = \mathbb{Z}\hat{\sigma}_1 + \mathbb{Z}\hat{\sigma}_2$$

mit den dualen Isogenien  $\hat{\sigma}_1$  und  $\hat{\sigma}_2$ . Über den Isomorphismus  $\varphi : \text{NS}(X) \rightarrow \text{End}^{\text{sym}}(X)$  und

$$\text{End}^{\text{sym}}(X) = \left\{ \left( \begin{array}{cc} a & b\hat{\sigma}_1 + c\hat{\sigma}_2 \\ b\sigma_1 + c\sigma_2 & d \end{array} \right) \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$$

erhalten wir die Basis

$$F_1 = \varphi^{-1} \left( \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \right), \quad F_2 = \varphi^{-1} \left( \left( \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \right),$$

$$F_3 = \varphi^{-1} \left( \left( \begin{array}{cc} 0 & \hat{\sigma}_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{array} \right) \right), \quad F_4 = \varphi^{-1} \left( \left( \begin{array}{cc} 0 & \hat{\sigma}_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{array} \right) \right)$$

von  $\text{NS}(X)$ . Die Schnittzahlen lassen sich dabei wie im vorigen Fall bestimmen. Auf diese Weise erhalten wir die Schnittmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\sigma_1\hat{\sigma}_1 & -(\sigma_1\hat{\sigma}_2 + \sigma_2\hat{\sigma}_1) \\ 0 & 0 & -(\sigma_1\hat{\sigma}_2 + \sigma_2\hat{\sigma}_1) & -2\sigma_2\hat{\sigma}_2 \end{pmatrix}$$

mit Determinante

$$\begin{aligned} \Delta(X) &= (\sigma_1\hat{\sigma}_2 + \sigma_2\hat{\sigma}_1)^2 - 4 \cdot \sigma_1\hat{\sigma}_1\sigma_2\hat{\sigma}_2 \\ &= (\sigma_1\hat{\sigma}_2 - \sigma_2\hat{\sigma}_1)^2 \\ &= -4 \cdot \text{Im}(\sigma_1\hat{\sigma}_2)^2. \end{aligned}$$

**Lemma 2.2.7.** Für Gitter  $\Lambda_1, \Lambda_2 \subset \mathbb{C}$  und komplexe Zahlen  $c_1, c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  gilt

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{C}/c_1\Lambda_1, \mathbb{C}/c_2\Lambda_2) = \frac{c_2}{c_1} \cdot \mathrm{Hom}(\mathbb{C}/\Lambda_1, \mathbb{C}/\Lambda_2).$$

*Beweis.* Wir schreiben  $\lambda \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}/c_1\Lambda_1, \mathbb{C}/c_2\Lambda_2)$  als

$$\frac{c_2}{c_1} \left( \frac{c_1}{c_2} \lambda \right).$$

Dabei ist  $(c_1/c_2)\lambda \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}/\Lambda_1, \mathbb{C}/\Lambda_2)$ , denn

$$\frac{c_1}{c_2} \lambda \cdot \Lambda_1 \subset \Lambda_2$$

ist wegen  $\lambda \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}/c_1\Lambda_1, \mathbb{C}/c_2\Lambda_2)$  erfüllt. Ist umgekehrt  $\lambda \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}/\Lambda_1, \mathbb{C}/\Lambda_2)$ , so gilt

$$\frac{c_2}{c_1} \lambda \cdot c_1\Lambda_1 \subset c_2\Lambda_2,$$

also ist  $(c_2/c_1)\lambda \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}/c_1\Lambda_1, \mathbb{C}/c_2\Lambda_2)$ . □

**Lemma 2.2.8.** Es sei  $E'_1$  eine zu  $E_1$  isomorphe elliptische Kurve und  $E'_2$  eine zu  $E_2$  isomorphe elliptische Kurve. Ist  $\{\delta_1, \delta_2\}$  eine Basis von  $\mathrm{Hom}(E'_1, E'_2)$ , so gilt

$$\sigma_1 \widehat{\sigma}_2 = \delta_1 \widehat{\delta}_2.$$

*Beweis.* Es existieren  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$  mit  $c_i\Lambda_i = \Lambda'_i$ . Wir haben dann

$$\mathrm{Hom}(E'_1, E'_2) = \frac{c_2}{c_1} \cdot \mathrm{Hom}(E_1, E_2)$$

und somit

$$\delta_1 \widehat{\delta}_2 = \frac{c_2}{c_1} \sigma_1 \left( \widehat{\frac{c_2}{c_1} \sigma_2} \right) = \frac{a(\Lambda'_1) |c_2|^2}{a(\Lambda'_2) |c_1|^2} \sigma_1 \bar{\sigma}_2 = \frac{a(\Lambda_1)}{a(\Lambda_2)} \sigma_1 \bar{\sigma}_2 = \sigma_1 \widehat{\sigma}_2.$$

□

*Beweis von Satz 2.2.5.* Da  $E_1$  und  $E_2$  isogen sind, finden wir eine zu  $E_1$  isomorphe elliptische Kurve, deren definierendes Gitter in  $\Lambda_2$  enthalten ist. Nach Lemma 2.2.8 können wir für unsere Zwecke ohne Einschränkung davon ausgehen, dass  $E_1$  bereits diese Kurve ist. Es gelte also  $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ . Nach dem Elementarteilersatz existieren  $u, v \in \mathbb{C}$  und  $e_1, e_2 \in \mathbb{N}$  mit  $e_1 \mid e_2$  in der Art, dass

$$\Lambda_1 = \mathbb{Z}e_1u + \mathbb{Z}e_2v \subset \mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v = \Lambda_2$$

gilt. Es ist dann  $E_1$  isomorph zu  $\mathbb{C}/\Lambda'_1$  sowie  $E_2$  isomorph zu  $\mathbb{C}/\Lambda'_2$  mit

$$\Lambda'_1 = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \begin{pmatrix} e_2 & v \\ e_2 & u \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Lambda'_2 = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}.$$

Somit können wir nach Lemma 2.2.8 ohne Einschränkung von

$$\Lambda_1 = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}t\tau \subset \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau = \Lambda_2$$

mit  $t \in \mathbb{N}$  und  $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  ausgehen.

Wie oben beschrieben haben wir  $\text{Hom}(E_1, E_2) = \mathbb{Z}\sigma_1 + \mathbb{Z}\sigma_2$  für gewisse  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{C}$ . Wegen  $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$  ist die Identität ein Element von  $\text{Hom}(E_1, E_2)$ . Weiter ist  $\mathbb{Z} \cdot 1$  ein primitives Untergitter von  $\text{Hom}(E_1, E_2)$ , da  $\text{Hom}(E_1, E_2)$  ein Untergitter von  $\Lambda_2$  ist und  $\Lambda_2$  keine Elemente aus  $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$  enthält. Somit existiert eine Basis der Gestalt  $1, \sigma$  von  $\text{Hom}(E_1, E_2)$ . Für den Rest des Beweises fixieren wir eine solche Basis. Für einen beliebigen Homomorphismus  $\lambda : E_1 \rightarrow E_2$  haben wir

$$\widehat{\lambda} = \frac{a(\Lambda_1)}{a(\Lambda_2)} \cdot \bar{\lambda} = \frac{|t \cdot \text{Im}(\tau)|}{|\text{Im}(\tau)|} \cdot \bar{\lambda} = t \cdot \bar{\lambda}.$$

Wegen  $1 \cdot \widehat{\lambda} \in \text{End}(E_2)$  und  $\widehat{\lambda} \cdot 1 \in \text{End}(E_1)$  erhalten wir

$$\lambda \in \frac{1}{t} \cdot (\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \text{kgV}(f_1, f_2) \cdot \bar{\omega}).$$

Somit existiert ein  $k \in \mathbb{Z}$  mit

$$\text{Im}(\sigma) = k \cdot \frac{\text{kgV}(f_1, f_2) \cdot \text{Im}(\omega)}{t}. \quad (*)$$

Die Zahl  $\kappa := \text{kgV}(f_1, f_2) \cdot \omega$  definiert einen Endomorphismus von  $E_1$ , also ist  $\kappa \cdot 1$  Element von  $\Lambda_1$  und es existieren ganze Zahlen  $x, y$  mit  $\kappa = x + y \cdot t\tau$ . Ebenso definiert  $\kappa$  einen Endomorphismus von  $E_2$ , sodass  $\kappa\tau \in \Lambda_2$  gilt. Nun definiert

$$y\tau = \frac{-x + \kappa}{t}$$

einen Homomorphismus  $E_1 \rightarrow E_2$ , denn  $y\tau \cdot 1 \in \Lambda_2$  und

$$y\tau \cdot t\tau = \frac{-x + \kappa}{t} \cdot t\tau = -x\tau + \kappa\tau \in \Lambda_2.$$

Somit haben wir  $(-x + \kappa)/t \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sigma$ . Vergleichen wir nun den Imaginärteil mit (\*), so erhalten wir  $k = \pm 1$ . Schließlich gelangen wir mit (\*) zu

$$|\text{Im}(\sigma_1 \cdot \widehat{\sigma}_2)| = |\text{Im}(1 \cdot \widehat{\sigma})| = |\text{Im}(t \cdot \bar{\sigma})| = \text{kgV}(f_1, f_2) \cdot |\text{Im}(\omega)|,$$

womit die Behauptung folgt. □

**Bemerkung 2.2.9.** Ein Selbstprodukt  $X = E \times E$  einer elliptischen Kurve  $E$  mit komplexer Multiplikation ist ein Spezialfall der obigen Situation. Für ein solches können wir  $\sigma_1 = 1$  und  $\sigma_2 = f\omega$  als Erzeuger von  $\text{Hom}(E_1, E_2)$  wählen und erhalten die Diskriminante

$$\Delta(X) = \begin{cases} -4f^2|d| & \text{falls } d \equiv 2, 3 \pmod{4} \\ -f^2|d| & \text{falls } d \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

Insgesamt haben wir Theorem 2 der Einleitung bewiesen:

**Theorem 2.2.10.** *Sei  $X = E_1 \times E_2$  ein Produkt von elliptischen Kurven und  $H$  eine beliebige Polarisierung auf  $X$ .*

(a) *Sind  $E_1$  und  $E_2$  nicht isogen, so gilt*

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X), H) = \frac{1}{(H^2)}.$$

(b) *Angenommen  $E_1$  und  $E_2$  sind isogen und haben keine komplexe Multiplikation, das heißt,  $\text{End}(E_1) = \text{End}(E_2) = \mathbb{Z}$ . Ist  $\sigma : E_1 \rightarrow E_2$  eine Isogenie von minimalem Grad, so gilt*

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X), H) = \frac{\pi}{3\sqrt{2 \deg(\sigma)}(H^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

(c) *Angenommen  $E_1$  und  $E_2$  sind isogen und haben komplexe Multiplikation. Dann ist  $\text{End}_{\mathbb{Q}}(E_i) = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  für eine quadratfreie ganze Zahl  $d < 0$ . Sind  $f_1$  und  $f_2$  die Führer von  $\text{End}(E_1)$  bzw.  $\text{End}(E_2)$ , so gilt*

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X), H) = \begin{cases} \frac{\pi}{6 \cdot \text{kgV}(f_1, f_2) \sqrt{|d|} (H^2)^2} & \text{falls } d \equiv 2, 3 \pmod{4} \\ \frac{\pi}{3 \cdot \text{kgV}(f_1, f_2) \sqrt{|d|} (H^2)^2} & \text{falls } d \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

Das Volumen  $\text{Vol}(\text{Nef}(X))$  ergibt sich in den obigen Fällen jeweils für eine beliebige Prinzipalpolarisierung. Den konkreten Wert erhält man durch Ersetzen von  $(H^2)$  durch 2.

### 2.3. Ergebnisse für beliebige einfache abelsche Flächen

Nach unseren Betrachtungen in Abschnitt 2.1 stellt sich die Frage, wie sich Nef-Kegel-Volumina bei einfachen abelschen Flächen ohne Prinzipalpolarisierung verhalten. Dieser wollen wir in diesem Abschnitt nachgehen. Wir haben bereits gesehen, dass die Diskriminante der Néron-Severi-Gruppe einer einfachen abelschen Fläche mit Prinzipalpolarisierung über den Endomorphismenring bestimmt werden kann. Essentiell dafür ist der durch eine Prinzipalpolarisierung  $L_0$  induzierte Isomorphismus

$$\varphi : \text{NS}(X) \rightarrow \text{End}^{\text{sym}}(X), \quad L \mapsto \phi_{L_0}^{-1} \phi_L.$$

Ist  $L_0$  keine Prinzipalpolarisierung, so liegt zumindest ein Isomorphismus

$$\varphi : \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Q}}^{\text{sym}}(X)$$

vor. Dies wollen wir nutzen, um einen Zusammenhang zwischen den Diskriminanten aus Abschnitt 2.1 und den Diskriminanten zu abelschen Flächen ohne Prinzipalpolarisierung herzuleiten.

**Satz 2.3.1.** *Es sei  $X$  eine einfache abelsche Fläche und  $L_0$  eine Polarisierung von minimalem Grad  $d_0$  auf  $X$ . Wäre  $L_0$  eine Prinzipalpolarisierung, so könnte man über  $\text{End}^{\text{sym}}(X)$ , wie in Abschnitt 2.1 beschrieben, die Diskriminante der Néron-Severi-Gruppe von  $X$  berechnen. Es sei  $\tilde{\Delta}(X)$  die Zahl, die man auf diese Weise erhalten würde. Dann gilt: Es existiert ein  $k \in \mathbb{Z}$  mit*

$$\Delta(X) = \frac{k^2}{d_0^{\rho-2}} \cdot \tilde{\Delta}(X).$$

*Beweis.* Wir betrachten den Isomorphismus

$$\varphi : \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Q}}^{\text{sym}}(X), \quad L \mapsto \phi_{L_0}^{-1} \phi_L.$$

Es sei  $E$  eine Basis von  $\text{End}^{\text{sym}}(X)$ . Ohne Einschränkung sei das erste Basiselement 1. Es ist  $\varphi^{-1}(E)$  eine Basis von  $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X)$ . Die Determinante der Gram-Matrix bezüglich  $\varphi^{-1}(E)$  ist nach (2.2) gleich

$$(d_0)^{\rho} \cdot \tilde{\Delta}(X).$$

Sei nun  $B$  eine beliebige Basis von  $\text{NS}(X)$ . Da  $L_0$  minimalen Grad hat, können wir ohne Einschränkung davon ausgehen, dass das erste Basiselement  $L_0$  ist. Nach Definition (siehe z.B. [8, Section 5.1]) haben wir

$$\phi_{L_0}^{-1} = \frac{1}{e(L_0)} \cdot \psi_{L_0},$$

wobei  $e(L_0)$  der Exponent von kern  $\phi_{L_0}$  ist und  $\psi_{L_0} : \hat{X} \rightarrow X$  eine Isogenie mit

$$\psi_{L_0} \phi_{L_0} = e(L_0)_X \quad \text{und} \quad \phi_{L_0} \psi_{L_0} = e(L_0)_{\hat{X}}.$$

Aus diesem Grund ist

$$\varphi(L) \in \frac{1}{e(L_0)} \cdot \text{End}^{\text{sym}}(X)$$

für alle  $L \in \text{NS}(X)$ . Stellen wir ein Element aus  $\text{NS}(X)$  nun bezüglich der Basis  $\varphi^{-1}(E)$  dar, so sind die Koeffizienten bei dieser Darstellung Element von  $(1/e(L_0)) \cdot \mathbb{Z}$ . Die Basiswechsellmatrix von  $B$  nach  $\varphi^{-1}(E)$  ist somit ein Element von  $(1/e(L_0)) \cdot M_{\rho}(\mathbb{Z})$  und sei im Folgenden mit  $A$  bezeichnet. Aufgrund der obigen Wahl der ersten Basiselemente ist die erste Spalte von  $A$  gleich  $(1, 0, \dots, 0)$ . Die Determinante der Gram-Matrix zu  $B$  ist die Determinante der Gram-Matrix zu  $\varphi^{-1}(E)$  multipliziert mit dem Quadrat der Determinante von  $A$ . Damit erhalten wir

$$\Delta(X) = (d_0)^{\rho} \cdot \tilde{\Delta}(X) \cdot \frac{k^2}{e(L_0)^{2(\rho-1)}}$$

für ein  $k \in \mathbb{Z}$ . Die Polarisierung  $L_0$  ist vom Typ  $(1, d_0)$ , sodass nach [8, Lemma 3.1.4] der Zusammenhang

$$\text{kern } \phi_{L_0} \cong (\mathbb{Z}/d_0\mathbb{Z})^2$$

gilt. Damit haben wir  $e(L_0) = d_0$ . □

Mit Hilfe von Satz 2.3.1 können wir genau bestimmen, welche Zahlen als Nef-Kegel-Volumen bei einfachen abelschen Flächen mit reeller Multiplikation auftreten:

**Korollar 2.3.2.** *Es sei  $(X, H)$  eine einfache polarisierte abelsche Fläche mit reeller Multiplikation. Dann ist  $\text{Vol}(\text{Nef}(X), H)$  ein Element der Menge*

$$M_1 := \left( \left\{ \frac{1}{2k\sqrt{d}} \mid \begin{array}{l} k, d \in \mathbb{N}; d \equiv 1 \pmod{4}; \\ d > 1; d \text{ quadratfrei} \end{array} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{4k\sqrt{d}} \mid \begin{array}{l} k, d \in \mathbb{N}; d \equiv 2, 3 \pmod{4}; \\ d > 1; d \text{ quadratfrei} \end{array} \right\} \right).$$

*Jedes Element der Menge tritt als  $\text{Vol}(\text{Nef}(X))$  für eine passende einfache abelsche Fläche  $X$  mit reeller Multiplikation auf.*

*Beweis.* Für eine Polarisierung  $H$  auf einer abelschen Fläche  $X$  ist  $(H^2) = 2 \cdot \deg H$ . Nach Theorem 2.1.3 und Satz 2.3.1 ist  $\text{Vol}(\text{Nef}(X), H)$  somit für jede einfache polarisierte abelsche Fläche  $(X, H)$  mit reeller Multiplikation in obiger Menge enthalten. Nach [7, Proposition 2.1] existiert zu einer gegebenen Ordnung  $\mathfrak{o}$  in  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$  eine prinzipalpolarierte abelsche Fläche  $X$  mit  $\text{End}(X) = \mathfrak{o}$ , sodass nach Theorem 2.1.3 alle Elemente der obigen Menge als Volumen auftreten.  $\square$

Für abelsche Flächen mit komplexer Multiplikation können wir zumindest Folgendes festhalten:

**Korollar 2.3.3.** *Es sei  $(X, H)$  eine einfache polarisierte abelsche Fläche mit komplexer Multiplikation. Dann ist  $\text{Vol}(\text{Nef}(X), H)$  ein Element der Menge  $M_1$ .*

*Beweis.* Die Behauptung folgt direkt aus Theorem 2.1.3 und Satz 2.3.1.  $\square$

Für abelsche Flächen mit ausschließlich ganzzahliger Multiplikation ist die Beantwortung der Frage, welche Volumina auftreten, einfach:

**Lemma 2.3.4.** *Sei  $(X, H)$  eine polarisierte abelsche Fläche mit  $\text{End}(X) = \mathbb{Z}$ . Dann ist  $\text{Vol}(\text{Nef}(X), H)$  Element der Menge*

$$M_2 := \left\{ \frac{1}{2k} \mid k \in \mathbb{N} \right\}.$$

*Jedes Element der Menge tritt als  $\text{Vol}(\text{Nef}(X))$  für eine passende abelsche Fläche  $X$  mit  $\text{End}(X) = \mathbb{Z}$  auf.*

*Beweis.* Sei  $X$  eine abelsche Fläche mit  $\text{End}(X) = \mathbb{Z}$  und  $L_0$  eine Polarisierung auf  $X$  von minimalem Grad  $d_0$ . Wegen der Minimalität erhalten wir sofort  $\text{NS}(X) = \mathbb{Z} \cdot L_0$  und somit  $\Delta(X) = 2d_0$ . Für  $H = aL_0$  mit  $a > 0$  folgt schließlich

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X), H) = \frac{1}{\sqrt{2d_0} \cdot \sqrt{H^2}} = \frac{1}{2ad_0}.$$

Umgekehrt existiert zu jedem  $d_0 \in \mathbb{N}$  eine abelsche Fläche  $X$  mit  $\text{End}(X) = \mathbb{Z}$ , sodass  $\text{NS}(X)$  von einer Polarisierung vom Grad  $d_0$  erzeugt wird.  $\square$



Wir können nun festhalten:

**Korollar 2.3.5.** *Als algebraische Nef-Kegel-Volumina treten bei einfachen abelschen Flächen genau die Zahlen aus den Mengen  $M_1$  und  $M_2$  auf.*

*Beweis.* Für einfache abelsche Flächen mit Quaternionenmultiplikation ist  $\rho = 3$ . Nach Korollar 1.2.3 und Bemerkung 1.2.6 sind die Volumina zu einfachen abelschen Flächen mit Quaternionenmultiplikation somit nicht algebraisch. Die Behauptung folgt mit der Klassifikation der Endomorphismenalgebren und mit den Überlegungen aus diesem Abschnitt.  $\square$

**Bemerkung 2.3.6.** Essentiell für obige Ergebnisse ist das Resultat [7, Proposition 2.1] von Birkenhake. Nach diesem existiert zu gegebener Ordnung  $\mathfrak{o}$  in einem total reellen Zahlkörper eine prinzipalpolarierte abelsche Varietät  $X$  mit  $\text{End}(X) = \mathfrak{o}$ . Für abelsche Varietäten mit komplexer Multiplikation bzw. Quaternionenmultiplikation liegen Resultate dieser Art nicht vor.

Wir wollen uns nun überlegen, wie anhand des definierenden Gitters einer gegebenen abelschen Fläche die Diskriminante der Néron-Severi-Gruppe bestimmt werden kann. Die Néron-Severi-Gruppe einer abelschen Varietät  $X = \mathbb{C}^g/\Lambda$  kann mit der Gruppe der hermiteschen Formen

$$H : \mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^g \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \text{Im } H(\Lambda \times \Lambda) \subset \mathbb{Z}$$

identifiziert werden. Diese lässt sich wiederum mit der Gruppe der alternierenden Formen

$$E : \mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^g \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad E(\Lambda \times \Lambda) \subset \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad E(iv, iw) = E(v, w)$$

identifizieren (siehe z.B. [8, Section 2.1]). Für eine hermitesche Form  $H$  mit zugehöriger alternierender Form  $E$  gelten dabei die Zusammenhänge

$$H(v, w) = E(iv, w) + iE(v, w) \quad \text{und} \quad E(v, w) = \text{Im } H(v, w).$$

In der Auffassung der Néron-Severi-Gruppe als Gruppe von hermiteschen Formen ist der Homomorphismus  $f^* : \text{NS}(Y) \rightarrow \text{NS}(X)$  zu einer Isogenie  $f : X \rightarrow Y$  zwischen abelschen Varietäten  $X$  und  $Y$  gegeben durch

$$f^*(H)(v, w) = H(\rho_a(f)v, \rho_a(f)w). \tag{2.3}$$

Bei gegebenem Gitter lässt sich die Néron-Severi-Gruppe in den vorgestellten Auffassungen explizit berechnen. Ebenso lässt sich über das Gitter der Endomorphismenring bestimmen, sodass im Falle der Existenz einer Prinzipalpolarisierung die Methoden aus Abschnitt 2.1 zur Diskriminantenberechnung herangezogen werden können. Existiert auf einer abelschen Fläche keine Prinzipalpolarisierung, so ist diese zumindest isogen zu einer abelschen Fläche, auf der eine Prinzipalpolarisierung existiert. Diesen Umstand wollen wir nutzen, um Diskriminanten von Néron-Severi-Gruppen zu abelschen Flächen ohne Prinzipalpolarisierung zu bestimmen.

**Proposition 2.3.7.** *Es sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Isogenie zwischen abelschen Flächen  $X$  und  $Y$ . Dann gilt*

$$(\deg f)^\rho \cdot \Delta(Y) = [\text{NS}(X) : f^*(\text{NS}(Y))]^2 \cdot \Delta(X).$$

Für  $X = Y$  ergibt sich

$$[\text{NS}(X) : f^*(\text{NS}(Y))]^2 = (\deg f)^\rho.$$

*Beweis.* Es ist  $f^*(\text{NS}(Y))$  ein Untergitter von  $\text{NS}(X)$ . Mit [1, Lemma 2.1] folgt

$$\text{disc } f^*(\text{NS}(Y)) = [\text{NS}(X) : f^*(\text{NS}(Y))]^2 \cdot \Delta(X).$$

Nach Projektionsformel ist  $(f^*L_1 \cdot f^*L_2) = \deg f \cdot (L_1 \cdot L_2)$  und somit

$$\text{disc } f^*(\text{NS}(Y)) = (\deg f)^\rho \cdot \Delta(Y).$$

□

Wir betrachten nun eine Konstruktion, die uns über Proposition 2.3.7 ermöglicht, die Diskriminante der Néron-Severi-Gruppe bei abelschen Flächen ohne Prinzipalpolarisierung zu berechnen. Es sei  $X = \mathbb{C}^2/\Lambda$  eine abelsche Fläche und  $v_1, \dots, v_4$  eine Basis von  $\Lambda$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  betrachten wir die abelsche Fläche  $Y = \mathbb{C}^2/\Lambda'$  mit

$$\Lambda' = \mathbb{Z} \cdot \frac{v_1}{n} + \mathbb{Z} \cdot v_2 + \mathbb{Z} \cdot v_3 + \mathbb{Z} \cdot v_4.$$

Die Abbildung

$$f : X \rightarrow Y, \quad x + \Lambda \mapsto x + \Lambda'$$

ist eine Isogenie vom Grad  $n$ . Die analytische Darstellung von  $f$  ist die Identität auf  $\mathbb{C}^2$ . Wegen (2.3) haben wir somit in der Auffassung der Néron-Severi-Gruppe als Gruppe von alternierenden Formen

$$f^*(\text{NS}(Y)) = \text{NS}(Y) \subset \text{NS}(X).$$

Es sei  $I$  die Darstellungsmatrix der Multiplikation mit  $i$  bezüglich der Basis

$$B = \{v_1/n, v_2, v_3, v_4\}$$

von  $\Lambda'$ . Indem wir zu Darstellungsmatrizen bezüglich  $B$  übergehen, erhalten wir:

$$\text{NS}(Y) \cong \left\{ M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix} \mid a, \dots, f \in \mathbb{Z} \text{ und } I^t M \text{ symmetrisch} \right\} =: M_Y$$

und

$$\text{NS}(X) \cong \left\{ M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} a, b, c \in \frac{1}{n}\mathbb{Z} \text{ und } d, e, f \in \mathbb{Z} \\ \text{und } I^t M \text{ symmetrisch} \end{array} \right\} =: M_X.$$

Dabei entspricht die Bedingung „ $I^t M$  symmetrisch“ der Eigenschaft  $E(iv, iw) = E(v, w)$ . Der Index  $[\text{NS}(X) : f^*(\text{NS}(Y))]$  stimmt mit dem Index  $[M_X : M_Y]$  überein, wobei Letzterer bei gegebenem Gitter berechenbar ist.

Sei nun  $E$  eine Polarisierung vom Typ  $(1, d_0)$  auf  $X$ . Wir konstruieren eine zu  $X$  isogene abelsche Fläche mit Prinzipalpolarisierung. Dabei gehen wir so vor, wie es in [8, Proposition 4.1.2] beschrieben wird. Es sei  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$  eine symplektische Basis von  $\Lambda$  für  $E$ , das heißt, eine Basis bezüglich derer  $E$  die Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat. Wir definieren

$$\Lambda' = \mathbb{Z} \cdot \lambda_1 + \mathbb{Z} \cdot \frac{\lambda_2}{d_0} + \mathbb{Z} \cdot \mu_1 + \mathbb{Z} \cdot \mu_2.$$

Dann ist  $Y := \mathbb{C}^2/\Lambda'$  eine abelsche Fläche, auf der eine Prinzipalpolarisierung existiert. Die Abbildung

$$f : X \rightarrow Y, \quad x + \Lambda \mapsto x + \Lambda'$$

ist eine Isogenie vom Grad  $d_0$ . Wie oben beschrieben können wir  $[\text{NS}(X) : f^*(\text{NS}(Y))]$  berechnen. Ebenso ist  $\Delta(Y)$  berechenbar, da auf  $Y$  eine Prinzipalpolarisierung existiert. Mit Proposition 2.3.7 können wir somit auch  $\Delta(X)$  bestimmen. Außerdem können wir festhalten:

**Korollar 2.3.8.** *Sei  $X$  eine abelsche Fläche ohne Prinzipalpolarisierung und  $L_0$  eine Polarisierung von minimalem Grad  $d_0$  auf  $X$ . Dann existiert eine zu  $X$  isogene abelsche Fläche  $Y$  mit Prinzipalpolarisierung und mit*

$$\Delta(X) \mid d_0^6 \cdot \Delta(Y).$$

Um konkrete Beispiele betrachten zu können, benötigen wir Gitter im  $\mathbb{C}^2$ , die abelsche Flächen ohne Prinzipalpolarisierung definieren. Auf der Suche nach solchen ist folgendes Resultat entstanden. Es basiert auf einer Konstruktion von Poonen (siehe [23]).

**Proposition 2.3.9.** *Sei  $X = \mathbb{C}^2/\Lambda$  eine abelsche Fläche mit Prinzipalpolarisierung. Weiter sei  $v_1, \dots, v_4$  eine Basis von  $\Lambda$ . Außerdem sei*

$$n \notin \{\det(\rho_a(\alpha)) \mid \alpha \in \text{End}(X)\}.$$

*Dann existiert auf  $\mathbb{C}^2/\Lambda'$  mit*

$$\Lambda' = \mathbb{Z} \cdot \frac{v_1}{n} + \mathbb{Z} \cdot v_2 + \mathbb{Z} \cdot v_3 + \mathbb{Z} \cdot v_4$$

*keine Prinzipalpolarisierung.*

*Beweis.* Es sei  $L_0$  eine Prinzipalpolarisierung auf  $X$ . Angenommen es existiert eine Prinzipalpolarisierung  $L'_0$  auf  $Y := \mathbb{C}^2/\Lambda'$ . Wir betrachten die Abbildung

$$f : X \rightarrow Y, \quad x + \Lambda \mapsto x + \Lambda'.$$

Es ist  $f$  eine Isogenie vom Grad  $n$ . Für  $\alpha = \phi_{L_0}^{-1} \phi_{f^*(L'_0)} \in \text{End}^{\text{sym}}(X)$  haben wir

$$\begin{aligned} \det(\rho_a(\alpha)) &\stackrel{2.2}{=} \frac{(f^*(L'_0)^2)}{2} = \deg f \cdot \frac{(L'_0)^2}{2} \\ &= \deg f \cdot \frac{2}{2} = \deg f = n. \end{aligned}$$

Wir verwenden dabei die Tatsache, dass der konstante Term des charakteristischen Polynoms einer  $2 \times 2$ -Matrix genau der Determinante der Matrix entspricht.  $\square$

**Beispiel 2.3.10.** Wir betrachten den komplexen Torus  $X = \mathbb{C}^2/\Lambda$  mit

$$\Lambda = \left( \begin{array}{cccc} 1 & \sqrt{5} & \pi + i & \sqrt{5}(\pi + i) \\ 1 & -\sqrt{5} & i & -\sqrt{5}i \end{array} \right) \mathbb{Z}^4.$$

Über die analytische Darstellung kann man zeigen, dass

$$\text{End}(X) = \left\{ \left( \begin{array}{cc} x + y\sqrt{5} & 0 \\ 0 & x - y\sqrt{5} \end{array} \right) \mid x, y \in \mathbb{Z} \right\} \cong \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{5} = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \left( 2 \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

gilt (siehe dazu [9, Beispiel 3.2.2]). Die Multiplikation mit  $i$  wird bezüglich der oben angegebenen Basis von  $\Lambda$  beschrieben durch die Matrix

$$I := \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & -\frac{\sqrt{5}\pi}{2} & -1 - \frac{\pi^2}{2} & -\frac{\pi^2\sqrt{5}}{2} \\ -\frac{\pi}{2\sqrt{5}} & -\frac{\pi}{2} & -\frac{\pi^2}{2\sqrt{5}} & -1 - \frac{\pi^2}{2} \\ 1 & 0 & \frac{\pi}{2} & \frac{\sqrt{5}\pi}{2} \\ 0 & 1 & \frac{\pi}{2\sqrt{5}} & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}.$$

Für eine Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

ist die Bedingung „ $I^t M$  symmetrisch“ äquivalent zu

$$a = f = 0, \quad c = d \quad \text{und} \quad e = 5b.$$

Für  $b = -1$  und  $c = 2$  haben wir die Matrix

$$M_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit Determinante 1. Weiter ist

$$I^t M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \pi \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) & \pi \left( -1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) \\ -2 & 5 & \pi \left( -1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) & \pi \left( \frac{5}{2} - \sqrt{5} \right) \\ \pi \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) & \pi \left( -1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) & 1 + \pi^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) & -2 + \pi^2 \left( -1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) \\ \pi \left( -1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) & \pi \left( \frac{5}{2} - \sqrt{5} \right) & -2 + \pi^2 \left( -1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) & 5 + \pi^2 \left( \frac{5}{2} - \sqrt{5} \right) \end{pmatrix}$$

positiv definit. Somit entspricht  $M_1$  einer Prinzipalpolarisierung auf  $X$ , sodass es sich bei  $X$  um eine abelsche Fläche mit Prinzipalpolarisierung handelt.

Nun betrachten wir für  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > 1$  das Gitter

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} 1/n & \sqrt{5} & \pi + i & \sqrt{5}(\pi + i) \\ 1/n & -\sqrt{5} & i & -\sqrt{5}i \end{pmatrix} \mathbb{Z}^4.$$

Die Multiplikation mit  $i$  wird bezüglich  $\Lambda'$  durch die Matrix

$$I' := \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & -\frac{\sqrt{5}\pi n}{2} & n \left( -1 - \frac{\pi^2}{2} \right) & -\frac{\pi^2 \sqrt{5}n}{2} \\ -\frac{\pi}{2\sqrt{5}n} & -\frac{\pi}{2} & -\frac{\pi^2}{2\sqrt{5}} & -1 - \frac{\pi^2}{2} \\ \frac{1}{n} & 0 & \frac{\pi}{2} & \frac{\sqrt{5}\pi}{2} \\ 0 & 1 & \frac{\pi}{2\sqrt{5}} & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

beschrieben. Die Bedingung „ $(I')^t M$  symmetrisch“ ist äquivalent zu

$$a = f = 0, \quad d = nc \quad \text{und} \quad e = 5nb.$$

Die Determinante von

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & nc & 5nb \\ -b & -nc & 0 & 0 \\ -c & -5nb & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist  $n^2(5b^2 - c^2)^2$ .

Wegen  $n > 1$  existiert auf  $Y := \mathbb{C}^2/\Lambda'$  somit keine Prinzipalpolarisierung. Wir können nun, wie oben beschrieben, die Gruppen  $M_X$  und  $M_Y$  betrachten. Konkret haben wir

$$M_Y = \left\{ \left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & nc & 5nb \\ -b & -nc & 0 & 0 \\ -c & -5nb & 0 & 0 \end{array} \right) \middle| b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

und

$$M_X = \left\{ \left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & b/n & c/n \\ 0 & 0 & c & 5b \\ -b/n & -c & 0 & 0 \\ -c/n & -5b & 0 & 0 \end{array} \right) \middle| b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

und somit

$$[\mathrm{NS}(X) : f^*(\mathrm{NS}(Y))] = [M_X : M_Y] = n^2.$$

Mit Proposition 2.3.7 erhalten wir schließlich

$$\Delta(Y) = \frac{[\mathrm{NS}(X) : f^*(\mathrm{NS}(Y))]^2}{(\deg f)^2} \cdot \Delta(X) = \frac{n^4}{n^2}(-20) = -20n^2.$$

Da auf  $X$  eine Prinzipalpolarisierung existiert, erhalten wir den Wert der Diskriminante  $\Delta(X)$  über das in Abschnitt 2.1 beschriebene Vorgehen. In unserem Fall ist

$$d = 5 \equiv 1 \pmod{4}$$

und  $f = 2$ , sodass  $\Delta(X) = -f^2 \cdot d = -20$  gilt.

## Kapitel 3

# Volumina des Nef-Kegels von Aufblasungen der projektiven Ebene

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit dem Nef-Kegel-Volumen bei Del-Pezzo-Flächen und bei Aufblasungen von Punkten auf einem glatten Kegelschnitt im  $\mathbb{P}^2$ . Bezüglich des antikanonischen Divisors wurde das Nef-Kegel-Volumen bei Del-Pezzo-Flächen schon von Derenthal bestimmt (siehe [12]). Ebenso hat Schmitz bereits Formeln bewiesen, mit denen das Nef-Kegel-Volumen bezüglich des antikanonischen Divisors bei Aufblasungen von Punkten auf einem glatten Kegelschnitt im  $\mathbb{P}^2$  bestimmt werden kann (siehe [26]). Wir leiten in beiden Fällen Formeln her, mit denen das Volumen für beliebige Polarisierungen berechnet werden kann. Grundlegend für diese Herleitungen ist ein Ergebnis von Schmitz, welches eine rekursive Berechnung von Nef-Kegel-Volumina ermöglicht. Außerdem befassen wir uns mit der Frage nach dem größtmöglichen Volumen. Im Fall der Del-Pezzo-Flächen kommen wir dabei schnell zu einem Ergebnis. Im Fall der Aufblasungen von Punkten auf einem glatten Kegelschnitt gestaltet sich die Beantwortung der Frage deutlich schwieriger. Aus diesem Grund führen wir den Begriff der minimalen Polarisierung ein und zeigen, wie man mit diesem zu Ergebnissen kommt. In beiden folgenden Abschnitten fassen wir zu Beginn grundlegende Aussagen und schon bekannte Resultate zusammen.

### 3.1. Del-Pezzo-Flächen

Unter einer Del-Pezzo-Fläche verstehen wir eine glatte projektive rationale Fläche, auf der der antikanonische Divisor ample ist. Die Klassifikation von Del-Pezzo-Flächen ist allgemein bekannt. Jede Del-Pezzo-Fläche ist entweder isomorph zu

$$\mathbb{P}^2 \quad \text{oder} \quad \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \quad \text{oder} \quad S_r,$$

wobei  $S_r$  eine Aufblasung des  $\mathbb{P}^2$  in  $r$  Punkten in allgemeiner Lage bezeichnet. Dabei sprechen wir von Punkten in allgemeiner Lage, wenn keine drei der Punkte auf einer Geraden liegen, keine sechs auf einem Kegelschnitt und keine acht auf einer Kubik mit einem Doppelpunkt in einem der Punkte. Der Grad einer Del-Pezzo-Fläche  $X$  ist definiert als  $(-K_X)^2$ . Es gilt

$$(-K_{S_r})^2 = 9 - r, \quad (-K_{\mathbb{P}^2})^2 = 9 \quad \text{und} \quad (-K_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1})^2 = 8.$$

Derenthal hat in [12, Theorem 4] das Nef-Kegel-Volumen bezüglich des antikanonischen Divisors für alle Del-Pezzo-Flächen bestimmt. Dabei ist zu beachten, dass er statt des

Kegelstumpfes  $\text{Nef}(X) \cap (-K_X)^{\leq 1}$  die Menge  $\text{Nef}(X) \cap (-K_X)^{=1}$  betrachtet hat. Somit erhält man die zu unserem Volumenbegriff gehörigen Volumina, indem man Derenthals Ergebnisse mit dem Dimensions-Faktor  $1/\rho(X) = 1/(10 - (-K_X)^2)$  multipliziert. Auf diese Weise bekommt man

$$\text{Vol}(\text{Nef}(\mathbb{P}^2), -K_{\mathbb{P}^2}) = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad \text{Vol}(\text{Nef}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1), -K_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}) = \frac{1}{8}$$

sowie die in Tabelle 3.1 dargestellten Werte.

$r$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\text{Vol}(\text{Nef}(S_r), -K_{S_r})$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{72}$	$\frac{1}{288}$	$\frac{1}{720}$	$\frac{1}{1080}$	$\frac{1}{840}$	$\frac{1}{240}$	$\frac{1}{9}$

Tabelle 3.1: Nef-Kegel-Volumina bezüglich des antikanonischen Divisors bei Del-Pezzo-Flächen.

Unser Ziel ist es Formeln herzuleiten, mit denen das Nef-Kegel-Volumen für beliebige Polarisierungen bestimmt werden kann. Zentral dafür ist ein Ergebnis von Schmitz, welches eine rekursive Volumenberechnung ermöglicht:

**Proposition 3.1.1** ([26], Proposition 5.2.2). *Es sei  $(X, H)$  eine glatte polarisierte Fläche mit Picardzahl  $\rho$ . Falls  $\overline{\text{NE}}(X)$  endlich erzeugt ist und falls eine Klasse  $\gamma \in \text{NS}_{\mathbb{R}}(X)$  mit  $H\gamma > 0$  existiert, sodass für jeden extremalen Strahl  $\eta$ , der nicht von einer  $(-1)$ -Kurve aufgespannt wird,  $\gamma \in \eta^{\perp}$  gilt, so gilt*

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X), H) = \frac{1}{\rho \cdot (H \cdot \gamma)} \sum_E (E \cdot \gamma) \cdot \text{Vol}(\text{Nef}(\pi_E X), \pi_{E*} H),$$

wobei über alle  $(-1)$ -Kurven auf  $X$  summiert wird.

Dabei bezeichnet  $\overline{\text{NE}}(X)$  wie üblich den Mori-Kegel, das heißt den Abschluss des Kegels

$$\text{NE}(X) = \left\{ \sum a_i [C_i] \mid C_i \subset X \text{ irreduzible Kurve, } a_i \geq 0 \right\}.$$

Um Proposition 3.1.1 zur Anwendung bringen zu können, benötigen wir Kenntnisse über die negativen Kurven auf Del-Pezzo-Flächen. Von Manin wurden die negativen Kurven auf  $S_r$  bestimmt:

**Satz 3.1.2** ([21], Chapter IV). *Die negativen Kurven auf  $S_r$  sind*

1. *die exceptionellen Kurven zu den Aufblasungspunkten  $p_1, \dots, p_r$*
- und *die eigentlich Transformierten der folgenden Kurven im  $\mathbb{P}^2$ :*
  2. *Geraden durch Punkte  $p_i, p_j$  mit  $p_i \neq p_j$ ;*
  3. *falls  $r \geq 5$ : Kegelschnitte durch fünf der Punkte  $p_1, \dots, p_r$ ;*
  4. *falls  $r \geq 7$ : Kubiken durch sieben der Punkte  $p_1, \dots, p_r$  mit Doppelpunkt in einem der Punkte;*



5. falls  $r = 8$ : Quartiken durch die Punkte  $p_1, \dots, p_8$  mit Doppelpunkten in drei der Punkte;
6. falls  $r = 8$ : Quintiken durch die Punkte  $p_1, \dots, p_8$  mit Doppelpunkten in sechs der Punkte;
7. falls  $r = 8$ : Sextiken durch die Punkte  $p_1, \dots, p_8$  mit Doppelpunkten in 7 der Punkte und einem Dreifachpunkt in einem der Punkte.

Als Basis von  $\text{NS}(S_r)$  haben wir die Klassen von

$$L = \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1), \quad E_1 = \pi^{-1}(p_1), \dots, \quad E_r = \pi^{-1}(p_r), \quad (3.1)$$

zur Verfügung, wobei  $\pi$  die Aufblausungsabbildung bezeichnet und  $p_1, \dots, p_r$  die Punkte, die aufgeblasen werden. Die zur obigen Basis gehörige Schnittmatrix ist  $\text{Diag}(1, -1, \dots, -1)$ . Definieren wir  $E := E_1 + \dots + E_r$ , so haben die Klassen der negativen Kurven bezüglich der Basis (3.1) die Darstellungen (vgl. auch [4, proof of Theorem 3.1]):

zu 2.	$L - E_i - E_j$	$1 \leq i < j \leq r$
zu 3.	$2L - E$	(falls $r = 5$ )
	$2L - E + E_i$	$1 \leq i \leq 6$ (falls $r = 6$ )
	$2L - E + E_i + E_j$	$1 \leq i < j \leq 7$ (falls $r = 7$ )
	$2L - E + E_i + E_j + E_k$	$1 \leq i < j < k \leq 8$ (falls $r = 8$ )
zu 4.	$3L - E - E_i$	$1 \leq i \leq 7$ (falls $r = 7$ )
	$3L - E - E_i + E_j$	$1 \leq i, j \leq 8, i \neq j$ (falls $r = 8$ )
zu 5.	$4L - E - E_i - E_j - E_k$	$1 \leq i < j < k \leq 8$ (falls $r = 8$ )
zu 6.	$5L - 2E + E_i + E_j$	$1 \leq i < j \leq 8$ (falls $r = 8$ )
zu 7.	$6L - 2E - E_i$	$1 \leq i \leq 8$ (falls $r = 8$ )

Zur Anwendung von Proposition 3.1.1 benötigen wir außerdem Kenntnisse darüber, welche Flächen bei der Kontraktion von  $(-1)$ -Kurven entstehen. Bauer und Schmitz haben Folgendes gezeigt:

**Lemma 3.1.3** ([5], Lemma 2.1). *Sei  $S_r$  eine Del-Pezzo-Fläche mit  $1 \leq r \leq 8$  und  $E$  eine  $(-1)$ -Kurve auf  $S_r$ . Dann lässt sich  $E$  durch einen birationalen Morphismus*

$$\pi_E : S_r \rightarrow Y$$

*zu einem Punkt auf einer Del-Pezzo-Fläche  $Y$  vom Grad  $9 - r + 1$  kontrahieren. Es gilt dabei*

$$\text{NS}(S_r) = \text{NS}(Y) \oplus \mathbb{Z}[E].$$

**Lemma 3.1.4** ([5], Lemma 2.2). *Für  $r \geq 3$  liefert die Kontraktion einer  $(-1)$ -Kurve auf  $S_r$  die Fläche  $S_{r-1}$ . Für eine  $(-1)$ -Kurve  $E$  auf  $S_2$  ist  $\pi_E(S_2) = S_1$ , falls es eine  $(-1)$ -Kurve  $E'$  auf  $S_2$  mit  $(E \cdot E') = 0$  gibt. Andernfalls gilt  $\pi_E(S_2) = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ .*

Mit dem vorab Beschriebenen sind wir nun in der Lage die gesuchten Formeln zu bestimmen. Für die Flächen  $\mathbb{P}^2$  und  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  haben wir die Volumenberechnung schon in Abschnitt 1.1 durchgeführt. Die Berechnung zu  $S_1$  ist elementar und wurde eigentlich auch schon in Beispiel 1.1.4 behandelt, da  $S_1$  eine Regelfläche ist. Wir präsentieren hier dennoch die Volumenberechnung für Polarisierungen, die in der Basis (3.1) dargestellt sind. Bei den Del-Pezzo-Flächen  $S_r$  mit  $r \geq 2$  verwenden wir Proposition 3.1.1 zur Formelherleitung. Dabei ist es entscheidend, bei gegebener Polarisierung  $H$  und  $(-1)$ -Kurve  $E$  zu bestimmen, welche Koordinaten die Polarisierung  $\pi_{E^*}(H)$  auf  $S_{r-1}$  bezüglich der Basis (3.1) hat. Dazu gehen wir so vor, dass wir eine Menge von  $r$  paarweise disjunkten  $(-1)$ -Kurven auf  $S_r$  wählen, die  $E$  enthält. Wir können  $S_r$  dann als Aufblasung des  $\mathbb{P}^2$  mit den gewählten Kurven als exzeptionelle Kurven verstehen. Insbesondere können wir somit zu einer für uns passenden Basis von  $\text{NS}(S_r)$  übergehen. Diese Basis enthält  $E$  als Basiselement, sodass sich  $\pi_{E^*}(H)$  durch „Weglassen“ des Summanden zu  $E$  in der Darstellung von  $H$  bezüglich der neuen Basis ergibt.

### 3.1.1. Formeln zur Volumenberechnung

**Volumen des Nef-Kegels bei  $S_1$**  Ein Element  $aL + bE_1 \in \text{NS}(S_1)$  ist genau dann ample, wenn

$$a > -b > 0$$

gilt. Sei  $H = aL + bE_1 \in \text{NS}(S_1)$  eine Polarisierung. Für  $D = xL + yE_1 \in \text{NS}_{\mathbb{R}}(S_1)$  ist  $D \in H^{\leq 1}$  äquivalent zu  $ax - by \leq 1$ . Somit ergibt sich als  $\text{Nef}(X) \cap H^{\leq 1}$  das Dreieck mit den Eckpunkten

$$(0, 0), \quad \left(\frac{1}{a}, 0\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{a+b}, \frac{-1}{a+b}\right),$$

woraus schließlich

$$\text{Vol}(\text{Nef}(S_1), H) = \frac{1}{2a(a+b)}$$

und somit

$$\text{Vol}(\text{Nef}(S_1)) = \text{Vol}(\text{Nef}(S_1), 2L - E_1) = \frac{1}{4} \tag{3.2}$$

folgt.

**Bemerkung 3.1.5.** Bei  $S_1$  handelt es sich um eine Regelfläche mit  $e = 1$ . Aus diesem Grund wurden die Nef-Kegel-Volumina zu  $S_1$  auch schon in Beispiel 1.1.4 bestimmt. Dort wurde mit der Basis  $C_0$ ,  $f$  gearbeitet. Es gilt folgender Zusammenhang:

$$L = C_0 + f \quad \text{und} \quad E_1 = C_0.$$

Die beiden Formeln zur Volumenberechnung lassen sich über diesen ineinander überführen.

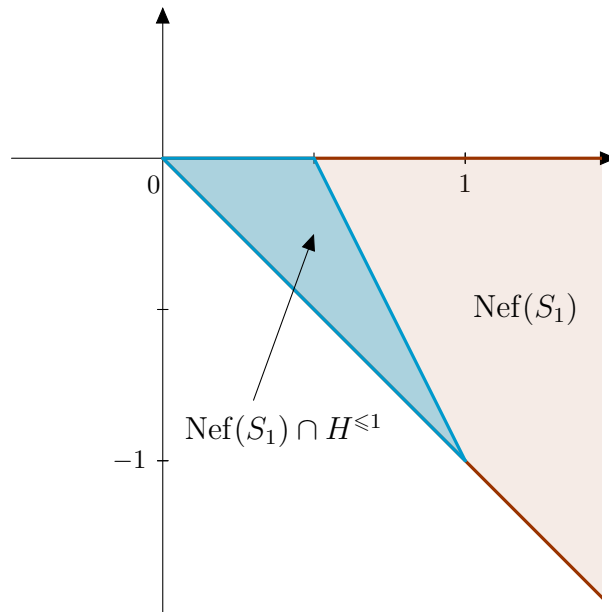


Abb. 3.1: Kegelstumpf zum Nef-Kegel-Volumen bei  $S_1$  bezüglich der Polarisierung  $H = 2L - E_1$ .

Im Folgenden interessieren wir uns insbesondere für die Struktur des Nef-Kegels bei den Del-Pezzo-Flächen  $S_r$  mit  $r \geq 2$ . Aufschluss über diese gibt untenstehende Bemerkung. Man beachte dabei, dass  $\text{Rang}(\text{NS}(S_r)) = r + 1$  gilt.

**Bemerkung 3.1.6.** Schmitz zeigt in [26, Satz 2.9], dass für jede glatte projektive Fläche  $X$ , auf der  $-K_X$  big ist, die Kegel  $\overline{\text{NE}}(X)$  und  $\text{Nef}(X)$  rational polyedrisch sind. Gilt zusätzlich  $\rho = \text{Rang NS}(X) \geq 3$ , so wird  $\overline{\text{NE}}(X)$  von irreduziblen Kurven mit negativem Selbstschnitt erzeugt (siehe [26, Beweis Theorem 2.10] und [11, Lemma 6.2]). Wegen der Dualität der Kegel  $\overline{\text{NE}}(X)$  und  $\text{Nef}(X)$  wird der Nef-Kegel in diesem Fall durch die negativen Kurven auf  $X$  bestimmt: Ein  $D \in \text{NS}_{\mathbb{R}}(X)$  ist genau dann nef, wenn  $D \cdot C \geq 0$  für alle irreduziblen Kurven  $C$  auf  $X$  mit  $C^2 < 0$  gilt.

Der Übersichtlichkeit halber verwenden wir ab jetzt folgende Notationen:

Für  $a = (a_0, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$  sei

$$\text{Vol}(\text{Nef}(S_r), a) := \text{Vol}(\text{Nef}(S_r), a_0L + a_1E_1 + \dots + a_rE_r)$$

und  $v_i(a)$  der Vektor  $a$  ohne den Eintrag  $a_i$ , das heißt,

$$v_i(a) = (a_0, a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^r.$$

**Volumen des Nef-Kegels bei  $S_2$**  Der Nef-Kegel zu  $S_2$  wird nach Bemerkung 3.1.6 und Satz 3.1.2 durch die Kurven  $E_1, E_2$  und  $L - E_1 - E_2$  bestimmt, also bezüglich der Basis (3.1) durch die Ungleichungen

$$x_i \leq 0 \quad \text{für } 1 \leq i \leq 2, \tag{3.3}$$

$$x_0 + x_1 + x_2 \geq 0. \tag{3.4}$$

Zur Berechnung des Volumens verwenden wir Proposition 3.1.1. Wir wählen

$$\gamma = 2L - (E_1 + E_2).$$

Dabei ist für jede Polarisierung  $H = a_0L + a_1E_1 + a_2E_2$  die Voraussetzung  $H \cdot \gamma > 0$  erfüllt, denn

$$H \cdot \gamma = 2a_0 + a_1 + a_2 \stackrel{3.4}{>} a_0 > 0.$$

Man beachte dazu, dass der ample Kegel das Innere des Nef-Kegels ist (siehe z.B. [20, Theorem 1.4.23]). Außerdem gilt  $\gamma \cdot (L - E_1 - E_2) = 0$ . Mit Proposition 3.1.1 und der Formel für  $S_1$  erhalten wir schließlich für eine Polarisierung  $H$  mit Koordinatenvektor  $a$  bezüglich der Basis (3.1) die Formel

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\text{Nef}(S_2), H) &= \frac{1}{3(2a_0 + a_1 + a_2)} \cdot (\text{Vol}(\text{Nef}(S_1), v_1(a)) + \text{Vol}(\text{Nef}(S_1), v_2(a))) \\ &= \frac{1}{6a_0(a_0 + a_1)(a_0 + a_2)}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

**Volumen des Nef-Kegels bei  $S_3$**  Der Nef-Kegel ist bezüglich der Basis (3.1) durch

$$x_i \leq 0 \quad \text{für } 1 \leq i \leq 3, \quad (3.6)$$

$$x_0 + x_i + x_j \geq 0 \quad \text{für } 1 \leq i < j \leq 3 \quad (3.7)$$

gegeben. Wir wählen  $\gamma = 2L - (E_1 + E_2 + E_3)$  und erhalten für eine Polarisierung  $H$  mit Koordinatenvektor  $a$  bezüglich der Basis (3.1) die Ungleichungen

$$H \cdot \gamma = 2a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \stackrel{3.7}{>} a_0 + a_3 \stackrel{3.6}{>} a_0 + a_2 + a_3 \stackrel{3.7}{>} 0.$$

Mit Proposition 3.1.1 und der Formel für  $S_2$  folgt

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\text{Nef}(S_3), H) &= \frac{1}{4(2a_0 + a_1 + a_2 + a_3)} \cdot \sum_{i=1}^3 \text{Vol}(\text{Nef}(S_2), v_i(a)) \\ &= \frac{3a_0 + a_1 + a_2 + a_3}{24a_0(2a_0 + a_1 + a_2 + a_3)(a_0 + a_1)(a_0 + a_2)(a_0 + a_3)}. \end{aligned}$$

**Volumen des Nef-Kegels bei  $S_4$**  Der Nef-Kegel ist bezüglich der Basis (3.1) durch

$$x_i \leq 0 \quad \text{für } 1 \leq i \leq 4, \quad (3.8)$$

$$x_0 + x_i + x_j \geq 0 \quad \text{für } 1 \leq i < j \leq 4 \quad (3.9)$$

gegeben. Wir wählen  $\gamma = 2L - (E_1 + \dots + E_4)$  und erhalten für eine Polarisierung  $H$  mit Koordinatenvektor  $a$  bezüglich der Basis (3.1) die Ungleichung

$$H \cdot \gamma = 2a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \stackrel{3.9}{>} 0.$$

Mit Proposition 3.1.1 und der Formel für  $S_3$  folgt

$$\begin{aligned}
 \text{Vol}(\text{Nef}(S_4), H) &= \frac{1}{5(2a_0 + a_1 + \dots + a_4)} \cdot \sum_{i=1}^4 \text{Vol}(\text{Nef}(S_3), v_i(a)) \\
 &= \frac{1}{5(2a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4)} \cdot \\
 &\quad \left( \frac{3a_0 + a_1 + a_2 + a_3}{24a_0(2a_0 + a_1 + a_2 + a_3)(a_0 + a_1)(a_0 + a_2)(a_0 + a_3)} \right. \\
 &\quad + \frac{3a_0 + a_1 + a_2 + a_4}{24a_0(2a_0 + a_1 + a_2 + a_4)(a_0 + a_1)(a_0 + a_2)(a_0 + a_4)} \\
 &\quad + \frac{3a_0 + a_1 + a_3 + a_4}{24a_0(2a_0 + a_1 + a_3 + a_4)(a_0 + a_1)(a_0 + a_3)(a_0 + a_4)} \\
 &\quad \left. + \frac{3a_0 + a_2 + a_3 + a_4}{24a_0(2a_0 + a_2 + a_3 + a_4)(a_0 + a_2)(a_0 + a_3)(a_0 + a_4)} \right).
 \end{aligned}$$

**Volumen des Nef-Kegels bei  $S_5$**  Der Nef-Kegel ist bezüglich der Basis (3.1) durch

$$x_i \leq 0 \quad \text{für } 1 \leq i \leq 5, \quad (3.10)$$

$$x_0 + x_i + x_j \geq 0 \quad \text{für } 1 \leq i < j \leq 5, \quad (3.11)$$

$$2x_0 + x_1 + \dots + x_5 \geq 0 \quad (3.12)$$

gegeben. Wir wählen  $\gamma = 2L - (E_1 + \dots + E_5) = 2L - E$  und erhalten für eine Polarisierung  $H$  mit Koordinatenvektor  $a$  bezüglich der Basis (3.1) die Ungleichung

$$H \cdot \gamma = 2a_0 + a_1 + \dots + a_5 \stackrel{3.12}{>} 0.$$

Wir haben zusätzlich zu den eigentlich Transformierten von Geraden und den exzeptionellen Divisoren die  $(-1)$ -Kurve  $2L - E = \gamma$ . Um den Push-forward von  $H$  unter der Kontraktionsabbildung zu  $\gamma$  in geeigneter Weise angeben zu können, gehen wir zur Basis

- $3L - 2E_1 - (E_2 + \dots + E_5)$ ,
- $\gamma = 2L - E$ ,
- $L - E_1 - E_j$  für  $2 \leq j \leq 5$

von  $\text{NS}(S_5)$  über. Die zugehörige (selbstinverse) Basiswechselmatrix ist

$$M_5 := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mit Proposition 3.1.1 ergibt sich die Formel

$$\text{Vol}(\text{Nef}(S_5), H) = \frac{1}{6(2a_0 + a_1 + \dots + a_5)} \cdot \left( \sum_{i=1}^5 \text{Vol}(\text{Nef}(S_4), v_i(a)) - \text{Vol}(\text{Nef}(S_4), v_1(M_5 \cdot a)) \right).$$

Wir verzichten an dieser Stelle auf die Angabe einer geschlossenen Formel, da diese zu viel Raum einnehmen würde.

**Volumen des Nef-Kegels bei  $S_6$**  Der Nef-Kegel ist bezüglich der Basis (3.1) durch

$$x_i \leq 0 \quad \text{für } 1 \leq i \leq 6, \quad (3.13)$$

$$x_0 + x_i + x_j \geq 0 \quad \text{für } 1 \leq i < j \leq 6, \quad (3.14)$$

$$2x_0 + x_1 + \dots + x_6 - x_i \geq 0 \quad \text{für } 1 \leq i \leq 6 \quad (3.15)$$

gegeben. Wir wählen  $\gamma = 5L - 2E$  und erhalten für eine Polarisierung  $H$  mit Koordinatenvektor  $a$  bezüglich der Basis (3.1) die Ungleichungen

$$\begin{aligned} H \cdot \gamma &= 5a_0 + 2(a_1 + \dots + a_6) \\ &= 2a_0 + a_1 + \dots + a_5 + 2a_0 + a_2 + \dots + a_6 + a_0 + a_1 + a_6 \\ &\stackrel{3.15}{>} a_0 + a_1 + a_6 \stackrel{3.14}{>} 0. \end{aligned}$$

Die  $(-1)$ -Kurven  $2L - E + E_i$  haben Schnittzahl 0 mit  $\gamma$ . Die eigentlich Transformierten von Geraden  $L - E_i - E_j$  haben Schnittzahl 1 mit  $\gamma$ . Wir betrachten zunächst  $L - E_1 - E_2$  und gehen zur Basis

- $2L - E_1 - E_2 - E_3$ ,
- $L - E_1 - E_2$ ,
- $L - E_1 - E_3$ ,
- $L - E_2 - E_3$ ,
- $E_j$  für  $4 \leq j \leq 6$

von  $\text{NS}(S_6)$  über. Die zugehörige Basiswechselmatrix hat die Gestalt

$$M_6 := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Kurven  $L - E_i - E_j$  lässt sich analog argumentieren. Bezeichnen wir mit  $P_{ij}(a)$  eine beliebige Permutation des Vektors  $a$  der Gestalt

$$P_{ij}(a) = (a_0, a_i, a_j, \text{restliche } a_k),$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\text{Nef}(S_6), H) = & \frac{1}{7(5a_0 + 2(a_1 + \dots + a_6))} \cdot \left( 2 \cdot \sum_{i=1}^6 \text{Vol}(\text{Nef}(S_5), v_i(a)) \right. \\ & \left. + \sum_{1 \leq i < j \leq 6} \text{Vol}(\text{Nef}(S_5), v_1(M_6 \cdot P_{ij}(a))) \right). \end{aligned}$$

**Volumen des Nef-Kegels bei  $S_7$**  Der Nef-Kegel ist bezüglich der Basis (3.1) durch

$$\begin{aligned} x_i &\leq 0 && \text{für } 1 \leq i \leq 7, \\ x_0 + x_i + x_j &\geq 0 && \text{für } 1 \leq i < j \leq 7, \\ 2x_0 + x_1 + \dots + x_7 - x_i - x_j &\geq 0 && \text{für } 1 \leq i < j \leq 7 \\ 3x_0 + x_1 + \dots + x_7 + x_i &\geq 0 && \text{für } 1 \leq i \leq 7 \end{aligned}$$

gegeben. Wir wählen  $\gamma = L$  und erhalten für eine Polarisierung  $H$  mit Koordinatenvektor  $a$  bezüglich der Basis (3.1) die Ungleichung

$$H \cdot \gamma = a_0 > 0.$$

Für die eigentlich Transformaten von Geraden gehen wir wie bei  $S_6$  vor. Die zugehörige Basiswechselmatrix ist

$$M_7^1 := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ & & & E_4 \end{pmatrix}.$$

Für die Kurve  $2L - E + E_1 + E_2$  gehen wir zur Basis

- $5L - 2(E_2 + \dots + E_7)$ ,
- $2L - E + E_1 + E_j$  für  $1 \leq j \leq 7$ ,
- $E_1$

über.

Die zugehörige Basiswechselmatrix ist

$$M_7^2 := \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Kurven  $3L - (E_1 + \dots + E_7) - E_i$  gehen wir zur Basis

- $8L - 3(E_1 + \dots + E_7)$ ,
- $3L - (E_1 + \dots + E_7) - E_j$  für  $1 \leq j \leq 7$

über. Die zugehörige Basiswechselmatrix ist

$$M_7^3 := \begin{pmatrix} 8 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ -3 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\text{Nef}(S_7), H) &= \frac{1}{8a_0} \cdot \left( \sum_{1 \leq i < j \leq 7} \text{Vol}(\text{Nef}(S_6), v_1(M_7^1 \cdot P_{ij}(a))) \right. \\ &\quad + 2 \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq 7} \text{Vol}(\text{Nef}(S_6), v_1(M_7^2 \cdot P_{ij}(a))) \\ &\quad \left. + 3 \cdot \sum_{i=1}^7 \text{Vol}(\text{Nef}(S_6), v_i(M_7^3 \cdot a)) \right). \end{aligned}$$



**Volumen des Nef-Kegels bei  $S_8$**  Der Nef-Kegel ist bezüglich der Basis (3.1) durch

$$\begin{aligned}
 x_i &\leq 0 && \text{für } 1 \leq i \leq 8, \\
 x_0 + x_i + x_j &\geq 0 && \text{für } 1 \leq i < j \leq 8, \\
 2x_0 + x_1 + \dots + x_8 - x_i - x_j - x_k &\geq 0 && \text{für } 1 \leq i < j < k \leq 8, \\
 3x_0 + x_1 + \dots + x_8 + x_i - x_j &\geq 0 && \text{für } 1 \leq i, j \leq 8 \text{ mit } i \neq j, \\
 4x_0 + x_1 + \dots + x_8 + x_i + x_j + x_k &\geq 0 && \text{für } 1 \leq i < j < k \leq 8, \\
 5x_0 + 2x_1 + \dots + 2x_8 - x_i - x_j &\geq 0 && \text{für } 1 \leq i < j \leq 8, \\
 6x_0 + 2x_1 + \dots + 2x_8 + x_i &\geq 0 && \text{für } 1 \leq i \leq 8,
 \end{aligned}$$

gegeben. Wir wählen  $\gamma = L$  und erhalten für eine Polarisierung  $H$  mit Koordinatenvektor  $a$  bezüglich der Basis (3.1) die Ungleichung

$$H \cdot \gamma = a_0 > 0.$$

Für die eigentlich Transformaten von Geraden gehen wir wie bei  $S_6$  vor. Die zugehörige Basiswechselmatrix ist

$$M_8^1 := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & & & & & & \\ -1 & -1 & -1 & 0 & & & & & & \\ -1 & -1 & 0 & -1 & & & & & & \\ -1 & 0 & -1 & -1 & & & & & & \\ & & & & & & & & & E_5 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten die Kurve  $2L - E + E_1 + E_2 + E_3$  und gehen zur Basis

- $5L - 2(E_3 + \dots + E_8)$ ,
- $2L - E + E_1 + E_2 + E_j$  für  $3 \leq j \leq 8$ ,
- $E_1$ ,
- $E_2$

über. Die Basiswechselmatrix ist

$$M_8^2 := \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & \\ -2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & \\ -2 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & \\ -2 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & \\ -2 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten die Kurve  $3L - E - E_1 + E_2$  und gehen zur Basis

- $4L - E - 2E_1 + E_2$ ,
- $3L - E - E_1 + E_2$ ,
- $L - E_1 - E_j$  für  $3 \leq j \leq 8$ ,
- $E_2$

über. Die Basiswechselmatrix hat die Gestalt

$$M_8^3 := \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten die Kurve  $4L - E - E_1 - E_2 - E_3$  und gehen zur Basis

- $6L - 2(E_1 + E_2 + E_3) - E - E_4$ ,
- $4L - E - E_1 - E_2 - E_3$ ,
- $L - E_1 - E_2$ ,
- $L - E_1 - E_3$ ,
- $L - E_2 - E_3$ ,
- $2L - (E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_j)$  für  $5 \leq i \leq 8$

über. Die zugehörige Basiswechselmatrix ist

$$M_8^4 := \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & -2 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Für die Kurve  $5L - 2E + E_1 + E_2$  betrachten wir die Basis

- $16L - 6E + E_1 + E_2 + E_3$ ,
- $5L - 2E + E_1 + E_2$ ,
- $5L - 2E + E_1 + E_3$ ,
- $5L - 2E + E_2 + E_3$ ,
- $6L - 2E - E_j$  für  $4 \leq j \leq 8$ .

Die zugehörige Basiswechselmatrix hat die Gestalt

$$M_8^5 := \begin{pmatrix} 16 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ -5 & -1 & -1 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ -5 & -1 & -2 & -1 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ -5 & -2 & -1 & -1 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ -6 & -2 & -2 & -2 & -3 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ -6 & -2 & -2 & -2 & -2 & -3 & -2 & -2 & -2 \\ -6 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -3 & -2 & -2 \\ -6 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -3 & -2 \\ -6 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Für die Kurven  $6L - 2E - E_i$  betrachten wir die Basis

- $17L - 6E$ ,
- $6L - 2E - E_j$  für  $1 \leq j \leq 8$ .

Die zugehörige Basiswechselmatrix ist

$$M_8^6 := \begin{pmatrix} 17 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ -6 & -3 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ -6 & -2 & -3 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ -6 & -2 & -2 & -3 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ -6 & -2 & -2 & -2 & -3 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ -6 & -2 & -2 & -2 & -2 & -3 & -2 & -2 & -2 \\ -6 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -3 & -2 & -2 \\ -6 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -3 & -2 \\ -6 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Bezeichnen wir mit  $P_{ijk}(a)$  eine beliebige Permutation des Vektors  $a$  der Gestalt

$$P_{ijk}(a) = (a_0, a_i, a_j, a_k, \text{restliche } a_l),$$

so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 \text{Vol}(\text{Nef}(S_8), H) = & \frac{1}{9a_0} \cdot \left( \sum_{1 \leq i < j \leq 8} \text{Vol}(\text{Nef}(S_7), v_1(M_8^1 \cdot P_{ij}(a))) \right. \\
 & + 2 \cdot \sum_{1 \leq i < j < k \leq 8} \text{Vol}(\text{Nef}(S_7), v_1(M_8^2 \cdot P_{ijk}(a))) \\
 & + 3 \cdot \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq 8 \\ i \neq j}} \text{Vol}(\text{Nef}(S_7), v_1(M_8^3 \cdot P_{ij}(a))) \\
 & + 4 \cdot \sum_{1 \leq i < j < k \leq 8} \text{Vol}(\text{Nef}(S_7), v_1(M_8^4 \cdot P_{ijk}(a))) \\
 & + 5 \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq 8} \text{Vol}(\text{Nef}(S_7), v_1(M_8^5 \cdot P_{ij}(a))) \\
 & \left. + 6 \cdot \sum_{i=1}^8 \text{Vol}(\text{Nef}(S_7), v_i(M_8^6 \cdot a)) \right).
 \end{aligned}$$

### 3.1.2. Bestimmung des maximalen Volumens

Wir wollen uns mit der Frage nach dem größtmöglichen Volumen bei Del-Pezzo-Flächen auseinandersetzen. Für die Flächen  $\mathbb{P}^2$ ,  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  und  $S_1$  haben wir diese schon beantwortet, siehe dazu Beispiel 1.1.2, Beispiel 1.1.3 und Formel (3.2). Für die Flächen  $S_r$  mit  $r \geq 2$  können wir zeigen, dass das maximale Volumen für den antikanonischen Divisor  $-K_{S_r}$  angenommen wird:

**Satz 3.1.7.** *Es sei  $r \geq 2$ . Dann gilt*

$$\text{Vol}(\text{Nef}(S_r)) = \text{Vol}(\text{Nef}(S_r), -K_{S_r}).$$

*Beweis.* Es ist  $-K_{S_r} = 3L - (E_1 + \dots + E_r)$ . Wir behandeln zunächst den Fall  $r = 2$ .

Ein Element  $H = a_0L + a_1E_1 + a_2E_2$  ist genau dann ample, wenn

- $a_0 + a_1 + a_2 > 0$ ,
- $a_i < 0$  für  $1 \leq i \leq 2$

gilt. Für amples  $H = a_0L + a_1E_1 + a_2E_2$  mit  $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$  ist somit  $a_0 \geq 3$  sowie  $(a_0 + a_1) \geq 2$  und  $(a_0 + a_2) \geq 2$ . Mit Volumenformel (3.5) für  $S_2$  folgt, dass das Volumen für  $a_0 = 3$  und  $a_1 = a_2 = -1$  maximal wird. Sei nun  $r > 2$  und  $H = a_0L + a_1E_1 + \dots + a_rE_r$  ample. Dies bedeutet unter anderem, dass

- $a_i < 0$  für  $1 \leq i \leq r$ ,
- $a_0 + a_i + a_j > 0$  für  $1 \leq i < j \leq r$

gilt. Somit haben wir insbesondere  $a_0 \geq 3$ . Wir wählen  $\gamma = L$ , sodass  $H \cdot \gamma = a_0 > 0$  gilt und erhalten mit Proposition 3.1.1 die Formel

$$\text{Vol}(\text{Nef}(S_r), H) = \frac{1}{(r+1) \cdot a_0} \cdot \sum_E (E \cdot \gamma) \cdot \text{Vol}(\text{Nef}(S_{r-1}), \pi_{E*}H),$$

wobei über alle  $(-1)$ -Kurven  $E$  auf  $S_r$  summiert wird. Die Liste der  $(-1)$ -Kurven aus Satz 3.1.2 zeigt, dass stets  $(E \cdot \gamma) \geq 0$  gilt. Da außerdem  $\pi_{E*}(-K_{S_r}) = -K_{S_{r-1}}$  gilt, folgt die Behauptung iterativ.  $\square$

### Bemerkung 3.1.8.

- Die Werte zu den Volumina  $\text{Vol}(\text{Nef}(S_r)) = \text{Vol}(\text{Nef}(S_r), -K_{S_r})$  für  $r \geq 2$  wurden bereits von Derenthal bestimmt. Siehe dazu Tabelle 3.1.
- Es ist  $-K_{\mathbb{P}^2} = 3L$ ,  $-K_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1} = 2f_1 + 2f_2$  und  $-K_{S_1} = 3L - E_1$ . Bei den Del-Pezzo-Flächen  $\mathbb{P}^2$ ,  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  und  $S_1$  wird das maximale Volumen somit nicht für den antikanonischen Divisor angenommen. Siehe dazu Beispiel 1.1.2, Beispiel 1.1.3 und Formel (3.2).

### 3.2. Aufblasungen von Punkten auf einem glatten Kegelschnitt im $\mathbb{P}^2$

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit dem Volumen des Nef-Kegels bei Aufblasungen des  $\mathbb{P}^2$  in  $r$  verschiedenen Punkten auf einem glatten Kegelschnitt  $C$ . Wir bezeichnen diese Flächen mit  $X_C^r$ . In [26] hat Schmitz bereits Formeln bestimmt, mit denen das Nef-Kegel-Volumen bezüglich des antikanonischen Divisors berechnet werden kann. Wir werden Formeln herleiten, die es ermöglichen das Nef-Kegel-Volumen für beliebige Polarisierungen zu bestimmen. Zu beachten ist, dass für  $r \leq 5$  Del-Pezzo-Flächen vorliegen, die wir schon behandelt haben. Ebenso ist zu beachten, dass der antikanonische Divisor auf  $X_C^r$  nur für  $r \leq 5$  ample ist. Jedoch ist er für beliebige  $r$  big (siehe [27]). Nach einem Resultat von Bauer und Schmitz ist das Nef-Kegel-Volumen bezüglich des antikanonischen Divisors somit endlich (siehe [5, Proposition 3.1]). Dies hat Schmitz dazu motiviert, die bereits angesprochenen Formeln zur Volumenberechnung herzuleiten. Für uns haben sich die Flächen  $X_C^r$  aus einem anderen Grund als interessant herausgestellt: Die Frage nach dem maximalen Volumen bezüglich unseres Volumenbegriffs ist auf  $X_C^r$  nicht trivial und erforderte die Entwicklung neuer Methoden.

Wir fassen zunächst einige schon bekannte Resultate zusammen. Unsere Darstellungen können bei Schmitz in [26, Abschnitt 4.1] nachgelesen werden. Abweichungen werden von uns benannt.

**Satz 3.2.1** ([26], Satz 4.2). *Sei  $C \subset \mathbb{P}^2$  ein glatter Kegelschnitt,  $r \geq 5$ , und seien  $p_1, \dots, p_r$  verschiedene Punkte auf  $C$ . Betrachte die Aufblasung  $\pi : X_C^r \rightarrow \mathbb{P}^2$  in diesen Punkten. Die Fläche  $X_C^r$  enthält  $\binom{r+1}{2} + 1$  negative Kurven, nämlich:*

- Die exzeptionellen Kurven  $E_1, \dots, E_r$ ,
- die eigentlich Transformierte von  $C$ ,
- die eigentlich Transformierten  $E_{i,j}$  von Geraden durch Punkte  $p_i$  und  $p_j$  für  $i \neq j$ .

Schmitz hat die exzeptionellen Kurven  $E_1, \dots, E_r$  als  $(-1)$ -Kurven vom *Typ 1* und die übrigen  $(-1)$ -Kurven als vom *Typ 2* bezeichnet. Im Folgenden werden wir auch mit diesen Bezeichnungen arbeiten. Wir interessieren uns dafür, welche Flächen entstehen, wenn  $(-1)$ -Kurven kontrahiert werden.

**Proposition 3.2.2** ([26], Proposition 4.4). *Für  $r \geq 5$  seien  $X_C^r \rightarrow \mathbb{P}^2$  die Aufblasung des  $\mathbb{P}^2$  in  $r$  Punkten auf einem glatten Kegelschnitt  $C$  und  $C_1, \dots, C_{r-1}$  disjunkte  $(-1)$ -Kurven vom *Typ 2*. Dann resultiert aus der Kontraktion dieser Kurven die Hirzebruchfläche  $X_{r-4}$ .*

Wir bezeichnen für  $k \neq 3$  mit  $X_{C,k}^r$  die aus der Kontraktion von  $k$  disjunkten Kurven vom *Typ 2* resultierende Fläche. Mit  $X_{C,3}^r$  bezeichnen wir die Fläche, die durch Kontraktion von drei Kurven der Gestalt  $E_{i,j}, E_{i,k}, E_{i,l}$  mit paarweise verschiedenen  $1 \leq i, j, k, l \leq r$  entsteht. Weiter bezeichnen wir eine  $(-1)$ -Kurve auf einer Fläche  $X_{C,l}^r$  als Kurve vom *Typ 1* bzw. *2*, wenn sie Bildkurve einer Kurve vom *Typ 1* bzw. *2* auf  $X_C^r$  unter der zugehörigen Kontraktionsabbildung ist (mit diesen Bezeichnungen hat Schmitz nicht gearbeitet). Als Basis von  $\text{NS}(X_C^r)$  haben wir zum einen die Klassen von  $L = \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1), E_1, \dots, E_r$  zur

Verfügung und für  $r \geq 5$  wegen Proposition 3.2.2 zum anderen  $C, f, C_1, \dots, C_{r-1}$ , wobei wir  $X_C^r$  dabei als Aufblasung der Hirzebruchfläche  $X_{r-4}$  verstehen ( $X_{r-4}$  ist eine Regelfläche mit  $e = r - 4$ , vergleiche Beispiel 1.1.4). Die  $C_i$  bezeichnen disjunkte Kurven vom Typ 2. Im Folgenden gehen wir dabei ohne Einschränkung von  $C_i = E_{1,i+1} = L - E_1 - E_{i+1}$  aus. Die Fläche  $X_{C,1}^r$  geht aus  $X_C^r$  durch Kontraktion einer  $(-1)$ -Kurve vom Typ 2 hervor, ohne Einschränkung sei diese  $C_1$ . Für  $r \geq 5$  sind die negativen Kurven auf  $X_{C,1}^r$  dann gerade die Bilder der Kurven

- $C = 2L - (E_1 + \dots + E_r)$ ,
- $E_j$  für  $3 \leq j \leq r$ ,
- $C_{j-1} = E_{1,j} = L - E_1 - E_j$  für  $3 \leq j \leq r$ ,
- $E_{2,j} = L - E_2 - E_j$  für  $3 \leq j \leq r$ .

Im Folgenden bezeichnen wir der Einfachheit halber die Bildkurven wie ihre Urbilder. Für  $\text{NS}(X_{C,1}^r)$  haben wir neben der Hirzebruch-Basis die Basis  $f_1, f_2, E_3, \dots, E_r$  zur Verfügung, da sich  $X_{C,1}^r$  auch als Aufblasung von  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  verstehen lässt (siehe [26, Unterabschnitt 4.1.1]). Die negativen Kurven auf  $X_{C,1}^r$  sind in dieser Basis

- $f_1 + f_2 - (E_3 + \dots + E_r)$ ,
- $E_j$  für  $3 \leq j \leq r$  (Typ 1),
- $f_1 - E_j$  für  $3 \leq j \leq r$  (Typ 2),
- $f_2 - E_j$  für  $3 \leq j \leq r$  (Typ 2).

Die Fläche  $X_{C,2}^r$  geht aus  $X_{C,1}^r$  durch Kontraktion einer weiteren  $(-1)$ -Kurve vom Typ 2 hervor, ohne Einschränkung sei diese  $C_2 = L - E_1 - E_3$ . Die negativen Kurven auf  $X_{C,2}^r$  sind dann gerade die Bilder der Kurven

- $C$ ,
- $E_j$  für  $4 \leq j \leq r$ ,
- $C_{j-1} = E_{1,j} = f_1 - E_j$  für  $4 \leq j \leq r$ ,
- $E_{2,3} = f_2 - E_3$ .

In Hirzebruch-Basis  $C, f, C_3, \dots, C_{r-1}$  sind diese

- $C$ ,
- $f - C_j$  für  $3 \leq j \leq r - 1$  (Typ 1),
- $C_j$  für  $3 \leq j \leq r - 1$  (Typ 2),
- $C + (r - 4)f - (C_3 + \dots + C_{r-1})$  (Typ 2).

Die Flächen  $X_{C,l}^r$  mit  $l \geq 3$  gehen aus  $X_{C,2}^r$  durch Kontraktion von  $l-2$  weiteren Kurven aus der Menge  $\{C_3, \dots, C_{r-1}\}$  hervor, ohne Einschränkung seien diese  $C_3, \dots, C_l$ . Die negativen Kurven auf  $X_{C,l}^r$  sind dann in Hirzebruch-Basis

- $C$ ,
- $f - C_j$  für  $l + 1 \leq j \leq r - 1$  (Typ 1),
- $C_j$  für  $l + 1 \leq j \leq r - 1$  (Typ 2).

Insgesamt ergibt sich folgendes Bild (vgl. [26, Abbildung 4.1]):

$$\begin{array}{cccccccc}
 X_C^r & \rightarrow & X_{C,1}^r & \rightarrow & X_{C,2}^r & \rightarrow & X_{C,3}^r & \rightarrow & X_{C,4}^r & \rightarrow & \dots & \rightarrow & X_{r-4} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 X_C^{r-1} & \rightarrow & X_{C,1}^{r-1} & \rightarrow & X_{C,2}^{r-1} & \rightarrow & X_{C,3}^{r-1} & \rightarrow & X_{C,4}^{r-1} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & X_{r-5} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 X_C^{r-2} & \rightarrow & X_{C,1}^{r-2} & \rightarrow & X_{C,2}^{r-2} & \rightarrow & X_{C,3}^{r-2} & \rightarrow & X_{C,4}^{r-2} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & X_{r-6} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 X_C^6 & \rightarrow & X_{C,1}^6 & \rightarrow & X_{C,2}^6 & \rightarrow & X_{C,3}^6 & \rightarrow & X_{C,4}^6 & \rightarrow & & & X_2 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 X_C^5 = S_5 & \rightarrow & X_{C,1}^5 = S_4 & \rightarrow & X_{C,2}^5 = S_3 & \rightarrow & X_{C,3}^5 = S_2 & \rightarrow & X_{C,4}^5 = S_1 & & & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 X_C^4 = S_4 & \rightarrow & X_{C,1}^4 = S_3 & \rightarrow & X_{C,2}^4 = S_2 & \rightarrow & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & & & & & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & \\
 X_C^3 = S_3 & \rightarrow & X_{C,1}^3 = S_2 & \rightarrow & X_{C,2}^3 = S_1 & & & & & & & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & & & & & & & & & \\
 X_C^2 = S_2 & \rightarrow & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & & & & & & & & & & \\
 \downarrow & & & & & & & & & & & & \\
 X_C^1 = S_1 & & & & & & & & & & & & \\
 \downarrow & & & & & & & & & & & & \\
 \mathbb{P}^2 & & & & & & & & & & & & 
 \end{array}$$

In vertikaler Richtung wird die Kontraktion von Kurven vom Typ 1 dargestellt, in horizontaler Richtung die Kontraktion von Kurven vom Typ 2. Schmitz hat bereits Formeln bestimmt, mit denen sich das Nef-Kegel-Volumen bezüglich des antikanonischen Divisors rekursiv bestimmen lässt (siehe dazu [26, Satz 4.6]). Wir wollen nun Formeln herleiten, mit denen sich das Nef-Kegel-Volumen für beliebige Polarisierungen rekursiv bestimmen lässt. Dazu verwenden wir, wie schon bei den Del-Pezzo-Flächen, Proposition 3.1.1.

### 3.2.1. Formeln zur Volumenberechnung

**Volumen des Nef-Kegels bei der Hirzebruchfläche  $X_{r-4}$**  Die Hirzebruchfläche  $X_{r-4}$  ist eine Regelfläche mit  $e = r - 4$ . Für  $r \geq 5$  ergibt sich mit den Überlegungen aus Beispiel 1.1.4 die Formel

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_{r-4}), aC + bf) = \frac{1}{2ab} \tag{3.16}$$

und

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_{r-4})) = \frac{1}{2(r-3)}.$$



**Volumen des Nef-Kegels bei den Flächen  $X_{C,l}^r$  für  $3 \leq l \leq r - 2$**  Wir arbeiten mit der Hirzebruch-Basis  $C, f, C_{l+1}, \dots, C_{r-1}$ . Nach Bemerkung 3.1.6 wird der Nef-Kegel durch die negativen Kurven bestimmt und ist somit bezüglich der Hirzebruch-Basis durch die Ungleichungen

$$(4 - r)x_1 + x_2 \geq 0, \quad (3.17)$$

$$x_1 + x_i \geq 0 \quad \text{für } 3 \leq i \leq r + 1 - l, \quad (3.18)$$

$$x_i \leq 0 \quad \text{für } 3 \leq i \leq r + 1 - l \quad (3.19)$$

gegeben. Als Notation verwenden wir für  $a \in \mathbb{R}^{r+1-l}$ :

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,l}^r), a) := \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,l}^r), a_1C + a_2f + a_3C_{l+1} + \dots + a_{r+1-l}C_{r-1}).$$

Wir wählen  $\gamma = C + (r - 4)f - (C_{l+1} + \dots + C_{r-1})$  (vgl. [26, Beweis Satz 4.6]) und erhalten für eine Polarisierung  $H$  mit Koordinatenvektor  $a$  bezüglich der Hirzebruch-Basis die Ungleichungen

$$\begin{aligned} H \cdot \gamma &= a_2 + \dots + a_{r+1-l} \\ &\stackrel{3.17}{>} (r - 4)a_1 + a_3 + \dots + a_{r+1-l} \stackrel{3.18}{>} 0. \end{aligned}$$

Außerdem gilt  $\gamma \cdot C = 0$  und  $\gamma \cdot (f - C_j) = 0$  für  $l + 1 \leq j \leq r - 1$ . Für  $r \geq 5$  und  $3 \leq l \leq r - 3$  erhalten wir mit Proposition 3.1.1 die Formel

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,l}^r), H) &= \frac{1}{(r + 1 - l) \cdot (a_2 + \dots + a_{r+1-l})} \\ &\quad \cdot \sum_{j=3}^{r+1-l} \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,l+1}^r), w_j(a)). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Dabei bezeichnet  $w_j(a)$  den Vektor  $(a_1, \dots, a_{r+1-l})$  ohne den Eintrag  $a_j$ . Für  $l = r - 2$  haben wir

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,l}^r), H) = \frac{1}{3(a_2 + a_3)} \cdot \text{Vol}(\text{Nef}(X_{r-4}), w_3(a)).$$

**Volumen des Nef-Kegels bei der Fläche  $X_{C,2}^r$**  Wir arbeiten erneut mit der Hirzebruch-Basis  $C, f, C_3, \dots, C_{r-1}$ . Der Nef-Kegel ist bezüglich dieser durch

$$(4 - r)x_1 + x_2 \geq 0, \quad (3.21)$$

$$x_1 + x_i \geq 0 \quad \text{für } 3 \leq i \leq r - 1, \quad (3.22)$$

$$x_i \leq 0 \quad \text{für } 3 \leq i \leq r - 1, \quad (3.23)$$

$$x_2 + \dots + x_{r-1} \geq 0 \quad (3.24)$$

gegeben. Als Notation verwenden wir für  $a \in \mathbb{R}^{r-1}$ :

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,2}^r), a) := \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,2}^r), a_1C + a_2f + a_3C_3 + \dots + a_{r-1}C_{r-1}).$$

Wir wählen  $\gamma = C + (r - 4)f + (4 - r)C_3$  (vgl. [26, Beweis Satz 4.6]) und erhalten für eine Polarisierung  $H$  mit Koordinatenvektor  $a$  bezüglich der Hirzebruch-Basis die Ungleichungen

$$\begin{aligned} H \cdot \gamma &= a_2 + (r - 4)a_3 \\ &\stackrel{3.21}{>} (r - 4)a_1 + (r - 4)a_3 \stackrel{3.22}{>} 0. \end{aligned}$$

Weiter gilt  $0 = \gamma \cdot C = \gamma \cdot (C + (r - 4)f - (C_3 + \dots + C_{r-1}))$ . Für die Kontraktion der Kurve  $f - C_3$  gehen wir zur Basis

- $C + f - C_3$ ,
- $f$ ,
- $f - C_3$ ,
- $C_i$  für  $4 \leq i \leq r - 1$ .

über. Die Basiswechselmatrix hat die Gestalt

$$M_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 1 & & \\ -1 & 0 & -1 & & \\ & & & E_{r-4} & \end{pmatrix}.$$

Bezeichnen wir mit  $P_j(a)$  den Vektor, der entsteht, wenn man bei  $a$  den Eintrag  $a_j$  mit dem Eintrag  $a_3$  tauscht, so ergibt sich mit Proposition 3.1.1 für  $r \geq 6$  die Formel

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,2}^r), H) &= \frac{1}{(r - 1)(a_2 + (r - 4)a_3)} \cdot \left( (r - 4) \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,3}^r), w_3(a)) \quad (3.25) \right. \\ &\quad + (5 - r) \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,2}^{r-1}), w_3(M_2 \cdot a)) \\ &\quad \left. + \sum_{j=4}^{r-1} \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,2}^{r-1}), w_3(M_2 \cdot P_j(a))) \right). \end{aligned}$$

Im Fall  $r = 5$  gehen wir zur Basis

- $C + 2f - C_3 - C_4$ ,
- $C + f - C_3 - C_4$ ,
- $f - C_3$ ,
- $f - C_4$

von  $\text{NS}(X_{C,2}^5) = \text{NS}(S_3)$  über. Die zugehörige Basiswechselmatrix ist

$$M'_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,2}^5), H) = \text{Vol}(\text{Nef}(S_3), M_2' \cdot a). \quad (3.26)$$

Für spätere Zwecke wird es sich als nützlich erweisen noch eine zweite Formel zu haben. Dazu wählen wir  $\gamma = C + (r-4)f - (C_4 + \dots + C_{r-1})$  und erhalten für  $r \geq 6$  die Formel

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,2}^r), H) = & \frac{1}{(r-1)(a_2 + a_4 + \dots + a_{r-1})} \cdot \left( \sum_{j=4}^{r-1} \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,3}^r), w_j(a)) \right. \\ & \left. + \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,2}^{r-1}), w_3(M_2 \cdot a)) \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

**Volumen des Nef-Kegels bei der Fläche  $X_{C,1}^r$**  Wir arbeiten mit der  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ -Basis  $f_1, f_2, E_3, \dots, E_r$ . Der Nef-Kegel ist bezüglich dieser durch

$$x_1 + \dots + x_r \geq 0, \quad (3.28)$$

$$x_1 + x_i \geq 0 \quad \text{für } 3 \leq i \leq r, \quad (3.29)$$

$$x_2 + x_i \geq 0 \quad \text{für } 3 \leq i \leq r, \quad (3.30)$$

$$x_i \leq 0 \quad \text{für } 3 \leq i \leq r \quad (3.31)$$

gegeben. Als Notation verwenden wir für  $a \in \mathbb{R}^r$ :

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,1}^r), a) := \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,1}^r), a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 E_3 + \dots + a_r E_r).$$

Wir wählen  $\gamma = f_1 + f_2 - E_3 - E_4$  und erhalten für eine Polarisierung  $H$  mit Koordinatenvektor  $a$  bezüglich der  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ -Basis die Ungleichung

$$H \cdot \gamma = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \stackrel{3.29}{>} 0.$$

Für die Kontraktion der Kurven  $f_2 - E_i$  gehen wir zu der Basis

- $C = f_1 + f_2 - (E_3 + \dots + E_r)$ ,
- $f_2$ ,
- $f_2 - E_i \quad \text{für } 3 \leq i \leq r$

über. Die zugehörige Basiswechselmatrix hat die Gestalt

$$M_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & 0 \\ r-3 & 1 & \dots & & 1 \\ -1 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & -E_{r-2} & \\ -1 & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Für  $r \geq 4$  ergibt sich mit Proposition 3.1.1 die Formel

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,1}^r), H) &= \frac{1}{r(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)} \cdot \left( \sum_{i=3}^4 \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,1}^{r-1}), w_i(a)) \right. \\ &\quad + \sum_{j=5}^r \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,2}^r), w_j(M_1 \cdot a)) \\ &\quad \left. + \sum_{j=5}^r \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,2}^r), w_j(M_1 \cdot T(a))) \right), \end{aligned} \quad (3.32)$$

wobei  $T(a)$  den Vektor bezeichnet, der aus  $a$  durch Tausch von  $a_1$  und  $a_2$  hervorgeht. Für  $r = 3$  erhalten wir mit  $\gamma = f_1 + f_2 - E_3$  die Formel

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,1}^3), H) = \frac{1}{3(a_1 + a_2 + a_3)} \cdot \text{Vol}(\text{Nef}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1), a_1 f_1 + a_2 f_2).$$

**Volumen des Nef-Kegels bei der Fläche  $X_C^r$**  Wir arbeiten mit der Standardbasis  $L, E_1, \dots, E_r$ . Der Nef-Kegel ist bezüglich dieser durch

$$x_i \leq 0 \quad \text{für } 1 \leq i \leq r, \quad (3.33)$$

$$x_0 + x_i + x_j \geq 0 \quad \text{für } 1 \leq i < j \leq r, \quad (3.34)$$

$$2x_0 + x_1 + \dots + x_r \geq 0 \quad (3.35)$$

gegeben. Als Notation verwenden wir für  $a = (a_0, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$ :

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_C^r), a) := \text{Vol}(\text{Nef}(X_C^r), a_0 L + a_1 E_1 + \dots + a_r E_r).$$

Wir wählen  $\gamma = 2L - (E_1 + \dots + E_r)$  und erhalten für eine Polarisierung  $H$  mit Koordinatenvektor  $a = (a_0, \dots, a_r)$  bezüglich der Standardbasis die Ungleichung

$$H \cdot \gamma = 2a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \stackrel{3.34}{>} 0.$$

Für die Kontraktion der Kurve  $L - E_1 - E_2$  gehen wir zur Basis

- $L - E_1, L - E_2,$
- $L - E_1 - E_2,$
- $E_i$  für  $3 \leq i \leq r$

über. Die zugehörige Basiswechsellmatrix hat die Gestalt

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & & \\ 1 & 1 & 0 & & \\ -1 & -1 & -1 & & \\ & & & & \\ & & & & E_{r-2} \end{pmatrix}.$$

Bezeichnen wir mit  $P_{ij}(a)$  eine beliebige Permutation des Vektors  $a$  der Gestalt

$$P_{ij}(a) = (a_0, a_i, a_j, \text{restliche } a_l),$$

so ergibt sich für  $r \geq 4$ :

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\text{Nef}(X_C^r), H) &= \frac{1}{(r+1)(2a_0 + a_1 + \dots + a_4)} \cdot \left( \sum_{i=1}^4 \text{Vol}(\text{Nef}(X_C^{r-1}), v_i(a)) \right. \\ &\quad + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=5}^r \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,1}^r), v_2(M \cdot P_{ij}(a))) \\ &\quad \left. + 2 \cdot \sum_{5 \leq i < j \leq r} \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,1}^r), v_2(M \cdot P_{ij}(a))) \right). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Dabei sei

$$v_i(a) = (a_0, a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^r.$$

Für  $r \leq 3$  haben wir Formeln aus dem vorigen Abschnitt zu Del-Pezzo-Flächen.

### 3.2.2. Bestimmung des maximalen Volumens

In diesem Unterabschnitt beschäftigen wir uns mit Frage nach dem maximalen Volumen bei den Flächen  $X_C^r$  und  $X_{C,l}^r$  für  $l \geq 1$ . Dazu stellen wir zunächst einige theoretische Überlegungen an, die in einer allgemeineren Situation richtig sind. Es sei  $X$  eine glatte projektive Fläche über  $\mathbb{C}$ .

**Lemma 3.2.3.** *Sei  $H \in \text{NS}(X)$  eine Polarisierung und  $D \in \text{NS}(X)$  nef. Dann gilt*

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X), H + D) \leq \text{Vol}(\text{Nef}(X), H).$$

*Beweis.* Wir zeigen, dass der Kegelstumpf zu  $H + D$  in dem zu  $H$  enthalten ist.

Sei  $L \in \text{Nef}(X) \cap (H + D)^{\leq 1}$ . Dann gilt

$$L \cdot H + L \cdot D = L \cdot (H + D) \leq 1.$$

Wegen  $L \cdot D \geq 0$  und  $L \cdot H \geq 0$  folgt  $L \cdot H \leq 1$ , also  $L \in \text{Nef}(X) \cap H^{\leq 1}$ . Somit haben wir

$$\text{Nef}(X) \cap (H + D)^{\leq 1} \subset \text{Nef}(X) \cap H^{\leq 1},$$

womit die Behauptung folgt. □

Es ist nun klar, dass das maximale Volumen für eine Polarisierung angenommen wird, die sich nicht als Summe einer amplen Klasse und einer nef-Klasse ungleich Null schreiben lässt. Dies führt zu folgender Definition:

**Definition 3.2.4.** Sei  $H \in \text{NS}(X)$  eine Polarisierung. Wir nennen  $H$  *minimal*, wenn  $H - D$  für keine nef-Klasse  $D \in \text{NS}(X)$  mit  $D \neq 0$  ampel ist.

Nach obigen Überlegungen wird das größte Volumen für eine minimale Polarisierung angenommen. Um die Volumina zu verschiedenen (minimalen) Polarisierungen vergleichen zu können, wird sich auch das folgende Lemma als nützlich erweisen.

**Lemma 3.2.5.** *Seien  $H_1$  und  $H_2$  Polarisierungen auf  $X$  mit*

$$((H_2 - H_1) \cdot L) \geq 0 \quad \text{für alle } L \in \text{Nef}(X).$$

*Dann gilt*

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X), H_1) \geq \text{Vol}(\text{Nef}(X), H_2).$$

*Beweis.* Wir zeigen, dass der Kegelstumpf zu  $H_2$  in dem zu  $H_1$  enthalten ist. Sei  $L \in \text{Nef}(X) \cap H_2^{\leq 1}$ . Wir haben dann

$$(H_1 \cdot L) \stackrel{\text{Vor.}}{\leq} (H_2 \cdot L) \leq 1$$

und somit  $L \in \text{Nef}(X) \cap H_1^{\leq 1}$ . □

**Bemerkung 3.2.6.** Mit dem Begriff der minimalen Polarisierung lässt sich ein alternativer Beweis von Satz 3.1.7 angeben. Sei  $r \geq 2$  und  $H = a_0L + a_1E_1 + \dots + a_rE_r$  eine beliebige Polarisierung auf  $S_r$ . Über die Ungleichungen, die  $\text{Nef}(S_r)$  bestimmen, lässt sich leicht nachrechnen, dass

$$H - (-K_{S_r}) = (a_0 - 3)L + \sum_{i=1}^r (a_i + 1)E_i$$

nef ist. Also ist  $-K_{S_r}$  die einzige minimale Polarisierung auf  $S_r$ . Nach den Überlegungen aus diesem Unterabschnitt wird das maximale Volumen somit für  $-K_{S_r}$  angenommen.

**Maximales Volumen bei  $X_{C,l}^r$  für  $3 \leq l \leq r - 2$**  Im gesamten Paragraphen arbeiten wir mit Koordinatenvektoren bezüglich der Hirzebruch-Basis von  $\text{NS}_{\mathbb{R}}(X_{C,l}^r)$ . Ebenso arbeiten wir mit den Ungleichungen, die  $\text{Nef}(X_{C,l}^r)$  bzw.  $\text{Amp}(X_{C,l}^r)$  bestimmen, siehe dazu (3.17)-(3.19). Mit unserem neuen Begriff der minimalen Polarisierung kommen wir hier schnell zu einem Ergebnis:

**Proposition 3.2.7.** *Für  $3 \leq l \leq r - 2$  gilt*

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,l}^r)) = \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,l}^r), 2C + (2r - 7)f - (C_{l+1} + \dots + C_{r-1})).$$

*Beweis.* Wir arbeiten mit Koordinatenvektoren bezüglich der Hirzebruch-Basis von  $\text{NS}_{\mathbb{R}}(X_{C,l}^r)$  und zeigen, dass  $H_1 := (2, 2r - 7, -1, \dots, -1)$  die einzige minimale Polarisierung ist. Dafür genügt es zu zeigen, dass für jede ample Klasse  $H$  die Klasse  $H - H_1$  nef ist. Sei also  $H = (a_1, \dots, a_{r+1-l})$  ample. Dann ist

$$H - H_1 = (a_1 - 2, a_2 - 2r + 7, a_3 + 1, \dots, a_{r+1-l} + 1) =: (x_1, \dots, x_{r+1-l}) =: N.$$

Da  $H$  ample ist, haben wir  $(4 - r)x_1 + x_2 = (4 - r)a_1 + a_2 - 1 \stackrel{3.17}{\geq} 0$ . Weiter haben wir für  $i \geq 3$  nach (3.18) zum einen  $x_1 + x_i = a_1 + a_i - 1 \geq 0$  und nach (3.19) zum anderen  $x_i = a_i + 1 \leq 0$ . Es folgt, dass  $N$  nef ist. □

Wir sind in diesem Fall dazu in der Lage den Wert des maximalen Volumens explizit anzugeben:

**Proposition 3.2.8.** *Es sei  $H_{r,t} = 2C + (2r - 7)f - (C_{r-t+1} + \dots + C_{r-1})$  für  $t \in \{2, \dots, r - 3\}$ . Dann gilt:*

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,r-t}^r), H_{r,t}) = \frac{1}{2t(t+1)(2r-6-t) \cdot \dots \cdot (2r-7)}.$$

*Beweis.* Nach Formel (3.20) und der Formel für die Hirzebruchfläche (3.16) haben wir

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,r-2}^r), H_{r,2}) &= \frac{1}{3(2r-8)} \cdot \text{Vol}(\text{Nef}(X_{r-4}), (2, 2r-7)) \\ &= \frac{1}{3(2r-8)} \cdot \frac{1}{4(2r-7)} \\ &= \frac{1}{12(2r-8)(2r-7)}. \end{aligned}$$

Die Behauptung gelte für  $t - 1$ .

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,r-t}^r), H_{r,t}) &\stackrel{3.20}{=} \frac{1}{(t+1)(2r-7-(t-1))} \cdot (t-1) \cdot \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,r-(t-1)}^r), H_{r,t-1}) \\ &= \frac{t-1}{(t+1)(2r-6-t)2(t-1)t(2r-6-(t-1)) \cdot \dots \cdot (2r-7)} \\ &= \frac{1}{2t(t+1)(2r-6-t) \cdot \dots \cdot (2r-7)}. \end{aligned}$$

□

**Maximales Volumen bei  $X_{C,2}^r$**  Wir bestimmen zunächst die minimalen Polarisierungen. Im gesamten Paragraphen arbeiten wir mit Koordinatenvektoren bezüglich der Hirzebruch-Basis von  $\text{NS}_{\mathbb{R}}(X_{C,2}^r)$ . Ebenso arbeiten wir mit den Ungleichungen, die  $\text{Nef}(X_{C,2}^r)$  bzw.  $\text{Amp}(X_{C,2}^r)$  bestimmen, siehe dazu (3.21)-(3.24).

**Lemma 3.2.9.** *Die minimalen Polarisierungen auf  $X_{C,2}^r$  sind*

$$H_k := (k+1, (r-4)(k+1) + 1, -k, \dots, -k)$$

für  $1 \leq k \leq r - 4$ .

*Beweis.* Man rechnet leicht nach, dass die  $H_k$  ample sind. Wir zeigen zunächst die Minimalität. Sei  $A = H_k - N$  ample für eine nef-Klasse  $N = (x_1, \dots, x_{r-1})$ . Es genügt  $N = 0$  zu zeigen. Für  $3 \leq i \leq r - 1$  haben wir

$$0 < \stackrel{3.22}{a_1 + a_i} = (k+1 - x_1) + (-k - x_i) = 1 - (x_1 + x_i)$$

und somit  $0 = x_1 + x_i$  wegen (3.22). Weiter haben wir

$$\begin{aligned} 0 < \stackrel{3.21}{(4-r)a_1 + a_2} &= (4-r)(k+1 - x_1) + (r-4)(k+1) + 1 - x_2 \\ &= -(4-r)x_1 - x_2 + 1 \end{aligned}$$

und folglich  $(4-r)x_1 + x_2 < 1$ , also  $(4-r)x_1 + x_2 = 0$  wegen (3.21). Mit (3.24) erhalten wir die Ungleichung

$$0 \leq x_2 + x_3 + \dots + x_{r-1} = (r-4)x_1 + x_3 + \dots + x_{r-1} = x_i$$

für  $3 \leq i \leq r-1$  und somit  $x_3 = \dots = x_{r-1} = 0$  wegen (3.23). Schließlich folgt auch  $x_1 = x_2 = 0$ .

Sei nun  $A = (a_1, \dots, a_{r-1})$  ampel. Wir zeigen, dass ein  $k \in \{1, \dots, r-4\}$  existiert, für das  $A - H_k$  nef ist, womit die Behauptung folgt. Damit  $A - H_k$  nef ist, müssen die Bedingungen

1.  $(4-r)(a_1 - (k+1)) + a_2 - (r-4)(k+1) - 1 = (4-r)a_1 + a_2 - 1 \geq 0$ ,
2.  $a_1 - k - 1 + a_i + k = a_1 + a_i - 1 \geq 0$  für  $3 \leq i \leq r-1$ ,
3.  $a_i + k \leq 0$  für  $3 \leq i \leq r-1$ ,
4.  $a_2 - (r-4)(k+1) - 1 + a_3 + \dots + a_{r-1} + (r-3)k = a_2 + \dots + a_{r-1} + k - (r-3) \geq 0$

gelten. Die ersten beiden Bedingungen sind automatisch erfüllt, da  $A$  ampel ist. Die letzten beiden Bedingungen sind erfüllt, wenn ein  $k$  mit

$$-a_i \geq k \geq r-3 - (a_2 + \dots + a_{r-1}) \quad \text{für } 3 \leq i \leq r-1$$

existiert. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$a_2 + \dots + a_{r-1} - a_i \geq r-3 \quad \text{für } 3 \leq i \leq r-1$$

gilt. Wir haben allerdings

$$\begin{aligned} a_2 + \dots + a_{r-1} - a_i &\stackrel{3.21}{\geq} (r-4)a_1 + 1 + a_3 + \dots + a_{r-1} - a_i \\ &= (a_1 + a_3) + \dots + (a_1 + a_{i-1}) + (a_1 + a_{i+1}) + \dots + (a_1 + a_{r-1}) + 1 \\ &\stackrel{3.22}{\geq} (r-4) + 1 = r-3. \end{aligned}$$

□

Schließlich erhalten wir:

**Proposition 3.2.10.** *Es gilt*

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,2}^r)) = \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,2}^r), H_1).$$

*Beweis.* Wir arbeiten mit Lemma 3.2.5. Für  $L = (x_1, \dots, x_{r-1}) \in \text{Nef}(X_{C,2}^r)$  haben wir

$$((H_k - H_1) \cdot L) = (k-1)(x_2 + \dots + x_{r-1}) \stackrel{3.24}{\geq} 0$$

und somit  $\text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,2}^r), H_1) \geq \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,2}^r), H_k)$  für  $1 \leq k \leq r-4$ . □



**Maximales Volumen bei  $X_{C,1}^r$**  Wir bestimmen zunächst die minimalen Polarisierungen. Im gesamten Paragraphen arbeiten wir mit Koordinatenvektoren bezüglich der  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ -Basis von  $\text{NS}_{\mathbb{R}}(X_{C,1}^r)$ . Ebenso arbeiten wir mit den Ungleichungen, die  $\text{Nef}(X_{C,1}^r)$  bzw.  $\text{Amp}(X_{C,1}^r)$  bestimmen, siehe dazu (3.28)-(3.31).

Da die Volumenfunktion

$$a = (a_1, \dots, a_r) \mapsto \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,1}^r), a)$$

in  $a_3, \dots, a_r$  symmetrisch ist, gehen wir bei Polarisierungen  $H = (a_1, \dots, a_r)$  immer von  $a_3 \leq a_4 \leq \dots \leq a_r$  aus. Wir sprechen dabei von geordneten Polarisierungen. Außerdem gehen wir von  $r \geq 6$  aus, da für  $r < 6$  Del-Pezzo-Flächen vorliegen, die wir schon behandelt haben.

**Proposition 3.2.11.** *Die minimalen geordneten Polarisierungen auf  $X_{C,1}^r$  sind*

$$H_{k,l} := (l, k + (r - 2) - l, -k, -1, \dots, -1)$$

für  $1 \leq k \leq r - 4$  und  $k + 1 \leq l \leq r - 3$ .

*Beweis.* Man rechnet leicht nach, dass die  $H_{k,l}$  ample sind. Wir zeigen zunächst die Minimalität von  $H_{k,l}$ . Sei  $A = H_{k,l} - N$  ample für eine nef-Klasse  $N = (x_1, \dots, x_r)$ . Es genügt  $N = 0$  zu zeigen. Für  $i \geq 4$  folgt mit (3.31) die Ungleichung

$$a_i = -1 - x_i < 0$$

und somit  $x_i = 0$ . Analog folgt  $x_3 > -k$ . Wegen (3.28) haben wir dann

$$\begin{aligned} 0 &< a_1 + \dots + a_r \\ &= l - x_1 + k + (r - 2) - l - x_2 - k - x_3 - (r - 3) \\ &= 1 - (x_1 + x_2 + x_3), \end{aligned}$$

also  $1 > x_1 + x_2 + x_3 \geq 0$  und folglich  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ . Schließlich folgt

$$0 \leq x_2 \stackrel{3.29}{\leq} x_2 + x_1 + x_3 = 0,$$

also  $x_2 = 0$ . Analog erhalten wir  $x_1 = 0$  und somit auch  $x_3 = 0$ , also  $N = 0$ .

Sei nun  $H = (a_1, \dots, a_r)$  eine beliebige geordnete Polarisierung. Wir zeigen, dass  $k, l$  mit  $1 \leq k \leq r - 4$  und  $k + 1 \leq l \leq r - 3$  existieren, für die  $H - H_{k,l}$  nef ist. Damit  $H - H_{k,l}$  nef ist, müssen die Bedingungen

1.  $a_3 + k \leq 0$ ,
2.  $a_i + 1 \leq 0$  für  $i \geq 4$ ,
3.  $a_1 - l + a_3 + k \geq 0$ ,
4.  $a_1 - l + a_i + 1 \geq 0$  für  $i \geq 4$ ,
5.  $a_2 - (k + (r - 2) - l) + a_3 + k = a_2 + a_3 - (r - 2) + l \geq 0$ ,

$$6. \ a_2 - (k + (r - 2) - l) + a_i + 1 = a_2 + a_i - (r - 3) + l - k \geq 0 \quad \text{für } i \geq 4,$$

$$7. \ a_1 - l + a_2 - (k + (r - 2) - l) + a_3 + k + (a_4 + 1) + \dots + (a_r + 1) = a_1 + \dots + a_r - 1 \geq 0$$

gelten. Die zweite und siebte Bedingung sind automatisch erfüllt, da  $H$  ample ist. Die erste Bedingung ist äquivalent zu  $k \leq -a_3$ . Die dritte und sechste Bedingung sind äquivalent zu

$$a_1 + a_3 \geq l - k \geq r - 3 - a_2 - a_4. \quad (*)$$

Die vierte und fünfte Bedingung sind äquivalent zu

$$a_1 + a_4 + 1 \geq l \geq r - 2 - a_2 - a_3. \quad (**)$$

Wir wählen  $l = \min \{a_1 + a_4 + 1, r - 3\}$ . Wegen  $a_1 + a_4 \geq 1$  und  $r \geq 5$  ist  $l \geq 2$ .

Fall 1:  $l = a_1 + a_4 + 1 \leq r - 3$ . Wir wählen  $k = a_4 - a_3 + 1$ . Wegen  $a_3 \leq a_4$  ist  $k \geq 1$ . Es ist außerdem  $l - k = a_1 + a_3$  und es gilt

$$\begin{aligned} a_1 + \dots + a_4 &\stackrel{3.28}{\geq} 1 - a_5 - \dots - a_r \\ &\stackrel{3.31}{\geq} 1 + r - 4 = r - 3. \end{aligned}$$

Die Bedingungen (\*) und (\*\*) sind somit erfüllt. Wegen  $a_4 \leq -1$  ist auch  $k \leq -a_3$ . Wegen  $a_1 + a_3 \geq 1$  haben wir

$$k + 1 = a_4 - a_3 + 2 \leq a_1 + a_4 + 1 = l \leq r - 3,$$

also  $k \leq r - 4$  und  $k + 1 \leq l$ .

Fall 2:  $l = r - 3 < a_1 + a_4 + 1$ . Wegen  $a_2 + a_3 \geq 1$  gilt (\*\*).

i. Ist  $r - 3 - a_1 - a_3 \geq 1$ , so wählen wir  $k = r - 3 - a_1 - a_3 \stackrel{3.29}{\leq} r - 4 = l - 1$ . Wie oben folgt, dass (\*) erfüllt ist. Wegen  $a_4 \leq -1$  haben wir

$$r - 3 < a_1 + a_4 + 1 \leq a_1,$$

also  $k \leq a_1 - a_1 - a_3 = -a_3$ .

ii. Ist  $r - 3 - a_1 - a_3 < 1$ , so wählen wir  $k = 1$  und erhalten

$$a_1 + a_3 > r - 4 = l - k = r - 3 - 1 \stackrel{3.30}{\geq} r - 3 - a_2 - a_4$$

und somit (\*). Wegen  $a_3 \leq -1$  ist  $k \leq -a_3$  klar.

□

Anders als bei  $X_{C,2}^r$  sind hier nicht schon alle Kegelstümpfe zu minimalen Polarisierungen ineinander enthalten. Es gilt aber folgendes Lemma:

**Lemma 3.2.12.** *Für  $1 \leq k \leq r - 4$  und  $k + 1 \leq l \leq r - 3$  gilt*

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,1}^r, H_{1,l})) \geq \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,1}^r, H_{k,l})).$$

*Beweis.* Wir arbeiten mit Lemma 3.2.5. Für  $L = (x_1, \dots, x_r) \in \text{Nef}(X_{C,1}^r)$  haben wir

$$((H_{k,l} - H_{1,l}) \cdot L) = (k-1)(x_1 + x_3) \stackrel{3.29}{\geq} 0.$$

□

Zur Bestimmung des maximalen Volumens genügt es somit die Polarisierungen  $H_{1,l}$  zu betrachten. Wir arbeiten ab sofort mit der Parametrisierung

$$l \mapsto H_l := (r-2-l, l+1, -1, \dots, -1),$$

wobei  $l \in \{1, \dots, r-4\}$  ist.

**Proposition 3.2.13.** *Die Funktion  $[1, r-4] \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $l \mapsto \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,1}^r), H_l)$  ist linksgekrümmt.*

*Beweis.* Im Folgenden verstehen wir alle Terme als Funktionen in  $l$  mit Definitionsmenge  $[1, r-4]$ . Wir arbeiten mit der Tatsache, dass eine Summe zweier linksgekrümmter Funktionen wieder linksgekrümmt ist. Formel (3.32) zeigt, dass  $\text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,1}^r), H_l)$  mit einer  $\mathbb{Q}^+$ -Linearkombination von Ausdrücken der Gestalt

$$\begin{aligned} & \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,2}^m), (r-2-l, r+(r-3-l) \cdot (m-4) - 3, l-r+3, \dots, l-r+3)) \\ & + \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,2}^m), (l+1, r+(m-4)l-3, -l, \dots, -l)) \end{aligned} \quad \text{für } 5 \leq m \leq r, \quad (3.37)$$

$$\text{Vol}(\text{Nef}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1), (r-2-l, l+1)) = \frac{1}{2(r-2-l)(l+1)} \quad (3.38)$$

übereinstimmt. Wegen  $(r-2-l) + (l+1) - 1 - 1 = r-3$  hängen die Faktoren aus  $\mathbb{Q}^+$  nicht von  $l$  ab. Die Funktion  $\text{Vol}(\text{Nef}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1), (r-2-l, l+1))$  ist linksgekrümmt. Definieren wir nun

$$f_m(l) := \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,2}^m), (l+1, r+(m-4)l-3, -l, \dots, -l)),$$

so ist (3.37) gleich  $f_m(l) + f_m(r-3-l)$ . Somit genügt es zu zeigen, dass  $f_m(l)$  linksgekrümmt ist. Formel (3.25) zeigt, dass man  $f_m(l)$  als  $\mathbb{Q}^+$ -Linearkombination von Ausdrücken der Gestalt

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,3}^s), (l+1, r+(s-4)l-3, -l, \dots, -l)) \quad \text{für } 6 \leq s \leq m, \quad (3.39)$$

$$\text{Vol}(\text{Nef}(S_3), (r-2, l-r+3, -1, -1)) = \frac{2r-5+l}{24(r-2)(r-3)^2(l+1)(r-3+l)} \quad (3.40)$$

schreiben kann, wobei die Faktoren aus  $\mathbb{Q}^+$  nicht von  $l$  abhängen. Letzteres ist linksgekrümmt. Formel (3.20) zeigt, dass (3.39) bis auf einen positiven von  $l$  unabhängigen rationalen Faktor Produkt von

$$\frac{1}{r+(s-4)l-3-(s-p-1)l} = \frac{1}{(p-3)l+r-3} \quad \text{für } 3 \leq p \leq s-2,$$

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_{s-4}), (l+1, r+(s-4)l-3)) = \frac{1}{2(l+1)(r+(s-4)l-3)}$$

ist. Da die Faktoren positiv, monoton fallend und linksgekrümmt sind, folgt, dass auch (3.39) linksgekrümmt ist. □

**Satz 3.2.14.** *Es gilt:*

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,1}^r)) = \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,1}^r), H_1) = \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,1}^r), H_{r-4}).$$

*Beweis.* Da  $[1, r-4] \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $l \mapsto \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,1}^r), H_l)$  linksgekrümmt ist, wird das maximale Volumen entweder für  $l = 1$  oder für  $l = r-4$  angenommen. Allerdings haben wir

$$H_1 = (r-3, 2, -1, \dots, -1)$$

sowie

$$H_{r-4} = (2, r-3, -1, \dots, -1)$$

und somit aus Symmetriegründen

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,1}^r), H_1) = \text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,1}^r), H_{r-4}),$$

womit die Behauptung folgt. □

**Maximales Volumen bei  $X_C^r$**  Wir arbeiten mit der Standardbasis  $L, E_1, \dots, E_r$  von  $\text{NS}_{\mathbb{R}}(X_C^r)$ . Im Folgenden sind mit Vektoren aus  $\mathbb{R}^{r+1}$  immer Koordinatenvektoren bezüglich dieser Basis gemeint. Außerdem arbeiten wir mit den Ungleichungen, die  $\text{Nef}(X_C^r)$  bzw.  $\text{Amp}(X_C^r)$  bestimmen, siehe dazu (3.33)-(3.35). Bei der Betrachtung von Polarisierungen  $H = (a_0, \dots, a_r)$  gehen wir ohne Einschränkung von  $a_1 \leq \dots \leq a_r$  aus. Wir können diese Einschränkung machen, da die Volumenfunktion

$$(a_0, \dots, a_r) \mapsto \text{Vol}(\text{Nef}(X_C^r), a_0L + a_1E_1 + \dots + a_rE_r)$$

in  $a_1, \dots, a_r$  symmetrisch ist. Ebenso gehen wir von  $r \geq 6$  aus, da für  $r < 6$  Del-Pezzo-Flächen vorliegen, die wir schon behandelt haben.

Zunächst können wir über folgendes Lemma eine große Zahl von Polarisierungen als Kandidaten für das maximale Volumen ausschließen:

**Proposition 3.2.15.** *Ist  $H = (a_0, \dots, a_r)$  eine Polarisierung mit  $2a_0 + a_1 + \dots + a_r > 1$ , so ist  $a$  nicht minimal oder  $r$  ist gerade und es gilt*

$$H = \left( \frac{r+2}{2}, -1, \dots, -1 \right).$$

*Beweis.* Wir zeigen, dass von  $H$  immer eine nef-Klasse ungleich 0 abgezogen werden kann, ohne die Eigenschaft ampel zu zerstören. Daraus folgt die Nicht-Minimalität. Es sei zunächst  $a_1 = -1$  und somit auch  $a_2 = \dots = a_r = -1$ . Wir haben dann

$$1 < 2a_0 + a_1 + \dots + a_r = 2a_0 - r,$$

also  $a_0 > (r+1)/2$ . Für ungerades  $r$  gilt somit  $a_0 \geq (r+3)/2$ . Man rechnet leicht nach, dass in diesem Fall

$$(a_0 - 1, a_1, a_2, \dots, a_r)$$

ampel ist. Für gerades  $r$  haben wir für  $a_0 = (r + 2)/2$  die oben formulierte Ausnahme. Für  $a_0 > (r + 2)/2$  und  $r$  gerade lässt sich erneut leicht zeigen, dass

$$(a_0 - 1, a_1, a_2, \dots, a_r)$$

ampel ist, womit die Nicht-Minimalität folgt.

Nun sei  $a_1 \leq -2$ . Nach (3.34) haben wir  $a_0 + a_2 + a_3 \geq 1$ . Ist  $a_0 + a_2 + a_3 > 1$ , so ergibt sich schnell, dass

$$(a_0 - 1, a_1 + 1, a_2, \dots, a_r)$$

ampel ist. Es gelte also  $a_0 + a_2 + a_3 = 1$ . Dabei kann nicht  $a_3 = -1$  gelten, da sonst

$$1 \stackrel{3.34}{\leq} a_0 + a_1 + a_2 = a_1 + 2$$

und somit  $-1 \leq a_1$  wäre. Wir zeigen, dass

$$(a_0 - 2, a_1 + 1, a_2 + 1, a_3 + 1, a_4, \dots, a_r)$$

ampel ist. Es genügt  $a_0 + a_1 + a_4 - 1 > 0$  und  $a_0 + a_4 + a_5 - 2 > 0$  zu zeigen. Angenommen  $a_0 + a_1 + a_4 = 1$ . Es folgt

$$1 < 2a_0 + a_1 + \dots + a_r = 2 + a_5 + \dots + a_r$$

und somit

$$-1 < a_5 + \dots + a_r \stackrel{3.33}{\leq} 4 - r,$$

also  $r < 5$ , ein Widerspruch. Für  $a_0 + a_4 + a_5 \in \{1, 2\}$  erhält man auf analoge Weise einen Widerspruch.  $\square$

**Korollar 3.2.16.** *Das maximale Volumen wird für eine Polarisierung  $H = (a_0, a_1, \dots, a_r)$  mit  $2a_0 + a_1 + \dots + a_r = 1$  angenommen.*

*Beweis.* Das maximale Volumen wird für eine minimale Polarisierung angenommen. Für ungerades  $r$  ist die Behauptung somit nach Proposition 3.2.15 klar. Für gerades  $r$  genügt es nach Proposition 3.2.15 zu zeigen, dass eine Polarisierung  $H' = (a_0, \dots, a_r)$  mit  $2a_0 + a_1 + \dots + a_r = 1$  existiert, die zu einem Volumen führt, welches mindestens so groß ist wie das Volumen zu

$$H = \left( \left( \frac{r+2}{2} \right), -1, \dots, -1 \right).$$

Wir betrachten

$$H' = \left( \left( \frac{r+2}{2} \right), -2, -1, \dots, -1 \right).$$

Man rechnet leicht nach, dass  $H'$  ampel ist. Für  $L = (x_0, \dots, x_r) \in \text{Nef}(X_C^r)$  gilt außerdem

$$((H - H') \cdot L) = -x_1 \stackrel{3.33}{\geq} 0,$$

womit nach Lemma 3.2.5 die Ungleichung  $\text{Vol}(\text{Nef}(X_C^r), H') \geq \text{Vol}(\text{Nef}(X_C^r), H)$  folgt.  $\square$

Um die Kandidaten für das maximale Volumen weiter einschränken zu können, benötigen wir zunächst eine Vorüberlegung kombinatorischer Art.

**Lemma 3.2.17.** *Gegeben seien  $r$  Objekte  $O_1, \dots, O_r$  mit Häufigkeiten  $\beta_1, \dots, \beta_r$ , wobei*

1.  $\beta_1 + \dots + \beta_r$  gerade sei und
2.  $\beta_i \leq \frac{\beta_1 + \dots + \beta_r}{2}$  für  $i \in \{1, \dots, r\}$

*gelte. Dann gilt: Es lassen sich Paare  $(O_i, O_j)$  mit  $i \neq j$  bilden, sodass alle Objekte mit Häufigkeiten abgedeckt sind.*

**Beispiel 3.2.18.** Gegeben seien drei Objekte  $O_1, O_2, O_3$  mit Häufigkeiten, wie in untenstehender Tabelle beschrieben.

Objekt	$O_1$	$O_2$	$O_3$
Häufigkeiten $a$ )	3	2	1
Häufigkeiten $b$ )	2	2	2

Im Fall  $a$ ) ergeben sich die Paare  $(O_1, O_2)$ ,  $(O_1, O_2)$  und  $(O_1, O_3)$ . Im Fall  $b$ ) ergeben sich die Paare  $(O_1, O_2)$ ,  $(O_1, O_3)$  und  $(O_2, O_3)$ .

*Beweis von Lemma 3.2.17.* Ohne Einschränkung können wir  $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_r$  annehmen und bilden zunächst das Paar  $(O_1, O_2)$ . Übrig bleiben dann die Häufigkeiten  $\tilde{\beta}_i$  mit

$$\tilde{\beta}_i = \begin{cases} \beta_i - 1 & \text{falls } i \in \{1, 2\} \\ \beta_i & \text{sonst} \end{cases}.$$

Wir zeigen, dass auch die  $\tilde{\beta}_i$  die Bedingungen 1. und 2. erfüllen. Offensichtlich ist  $\tilde{\beta}_1 + \dots + \tilde{\beta}_r$  gerade. Weiter ist

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_1 &= \beta_1 - 1 \leq \frac{\beta_1 + \dots + \beta_r}{2} - 1 \\ &= \frac{\beta_1 - 1 + \beta_2 - 1 + \beta_3 + \dots + \beta_r}{2} \\ &= \frac{\tilde{\beta}_1 + \dots + \tilde{\beta}_r}{2} \end{aligned}$$

Analog lässt sich für  $\tilde{\beta}_2$  argumentieren. Wegen  $\tilde{\beta}_r \leq \dots \leq \tilde{\beta}_3$  ist nur noch

$$\tilde{\beta}_3 \leq \frac{\tilde{\beta}_1 + \dots + \tilde{\beta}_r}{2}$$

zu zeigen.

Fall 1:  $\beta_1 < \frac{\beta_1 + \dots + \beta_r}{2}$ . Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_3 &= \beta_3 \leq \beta_1 \leq \frac{\beta_1 + \dots + \beta_r}{2} - 1 \\ &= \frac{\tilde{\beta}_1 + \dots + \tilde{\beta}_r}{2}. \end{aligned}$$

Fall 2:  $\beta_1 = \frac{\beta_1 + \dots + \beta_r}{2}$ .

i.  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$ . Wir haben

$$\beta_1 = \frac{3\beta_1}{2} + \frac{\beta_4 + \dots + \beta_r}{2} \geq \frac{3}{2}\beta_1 > \beta_1,$$

was nicht sein kann.

ii.  $\beta_1 > \beta_3$ . Man erhält

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_3 = \beta_3 &\leq \beta_1 - 1 \leq \frac{\beta_1 + \dots + \beta_r}{2} - 1 \\ &= \frac{\tilde{\beta}_1 + \dots + \tilde{\beta}_r}{2}. \end{aligned}$$

Nach eventueller Umnummerierung kann für die übrigen Objekte mit Häufigkeiten  $\tilde{\beta}_i$  analog vorgegangen werden. Macht man dies so lange bis alle Häufigkeiten 0 sind, so hat man die passende Aufteilung gefunden.  $\square$

**Satz 3.2.19.** *Das maximale Nef-Kegel-Volumen bei  $X_C^r$  wird für eine der Polarisierungen*

$$H_k := (k, r - 2k, -1, \dots, -1)$$

mit

$$\left\lceil \frac{r+1}{2} \right\rceil \leq k \leq r-2$$

angenommen.

**Bemerkung 3.2.20.** Es ist

$$\left\lceil \frac{r+1}{2} \right\rceil = \begin{cases} \frac{r+1}{2} & \text{falls } r \text{ ungerade} \\ \frac{r+2}{2} & \text{falls } r \text{ gerade.} \end{cases}$$

*Beweis von Satz 3.2.19.* Man rechnet leicht nach, dass die  $H_k$  ampel sind. Sei  $H = (a_0, \dots, a_r)$  eine Polarisierung mit  $2a_0 + a_1 + \dots + a_r = 1$  und  $a_1 \leq \dots \leq a_r$ . Das maximale Volumen wird nach Korollar 3.2.16 für eine solche angenommen. Wir zeigen, dass ein  $k \in \mathbb{N}$  mit  $\lceil (r+1)/2 \rceil \leq k \leq r-2$  existiert, für das

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_C^r), H_k) \geq \text{Vol}(\text{Nef}(X_C^r), H)$$

gilt. Nach Lemma 3.2.5 ist dies der Fall, wenn  $k$  so wählbar ist, dass

$$((H - H_k) \cdot L) = (a_0 - k)x_0 + (-a_1 - 2k + r)x_1 + \sum_{i=2}^r (-a_i - 1)x_i \geq 0 \quad (*)$$

für alle  $L = (x_0, \dots, x_r) \in \text{Nef}(X_C^r)$  gilt. Ziel ist es nun, Lemma 3.2.17 zur Anwendung zu bringen. In (\*) ist die Summe der Koeffizienten zu den  $x_i$  mit  $i \geq 1$  gleich

$$-(a_1 + \dots + a_r) - 2k + r - (r-1) = (2a_0 - 1) - 2k + 1 = 2(a_0 - k).$$

Wenn wir zeigen können, dass ein  $k$  mit

1.  $0 \leq -a_1 - 2k + r \leq a_0 - k$ ,
2.  $-a_i - 1 \leq a_0 - k$  für  $i \geq 2$ ,
3.  $\lceil (r+1)/2 \rceil \leq k \leq r-2$

existiert, so gilt (\*) für dieses  $k$  nach Lemma 3.2.17 für alle  $L = (x_0, \dots, x_r) \in \text{Nef}(X_C^r)$ , da für solche  $L$  die Ungleichungen  $x_0 + x_i + x_j \geq 0$  für  $i \neq j$  gelten. Die ersten beiden Bedingungen sind äquivalent zu

$$r - a_0 - a_1 \leq k \leq \min \left\{ a_0 + a_2 + 1, \frac{r - a_1}{2} \right\}. \quad (**)$$

Wir zeigen, dass (\*\*) erfüllbar ist. Wir haben

$$\begin{aligned} 2a_0 + a_1 + a_2 + 1 &= 1 - (a_3 + \dots + a_r) + 1 \\ &\stackrel{3.33}{\geq} 1 + (r-2) + 1 \\ &= r \end{aligned}$$

und somit  $r - a_0 - a_1 \leq a_0 + a_2 + 1$ . Die Ungleichung  $r - a_0 - a_1 \leq (r - a_1)/2$  ist äquivalent zu  $r \leq 2a_0 + a_1$  und somit ebenfalls wahr.

Es fehlt noch zu zeigen, dass zusätzlich die dritte Bedingung erfüllbar ist. Nach (3.34) haben wir  $a_0 + a_1 \geq 2$  und somit  $r - a_0 - a_1 \leq r - 2$ . Weiter ist  $\lceil (r+1)/2 \rceil \leq (r - a_1)/2$ , da  $a_1 \leq -1$  gilt bzw. sogar  $a_1 \leq -2$  gilt, falls  $r$  gerade ist. Es ist somit nur noch die Ungleichung

$$\lceil (r+1)/2 \rceil \leq a_0 + a_2 + 1$$

zu zeigen. Wir haben allerdings

$$\begin{aligned} 2a_0 + 2a_2 + 2 &\geq 2a_0 + a_1 + a_2 + 2 \\ &= 3 - (a_3 + \dots + a_r) \\ &\stackrel{3.33}{\geq} 3 + (r-2) = r + 1. \end{aligned}$$

Insgesamt ist somit die Existenz eines passenden  $k$  gezeigt. □

**Bemerkung 3.2.21.** Die Polarisierungen aus Satz 3.2.19 sind nicht die einzigen minimalen Polarisierungen auf  $X_C^r$ . Für  $r = 6$  kann man sich zum Beispiel schnell überlegen, dass auch

$$(5, -2, -2, -2, -1, -1, -1)$$

eine minimale Polarisierung ist.

**Proposition 3.2.22.** *Die Funktion*

$$V_r : \left[ \lceil (r+1)/2 \rceil, r-2 \right] \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad k \mapsto \text{Vol}(\text{Nef}(X_C^r), H_k)$$

*ist linksgekrümmt.*



*Beweis.* Im Folgenden verstehen wir alle Terme als Funktionen in  $k$  mit Definitionsmenge  $[\lceil (r+1)/2 \rceil, r-2]$ . Wir arbeiten mit den Tatsachen, dass eine Summe zweier linksgekrümmter Funktionen wieder linksgekrümmt ist und dass ein Produkt linksgekrümmter, positiver, monoton fallender Funktionen wieder linksgekrümmt, positiv und monoton fallend ist. Formel (3.36) zeigt, dass sich  $\text{Vol}(\text{Nef}(X_C^r), H_k)$  als  $\mathbb{Q}^+$ -Linearkombination von

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_C^m), (k, -1, \dots, -1)) \quad \text{für } 1 \leq m < r, \quad (3.41)$$

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,1}^m), (k-1, k-1, r-2k, -1, \dots, -1)) \quad \text{für } 5 \leq m \leq r, \quad (3.42)$$

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,1}^m), (k-1, r-k, -1, \dots, -1)) \quad \text{für } 5 \leq m \leq r, \quad (3.43)$$

$$\text{Vol}(\text{Nef}(S_1), (k, r-2k)) = \frac{1}{2k(r-k)} \quad (3.44)$$

schreiben lässt, wobei die Faktoren aus  $\mathbb{Q}^+$  nicht von  $k$  abhängen. Die Funktion (3.44) ist linksgekrümmt. Nach Proposition 3.2.13 ist (3.43) linksgekrümmt. (Bezeichnet man die in Proposition 3.2.13 betrachtete Funktion mit  $V_{1,r}$ , so ist (3.43) gleich  $V_{1,r}(r-1-k)$ .) Das Volumen (3.41) lässt sich nach (3.36) schreiben als  $\mathbb{Q}^+$ -Linearkombination von

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,1}^n), (k-1, k-1, -1, \dots, -1)) \quad \text{für } 5 \leq n \leq m, \quad (3.45)$$

$$\text{Vol}(\text{Nef}(S_1), (k, -1)) = \frac{1}{k(k-1)}. \quad (3.46)$$

Dabei sind die Faktoren aus  $\mathbb{Q}^+$  abhängig von  $k$ , sind aber ein Produkt von Termen der Gestalt

$$\frac{q}{2k-4} \quad \text{mit von } k \text{ unabhängigem } q \in \mathbb{Q}^+ \quad (*)$$

und sind somit monoton fallend und linksgekrümmt. (3.46) ist monoton fallend und linksgekrümmt. Formel (3.32) zeigt, dass (3.45) als  $\mathbb{Q}^+$ -Linearkombination von

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,2}^s), (k-1, (s-2)(k-2), 2-k, \dots, 2-k)) \quad \text{für } 5 \leq s \leq n, \quad (3.47)$$

$$\text{Vol}(\text{Nef}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1), (k-1, k-1)) = \frac{1}{2(k-1)^2} \quad (3.48)$$

geschrieben werden kann. Dabei sind die Faktoren aus  $\mathbb{Q}^+$  abhängig von  $k$ , sind aber wieder ein Produkt von Termen der Gestalt (\*). (3.48) ist linksgekrümmt und monoton fallend. Formel (3.25) zeigt, dass (3.47) als  $\mathbb{Q}^+$ -Linearkombination von

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,3}^t), (k-1, (t-2)(k-2), 2-k, \dots, 2-k)) \quad \text{für } 6 \leq t \leq s, \quad (3.49)$$

$$\text{Vol}(\text{Nef}(S_3), (2k-3, 2-k, -1, -1)) = \frac{5k-9}{24(2k-3)(3k-6)(k-1)(2k-4)^2} \quad (3.50)$$

geschrieben werden kann. Dabei sind die Faktoren aus  $\mathbb{Q}^+$  abhängig von  $k$ , sind aber erneut ein Produkt von Termen der Gestalt (\*). Weiter ist (3.50) monoton fallend und

linksgekrümmt. Formel (3.20) zeigt, dass sich (3.49) als rationales Vielfaches eines Produkts von Termen der Gestalt

$$\frac{1}{(p-1)(k-2)} \quad \text{für } 3 \leq p \leq t-2,$$

$$\frac{1}{2(k-1)(t-2)(k-2)}$$

schreiben lässt. Alle Terme sind linksgekrümmt und monoton fallend. Insgesamt haben wir somit gezeigt, dass (3.41) linksgekrümmt ist.

Es fehlt noch zu zeigen, dass (3.42) linksgekrümmt ist. Formel (3.32) zeigt, dass sich (3.42) als  $\mathbb{Q}^+$ -Linearkombination von

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,2}^n), (k-1, (n-2)(k-2) + r - 2k + 1, k-r+1, 2-k, \dots, 2-k)) \quad (3.51)$$

für  $5 \leq n \leq m$ ,

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,1}^n), (k-1, k-1, -1, \dots, -1)) \quad \text{für } 3 \leq n < m, \quad (3.52)$$

$$\text{Vol}(\text{Nef}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1), (k-1, k-1)) \quad (3.53)$$

schreiben lässt, wobei die Faktoren aus  $\mathbb{Q}^+$  nicht von  $k$  abhängen. Analog zu den obigen Überlegungen erhält man, dass (3.52) und (3.53) linksgekrümmt sind. Formel (3.27) zeigt, dass (3.51) für  $n > 5$  als  $\mathbb{Q}^+$ -Linearkombination von

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,3}^n), (k-1, (n-2)(k-2) + r - 2k + 1, k-r+1, 2-k, \dots, 2-k)), \quad (3.54)$$

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,2}^{n-1}), (k-1, (n-3)(k-2), 2-k, \dots, 2-k)) \quad (3.55)$$

geschrieben werden. Dabei sind die Faktoren aus  $\mathbb{Q}^+$  unabhängig von  $k$ . Die Funktion (3.55) ist nach obigen Überlegungen linksgekrümmt. Für  $n = 5$  ist (3.51) gleich

$$\text{Vol}(\text{Nef}(S_3), (2k-3, 2-k, r-2k, -1)) = \frac{3k-8+r}{24(2k-3)(k-5+r)(k-1)(r-3)(2k-4)}$$

und somit linksgekrümmt. Formel (3.20) zeigt, dass (3.54) eine  $\mathbb{Q}^+$ -Linearkombination von Summen von Produkten von Termen der Gestalt

$$\frac{1}{(p-3)(k-2) + r - 3} \quad \text{für } 3 \leq p \leq n-2,$$

$$\frac{1}{(p-1)(k-2)} \quad \text{für } 3 \leq p \leq n-2,$$

$$\frac{1}{2(k-1)((n-4)(k-2) + r - 3)}$$

ist. Dabei sind alle Terme linksgekrümmt und monoton fallend. □

Wir können nun Theorem 3 der Einleitung beweisen:

**Theorem 3.2.23.** Sei  $\pi : X_C^r \rightarrow \mathbb{P}^2$  eine Aufblasung des  $\mathbb{P}^2$  in  $r \geq 5$  Punkten auf einem glatten Kegelschnitt  $C \subset \mathbb{P}^2$ . Weiter seien  $E_1, \dots, E_r$  die exzeptionellen Kurven der Aufblasung und  $L = \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ . Dann gilt: Das maximale Nef-Kegel-Volumen  $\text{Vol}(\text{Nef}(X_C^r))$  wird entweder für

$$\left\lceil \frac{r+1}{2} \right\rceil \cdot L + \left( r - 2 \cdot \left\lceil \frac{r+1}{2} \right\rceil \right) \cdot E_1 - (E_2 + \dots + E_r)$$

oder für

$$(r-2) \cdot L + (4-r) \cdot E_1 - (E_2 + \dots + E_r)$$

angenommen. Konkrete Berechnungen mit Maple zeigen: Für  $r \leq 11$  tritt der erste Fall ein, für  $12 \leq r \leq 27$  der zweite. (Für  $r \geq 28$  ist bisher unbekannt, welche der beiden Polarisierungen das maximale Volumen bestimmt.)

*Beweis.* Da  $V_r$  linksgekrümmt ist, wird das Maximum an den Randpunkten angenommen, womit der erste Teil der Behauptung folgt. Konkrete Berechnungen mit Maple liefern das Behauptete für  $6 \leq r \leq 27$ . Der verwendete Programmcode basiert auf den Formeln zur Volumenberechnung aus Abschnitt 3.2.1. Sowohl der Programmcode als auch die berechneten Werte sind im Anhang zu finden.  $\square$

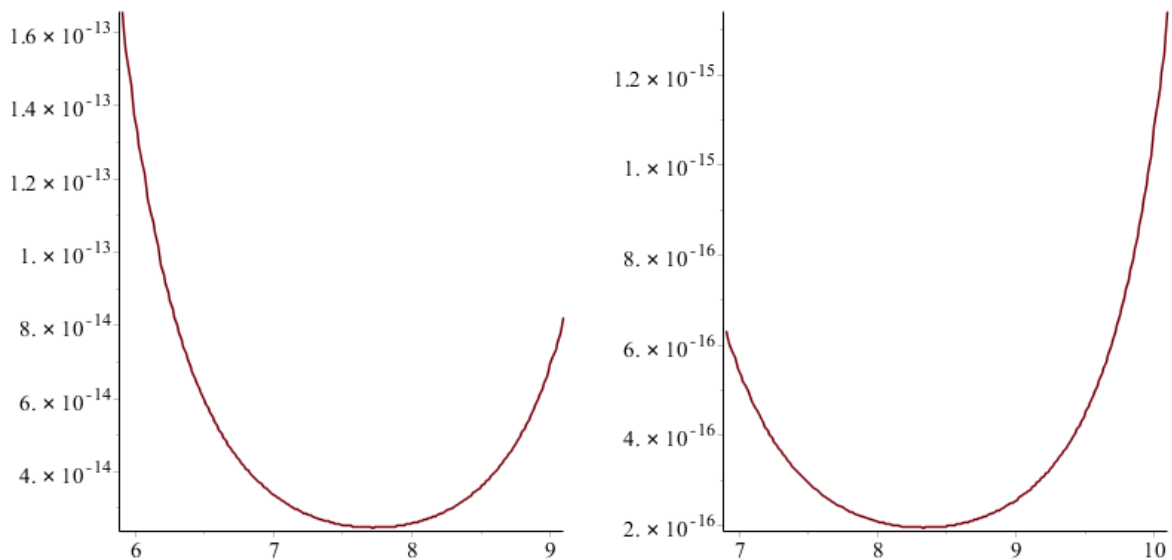


Abb. 3.2: Links ist der Funktionsgraph zu  $V_{11}$  dargestellt, rechts der Funktionsgraph zu  $V_{12}$ .

# Literaturverzeichnis

- [1] Barth, W., Hulek, K., Peters, C., Van de Ven, A.: Compact complex surfaces. Springer, 2004.
- [2] Bauer, Th.: On the cone of curves of an abelian variety. *Am. J. Math.* 120, 997-1006 (1998)
- [3] Bauer, Th., Borntträger, C.: Nef cone volumes and discriminants of abelian surfaces. *J. Pure Appl. Algebra* (2017), [doi:10.1016/j.jpaa.2017.09.016], [arXiv:1608.07054]
- [4] Bauer, Th., Funke, M., Neumann, S.: Counting Zariski chambers on Del Pezzo surfaces. *Journal of Algebra* 324, 92-101 (2010)
- [5] Bauer, Th., Schmitz, D.: Volumes of Zariski chambers. *J. Pure Appl. Algebra* 217(1), 153–164 (2013)
- [6] Beauville, A.: Complex Algebraic Surfaces. London Mathematical Society Student Texts 34, 1996.
- [7] Birkenhake, C.: Tensor Products of Ample Line Bundles on Abelian Varieties. *Manuscripta math.* 84, 21-28 (1994)
- [8] Birkenhake, C., Lange, H.: Complex abelian varieties. Springer, 2004.
- [9] Borntträger, C.: Endomorphismenalgebren abelscher Flächen. Bachelorarbeit, 2010. (siehe <http://www.mathematik.uni-marburg.de/~bornttraegerc>)
- [10] Borntträger, C., Nickel, M.: Algebraic volumes of divisors, [arXiv:1611.10116v1]
- [11] Debarre, O.: Higher Dimensional Algebraic Geometry. Universitext, Springer 2001.
- [12] Derenthal, U.: On a constant arising in Manin’s conjecture for Del Pezzo surfaces. *Math. Res. Lett.* 3, 481-489 (2007)
- [13] Derenthal, U., Browning, T.D.: Manin’s conjecture for a cubic surface with  $D_5$  singularity. *International Mathematics Research Notices IMRN* (2009), no. 14, 2620-2647
- [14] Derenthal, U., Browning, T. D.: Manin’s conjecture for a quartic del Pezzo surface with  $A_4$  singularity. *Annales de l’Institut Fourier* 59 (2009), no. 3, 1231-1265
- [15] Derenthal, U., Elsenhans, A., Jahnel, J.: On the factor alpha in Peyre’s constant. *Math. Comp.* 83, 965-977 (2014)
- [16] Derenthal, U., Joyce, M., Teitler, Z.: The nef cone volume of generalized del Pezzo surfaces. *Algebra & Number Theory* 2, 157-182 (2008)

- [17] Forster, O.: Analysis 3. Auflage 8, Springer, 2017.
- [18] Hartshorne, R.: Algebraic Geometry. Graduate Texts in Math. 52, Springer, 1977.
- [19] Husemöller, D.: Elliptic Curves. Springer Science and Business Media, 2006.
- [20] Lazarsfeld, R.: Positivity in Algebraic Geometry. Springer, 2004.
- [21] Manin, Y.I.: Cubic Forms. Algebra, Geometry, Arithmetic. North-Holland Mathematical Library. Vol. 4. North-Holland, 1974.
- [22] Peyre, E.: Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano. Duke Math. J. 79, 101-218 (1995)
- [23] Poonen, B.: Beitrag auf mathoverflow.net.  
([https://mathoverflow.net/questions/16992/  
non-principally-polarized-complex-abelian-varieties](https://mathoverflow.net/questions/16992/non-principally-polarized-complex-abelian-varieties))
- [24] Runge, B.: Endomorphism rings of abelian surfaces and projective models of their moduli spaces. Tohoku Math. J. 51, 283-303 (1999)
- [25] Ruppert, W.: Two-dimensional complex tori with multiplication by  $\sqrt{d}$ . Arch. Math. 72, 278-281 (1999)
- [26] Schmitz, D.: Volumina der Zariskikammern auf algebraischen Flächen. Dissertation, 2012, [doi:10.17192/z2012.0921]
- [27] Testa, D., Várilly-Alvarado, A., Velasco, M.: Big rational surfaces, [arXiv:0901.1094]
- [28] Voight, J.: Quaternion algebras. Preprint.  
(<https://math.dartmouth.edu/~jvoight/quat-book.pdf>)

# Anhang

## Maple-Code zur Berechnung von $\text{Vol}(\text{Nef}(X_C^r), H)$

```
S2:=proc(a_0, a_1, a_2)
(1/6)/(a_0*(a_0+a_1)*(a_0+a_2));
end proc;
```

(Mit  $S2(a_0, a_1, a_2)$  wird  $\text{Vol}(\text{Nef}(S_2), a_0L + a_1E_1 + a_2E_2)$  berechnet.)

```
S3:=proc(a_0, a_1, a_2, a_3)
(S2(a_0, a_1, a_2)+S2(a_0, a_1, a_3)+S2(a_0, a_2, a_3))/(8*a_0+4*a_1+4*a_2+4*a_3);
end proc;
```

(Mit  $S3(a_0, a_1, a_2, a_3)$  wird  $\text{Vol}(\text{Nef}(S_3), a_0L + a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3)$  berechnet.)

```
Hirz := proc (a_1, a_2)
(1/2)/(a_1*a_2);
end proc;
```

(Mit  $\text{Hirz}(a_1, a_2)$  wird  $\text{Vol}(\text{Nef}(X_{r-4}), a_1C + a_2f)$  berechnet.)

```
XCrl := proc (r, l, A)
local vorfaktor, i, j, summe;
vorfaktor := 0;
summe := 0;
for i from 2 to nops(A) do
    vorfaktor := vorfaktor+A[i];
end do;
if r-l = 2 then
    summe := Hirz(A[1], A[2]);
else
    for j from 3 to r-l+1 do
        summe := summe+XCrl(r, l+1, subsop(j = NULL, A));
    end do;
end do;
```

```

end if;
summe/((r-1+1)*vorfaktor);
end proc;

```

(Mit  $XCr1(r,1,[a_1,\dots,a_{r+1-1}])$  wird

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,l}^r), a_1C + a_2f + a_3C_{l+1} + \dots + a_{r+1-l}C_{r-1})$$

berechnet.)

```

XCr2 := proc (r, A)
local j, summe, Aneu;
summe := 0;
if r = 5 then
    return S3(A[1]+A[2]+A[3]+A[4], -A[2]-A[3]-A[4],
              -A[1]-A[3], -A[1]-A[4]);
else
    Aneu := A;
    Aneu[2] := A[2]+A[3];
    summe := summe+(5-r)*XCr2(r-1, subsop(3 = NULL, Aneu));
    for j from 4 to r-1 do
        Aneu[2] := A[2]+A[j];
        summe := summe+XCr2(r-1, subsop(j = NULL, Aneu));
    end do;
    return ((r-4)*XCr1(r, 3, subsop(3 = NULL, A))+summe)
            /((r-1)*(A[2]+(r-4)*A[3]));
end if;
end proc;

```

(Mit  $XCr2(r,[a_1,\dots,a_{r-1}])$  wird

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,2}^r), a_1C + a_2f + a_3C_3 + \dots + a_{r-1}C_{r-1})$$

berechnet.)

```

XCr1 := proc (r, A)
local j, summe, Aneu, Asumme;
summe := 0;
Asumme := 0;
if r = 4 then
    summe := 1/((6*A[1]+6*A[2]+6*A[3])*A[1]*A[2])
            +1/((6*A[1]+6*A[2]+6*A[4])*A[1]*A[2]);
else
    summe := summe+XCr1(r-1, subsop(3 = NULL, A))

```

```

+XCr1(r-1, subsop(4 = NULL, A));
Aneu := A;
for j from 3 to r do
    Asumme := Asumme+A[j];
end do;
Aneu[2] := (r-3)*A[1]+Asumme+A[2];
for j from 3 to r do
    Aneu[j] := -A[1]-A[j];
end do;
for j from 5 to r do
    summe := summe+XCr2(r, subsop(j = NULL, Aneu));
end do;
Aneu[1] := A[2];
Aneu[2] := (r-3)*A[2]+Asumme+A[1];
for j from 3 to r do
    Aneu[j] := -A[2]-A[j];
end do;
for j from 5 to r do
    summe:= summe+XCr2(r, subsop(j = NULL, Aneu));
end do;
end if;
summe/(r*(A[1]+A[2]+A[3]+A[4]));
end proc;

```

(Mit  $XCr1(r, [a_1, \dots, a_r])$  wird

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_{C,1}^r), a_1f_1 + a_2f_2 + a_3E_3 + \dots + a_rE_r)$$

berechnet.)

```

XCr := proc (r, A)
local i, j, k, z, summe, Aneu;
summe := 0;
Aneu := A;
if r = 4 then
    summe := S3(A[1], A[2], A[3], A[4])+
        S3(A[1], A[2], A[3], A[5])+
        S3(A[1], A[2], A[4], A[5])+
        S3(A[1], A[3], A[4], A[5]);
else
for j from 2 to 5 do
    summe := summe+XCr(r-1, subsop(j = NULL, A));
end do;
for i from 2 to 5 do
for j from 6 to r+1 do

```



```

Aneu[1] := A[1]+A[j];
Aneu[2] := A[1]+A[i];
Aneu[3] := -A[1]-A[i]-A[j];
z := 4;
for k from 2 to r+1 do
  if k <> i and k <> j then
    Aneu[z] := A[k];
    z := z+1;
  end if;
end do;
summe := summe+XCr1(r, subsop(3 = NULL, Aneu));
end do;
end do;
for i from 6 to r+1 do
for j from i+1 to r+1 do
  Aneu[1] := A[1]+A[j];
  Aneu[2] := A[1]+A[i];
  Aneu[3] := -A[1]-A[i]-A[j];
  z := 4;
  for k from 2 to r+1 do
    if k <> i and k <> j then
      Aneu[z] := A[k];
      z := z+1;
    end if;
  end do;
  summe := summe+2*XCr1(r, subsop(3 = NULL, Aneu));
end do;
end do;
end if;
summe/((r+1)*(2*A[1]+A[2]+A[3]+A[4]+A[5]));
end proc;

```

(Mit  $XCr(r, [a_0, \dots, a_r])$  wird

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X_C^r), a_0L + a_1E_1 + \dots + a_rE_r)$$

berechnet.)

## Werte von $\text{Vol}(\text{Nef}(X_C^r))$ für $6 \leq r \leq 27$

Unten dargestellt sind jeweils zuerst der Wert von  $V_r(\lceil(r+1)/2\rceil)$  und anschließend der Wert von  $V_r(r-2)$ .

**$r = 6$**

$$8837/304819200 \approx 0.00002899095595$$

$$8837/304819200 \approx 0.00002899095595$$

**$r = 7$**

$$263/137625600 \approx 0.00002899095595 = 289.9095595 \cdot 10^{-7}$$

$$2402017/3423729254400 \approx 7.015791324 \cdot 10^{-7}$$

**$r = 8$**

$$4382937803/192928671936000000 \approx 2.271791828 \cdot 10^{-8}$$

$$8332685761/591272607744000000 \approx 1.409279857 \cdot 10^{-8}$$

**$r = 9$**

$$6847/7999675084800 \approx 8.559097623 \cdot 10^{-10}$$

$$648773031499/2565289326600000000000 \approx 2.529044287 \cdot 10^{-10}$$

**$r = 10$**

$$324297144669947983/60098493987666584257167360000 \approx 5.396094364 \cdot 10^{-12}$$

$$75696201550835879147/17757619862812811672447877120000 \approx 4.262744790 \cdot 10^{-12}$$

**$r = 11$**

$$22071089/162012076280119296000 \approx 1.362311348 \cdot 10^{-13}$$

$$167275781777589004237/2422723800885827863276330942464000 \approx 0.690445116 \cdot 10^{-13}$$

**$r = 12$**

$$148247992136053630879063/272959646911436781123347520000000000000000 \approx 5.431132177 \cdot 10^{-16}$$

17635377634396508089955041/16334708902569388873842330134869180416000  
 $\approx 10.79626074 \cdot 10^{-16}$

**$r = 13$**

270913117/26970783840000000000000000  
 $\approx 1.004468830 \cdot 10^{-17}$

380303820862553618348119357/23395872655770019663470046458624000000000000  
 $\approx 1.625516716 \cdot 10^{-17}$

**$r = 14$**

472477260353272652578909210667459749/168219730034895620493079600786187282411  
48809351004160000  $\approx 2.808691110 \cdot 10^{-20}$

8451040553424120467427586366189110241/35983344484137153624042679268889467289  
60000000000000000000  $\approx 23.48597851 \cdot 10^{-20}$

**$r = 15$**

9725932003/24201017481011883875341487308800  
 $\approx 4.018811197 \cdot 10^{-22}$

82276238813108664622365635401654339/253218196613563038488487648710254222469  
69210201702400000  $\approx 32.49222999 \cdot 10^{-22}$

**$r = 16$**

37316549321509416261979289298233756177483437033/443414208864580917978947407  
66594486043263562330552255201888383795200000  $\approx 8.415731516 \cdot 10^{-25}$

156334756056790391284509252337929658433040622019/36352813432377103395168725  
01405128169336338684568363051671932108800000  $\approx 430.0485748 \cdot 10^{-25}$

**$r = 17$**

49107183179/5088859727829625177402014097735680000  
 $\approx 9.649938455 \cdot 10^{-27}$

143225963177949594264362460609198504677487499/26302261399211685315541745779  
3669163145534064201339917078909419520000  $\approx 544.5385893 \cdot 10^{-27}$

**$r = 18$**

351293767666963599997968290362332795054595116906191/22220059664086951639658  
850236420662695465547824103133150183424000000000000000000  
 $\approx 1.580975807 \cdot 10^{-29}$

586050091958985786085296257871732467912862068069230632251/88792026400641461  
497680475754757045282008806917625516003518578688000000000000000000  
 $\approx 660.0255853 \cdot 10^{-29}$

**$r = 19$**

872914464726497/5865277416753759295964840800011162117734400000  
 $\approx 1.488274812 \cdot 10^{-31}$

16710012673497497941092702361339256869478484252223282163893/218009380127612  
947219102136953395270213049608547686455870855577600000000000000000000000  
 $\approx 766.4813626 \cdot 10^{-31}$

**$r = 20$**

22678502400108313310119547079742196865057580162580958474987707/115290360288  
867391206940841971511243282132813470514197399203396300141429895166429736468  
480000000  $\approx 1.967077069 \cdot 10^{-34}$

5808340352794827084311288051638252071425912448092396873042526079/6803567753  
686919135321906121907095012342218494296397252894998707408968028699369492447  
232000000  $\approx 8537.197781 \cdot 10^{-34}$

**$r = 21$**

20951457189167/13537706280902345198936789544485180889599311872000  
 $\approx 1.547637152 \cdot 10^{-36}$

435345387482621986269611552529504578804962914544154582781812441/47679337799  
139632744835604512733002498240460116562093675733000647490718766301437822500  
864000000  $\approx 9130.692824 \cdot 10^{-36}$

**$r = 22$**

187750694825857827025906895944967240173956193045137086321526480715683419748  
7/1112085307874066601185102891781616395590525265690675608732266328457151210  
6618168132642013184000  
 $\approx 1.688276011 \cdot 10^{-39}$

112840978845159778051641723125201867314003891627391234469721443419027362451

9/1201945067023801558956383245086748682263661486207874216380954348545209472  
8413644487905388881061448410726400000  $\approx 93881.97676 \cdot 10^{-39}$

**$r = 23$**

142121208529103357/1262099031981112218367462924615680000000000000000000000000  
000  $\approx 1.126070181 \cdot 10^{-41}$

164467737720211797696079788573765386439195255279534657906357000762233453/17  
701712181376418619013440446792704539039992014842142281927226650547578845702  
96647680000000000000000000000000  $\approx 92910.63827 \cdot 10^{-41}$

**$r = 24$**

202963584899388930831456020923377220628678986468705628860505991455760071709  
6721667/1966571048286026750221898311689610633898131211317068901593467762237  
63068989937596941869557652393000610564507002994688000000000  
 $\approx 1.032068407 \cdot 10^{-44}$

396620067784009503344848707277708203911415925246623635467551271364635308443  
2389455772467/4476270677506188972432963324557090458166157822763644023957677  
620045721787708293318471871012379033600000000000000000000000000000000  
 $\approx 886050.2332 \cdot 10^{-44}$

**$r = 25$**

4643775143390174261/7862821332696518984450087909710504318901630434022608443  
8016000000  $\approx 5.905990925 \cdot 10^{-47}$

790656541906803067480196380135677303180443172269162145083622573606102580523  
4968533538551/9699221369746911338463050092895828673562122119352834458090912  
4668131744171734640896543765130527915740601582220157229465600000000  
 $\approx 8151752.721 \cdot 10^{-47}$

**$r = 26$**

324657596960893513055362097810169054353534008037443652932384709667251021905  
383012133440176636773549/70361525435142819442415536508514321984893241505410  
284802333047782793428406531042874093191383730411010555972394319506659199838  
415464179118899200000000  $\approx 4.614135281 \cdot 10^{-50}$

439052596194201145631581689547290856397090530052738639646350089206279422400  
906271176477568126578998177/60617901440844150632172655581084890941582568189  
927126991936222549673304854553780670100982529125058530651375278310737437219  
7067099555758080000000  $\approx 72429527.54 \cdot 10^{-50}$

**$r = 27$**

29900700893560084471031/130634776333130892842879835435456067815422420148583  
624381689967411200000000  $\approx 2.288877566 \cdot 10^{-52}$

250897089122540404987667267531244370118419531426197082238872013112033010971  
015084140582695127/40326483024734146120606087380447345063058372449296397434  
525764355983529284883017986175250833601811072826989625541316925530203750400  
000000  $\approx 62216456.86 \cdot 10^{-52}$

## English abstract

The aim of this thesis is to measure the size of nef cones of algebraic surfaces, especially of abelian surfaces and blow-ups of the projective plain. For this purpose we use the concept of nef cone volume which appears first in work of Peyre [22] in a number-theoretic context on Fano varieties, and was subsequently studied by Derenthal and co-authors in a series of papers [12, 15, 16] on Del Pezzo surfaces. By Bauer and Schmitz it was shown in [5] that an extension of this notion can be used to measure the size of Zariski chambers. In concrete terms, the volume of a convex cone  $\mathcal{C}$  in the Néron-Severi vector space  $\mathrm{NS}_{\mathbb{R}}(X)$  of a smooth projective surface  $X$  over  $\mathbb{C}$  is defined in [5] as the volume of the set

$$\bar{\mathcal{C}} \cap (-K_X)^{\leq 1},$$

where  $-K_X$  denotes the anticanonical divisor on  $X$  and  $(-K_X)^{\leq 1}$  the set of all classes of divisors which have intersection product at most one with  $-K_X$ . The volume of the above set is taken after identifying  $\mathrm{NS}_{\mathbb{R}}(X)$  with  $\mathbb{R}^{\rho(X)}$  by means of an isomorphism induced by a basis of  $\mathrm{NS}(X)$  (see Section 1.1 for details). Peyre considered instead of the truncated cone  $\mathrm{Nef}(X) \cap (-K_X)^{\leq 1}$  the set  $\mathrm{Nef}(X) \cap (-K_X)^{=1}$ . The volumes of these two sets differ only by the dimensional factor  $1/\rho(X)$ . In his dissertation [26] Schmitz introduced a generalization of the volume concept, which finds use in the present thesis: Instead of the half-space  $(-K_X)^{\leq 1}$  we consider  $H^{\leq 1}$  for polarizations  $H$  on  $X$ . We will use the notation

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{C}, H) := \mathrm{Vol}(\bar{\mathcal{C}} \cap H^{\leq 1})$$

and speak of the cone volume of  $\mathcal{C}$  with respect to  $H$ . To have a concept of volume which is independent of a given polarization, we define

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{C}) := \sup_H \mathrm{Vol}(\mathcal{C}, H),$$

where the supremum is taken over all polarizations  $H \in \mathrm{NS}(X)$ . In particular,  $\mathrm{Vol}(\mathrm{Nef}(X), H)$  and  $\mathrm{Vol}(\mathrm{Nef}(X))$  are then invariants that are naturally attached to the polarized surface  $(X, H)$  and the surface  $X$ , respectively. Geometrically, we may think of them as telling us in how big a space an ample line bundle can be moved without destroying its positivity.

The first two main results of this thesis give a complete picture of how nef cone volumes are behaved for simple abelian surfaces admitting a principal polarization and for products of two elliptic curves. These results have already been published in [3].

**Theorem 1.** *Let  $X$  be a simple abelian surface over  $\mathbb{C}$  which admits a principal polarization, and let  $H$  be any ample line bundle on  $X$ . Then the nef cone volume of  $X$  with respect to  $H$  can be determined in terms of  $\mathrm{End}(X)$ , specifically:*

- (a) *Suppose that  $X$  has only integer multiplication, i.e.,  $\mathrm{End}(X) = \mathbb{Z}$ . Then*

$$\mathrm{Vol}(\mathrm{Nef}(X), H) = \frac{1}{\sqrt{2H^2}}.$$

- (b) Suppose that  $X$  has real multiplication, i.e.,  $\text{End}_{\mathbb{Q}}(X) = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  for some square-free integer  $d \geq 2$ , and let  $f \geq 1$  be the conductor of  $\text{End}(X)$  in  $\text{End}_{\mathbb{Q}}(X)$  (see Sect. 2.1 for details). Then

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X), H) = \begin{cases} \frac{1}{2f\sqrt{d}(H^2)} & \text{if } d \equiv 2, 3 \pmod{4} \\ \frac{1}{f\sqrt{d}(H^2)} & \text{if } d \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

The same formula applies when  $X$  has complex multiplication: In that case the numbers  $f$  and  $d$  are to be taken from the order  $\text{End}^{\text{sym}}(X)$  in the real-quadratic subfield  $\text{End}_{\mathbb{Q}}^{\text{sym}}(X) = \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \subset \text{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ .

- (c) Suppose that  $X$  has indefinite quaternion multiplication, and write  $\text{End}_{\mathbb{Q}}(X) = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} + j\mathbb{Q} + ij\mathbb{Q}$ , and  $\text{End}(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}ab$  with suitable primitive Rosati invariant elements. Then

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X), H) = \frac{\pi\sqrt{2}}{3\sqrt{|\det S_{\delta}(a, b)|}(H^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

(See Sect. 2.1 for details, in particular for the definition of the matrix  $S_{\delta}(a, b)$ .)

The volume  $\text{Vol}(\text{Nef}(X))$  occurs in the above cases for principal polarizations. The concrete value is obtained by replacing  $(H^2)$  with 2.

**Theorem 2.** Let  $X = E_1 \times E_2$  be a product of two elliptic curves over  $\mathbb{C}$ , and let  $H$  be any ample line bundle on  $X$ .

- (a) If  $E_1$  and  $E_2$  are not isogenous, then

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X), H) = \frac{1}{(H^2)}.$$

- (b) Suppose that  $E_1$  and  $E_2$  are isogenous and have no complex multiplication, i.e.,  $\text{End}(E_1) = \text{End}(E_2) = \mathbb{Z}$ . If  $\sigma : E_1 \rightarrow E_2$  is an isogeny of minimal degree, then

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X), H) = \frac{\pi}{3 \cdot \sqrt{2 \cdot \deg(\sigma)} \cdot (H^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

- (c) Suppose that  $E_1$  and  $E_2$  are isogenous and have complex multiplication. Write  $\text{End}_{\mathbb{Q}}(E_i) = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  with a square-free integer  $d < 0$ , and let  $f_1$  and  $f_2$  the conductors of  $\text{End}(E_1)$  and  $\text{End}(E_2)$ , respectively. Then

$$\text{Vol}(\text{Nef}(X), H) = \begin{cases} \frac{\pi}{6 \cdot \text{LCM}(f_1, f_2) \sqrt{|d|}(H^2)^2} & \text{if } d \equiv 2, 3 \pmod{4} \\ \frac{\pi}{3 \cdot \text{LCM}(f_1, f_2) \sqrt{|d|}(H^2)^2} & \text{if } d \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$



The volume  $\text{Vol}(\text{Nef}(X))$  occurs in the above cases for principal polarizations. The concrete value is obtained by replacing  $(H^2)$  with 2.

Decisive for the mentioned results is the observation that the volume of the positive cone is governed on any smooth projective surface  $X$  by the discriminant of the Néron-Severi-group (see Sect. 1.2). In the case of abelian surfaces the positive cone coincides with the nef cone. We show for simple abelian surfaces how the discriminant depends on the structure of the endomorphism ring and we determine it in terms of the ring-theoretic data. This results in the different cases in Theorem 1. For products of elliptic curves  $E_1 \times E_2$  the main case is when  $E_1$  and  $E_2$  are isogenous curves with complex multiplication. In this case we are able to express the discriminant in terms of the conductors of  $\text{End}(E_i)$ . Furthermore, it succeeds in this thesis to expand the already published results in some cases to simple abelian surfaces with no principal polarization. Specifically, we can show which nef cone volumes occur for simple abelian surfaces with integer multiplication and real multiplication. Also, we can determine exactly which algebraic numbers occur as nef cone volume of a simple abelian surface. All results for abelian surfaces are presented in chapter two.

The third chapter deals with nef cone volumes belonging to blow-ups of the projective plain. In the first section we consider Del Pezzo surfaces. For them Derenthal already calculated the nef cone volume with respect to the anticanonical divisor (see [12]). We determine formulas which allow the volume calculation for any polarization. Also, we answer the question of what is the largest volume occurring. The basis for these considerations is a result of Schmitz ([26, Proposition 5.2.2]). In the second section of chapter 3 we treat nef cone volumes belonging to blow-ups of the projective plain along points on a smooth conic. In [26] Schmitz already determined formulas with which the nef cone volume with respect to the anticanonical divisor can be calculated for these surfaces. Again, we deduce formulas which allow the volume calculation for any polarization. Also, we again ask the question of what is the largest volume occurring. In this case, the answer to this question is much more difficult than in the case of Del Pezzo surfaces. Therefore we introduce the concept of minimal polarizations and show how to obtain results with it.

**Theorem 3.** *Let  $\pi : X_C^r \rightarrow \mathbb{P}^2$  be a blow-up of  $\mathbb{P}^2$  along  $r \geq 5$  points on a smooth conic  $C \subset \mathbb{P}^2$ . If we denote by  $E_1, \dots, E_r$  the exceptional curves of the blow-up and  $L = \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ , we have: The maximum volume  $\text{Vol}(\text{Nef}(X_C^r))$  is assumed for*

$$\left\lceil \frac{r+1}{2} \right\rceil \cdot L + \left( r - 2 \cdot \left\lceil \frac{r+1}{2} \right\rceil \right) \cdot E_1 - E_2 - \dots - E_r$$

or for

$$(r-2) \cdot L + (4-r) \cdot E_1 - E_2 - \dots - E_r.$$

Concrete calculations with Maple show: for  $r \leq 11$  the first case occurs, for  $12 \leq r \leq 27$  the second case occurs. (For  $r \geq 28$  it is so far unknown which case occurs.)

## **Danksagung**

Mein erster Dank gilt Prof. Dr. Thomas Bauer für die Themenstellung, die umfassende Betreuung, die angenehme Zusammenarbeit und die vielen Ideen, Anregungen und Ratschläge.

Außerdem bedanke ich mich bei Prof. Dr. Tomasz Szemberg für die Übernahme des Zweitgutachtens.

Bei Max Schmidt und Lara D'Amico bedanke ich mich für gewissenhaftes Korrekturlesen.

Meinen Eltern, Beate und Wolfgang Bornträger, danke ich herzlich für ihre stete Unterstützung.

## Erklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Dissertation

*Volumina des Nef-Kegels von abelschen Flächen und von Aufblasungen der projektiven Ebene*

selbständig und ohne fremde Hilfe verfasst habe. Alle verwendeten Quellen und Hilfsmittel habe ich explizit angegeben und wörtliche oder sinngemäße Zitate als solche gekennzeichnet.

Diese Dissertation wurde bislang weder in der vorliegenden noch in einer ähnlichen Form bei einer in- oder ausländischen Hochschule anlässlich eines Promotionsgesuchs oder zu anderen Prüfungszwecken eingereicht.

Ich erkläre, dass dies mein erster Versuch einer Promotion ist.

Carsten Bornträger  
Marburg, 20.11.2017

Die Seite 89 (Lebenslauf) enthält persönliche Daten. Sie ist deshalb nicht Bestandteil der Online-Veröffentlichung.