Fixpunkte von Endomorphismen komplexer Tori

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
vorgelegt dem
Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg

von

M.Sc. Thorsten Herrig
geboren in Marsberg

Marburg,
September 2017

Vom Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg (Hochschulkennziffer 1180)
als Dissertation angenommen am 6. September 2017

Erstgutachter: Prof. Dr. Thomas Bauer
Zweitgutachter: Prof. Dr. Herbert Lange

Tag der Einreichung: 4. September 2017
Tag der Disputation: 28. November 2017

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Betrachten wir eine holomorphe Abbildung $f : X \to X$ einer komplexen Varietät X, dann ist es natürlich, nach ihrer Fixpunktanzahl $\# \operatorname{Fix}(f)$ zu fragen. Dieser Wert kann zwischen den einzelnen Funktionen jedoch sehr variieren, ein einfacher Vergleich der Fixpunktanzahl lässt demnach keine Regelmäßigkeiten erahnen. Wir wählen daher einen in der Algebraischen Geometrie üblichen Zugang und nehmen eine asymptotische Perspektive ein. Diese ist beispielsweise durch Arbeiten zum Basisort [ELMNP], zum Wachstum höherer Kohomologie [DKL], zu Syzygien [EL] und zu Betti Zahlen [EEL] motiviert. Eine asymptotische Perspektive bedeutet in unserem Kontext, die mehrfache Iteration f^n einer Abbildung zu betrachten.

Für einen Endomorphismus $f : X \to X$ eines komplexen Torus X – und später auch einer abelschen Varietät – ist unsere erste Kernfrage:

Was ist das asymptotische Verhalten der Fixpunktfunktion

$$n \mapsto \# \operatorname{Fix}(f^n),$$

wobei $f^n = f \circ \cdots \circ f$ für die n-fache Iteration von f steht?

Diese Frage ist sowohl im analytischen (siehe z.B. [SS]) als auch im algebraisch-geometrischen Kontext von Bedeutung. In letzterem ist sie im Rahmen von Endomorphismen auf abelschen Varietäten [Rin] bereits behandelt worden. Das darin angebotene Resultat (Theorem 1.2 in [Rin]) hat sich jedoch leider als fehlerhaft erwiesen.[1] Methodisch geht die Arbeit von Betrachtungen des Pullbacks eines Geradenbündels aus.

Wir wählen einen anderen Ansatz. Birkenhake und Lange untersuchen in [BL] fixpunktfreie Automorphismen abelscher Varietäten und in [BGL] klassifizieren sie zusammen mit Gonzaléz-Aguilera Automorphismen dreidimensionaler abelscher Varietäten. Ein wichtiges Hilfsmittel in ihren Arbeiten ist jeweils die Holomorphe Lefschetz-Fixpunktformel, mit der unsere Argumentation beginnt. Zu einem Endomorphismus $f : X \to X$ eines komplexen Torus X, dem durch die analytische Darstellung eine Matrix $\rho_a(f)$ zugeordnet wird, besagt diese Fixpunktformel

$$\# \operatorname{Fix}(f) = |\mathbb{1} - \rho_a(f)|^2 .$$

Aus dieser Gleichung folgern wir in einem ersten Schritt, dass das Verhalten der Fixpunktfunktion $n \mapsto \# \operatorname{Fix}(f^n)$ wesentlich von den Eigenwerten der Matrix $\rho_a(f)$ bestimmt wird. Unsere Untersuchungen werden sich um die Frage drehen, welche Eigenwerte vom Betrag

[1] Anhand einer Multiplikationsabbildung auf einer elliptische Kurve kann man nachweisen, dass die Formel des Theorem 1.2 nicht erfüllt sein kann. Der Ursprung dieses Problems liegt im Beweis [Rin, Lemma 3.3].

größer, kleiner oder gleich 1 existieren und wie sie sich auf das Fixpunktverhalten auswirken. Besonders Eigenwerte vom Betrag 1 werden wir genauer differenzieren müssen, denn sie werden zu zwei Arten von Fixpunktverhalten führen können. Das erste Hauptresultat dieser Arbeit beantwortet die erste Kernfrage im Flächenfall vollständig und gibt dabei alle möglichen und tatsächlich auftretenden Konstellationen von Eigenwerten an. Dieses Ergebnis konnten wir als Teil unserer Arbeit [BH] bereits publizieren.

Theorem 1. *Sei X ein zweidimensionaler komplexer Torus und sei $f : X \to X$ ein von Null verschiedener Endomorphismus. Dann ist die Fixpunktfunktion $n \mapsto \#\operatorname{Fix}(f^n)$ von einem der folgenden drei Typen:*

(V1) *Sie wächst exponentiell in n, d.h., es existieren reelle Konstanten $A, B > 1$ und eine ganze Zahl N, sodass für alle $n \geq N$*

$$A^n \leq \#\operatorname{Fix}(f^n) \leq B^n$$

gilt. In diesem Fall sind beide analytischen Eigenwerte betraglich ungleich 1.

(V2) *Sie ist eine periodische Funktion. In diesem Fall sind die von Null verschiedenen analytischen Eigenwerte von f in der Menge der k-ten Einheitswurzeln enthalten, wobei $k \in \{1, \ldots, 6, 8, 10, 12\}$.*

(V3) *Sie ist von der Form*

$$\#\operatorname{Fix}(f^n) = \begin{cases} 0, & \textit{falls } n \equiv 0 \pmod r \\ h(n), & \textit{sonst,} \end{cases}$$

wobei $r \geq 2$ eine ganze Zahl und h eine Funktion mit exponentiellem Wachstum ist. In diesem Fall ist ein analytischer Eigenwert von f vom Betrag > 1 und der andere ist eine Einheitswurzel.

Alle drei Typen der Fixpunktfunktion treten bereits im projektiven Fall auf, also auf abelschen Flächen.

Dieses Theorem greifen Alvarado und Auffarth in [AA] auf und betrachten den Fall, dass Eigenwerte vom Betrag 1 keine Einheitswurzeln sind. Unter Bezug auf das Mahler-Maß zeigen sie, dass dieser Fall zu exponentiellem Fixpunktwachstum führt und dass die Fixpunktfunktion im höherdimensionalen Fall daher ebenso einem der drei Typen unseres Theorems entsprechen muss. Zu den konkreten Eigenwerten von Endomorphismen einfacher abelscher Varietäten geben sie hingegen keine Auskunft, was uns zur zweiten Kernfrage dieser Arbeit führt:

Wie können wir für einen gegebenen Endomorphismus $f : X \to X$ einer einfachen abelschen Varietät X konkret das Verhalten seiner Fixpunktfunktion $n \mapsto \#\operatorname{Fix}(f^n)$ angeben?

Nach Alberts Klassifikation sind die möglichen Endomorphismenalgebren $\operatorname{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ einer einfachen abelschen Varietät X (siehe Abschnitt 5.5 in [CAV]) bekannt, sodass die Abbildung f in Abhängigkeit dieser eine konkrete Gestalt hat. Durch eine zweite Fixpunktformel für abelsche Varietäten, die wie erstere in den Arbeiten [BL] und [BGL] zum Einsatz kommt, kann die Fixpunktanzahl für dieses konkrete f direkt berechnet werden. Wie sich beliebiges Iterieren von f auf die Fixpunktanzahl auswirkt, gibt uns diese

Formel jedoch nicht an. Für Informationen zum asymptotischen Verhalten der Funktion $n \mapsto \#\operatorname{Fix}(f^n)$ sind wir daher wieder auf Kenntnisse über die Eigenwerte der analytischen Darstellung $\rho_a(f)$ angewiesen. Da wir $\rho_a(f)$ im Allgemeinen aber nicht konkret angeben können, ist unser Ansatz, die Fixpunktformel für abelsche Varietäten mit der Holomorphen Lefschetz-Fixpunktformel abzugleichen, um so ausgehend von der konkreten Gestalt von f auf die Eigenwerte von $\rho_a(f)$ zu schließen. Die einzelnen Typen der möglichen Endomorphismenalgebren $\operatorname{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ werden wir separat beleuchten.

Im Flächenfall geben wir eine vollständige Antwort auf unsere zweite Kernfrage, was wir ebenfalls als Teil der Arbeit [BH] publiziert haben. Im komplexeren Fall beliebiger Dimension beantworten wir sie für einfache abelsche Varietäten mit reeller, komplexer und total definiter Quaternionenmultiplikation, was ich als Teil der Arbeit [He] zur Veröffentlichung eingereicht habe. Wir finden darin weiter die ersten Beispiele von Endomorphismen, die Eigenwerte vom Betrag 1 haben, die keine Einheitswurzeln sind. Diese treten in Dimension 4 im Fall total indefiniter Quaternionenmultiplikation auf. All dies ist Teil unseres zweiten Hauptresultats:

Theorem 2 (Satz 2.2.2 und Satz 2.2.7)**.** (1) *Sei X eine einfache abelsche Varietät und $f : X \to X$ ein von Null verschiedener Endomorphismus. Dann gilt für f:*

(a) *Angenommen X habe reelle Multiplikation, d.h., $\operatorname{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ ist ein total reeller Zahlkörper. Dann ist $\#\operatorname{Fix}(f^n)$ periodisch, wenn $f = \pm id$ gilt, und wächst sonst exponentiell.*

(b) *Angenommen X habe total definite Quaternionenmultiplikation, d.h., $\operatorname{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ ist von der Form $F + iF + jF + ijF$ mit $i^2 = \alpha \in F \setminus \{0\}$, $j^2 = \beta \in F \setminus \{0\}$ und $ij = -ji$, wobei F ein total reeller Zahlkörper ist und $\operatorname{End}_{\mathbb{Q}}(X) \otimes_\sigma \mathbb{R} \simeq \mathbb{H}$ für jede Einbettung $\sigma : F \hookrightarrow \mathbb{R}$ gilt. Ein $f \in \operatorname{End}(X)$ schreiben wir als $f = a + bi + cj + dij$ mit $a, b, c, d \in F$. Dann ist $\#\operatorname{Fix}(f^n)$ periodisch, wenn $\left|a + \sqrt{b^2\alpha + c^2\beta - d^2\alpha\beta}\right| = 1$ gilt, und wächst sonst exponentiell.*

(c) *Angenommen X habe komplexe Multiplikation, d.h., $\operatorname{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ ist ein CM-Körper. Dann ist $\#\operatorname{Fix}(f^n)$ periodisch, wenn $|f| = 1$ gilt, und wächst sonst exponentiell.*

(d) *Angenommen X sei von Dimension 2 und habe total indefinite Quaternionenmultiplikation, d.h., $\operatorname{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ ist von der Form $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q} + j\mathbb{Q} + ij\mathbb{Q}$, wobei $i^2 = \alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $j^2 = \beta \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ mit $ij = -ji$ und $\alpha > 0$, $\alpha \geq \beta$ gilt. Dann ist $\#\operatorname{Fix}(f^n)$ periodisch, wenn $\left|a + \sqrt{b^2\alpha + c^2\beta - d^2\alpha\beta}\right| = 1$ gilt, und wächst sonst exponentiell.*

Wenn die Fixpunktfunktion $\#\operatorname{Fix}(f^n)$ in den Fällen (a), (b), (c) und (d) periodisch ist, dann sind alle analytischen Eigenwerte Einheitswurzeln, und wenn $\#\operatorname{Fix}(f^n)$ exponentiell wächst, dann sind alle Eigenwerte betraglich $\neq 1$.

(2) *Es existieren einfache abelsche Varietäten mit total indefiniter Quaternionenmultiplikation, die Endomorphismen mit analytischen Eigenwerten vom Betrag 1 haben, die keine Einheitswurzeln sind.*

Diese Kenntnisse über die Eigenwerte eines Endomorphismus $f : X \to X$ einer einfachen abelschen Varietät X motivieren nach der Entropie dieser Abbildung zu fragen. Die

Entropie ist zwar über die offenen Überdeckungen von X definiert (vgl. [AKM]), nach Ergebnissen von Friedland [Fr], Gromov [Gr] und Yomdin [Yo] kann sie aber durch

$$\max_{0 \leq j \leq \dim X} \log(\rho(f^* : H^{j,j}(X) \to H^{j,j}(X)))$$

berechnet werden, wobei ρ für den Spektralradius steht. Dabei nutzen wir, dass die Eigenwerte von f^* durch diejenigen der Matrix $\rho_a(f)$ bestimmt sind.

Vor allem im Kontext algebraischer Flächen ist die Betrachtung der Entropie in den letzten Jahren in den Fokus der Forschung gerückt, wobei eine Leitfrage ist, ob die Entropie eines Automorphismus positiv oder Null ist. Ergebnisse bezüglich K3-Flächen ([McM1] und [McM2]), zweidimensionaler komplexer Tori [Res1] und abelscher Flächen [Res2] zeigen, dass die Entropie im positiven Fall dem Logarithmus einer Salem-Zahl entspricht.

Wir übernehmen die Leitfragen dieser Entropieuntersuchungen in unserer dritten Kernfrage:

Wie können wir für einen gegebenen Endomorphismus $f : X \to X$ einer einfachen abelschen Varietät X entscheiden, ob dessen Entropie $\log(\gamma)$ positiv oder Null ist? Ist die Entropie $\log(\gamma)$ positiv, welche algebraische Struktur hat die Zahl γ?

Wir betrachten dieselben Typen von Endomorphismenalgebren wie in Theorem 2 und zeigen, dass das Fixpunktverhalten und die Entropie einer Abbildung in einem direkten Zusammenhang stehen. Wir weisen nach, dass die Entropie nur im Fall total indefiniter Quaternionenmultiplikation dem Logarithmus einer Salem-Zahl entsprechen kann, wir entwickeln die ersten Beispiele für diesen Spezialfall. Ausgehend von der jeweiligen Endomorphismenalgebra zeigen wir für die übrigen Fälle, dass die Entropie der Logarithmus einer Zahl eines bestimmten total reellen Zahlkörpers ist. Das dritte Hauptresultat dieser Arbeit ist demnach:

Theorem 3 (Satz 3.1.1 und Satz 3.2.5)**.** (1) *Sei X eine einfache abelsche Varietät mit reeller, komplexer oder total definiter Quaternionenmultiplikation. Oder sei X eine einfache abelsche Fläche mit total indefiniter Quaternionenmultiplikation. Für einen von Null verschiedenen Endomorphismus $f : X \to X$ mit Entropie $h(f) = \log(\gamma)$ gilt dann:*

- (a) *Ist $\#\,\mathrm{Fix}(f^n)$ periodisch, dann folgt $h(f) = 0$, und wächst $\#\,\mathrm{Fix}(f^n)$ exponentiell, dann folgt $h(f) > 0$.*
- (b) *Der Körper, den die Zahl γ erzeugt, ist in dem normalen Abschluss eines maximalen total reellen Unterkörpers von $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ enthalten oder wir können ihn in einen einbetten.*

(2) *Es existieren einfache abelsche Varietäten mit total indefiniter Quaternionenmultiplikation, auf denen Automorphismen mit positiver Entropie $\log(\gamma)$ existieren, sodass γ eine Salem-Zahl ist.*

Unsere Resultate zum Fixpunktverhalten eines Endomorphismus führen also zu Aussagen über seine Entropie. Neben obigen Ergebnissen untersuchen wir noch das Fixpunktverhalten von Automorphismen auf K3-Flächen. Da uns dort keine Fixpunktformeln zur Verfügung stehen, aber Ergebnisse zur Entropie vorhanden sind, verfahren wir umgekehrt und schließen von der Entropie auf das Fixpunktverhalten. Dabei gehen wir auf die ersten beiden Kernfragen ein und zeigen, dass die Fixpunktfunktion $n \mapsto \#\operatorname{Fix}(f^n)$ eines Automorphismus $f : X \to X$ einer K3-Fläche X entweder periodisch ist oder mindestens exponentiell wächst, was wir in Abhänigikeit der Eigenwerte von f^* bestimmen. Neben K3-Flächen beantworten wir diese Fragen auch für Endomorphismen auf Kummer-Varietäten, indem wir die Holomorphe Lefschetz-Fixpunktformel auf diese Objekte übertragen.

Diese Arbeit ist wie folgt aufgebaut: Im Grundlagenteil stellen wir alles zusammen, was wir für die eigenen Ausführungen in Kapitel 2 und 3 benötigen. Wir beginnen Kapitel 2 mit der Herleitung des Theorems 1. Im folgenden Teil entwickeln wir Theorem 2 in zwei Schritten, indem wir dies zunächst für den Flächenfall beweisen und anschließend auf die höheren Dimensionen eingehen. Dieses Vorgehen ist einerseits durch die Chronologie dieses Promotionsvorhabens motiviert und hängt andererseits damit zusammen, dass wir die Beweise in der höherdimensionalen Situation anders führen müssen. Abschließen werden wir das zweite Kapitel mit Fixpunktuntersuchungen von Endomorphismen auf Kummer-Varietäten und Automorphismen auf K3-Flächen. Die gewonnenen Ergebnisse zu Eigenwerten von Endomorphismen einfacher abelscher Varietäten bringen wir in Kapitel 3 schließlich zur Anwendung, indem wir nach der Entropie dieser Abbildungen fragen.

Kapitel 1

Grundlagen

In diesem Kapitel stellen wir die Objekte und Resultate vor, die dieser Arbeit zugrunde liegen. Wie in der Einleitung erwähnt, basiert unser Studium von Fixpunkten holomorpher Abbildungen auf komplexen Tori und abelschen Varietäten wesentlich auf zwei Fixpunktformeln, der *Holomorphen Lefschetz-Fixpunktformel* für komplexe Tori und einer spezielleren Variante dieser für abelsche Varietäten. Um diese Formeln angeben und anschließend adäquat mit ihnen arbeiten zu können, diskutieren wir zunächst die Struktur holomorpher Abbildungen auf komplexen Tori (siehe [CAV] und [CT]). Wir werden sehen, dass holomorphe Abbildungen eng mit Homomorphismen zusammenhängen, denen mittels zweier Darstellungen Matrizen zugeordnet werden, die für die erste Fixpunktformel essentiell sind.

Die zweite Fixpunktformel für abelsche Varietäten nutzt den Poincaréschen Reduzibilitätssatz und bezieht die Struktur der Endomorphismenalgebra $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X) = \mathrm{End}(X) \otimes \mathbb{Q}$ einer abelschen Varietät X mit ein. Die Klassifikation dieser Algebra geben wir an und stellen mit Blick auf Kapitel 2 erste Aussagen zu den auftretenden algebraischen Objekten wie total reelle Zahlkörper, CM-Körper oder Quaternionenalgebren zusammen.

Mithilfe unserer Ergebnisse zu Fixpunkten einer Abbildung werden wir in Kapitel 3 schließlich nach der Entropie dieser Abbildung fragen. Sie stellt eine Invariante einer stetigen Funktion auf einem kompakten topologischen Raum dar und wird in Abhängigkeit der offenen Überdeckungen dieses Raumes definiert, die ursprüngliche Definition nach [AKM] erläutern wir in den Grundlagen. Anschließend geben wir an, wie die Entropie über die auf den Kohomologiegruppen induzierte Wirkung berechnet werden kann. Hieraus wird später auch der Zusammenhang zu den Fixpunktuntersuchungen deutlich werden. Ein besonderer Fall wird sein, wenn die Entropie dem Logarithmus einer Salem-Zahl entspricht, weshalb wir diese ganz-algebraischen Zahlen in einem eigenen Abschnitt vorstellen werden.

Als Exkurs werden wir später auch Fixpunkte von Automorphismen auf K3-Flächen untersuchen. Dazu werden wir Ergebnisse zur Entropie auf diesen Flächen nutzen. Die Grundlagen dieser Resultate und ihrer Anwendung auf die Fixpunktthematik werden wir gegen Ende dieses Kapitels diskutieren. Abschließen werden wir dieses Kapitel mit Kummer-Varietäten, auf die wir in Kapitel 2 die Holomorphe Lefschetz-Fixpunktformel erweitern werden.

1.1. Komplexe Tori und abelsche Varietäten

Die folgenden Ausführungen basieren auf [CAV] und [CT] und können dort genauer nachgeschlagen werden. Wir stellen zwei Grundobjekte dieser Arbeit vor, komplexe Tori und abelsche Varietäten.

Unter einem *Gitter* Λ in einem komplexen g-dimensionalen Vektorraum V versteht man eine diskrete Untergruppe von maximalem Rang in V, also Rang $2g$. Der Quotient

$$X := V/\Lambda$$

definiert einen g-dimensionalen *komplexen Torus*, der die Struktur einer zusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeit hat. Um später die Entropie einer stetigen Funktion auf einem komplexen Torus definieren und die Entropie einer holomorphen Abbildung berechnen zu können, machen wir noch ein paar Aussagen zur Struktur eines komplexen Torus. Da X unter der Restklassenabbildung das Bild eines g-dimensionalen Parallelotops ist, ist X kompakt. Weiter stellt X bezüglich der Quotiententopologie einen Hausdorffraum dar und ist eine Kählermannigfaltigkeit.

Wir kommen nun zu abelschen Varietäten. Sei $X := V/\Lambda$ wiederum ein komplexer Torus, dann bilden die Geradenbündel auf X die *Picard-Gruppe* $\mathrm{Pic}(X)$, die mit der Gruppe $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ identifiziert werden kann. Betrachten wir die Abbildung

$$c_1 : H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \to H^2(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Alt}^2(\Lambda, \mathbb{Z}) := \bigwedge^2 \mathrm{Hom}(\Lambda, \mathbb{Z}),$$

dann bildet $c_1(L)$ die *erste Chern-Klasse* eines Geradenbündels L und $c_1(H^1(X, \mathcal{O}_X^*))$ die *Néron-Severi-Gruppe* $\mathrm{NS}(X)$, die nach obiger Isomorphie alternierende Formen umfasst, die weiter in Bijektion mit bestimmten hermiteschen Formen stehen. Existiert auf X kurzum nun ein Geradenbündel L, dessen zugehörige hermitesche Form positiv definit ist, dann wird dieses als *Polarisierung* bezeichnet. Ein komplexer Torus mit einer Polarisierung definiert eine *abelsche Varietät*. Alternativ heißt ein komplexer Torus X in diesem Fall *projektiv*, da die Polarisierung die Existenz eines sehr amplen Divisors auf X belegt, über den eine Einbettung in den projektiven Raum definiert werden kann.

1.1.1. Endomorphismen komplexer Tori und abelscher Varietäten

Wir halten zunächst grundlegende Aussagen zu Abbildungen auf komplexen Tori fest und geben anschließend die Klassifikation der Endomorphismenalgebra einer einfachen abelschen Varietät an. Als Vorlagen dienen uns wieder [CAV] und [CT].

Betrachten wir eine holomorphe Abbildung $h : X_1 \to X_2$ zwischen zwei komplexen Tori $X_1 = V_1/\Lambda_1$ und $X_2 = V_2/\Lambda_2$. Dann existiert ein eindeutiger Homomorphismus $f : X_1 \to X_2$, sodass für alle $x \in X_1$ die Gleichung

$$h(x) = f(x) + h(0)$$

gilt, jede holomorphe Abbildung ist also die Komposition einer Translation und eines Homomorphismus. Weiter existiert eine eindeutige $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $F : V_1 \to V_2$

mit $F(\Lambda_1) \subseteq \Lambda_2$, die den Homomorphismus f induziert. Aufgrund dieser Beobachtungen erhalten wir zwei Darstellungen der Homomorphismengruppe $\mathrm{Hom}(X_1, X_2)$:

Der injektive Gruppenhomomorphismus

$$\rho_a : \mathrm{Hom}(X_1, X_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_1, V_2), \quad f \mapsto F$$

wird die *analytische Darstellung von* $\mathrm{Hom}(X_1, X_2)$ genannt. Die Einschränkung F_{Λ_1} von F auf das Gitter Λ_1 ist $\mathbb{Z}$-linear und bestimmt f und F vollständig. Der injektive Gruppenhomomorphismus

$$\rho_r : \mathrm{Hom}(X_1, X_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda_1, \Lambda_2), \quad f \mapsto F_{\Lambda_1}$$

wird daher als *rationale Darstellung von* $\mathrm{Hom}(X_1, X_2)$ bezeichnet.

Gehen wir zum Endomorphismenring $\mathrm{End}(X)$ eines g-dimensionalen komplexen Torus $X := V/\Lambda$ über, dann gilt für diese beiden Darstellungen die Relation $\rho_r \simeq \rho_a \oplus \overline{\rho_a}$. Betrachtet man weiter das *charakteristische Polynom der rationalen Darstellung*,

$$\chi_f^r(t) = \det(t \cdot \mathrm{id}_\Lambda - \rho_r(f)),$$

und das *charakteristische Polynom der analytischen Darstellung*,

$$\chi_f^a(t) = \det(t \cdot \mathrm{id}_V - \rho_a(f)),$$

dann führt diese zur Gleichung

$$\chi_f^r = \chi_f^a \cdot \overline{\chi_f^a}.$$

Sind nun $\lambda_1, \ldots, \lambda_g$ die Eigenwerte der analytischen Darstellung $\rho_a(f)$, dann sind $\lambda_1, \overline{\lambda}_1, \ldots, \lambda_g, \overline{\lambda}_g$ die Eigenwerte der rationalen Darstellung $\rho_r(f)$. Abkürzend werden wir im Folgenden von *analytischen* bzw. *rationalen Eigenwerten* sprechen. Die rationalen Eigenwerte eines Endomorphismus f stellen ganz-algebraische Zahlen dar, da das Polynom $\chi_f^r(t)$ zum Endomorphismus f ganzzahlige Koeffizienten hat.

Wir gehen nun von einem surjektiven Endomorphismus f auf einem komplexen Torus $X := V/\Lambda$ aus und beschreiben kurz, welche Wirkung f auf den Kohomologiegruppen $H^i(X, \mathbb{C})$ induziert. Dazu betrachten wir zunächst die Isomorphismen

$$H^i(X, \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{p+q=i} H^{p,q}(X) \quad \text{und} \quad H^{p,q}(X) \simeq \bigwedge^p \Omega \otimes \bigwedge^q \overline{\Omega},$$

wobei $\Omega := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ und $\overline{\Omega} := \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{C}}}(V, \mathbb{C})$ die Gruppen der $\mathbb{C}$-linearen bzw. $\mathbb{C}$-antilinearen Abbildungen auf V sind. Die analytische Darstellung $\rho_a(f)$ eines surjektiven Endomorphismus f ist ein Automorphismus von V und die Transponierte ${}^t\rho_a(f)$ bildet einen Automorphismus der Gruppe Ω. Somit ist die Pullback-Wirkung von f auf $H^1(X, \mathbb{C})$ durch $f^* = {}^t \rho_a(f) \oplus {}^t \overline{\rho_a(f)}$ gegeben und lässt sich zu einem Automorphismus auf $H^*(X, \mathbb{C})$ fortsetzen. Die Eigenwerte von f^* auf sämtlichen $H^{p,q}(X)$ sind demnach Produkte rationaler Eigenwerte. Die Surjektivität von f wird im Rahmen der Entropiebetrachtungen von Bedeutung sein, die Wirkung f^* können wir ohne diese Eigenschaft analog einführen, allerdings ist f^* dann kein Automorphismus mehr.

Abschließend kommen wir zur Klassifikation der Endomorphismenalgebra $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ einer abelschen Varietät X: Bevor wir diese angeben können, müssen wir X und $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ zunächst in ausgezeichnete Faktoren zerlegen:

Sei $f : X_1 \to X_2$ ein Homomorphismus komplexer Tori. Ist entweder $\rho_a(f)$ ein Isomorphismus oder f ein surjektiver Homomorphismus mit endlichem Kern oder f ein surjektiver Homomorphismus komplexer Tori derselben Dimension, dann stellt f eine *Isogenie* dar. Die komplexen Tori X_1 und X_2 werden dann als *isogen* zueinander bezeichnet, dies definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der komplexen Tori. Sind alle komplexen Untertori eines komplexen Torus trivial, dann nennt man ihn *einfach.* Für eine abelsche Varietät X erhält man nach dem *Poincaréschen Reduzibilitätssatz* die Isogenie

$$X \to X_1^{n_1} \times \ldots \times X_r^{n_r},$$

wobei die X_i paarweise nichtisogene einfache abelsche Varietäten sind, und die X_i und n_i bis auf Isogenie eindeutig sind. Mithilfe dieser Aussage ergibt sich für die Endomorphismenalgebra $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ die Isomorphie

$$\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X) \simeq M_{n_1}(F_1) \oplus \ldots \oplus M_{n_r}(F_r),$$

wobei $F_i := \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X_i)$ ein Schiefkörper von endlicher Dimension über den rationalen Zahlen ist.

Mithilfe der obigen Zerlegungen können wir nun die Klassifikation der Endomorphismenalgebra $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ einer abelschen Varietät X angeben:

Auf der Algebra $F := \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ einer einfachen abelschen Varietät X ist eine positive Anti-Involution $'$ definiert, die *Rosati-Involution* bezüglich einer Polarisierung. Falls diese Anti-Involution trivial auf dem Zentrum von F ist, dann nennt man das Paar $(F, ')$ *von der ersten Art* und ansonsten *von der zweiten Art.* Weiter sei K das Zentrum von F und K_0 der Fixkörper der Anti-Involution eingschränkt auf K. Zudem sei

$$[F : K] = d^2, \quad [K : \mathbb{Q}] = e, \quad [K_0 : \mathbb{Q}] = e_0 \quad \text{und} \quad \mathrm{rkNS}(X) = \rho.$$

Albert klassifiziert in [Al1] und [Al2] die Paare $(F, ')$, wobei F ein Schiefkörper von endlicher Dimension über $\mathbb{Q}$ und $'$ eine positive Anti-Involution auf F ist. Für eine einfache abelsche Varietät X der Dimension g haben wir damit folgende Klassifikation ihrer Endomorphismenalgebra $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$, wobei wir die einzelnen Typen in den nächsten beiden Abschnitten genauer besprechen:

Satz 1.1.1 ([CAV], Proposition 5.5.7)**.**

$F = \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$	d	e_0	ρ	Einschränkung
total reeller Zahlkörper	1	e	e	$e \mid g$
total indefinite Quaternionenalgebra	2	e	$3e$	$2e \mid g$
total definite Quaternionenalgebra	2	e	e	$2e \mid g$
$(F, ')$ von der zweiten Art	d	$\frac{1}{2}e$	$e_0 d^2$	$e_0 d^2 \mid g$

1.1.2. Total reelle Zahlkörper und CM-Körper

Wie wir gesehen haben, kann die Endomorphismenalgebra $F := \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ einer einfachen abelschen Varietät ein total reeller Zahlkörper sein. Ist $(F, ')$ von der zweiten Art, dann werden wir uns bei unseren Fixpunkt- und Entropiebetrachtungen auf den Fall beschränken, dass F ein CM-Körper ist. Sprechen wir im Folgenden von einem Körper, dann sei stets ein Zahlkörper gemeint. Die Fälle, dass F eine Quaternionenalgebra darstellt, diskutieren wir im nächsten Unterkapitel.

Ein *total reeller Zahlkörper* F ist dadurch definiert, dass für alle $\mathbb{Q}$-Einbettungen $\sigma : F \hookrightarrow \mathbb{C}$ bereits $\sigma(F) \subseteq \mathbb{R}$ gilt. Ein Endomorphismus f eines solchen Körpers $F = \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ kann in einem beliebigen Unterkörper von F liegen, sodass die Frage ist, welche Struktur dieser Unterkörper hat. Ich gehe davon aus, dass folgende Aussage bekannt ist. Es scheint mir in der Literatur aber nicht explizit formuliert zu werden, daher geben wir einen Beweis.

Lemma 1.1.2. *Jeder Unterkörper E eines total reellen Zahlkörpers F ist total reell.*

Beweis. Nach dem Satz vom primitiven Element [Bo, Satz 12, S. 119] existiert ein α in F, sodass $F = \mathbb{Q}(\alpha)$ gilt. Sei weiter μ das Minimalpolynom zu α und K der von dessen Nullstellen erzeugte Zerfällungskörper. Da alle Nullstellen von μ per Definition von F reellwertig sind und K Galois über den rationalen Zahlen ist, ist K total reell. Liegt demnach eine Nullstelle eines irreduziblen rationalen Polynoms in K, dann liegen bereits alle in diesem Körper. Betrachten wir abschließend einen Unterkörper E in F, der wiederum mittels des Satzes vom primitiven Element durch $\mathbb{Q}(\beta)$ darstellbar ist, dann liegt β in K und somit auch jede Nullstellen des Minimalpolynoms zu β, der Unterkörper E ist demnach total reell. □

Ein *CM-Körper* ist eine quadratische Erweiterung eines total reellen Zahlkörpers, die total imaginär ist. Im Abschnitt zu Salem-Zahlen werden wir sehen, dass eine imaginär-quadratische Erweiterung eines total reellen Zahlkörpers nicht unbedingt ein CM-Körper sein muss. Entspricht ein Endomorphismus $f : X \to X$ einem Element eines CM-Körpers $F = \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$, dann benötigen wir mit Blick auf dessen Fixpunktverhalten später Kenntnisse über die Unterkörper und den normalen Abschluss von F. Folgende beiden Aussagen liefern uns diese, wir geben wiederum einen Beweis:

Lemma 1.1.3. *Ein Körper F ist genau dann total reell oder ein CM-Körper, wenn ein Automorphismus g von F existiert, der bezüglich jeder Einbettung $F \hookrightarrow \mathbb{C}$ mit der komplexen Konjugation übereinstimmt.*

Beweis. Nehmen wir zunächst an, dass F total reell oder ein CM-Körper ist. Weiter sei E der maximale total reelle Unterkörper von F. Für $E = F$ folgt die Aussage direkt mit $g = \mathrm{id}$. Ansonsten sei g das nicht-triviale Element in $\mathrm{Gal}(F/E)$.

Umgekehrt sei E der Fixkörper eines Automorphismus g. Da E total reell sein muss, gilt entweder $E = F$ oder F ist eine quadratische Erweiterung von E, die total imaginär ist. □

Lemma 1.1.4. (a) *Der normale Abschluss eines CM-Körpers ist wieder ein CM-Körper.*

(b) *Jeder Unterkörper eines CM-Körpers ist entweder ein total reeller Zahlkörper oder ein CM-Körper.*

Beweis. Wir beginnen mit dem Beweis von Teil (a): Sei $\mathbb{Q}(\alpha_1) = F(\alpha_1)$ ein CM-Körper vom Grad n und F dessen maximaler total reeller Unterkörper. Weiter seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Nullstellen des Minimalpolynoms zu α_1 über den rationalen Zahlen. Da F total reell ist und $\sigma(\alpha_1)$ unter jeder $\mathbb{Q}$-Einbettung $\sigma : \mathbb{Q}(\alpha_1) \hookrightarrow \mathbb{C}$ komplexwertig sein muss, ist jeder Körper $\mathbb{Q}(\alpha_i)$ ein CM-Körper. Weiter definiert

$$M := \mathbb{Q}(\alpha_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{Q}(\alpha_n)$$

den normalen Abschluss von $\mathbb{Q}(\alpha_1)$. Wir wählen eine Einbettung $M \hookrightarrow \mathbb{C}$ und schreiben g für die komplexe Konjugation auf M. Schränken wir g auf einen Körper $\mathbb{Q}(\alpha_i)$ ein, dann folgt $g(\mathbb{Q}(\alpha_i)) = \mathbb{Q}(\alpha_i)$ und weiter $g(\mathbb{Q}(\alpha_i)\mathbb{Q}(\alpha_j)) = \mathbb{Q}(\alpha_i)\mathbb{Q}(\alpha_j)$. Bezüglich jeder Einbettung

$$\mathbb{Q}(\alpha_i)\mathbb{Q}(\alpha_j) \hookrightarrow \mathbb{C}$$

entspricht der Automorphismus g der komplexen Konjugation auf den Körpern $\mathbb{Q}(\alpha_i)$ und $\mathbb{Q}(\alpha_j)$ und somit auch derjenigen auf $\mathbb{Q}(\alpha_i)\mathbb{Q}(\alpha_j)$. Aussage (a) folgt nun per Induktion und Lemma 1.1.3.

Für den Beweis von Teil (b) betrachten wir einen Unterkörper E eines CM-Körpers F, wobei wir aufgrund von Teil (a) annehmen, dass F normal über den rationalen Zahlen ist. Demnach ist F ebenfalls normal über E, sodass wir die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(F/E)$ betrachten können. Sei h eine Abbildung aus $\mathrm{Gal}(F/E)$ und g ein Automorphismus wie in Lemma 1.1.3. Für eine $\mathbb{Q}$-Einbettung $\sigma : F \hookrightarrow \mathbb{C}$ ergibt sich dann die Gleichung

$$\bar{\cdot} \circ \sigma = \sigma \circ g,$$

wobei $\bar{\cdot}$ die gewöhnliche komplexe Konjugation ist. Ebenso ist $\sigma \circ h$ eine Einbettung von F, womit wir

$$\bar{\cdot} \circ \sigma \circ h = \sigma \circ h \circ g$$

erhalten. Setzen wir die obere Gleichung in die untere ein, dann ergibt sich

$$\sigma \circ g \circ h = \sigma \circ h \circ g$$

und wegen der Injektivität von σ schließlich $g \circ h = h \circ g$. Dies bedeutet, dass g mit jedem Element der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(F/E)$ kommutiert, sodass wir g zu einem Automorphismus auf E einschränken können. Diese Einschränkung erfüllt die Bedingung in Lemma 1.1.3, da jede Einbettung von E zu einer von F erweitert werden kann. □

Abschließend führen wir noch die Norm- und Spurabbildung auf einem Zahlkörper F ein, die für die Aussage der zweiten Fixpunktformel grundlegend sind. Gilt $F = \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ für eine einfache abelsche Varietät X, dann bildet $\mathrm{End}(X)$ einen Unterring in F, dessen Struktur wir im Folgenden diskutieren. Zudem besprechen wir dessen Einheitengruppe. Die folgenden Ausführungen können detailliert in [Ne] nachgelesen werden.

Zunächst sei $E \subseteq F$ eine endliche Körpererweiterung vom Grad n. Dann bildet

$$\phi_a : F \to F, \quad x \mapsto a \cdot x$$

einen Endomorphismus des E-Vektorraums F. Dann ist

$$f_a(t) = \det(t \cdot \mathrm{id}_F - \phi_a) = t^n - a_1 t^{n-1} + \ldots + (-1)^n a_n$$

das zugehörige charakteristische Polynom und die *Norm* bzw. *Spur von a bezüglich der Körpererweiterung* $E \subseteq F$ ist durch

$$N_{F/E}(a) = \det(\phi_a) = a_n \quad \text{bzw.} \quad T_{F/E}(a) = \mathrm{Spur}(\phi_a) = a_1$$

definiert. Bekanntlich ist das Polynom $f_a(t)$ eine Potenz des Minimalpolynoms von a über E. Seien $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ die E-Einbettungen des Körpers F in die komplexen Zahlen, dann können wir die Norm und Spur von a auch durch

$$N_{F/E}(a) = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i(a) \quad \text{und} \quad T_{F/E}(a) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(a)$$

berechnen. Haben wir einen Turm $E \subseteq F \subseteq G$ von Körpererweiterungen, dann gilt

$$N_{G/E}(a) = N_{F/E}(N_{G/F}(a)) \quad \text{und} \quad T_{G/E} = T_{F/E}(T_{G/F}(a)).$$

Zuletzt kommen wir zu der Gestalt des Endomorphismenrings $\mathrm{End}(X)$ als Unterring des Körpers $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$. Eine komplexe Zahl, die Nullstelle eines normierten ganzzahligen Polynoms ist, nennt man *ganz-algebraisch* oder kurz *ganz*. In einem Zahlkörper F bezeichnet $\mathcal{O}_F$ den *Ring ganzer Zahlen*, also alle ganzen Zahlen in F. Per Definition folgt somit, dass die Norm und Spur einer ganzen Zahl jeweils ganzzahlig ist. Der Ring $\mathcal{O}_F$ enthält eine $\mathbb{Q}$-Basis des Vektorraums F, bezüglich der man jedes Element in $\mathcal{O}_F$ in eindeutiger Weise mit ganzzahligen Koeffizienten darstellen kann. Ein *Gitter* $\mathcal{O} \subset K$ entspricht einer freien abelschen Untergruppe von $(F, +)$, deren Rang der Dimension des $\mathbb{Q}$-Vektorraums F entspricht. Weist ein solches Gitter $\mathcal{O}$ zudem eine Ringstruktur auf, dann nennt man es eine *Ordnung*. Kurzum ist jede Ordnung $\mathcal{O}$ im Ring $\mathcal{O}_F$ enthalten. Ist nun $F := \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ die Endomorphismenalgebra einer einfachen abelschen Varietät X, dann entspricht $\mathrm{End}(X)$ genau einer Ordnung in dem Körper F.

Die Einheitengruppe $\mathcal{O}_F^*$ des Ringes $\mathcal{O}_F$ wird von Bedeutung sein, da deren Elemente mit Automorphismen abelscher Varietäten identifiziert werden können. Für einen Zahlkörper sei $2s$ die Anzahl der echt komplexen Einbettungen $\sigma : F \hookrightarrow \mathbb{C}$ und r die Anzahl der reellen Einbettungen $\rho : F \hookrightarrow \mathbb{R}$, dann sagt der Dirichletsche Einheitensatz [Ne, S. 39 – 44], dass genau $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_t$, $t = r + s - 1$, *Fundamentaleinheiten* existieren, sodass man jede Einheit ϵ in $\mathcal{O}_F^*$ eindeutig als das Produkt

$$\epsilon = \zeta \cdot \epsilon_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot \epsilon_t^{n_t}$$

schreiben kann, wobei ζ eine Einheitswurzel und n_i eine ganze Zahl ist.

1.1.3. Quaternionenalgebren

Wir haben gesehen, dass zwei Arten von Quaternionenalgebren als Endomorphismenalgebren einfacher abelscher Varietäten auftreten. Diese und deren Unterringe, unter denen sich der Endomorphismenring befindet, werden wir im Folgenden diskutieren. Unsere Ausführungen sind [GS], [Vi] und [Vo] entnommen.

Eine *Algebra* über einem Körper F (mit $\mathrm{char} F \neq 2$) ist ein Ring B mit einem Homomorphismus $F \to B$, sodass das Bild von F im Zentrum von B liegt. Eine Algebra B über einem Körper F (mit $\mathrm{char} F \neq 2$) definiert eine *Quaternionenalgebra*, falls eine Basis $1, i, j, k$ für B als F-Vektorraum existiert, sodass

$$i^2 = \alpha, \quad j^2 = \beta \quad \text{und} \quad k = ij = -ji$$

für $\alpha, \beta \in F^\times$ gilt. Im Folgenden gebrauchen wir die übliche Notation $B = \left(\frac{\alpha,\beta}{F}\right)$. Ein Element f einer Quaternionenalgebra B kann man somit in der Form $f = a + bi + cj + dij$ mit $a, b, c, d \in F$ ausdrücken. Wir geben nun die Definitionen der beiden Typen von Quaternionenalgebren an, die in der Klassifikation der Endomorphismenalgebra einer einfachen abelschen Varietät auftauchen:

Definition 1.1.5. Sei B eine Quaternionenalgebra über einem total reellen Zahlkörper F.

(a) B ist *total definit*, wenn
$$B \otimes_\sigma \mathbb{R} \simeq \mathbb{H}$$
für jede Einbettung $\sigma : F \hookrightarrow \mathbb{R}$ gilt.

(b) B ist *total indefinit*, wenn
$$B \otimes_\sigma \mathbb{R} \simeq M_2(\mathbb{R})$$
für jede Einbettung $\sigma : F \hookrightarrow \mathbb{R}$ gilt.

Die in den Definitionen vorkommenden Isomorphien werden wir an dieser Stelle etwas genauer diskutieren. Ein *Homomorphismus* von F-Algebren ist ein Ringhomomorphismus, dessen Einschränkung auf F der Identität entspricht und der weiter notwendigerweise F-linear ist. Mit $\mathbb{H} := \left(\frac{-1,-1}{\mathbb{R}}\right)$, also $i^2 = -1$ und $j^2 = -1$, kennzeichnen wir wie gewöhnlich die *hamiltonschen Quaternionen*, die bekanntlich einen Schiefkörper bilden. Betrachten wir eine Quaternionenalgebra $B := \left(\frac{\alpha,\beta}{\mathbb{R}}\right)$ mit $I^2 = \alpha < 0$ und $J^2 = \beta < 0$, dann erhält man mittels der Vorschriften

$$1 \mapsto 1, \quad I \mapsto i\sqrt{-\alpha}, \quad J \mapsto j\sqrt{-\beta} \quad \text{und} \quad IJ \mapsto ij\sqrt{-\alpha}\sqrt{-\beta}$$

die Isomorphie $B \simeq \mathbb{H}$. Gelte für B andererseits $\alpha \geq \beta$ und $\alpha > 0$, dann ist B mittels

$$1 \mapsto 1, \quad I \mapsto I'\sqrt{\alpha} \quad \text{und} \quad J \mapsto J'$$

isomorph zu $B' := \left(\frac{1,\beta}{\mathbb{R}}\right)$, wobei $I'^2 = 1$ und $J'^2 = \beta$ gilt. Weiter kommt man durch

$$I' \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J' \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

zu der Isomorphie $B' \simeq M_2(\mathbb{R})$. Wir können also festhalten:

Lemma 1.1.6. *Sei $B = \left(\frac{\alpha,\beta}{\mathbb{R}}\right)$ eine Quaternionenalgebra. Dann gilt:*

(a) *Für* $\alpha < 0$ *und* $\beta < 0$ *haben wir* $B \simeq \mathbb{H}$*, sodass* B *ein Schiefkörper ist.*

(b) *Für* $\alpha \geq \beta$ *und* $\alpha > 0$ *haben wir* $B \simeq M_2(\mathbb{R})$*, sodass* B *kein Schiefkörper ist.*

Die Quaternionenalgebren über den reellen Zahlen haben folglich nur zwei Isomorphieklassen. Was sagt dies über total definite bzw. indefinite Quaternionenalgebren aus? Für eine total definite bzw. indefinite Quaternionenalgebra $B = \left(\frac{\alpha,\beta}{F}\right)$ führen wir mittels $B \otimes_\sigma \mathbb{R}$ eine Koeffizientenerweiterung durch, wobei die Elemente des Körpers F mit ihrem Bild unter der Einbettung $\sigma : F \hookrightarrow \mathbb{R}$ identifiziert werden. Die resultierende $\mathbb{R}$-Algebra $B \otimes_\sigma \mathbb{R}$ kann, wie wir gesehen haben, nur in einer der beiden Isomorphieklassen liegen. Im Fall totaler Definitheit liegt die Algebra $B \otimes_\sigma \mathbb{R}$ für jede Einbettung σ in der Isomorphieklasse zu $\mathbb{H}$ und im Fall totaler Indefinitheit stets in der zu $M_2(\mathbb{R})$.

Da für Quaternionenalgebren über den rationalen Zahlen nur eine $\mathbb{Q}$-Einbettung existiert, sind diese entweder total definit oder total indefinit. Allgemein existieren jedoch Zahlkörper F, über denen man eine Quaternionenalgebra B findet, die bezüglich einer Einbettung $\sigma_1 : F \hookrightarrow \mathbb{R}$ die Isomorphie $B \otimes_{\sigma_1} \mathbb{R} \simeq \mathbb{H}$ und bezüglich einer anderen Einbettung $\sigma_2 : F \hookrightarrow \mathbb{R}$ die Isomorphie $B \otimes_{\sigma_2} \mathbb{R} \simeq M_2(\mathbb{R})$ erfüllt. Dies wird uns später genauer beschäftigen, da unsere Endomorphismenalgebren eben genau diese Eigenschaft nicht haben sollen.

In diesem Kontext besprechen wir noch kurz, was eine Koeffizientenerweiterung einer Quaternionenlgebra B über einem Zahlkörper F im Allgemeinen zur Folge hat. Ist B kein Schiefkörper, dann lässt sich zeigen, dass B isomorph zu $M_2(F)$ ist. In diesem Fall nennt man B *split*. Für eine Körpererweiterung $F \subseteq E$ folgt daher $B \otimes_F E \simeq M_2(E)$. Ist B andererseits ein Schiefkörper, dann ist B nicht isomorph zu $M_2(F)$, aber es existiert stets eine Körpererweiterung $F \subseteq E$, die zu der Isomorphie $B \otimes_F E \simeq M_2(E)$ führt. Einen solchen Körper E bezeichnet man als *Zerfällungskörper* für B. Folgendes Lemma charakterisiert quadratische Zerfällungskörper:

Lemma 1.1.7 ([Vo], Lemma 5.4.7)**.** *Sei* B *eine Quaternionenalgebra über* F *und sei* $F \subseteq E$ *eine quadratische Körpererweiterung von* F*. Dann ist* E *genau dann ein Zerfällungskörper für* B*, wenn ein injektiver* F*-Algebrenhomomorphismus* $E \hookrightarrow B$ *existiert.*

Haben wir also konkret eine Quaternionenalgebra $B = \left(\frac{\alpha,\beta}{F}\right)$ mit $i^2 = \alpha$ und $j^2 = \beta$ gegeben, die ein Schiefkörper ist, dann stellt $F(\sqrt{\alpha})$ einen Zerfällungskörper für B dar und die zugehörige Isomorphie $\psi : B \otimes_F F(\sqrt{\alpha}) \to M_2(F(\sqrt{\alpha}))$ ist durch

$$i \otimes 1 \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad j \otimes 1 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

definiert. Analog ist auch $F(\sqrt{\beta})$ ein Zerfällungskörper für B.

Weiter diskutieren wir die Norm- und Spurabbildung auf Quaternionenalgebren, die eng mit denjenigen auf einem Zahlkörper zusammenhängen und ebenfalls für die Aussage einer unserer Fixpunktformeln essentiell sind.

Sei nun $B = \left(\frac{\alpha,\beta}{F}\right)$ wiederum eine Quaternionenalgebra über dem Zahlkörper F. Betrachten wir zu einem Element $f \in B$ die F-lineare Abbildung

$$\phi_f : B \to B, \quad x \mapsto f \cdot x,$$

dann ist die *Norm* von f über F durch $n_{B/F}(f) := \det(\phi_f)$ und die *Spur* von f über F durch $t_{B/F}(f) := \mathrm{Spur}(\phi_f)$ definiert. Die *Quaternionenkonjugation* $\bar{\cdot}$ ist für ein $f = a + bi + cj + dij \in B$ durch $\overline{f} = a - bi - cj - dij$ definiert. Die *reduzierte Norm* bzw. *reduzierte Spur* von f über F ist durch

$$N_{B/F}(f) := f \cdot \overline{f} = a^2 - b^2\alpha - b^2\beta + d^2\alpha\beta \quad \text{bzw.} \quad T_{B/F}(f) = f + \overline{f} = 2a$$

definiert. Diese beiden Norm- und Spurbegriffe stehen in folgenden Relationen:

$$N_{B/F}(f)^2 = n_{B/F}(f) \quad \text{und} \quad 2T_{B/F}(f) = t_{B/F}(f).$$

Die reduzierte Norm und reduzierte Spur eines Elements $f \in B$ über den rationalen Zahlen kann man durch

$$N_{B/\mathbb{Q}}(f) = N_{F/\mathbb{Q}}(N_{B/F}(f)) \quad \text{und} \quad T_{B/\mathbb{Q}}(f) = T_{F/\mathbb{Q}}(T_{B/F}(f))$$

berechnen. Wegen der Gleichung

$$f^2 - (f + \overline{f})f + f\overline{f} = 0$$

ist $f \in B$ Nullstelle des Polynoms

$$x^2 - T_{B/F}(f)x + N_{B/F}(f),$$

das das *reduzierte charakteristische Polynom* von f genannt wird.

Sei die Quaternionenalgebra $B = \left(\frac{\alpha,\beta}{F}\right)$ wiederum ein Schiefkörper und $F(\sqrt{\alpha})$ ein Zerfällungskörper mit der zugehörigen Isomorphie $\psi : B \otimes_F F(\sqrt{\alpha}) \to M_2(F(\sqrt{\alpha}))$, dann kann man die reduzierte Norm eines Elements $f \in B$ auch durch

$$N_{B/F}(f) = \det(\psi(f))$$

angeben.

Zuletzt bleibt noch zu klären, welche Struktur der Endomorphismenring $\mathrm{End}(X)$ in der Quaternionenalgebra $B = \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ hat. Eine Quaternionenalgebra B über einem total reellen Zahlkörper F kann man ebenso als $\mathbb{Q}$-Algebra auffassen. Ein $\mathbb{Z}$-*Gitter* in B ist ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Untermodul $\mathcal{O} \subseteq B$, sodass $\mathbb{Q} \cdot \mathcal{O} = B$ gilt. Hat ein solches Gitter zusätzlich noch eine Ringstruktur, dann bezeichnet man es als $\mathbb{Z}$-*Ordnung* und unter diesen Ordnungen finden wir unseren Endomorphismenring. Alle Elemente einer $\mathbb{Z}$-Ordnung sind ganz-algebraisch über $\mathbb{Z}$, d.h., sie sind Nullstellen eines normierten ganzzahligen Polynoms. Im Unterschied zu Zahlkörpern existiert in einer Quaternionenalgebra nicht unbedingt eine einzige maximale Ordnung, was zur Folge hat, dass das Produkt oder die Summe zweier ganz-algebraischer Elemente nicht mehr ganz-algebraisch ist.

1.2. Fixpunktformeln

In diesem Teil führen wir die angesprochenen Fixpunktformeln ein, die ein wichtiges Werkzeug unserer Arbeit sind. Sei nun $X = V/\Lambda$ ein komplexer Torus der Dimension g und

$h : X \to X$ eine holomorphe Abbildung. Dann bezeichnet $\mathrm{Fix}(h)$ die analytische Untervarietät von X, die die Fixpunkte der Funktion h enthält. Weiter steht $\#\,\mathrm{Fix}(h)$ für die Kardinalität von $\mathrm{Fix}(h)$. Hat die Funktion h allerdings unendlich viele Fixpunkte, dann setzt man $\#\,\mathrm{Fix}(h) = 0$. Wir haben gesehen, dass zu h ein Endomorphismus f existiert, sodass $h(x) = f(x) + h(0)$ für alle $x \in X$ gilt. Hierzu lässt sich zeigen, dass

$$\#\,\mathrm{Fix}(h) = \#\,\mathrm{Fix}(f)$$

gilt, sodass wir uns bei Fixpunktbetrachtungen auf Endomorphismen beschränken können. Wir haben die von einem Endomorphismus f induzierte Wirkung f^* auf $H^*(X, \mathbb{C})$ bereits diskutiert, sodass wir die *holomorphe Lefschetz-Zahl* $L(f)$ von f einführen können,

$$L(f) := \sum_{i=1}^{g} (-1)^i \mathrm{Spur}(f^* | H^{0,i}(X)).$$

Diese Zahl ist der Namensgeber unserer ersten Fixpunktformel:

Satz 1.2.1 ([CAV], Holomorphic Lefschetz Fixed-Point Formula 13.1.2)**.** *Sei $f : X \to X$ ein Endomorphismus eines g-dimensionalen komplexen Torus. Dann haben wir*

$$\#\,\mathrm{Fix}(f) = |L(f)|^2 = |\det(\mathbb{1}_g - \rho_a(f))|^2 = \det(\mathbb{1}_{2g} - \rho_r(f)).$$

Dass man die analytische und rationale Darstellung eines Endomorphismus f im Allgemeinen nicht angeben kann, erschwert konkrete Rechnungen. Als praktikabler erweist sich diesbezülich eine zweite Fixpunktformel, die die Fixpunktanzahl mittels Normberechnungen von f angibt, aber allerdings nur für abelsche Varietäten gilt.

Sei X nun projektiv und von der Dimension g. Wie wir gesehen haben, ist X dann isogen zu einem Produkt

$$X_1^{n_1} \times \cdots \times X_r^{n_r}$$

paarweise nichtisogener einfacher abelscher Varietäten X_i der Dimension g_i. Weiter ist bekannt, dass $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ in diesem Fall isomorph zu

$$\bigoplus_{i=1}^{r} M_{n_i}(\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X_i))$$

ist und sich ein $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ als $f = f_1 + \ldots + f_r$ schreiben lässt. Dabei ist $F_i := \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X_i)$ ein Schiefkörper endlicher Dimension über $\mathbb{Q}$. Weiter sei $K_i := \mathrm{Zentrum}(F_i)$, $e_i := [K_i : \mathbb{Q}]$, $d_i^2 = [F_i : K_i]$ und $N_i : F_i \to \mathbb{Q}$ die reduzierte Normabbildung. Mit dieser Notation kommen wir zu:

Satz 1.2.2 ([CAV], Fixed-Point Formula 13.1.4)**.** *Für ein $f \in \mathrm{End}(X)$ gilt*

$$\#\,\mathrm{Fix}(f) = \prod_{i=1}^{r} N_i(\det(1 - f_i))^{\frac{2g_i}{d_i e_i}}.$$

1.3. Entropie von Endomorphismen

Wir führen im ersten Unterabschnitt die Entropie in ihrer klassischen Bedeutung ein und geben eine Formel zu Berechnung dieser an. Auf K3-Flächen entspricht die Entropie, insofern sie positiv ist, dem Logarithmus einer Salem-Zahl, sodass wir diese ganz-algebraischen Zahlen im zweiten Unterkapitel genauer besprechen.

1.3.1. Der Entropiebegriff

In diesem Abschnitt stellen wir die topologische Entropie einer Abbildung vor, deren Berechnung schließlich mit unseren Fixpunktbetrachtungen zusammenhängen wird. Unsere Resultate der Fixpunktuntersuchungen auf abelschen Varietäten werden für die Bestimmung der Entropie auf diesen Objekten entscheidend sein. Umgekehrt werden wir die Ergebnisse zur Entropie auf K3-Flächen für unsere Fixpunktuntersuchungen auf diesen Flächen nutzen.

Wir beginnen mit der klassischen Definition der topologischen Entropie von Adler, Konheim und McAndrew [AKM] und stellen im Anschluss den Zugang vor, der für unsere Berechnungen dieses Wertes entscheidend ist.

Im Folgenden sei $f : X \to X$ eine stetige Abbildung auf einem kompakten topologischen Hausdorffraum. Für eine offene Überdeckung $\mathfrak{A}$ von X sei $N(\mathfrak{A})$ die Anzahl der Mengen in einer Unterüberdeckung minimaler Mächtigkeit. Wegen der Kompaktheit von X ist diese Zahl stets endlich und man definiert die *Entropie* der Überdeckung $\mathfrak{A}$ durch

$$H(\mathfrak{A}) := \log(N(\mathfrak{A})).$$

Betrachten wir zwei Überdeckungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von X, dann wird deren *Vereinigung* durch

$$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} := \{A \cap B |\, A \in \mathfrak{A},\, B \in \mathfrak{B}\}$$

angegeben. Ausgehend davon definiert man die *Entropie* $h(f, \mathfrak{A})$ *einer Funktion* f *bezüglich einer offenen Überdeckung* $\mathfrak{A}$ durch

$$\lim_{n\to\infty} H(\mathfrak{A} \vee f^{-1}\mathfrak{A} \vee \cdots \vee f^{-n+1}\mathfrak{A})/n.$$

Mit diesen Vorbemerkungen ist die *Entropie* $h(f)$ *einer Funktion* f schließlich als

$$\sup_{\mathfrak{A}} h(f, \mathfrak{A})$$

definiert, wobei das Supremum über alle offenen Überdeckungen $\mathfrak{A}$ von X betrachtet wird. Ohne genauer auf die Theorie der dynamischen Systeme eingehen zu wollen, gibt die Entropie anschaulich gesprochen an, ob Punkte, die nahe beieinander liegen, auch nach mehrfacher Iteration von f weiterhin nahe beieinander liegen, oder ob sich Mengen von Punkten immer weiter voneinander entfernen. Betrachten wir neben der stetigen Abbildung $f : X \to X$ einen Homöomorphismus $\varphi : X \to X'$, dann stellt Entropie in dem Sinn eine Invariante dar, dass die Gleichung

$$h(f) = h(\varphi \circ f \circ \varphi^{-1})$$

gilt. Mittels einfacher Rechnungen lässt sich für positive ganze Zahlen ebenso die Aussage

$$h(f^k) = kh(f)$$

nachweisen. Diese Gleichung macht deutlich, dass im Kontext der Entropiebetrachtungen häufig danach gefragt wird, ob die Entropie einer Funktion Null oder positiv ist.

Nachdem wir die Entropie in ihrer klassischen Definition eingeführt haben, besprechen wir, wie sich diese im Bezug auf unser Setting am besten berechnen lässt. Dazu sei X eine kompakte Kählermannigfaltigkeit und $f : X \to X$ eine holomorphe Abbildung. In dieser Situation entspricht die Entropie $h(f)$ nach Ergebnisse von Friedland [Fr], Gromov [Gr] und Yomdin [Yo] dem Wert

$$\max_{0 \leq j \leq \dim X} \log(\rho(f^* : H^{j,j}(X) \to H^{j,j}(X))),$$

wobei ρ für den Spektralradius steht. (vgl. [Gu, Chapitre 2])

Wie wir zu Beginn der Grundlagen gesehen haben, stellen komplexe Tori kompakte Hausdorffräume dar, die topologische Entropie in ihrer klassischen Bedeutung ist also für stetige Funktionen auf komplexen Tori definiert. Weiter ist ein komplexer Torus eine kompakte Kählermannigfaltigkeit, sodass die Entropie einer holomorphen Abbildung über letztere Formel berechnet werden kann.

1.3.2. Positive Entropie – Salem-Zahlen

Wir werden zum Ende des zweiten Kapitels sehen, dass positive Entropie von Automorphismen auf K3-Flächen gleichbedeutend damit ist, dass dieser Wert dem Logarithmus einer Salem-Zahl entspricht. Auch der Fall, dass ein analytischer Eigenwert eines Automorphismus einer einfachen abelschen Varietät eine Salem-Zahl ist, wird eine besondere Situation darstellen. Daher fassen wir hier einige Eigenschaften einer Salem-Zahl zusammen, genauere Ausführungen sind [BDGPS] zu entnehmen.

Eine *Salem-Zahl* τ ist eine ganz-algebraische Zahl vom Betrag größer 1, deren konjugierte Nullstellen höchstens vom Betrag 1 sind, aber mindestens eine genau Betrag 1 hat. Das Minimalpolynom μ einer Salem-Zahl wird als *Salem-Polynom* bezeichnet.

Wir beziehen uns auf die ursprüngliche Definition von Salem [S, Seite 26], einige Autoren verzichten jedoch auf die Bedingung, dass mindestens eine konjugierte Nullstelle Betrag 1 hat. In diesem Fall wäre beispielsweise $1 + \sqrt{2}$ als Erzeuger des reell-quadratischen Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ eine Salem-Zahlen, was die ursprüngliche Definition nicht zulässt. Bei McMullen [McM2] ist der Verzicht auf diese Zusatzbedingung inhaltlich motiviert, er schreibt dazu in [McM2] auf Seite 210 Folgendes: „For our purposes it is natural to permit quadratic Salem numbers; these were excluded in Salem's original definition [S], III. 3.“

An diesem Punkt geben wir ein Lemma an, das später für die Bestimmung der analytischen Eigenwerte eines Endomorphismus auf einem komplexen Torus von Bedeutung sein wird, aber ebenso für die Charakterisierung der Salem-Zahlen hilfreich ist. Ich gehe davon aus, dass diese Aussage bekannt ist. Da sie mir in der Literatur aber nicht explizit formuliert zu werden scheint, geben wir einen Beweis:

Lemma 1.3.1. *Sei $a \in \mathbb{C}$ eine ganz algebraische Zahl vom Betrag 1 und ungleich ± 1. Dann ist dessen Minimalpolynom ein ganzzahliges Polynom von geradem Grad mit symmetrischen Koeffizienten, dessen Nullstellen in reziproken Paaren auftreten.*

Beweis. Nach Definition existiert ein normiertes ganzzahliges Polynom g mit $g(a) = 0$. Da g ein Vielfaches des Minimalpolynoms h von a ist, folgt mit dem Gaußschen Lemma, dass h ebenfalls ganzzahlig ist.

Wir beweisen nun die Symmetrieaussage. Da a Absolutbetrag 1 hat, wissen wir, dass $1/a = \overline{a}$ ebenfalls eine Nullstelle von h ist. Andererseits haben wir

$$h(1/\overline{a}) = h(a) = 0,$$

sodass $\overline{a}$ als Nullstelle des ganzzahligen Polynoms $t^n h(1/t)$ auftritt, das auch vom Grad n ist. Folglich gilt $t^n h(1/t) = c \cdot h(t)$ für ein $c \in \mathbb{Q}$. Setzen wir $t = 1$, dann erhalten wir $h(1) = c \cdot h(1)$. Da a irrational ist, hat h mindestens Grad 2, sodass $h(1) \neq 0$ folgt. Demnach kommen wir zu $c = 1$, was uns

$$t^n h(1/t) = h(t)$$

liefert. Die Nullstellen von h treten somit in reziproken Paaren auf und der Grad von h muss eine gerade Zahl sein. □

Sei nun τ eine Salem-Zahl mit Minimalpolynom μ, dann hat μ per Definition eine Nullstelle $\alpha \neq \pm 1$ mit $|\alpha| = 1$. Nach Lemma 1.3.1 sind neben τ und α auch τ^{-1} und $\alpha^{-1} = \overline{\alpha}$ Nullstellen von μ. Ein Salem-Polynom ist also mindestens vom Grad 4 und allgemein von geradem Grad, während alle Nullstellen bis auf die Salem-Zahl τ und τ^{-1} Betrag 1 haben.

Betrachten wir ein Salem-Polynom $\mu(X) = X^{2n} + a_{2n-1}X^{2n-1} + \cdots + a_1 X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$ vom Grad $2n$ mit den Nullstellen

$$\tau, \tau^{-1}, \alpha_2, \overline{\alpha}_2, \ldots\ \alpha_n, \overline{\alpha}_n.$$

Dann erhalten wir n reelle Zahlen

$$\gamma_1 = \tau + \tau^{-1}, \gamma_2 = \alpha_2 + \overline{\alpha}_2, \ldots, \gamma_n = \alpha_n + \overline{\alpha}_n.$$

Wir wollen nun die Struktur der Zahlkörper $\mathbb{Q}(\tau)$, $\mathbb{Q}(\gamma_i)$ und $\mathbb{Q}(\alpha_i)$ bestimmen. Nach Lemma 1.3.1 gilt für die Koeffizienten des Polynoms

$$\frac{1}{X^n}\mu(X) = X^n + a_{2n-1}X^{n-1} + \cdots + a_n + a_{n-1}\frac{1}{X} + \cdots + a_1\frac{1}{X^{n-1}} + \frac{1}{X^n}$$

die Gleichheit $a_{2n-i} = a_i$. Das Polynom

$$\frac{1}{X^n}\mu(X) - \Big(X + \frac{1}{X}\Big)^n \in \mathbb{Z}\Big[X, \frac{1}{X}\Big]$$

ist wiederum symmetrisch, allerdings vom Grad $< n$. Wir können induktiv fortfahren, sodass wir ein Polynom

$$g\Big(X + \frac{1}{X}\Big) \quad \text{mit} \quad \frac{1}{X^n}\mu(X) - g\Big(X + \frac{1}{X}\Big) = 0$$

erhalten. Daraus ergibt sich

$$\mu(X) = X^n g\Big(X + \frac{1}{X}\Big)$$

und da

$$\tau, \tau^{-1}, \alpha_2, \overline{\alpha}_2, \ldots \alpha_n, \overline{\alpha}_n$$

Nullstellen von $\mu(X)$ sind, sind

$$\gamma_1 = \tau + \tau^{-1}, \gamma_2 = \alpha_2 + \overline{\alpha}_2, \ldots, \gamma_n = \alpha_n + \overline{\alpha}_n$$

Nullstellen von $g(Y)$, wobei wir $X + \frac{1}{X}$ durch Y ersetzt haben. Weiter ist $g(Y)$ aufgrund der Irreduzibilität von $\mu(X)$ ein irreduzibles Polynom vom Grad n in $\mathbb{Z}[Y]$. Da alle γ_i reellwertig sind, stellen die Zahlkörper $\mathbb{Q}(\gamma_i)$ folglich zueinander konjugierte total reelle Zahlkörper dar. Das Minimalpolynom zu τ über dem Körper $\mathbb{Q}(\gamma_1)$ ist

$$(X - \tau)(X - \tau^{-1}) = X^2 - X(\tau + \tau^{-1}) + 1,$$

sodass $\mathbb{Q}(\tau)$ eine reell-quadratische Erweiterung des total reellen Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\gamma_1)$ ist. Ein α_i hat über dem Körper $\mathbb{Q}(\gamma_i)$ das Minimalpolynom

$$(X - \alpha_i)(X - \overline{\alpha}_i) = X^2 - X(\alpha_i + \overline{\alpha}_i) + 1$$

und der Körper $\mathbb{Q}(\alpha_i)$ stellt somit eine imaginär-quadratische Erweiterung des total reellen Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\gamma_i)$ dar. Insgesamt ist also weder $\mathbb{Q}(\tau)$ noch $\mathbb{Q}(\alpha_i)$ für irgendein i ein CM-Körper.

1.4. K3-Flächen

In diesem Teil fassen wir das Wissen über K3-Flächen zusammen, das für unsere Fixpunktbetrachtungen notwendig sein wird bzw. benötigt werden wird, um die Ergebnisse zur Entropie auf diesen Objekten angeben zu können. Für Details verweisen wir auf [BPV].

Eine K3-Fläche X ist eine zusammenhängende kompakte komplexe Mannigfaltigkeit von komplexer Dimension 2, für deren erste Betti-Zahl $b_1(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathbb{C}) = 0$ gilt und deren kanonisches Geradenbündel $\mathcal{K}_X = \bigwedge^n \mathcal{T}_X^\vee$ trivial ist. Alle K3-Flächen sind diffeomorph zueinander und einfach-zusammenhängend. Da die erste Betti-Zahl einer K3-Fläche X gerade ist, stellt X demnach eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit dar. Es sind demnach die Zerlegungen

$$H^r(X, \mathbb{C}) = \oplus_{p+q=r} H^{p,q}(X)$$

gegeben und mit der Notation $h^{p,q} := \dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}(X)$ hat der Hodge-Diamant zu X die Gestalt

$$\begin{array}{ccccc} & & h^{2,2} = 1 & & \\ & h^{2,1} = 0 & & h^{1,2} = 0 & \\ h^{2,0} = 1 & & h^{1,1} = 20 & & h^{0,2} = 1 \\ & h^{1,0} = 0 & & h^{0,1} = 0 & \\ & & h^{0,0} = 1. & & \end{array}$$

Es gilt also $H^0(X,\mathbb{Z}) = H^4(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ und $H^1(X,\mathbb{Z}) = H^3(X,\mathbb{Z}) = 0$, die Struktur von $H^2(X,\mathbb{Z})$ besprechen wir im Folgenden genauer.

Die Gruppe $H^2(X,\mathbb{Z})$ entspricht einem *Gitter* vom Rang 22, ist als endlich erzeugte freie abelsche Gruppe also isomorph zu $\mathbb{Z}^{22}$. Weiter definiert die Schnittform auf $H^2(X,\mathbb{Z})$ eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform $\langle x,y\rangle \in \mathbb{Z}$. Diese ist *gerade*, d.h., es gilt $\langle x,x\rangle \in 2\mathbb{Z}$ für alle $x \in H^2(X,\mathbb{Z})$. Ebenso ist $H^2(X,\mathbb{Z})$ *unimodular*, da die genannte Bilinearform eine Isomorphie von $H^2(X,\mathbb{Z})$ mit $\mathrm{Hom}(H^2(X,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$ liefert. Die quadratische Form $\langle x,x\rangle$ auf $H^2(X,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{22}$ hat zudem die *Signatur* $(3,19)$, ist also äquivalent zu

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - \cdots - x_{22}^2.$$

Die Schnittform kann man zu einem hermiteschen Produkt auf $H^2(X,\mathbb{C}) = H^2(X,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{C}$ fortsetzen. Die Gruppe $H^{1,1}(X)$ hat die Signatur $(1,19)$ und die Gruppe $H^{2,0}(X)\oplus H^{0,2}(X)$ die Signatur $(2,0)$.

Um den Satz von Torelli formulieren zu können, gehen wir auf den Kähler-Kegel, eine Untermenge von $H^{1,1}(X,\mathbb{R}) = H^{1,1}(X,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{R}$, ein. Durch die komplexe Struktur auf X ist für alle $x \in X$ ein Endomorphismus $J : T_xX_\mathbb{R} \to T_xX_\mathbb{R}$ mit $J^2 = -\mathrm{id}$ definiert, wobei $T_xX_\mathbb{R}$ der Tangentialraum der zugrunde liegenden reellen C^∞-Mannigfaltigkeit ist. Weiter kann man eine 2-C^∞-Form ω auf X durch $\omega(v,w) = \omega_x(v,w)$ mit $\omega_x : T_xX_\mathbb{R} \times T_xX_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieren. Eine solche 2-Form ω stellt eine *Kähler-Form* dar, wenn folgende drei Eigenschaften erfüllt sind: Zunächst sei ω vom *Typ* $(1,1)$, d.h., es gelte

$$\omega_x(Jv,Jw) = \omega_x(v,w)$$

für alle $v,w \in T_xX_\mathbb{R}$ und $x \in X$. Weiter sei ω *positiv*, es gelte also

$$\omega_x(v,Jv) > 0$$

für alle $x \in X$ und $0 \neq v \in T_xX_\mathbb{R}$. Zuletzt sei ω *geschlossen*, d.h., es gelte

$$d\omega = 0.$$

Eine Kähler-Form repräsentiert eine *Kähler-Klasse* in $H^{1,1}(X,\mathbb{R})$ und die Menge dieser Klassen stellt einen konvexen Unterkegel $\mathcal{K}_X$ in $\{\nu \in H^{1,1}(X,\mathbb{R}) | \langle\nu,\nu\rangle > 0\}$ dar, den *Kähler-Kegel*.

Betrachten wir zwei K3-Flächen X und X' mit den Kohomologiegruppen $H^2(X,\mathbb{Z})$ und $H^2(X',\mathbb{Z})$. Ein Isomorphismus von $\mathbb{Z}$-Moduln

$$\phi : H^2(X,\mathbb{Z}) \to H^2(X',\mathbb{Z})$$

heißt *Hodge-Isometrie*, wenn ϕ einerseits die Schnittform erhält, also eine Isometrie ist, und andererseits dessen $\mathbb{C}$-lineare Erweiterung $H^2(X,\mathbb{C}) \to H^2(X',\mathbb{C})$ die Hodge-Zerlegung erhält. Sei nun für zwei K3-Flächen X und X' eine Hodge-Isometrie $\phi : H^2(X,\mathbb{Z}) \to H^2(X',\mathbb{Z})$ gegeben, die zusätzlich den Kähler-Kegel von X auf den Kähler-Kegel von X' abbildet. Dann sagt uns der Satz von Torelli, dass eine biholomorphe Abbildung $f : X' \to X$ existiert, für die $\phi = f^*$ gilt. Der Isomorphismus f ist sogar eindeutig, denn es lässt sich zeigen, dass jeder Automorphismus einer K3-Fläche, der auf $H^2(X,\mathbb{Z})$ die Identität induziert, bereits selbst die Identität sein muss.

1.5. Kummer-Varietäten

Wir schließen die Grundlagen mit Kummer-Varietäten ab, auf die wir in Kapitel 2 die Holomorpe Lefschetz-Fixpunktformel erweitern.

Sei $T = \mathbb{C}^g/\Lambda$ ein komplexer Torus und ι die durch $x \mapsto -x$ definierte Involution. Dann ist die zu T gehörige *Kummer-Varietät* durch $X := T/\iota$ definiert. Diese ist nicht glatt, die 2-Teilungspunkte sind die Fixpunkte der Involution ι und die Singularitäten von X. Ist allerdings T projektiv, dann gilt dies auch für X. Sei $f : T \to T$ nun ein Endomorphismus, dann induziert dieser wie folgt einen Endomorphismus F auf X. Gelte $f(x) \equiv y$, dann folgt aus den Gleichungen

$$0 \equiv f(0) \equiv f(x-x) \equiv f(x) + f(-x) \equiv y + f(-x),$$

dass $f(-x) \equiv -y \equiv -f(x)$ gilt. Hieraus ergibt sich $f \circ \iota(x) \equiv \iota \circ f(x)$, womit ein Endomorphismus F in natürlicher Weise auf X definiert ist.

Sei weiter $\sigma : \tilde{T} \to T$ die Aufblasung der 2-Teilungspunkte von T und liften wir ι zu einer Involution $\tilde{\iota} : \tilde{T} \to \tilde{T}$, dann ist der Quotient $\tilde{T}/\tilde{\iota}$ glatt. Da ein Automorphismus $f : T \to T$ mit der Involution ι kommutiert und die 2-Teilungspunkte wieder auf die 2-Teilungspunkte abbildet, induziert dieser ebenfalls einen Automorphismus $\tilde{F} : \tilde{T}/\tilde{\iota} \to \tilde{T}/\tilde{\iota}$.

Sei T ein zweidimensionaler komplexer Torus und $f : T \to T$ ein Automorphismus, dann hat $\tilde{T}/\tilde{\iota}$ die Struktur einer K3-Fläche und $\tilde{F}$ wird somit zu einem Automorphismus einer K3-Fläche. Dies ist ein beliebtes Verfahren, um aus Automorphismen zweidimensionaler komplexer Tori Beispiele für Automorphismen auf K3-Flächen zu generieren.

Kapitel 2

Asymptotik von Fixpunkten

Wir haben in den Grundlagen die Struktur von Endomorphismen komplexer Tori besprochen, die möglichen Endomorphismenalgebren einer einfachen abelschen Varietät diskutiert und davon ausgehend schließlich zwei Fixpunktformeln angegeben. Mit diesem Hintergrund werden wir in diesem Kapitel unsere ersten beiden Kernfragen der Einleitung beantworten:

1. Sei $f : X \to X$ ein Endomorphismus eines komplexen Torus X:
   Was ist das asymptotische Verhalten der Fixpunktfunktion
   $$n \mapsto \#\,\mathrm{Fix}(f^n),$$
   wobei $f^n = f \circ \cdots \circ f$ die n-fache Iteration von f ist?
2. *Wie können wir für einen gegebenen Endomorphismus $f : X \to X$ einer einfachen abelschen Varietät X konkret das Verhalten seiner Fixpunktfunktion $n \mapsto \#\,\mathrm{Fix}(f^n)$ angeben?*

Auf diese beiden Fragen werden wir anschließend auch für Endomorphismen auf Kummer-Varietäten und Automorphismen auf K3-Flächen eingehen.

Dieses Kapitel ist in vier Abschnitte unterteilt, wir schildern kurz den Aufbau. Im ersten behandeln wir die erste der obigen beiden Fragen und leiten mit Theorem 1 eine vollständige Antwort für den Flächenfall her.

Im zweiten Teil gehen wir auf die zweite Frage ein. Wir geben zuerst eine vollständige Antwort für den Flächenfall und beantworten sie anschließend in beliebiger Dimension für abelsche Varietäten mit bestimmten Endomorphismenalgebren. Da sich die Beweise des Flächenfalls nicht auf höhere Dimensionen übertragen lassen, beweisen wir Theorem 2 in zwei Schritten, erst für den Flächenfall und anschließend für beliebige Dimensionen.

In einem dritten Teil stellen wir uns die obigen Kernfragen für Endomorphismen auf Kummer-Varietäten und in einem vierten für Automorphismen auf K3-Flächen.

2.1. Die drei Typen der Fixpunktfunktion

Sei $f : X \to X$ ein Endomorphismus eines komplexen Torus X. Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt mit der Frage, welches asymptotische Verhalten die Fixpunktfunktion $n \mapsto \#\,\mathrm{Fix}(f^n)$ hat, wobei $f^n = f \circ \cdots \circ f$ für die n-fache Iteration von f steht. Abschließen werden wir diesen Abschnitt mit dem ersten Hauptresultat dieser Arbeit, Theorem 1 der Einleitung, das für den Flächenfall eine vollständige Antwort auf diese Frage gibt.

Zunächst ist zu klären, wie wir diese Leitfrage angehen können. Das einzige uns bekannte Werkzeug, um die Fixpunktanzahl eines Endomorphismus zu berechnen, ist die Holomorphe Lefschetz-Fixpunktformel. Problematisch ist nur, dass wir die analytische bzw. rationale Darstellung $\rho_a(f)$ bzw. $\rho_r(f)$ des Endomorphismus f im Allgemeinen nicht konkret angeben können. Etwas mehr wissen wir über die analytischen bzw. rationalen Eigenwerte, sie stellen nämlich ganz-algebraische Zahlen dar. Folgender Satz sagt uns, dass die Asymptotik der Fixpunktpunktfunktion durch die analytischen Eigenwerte bestimmt ist:

Satz 2.1.1. *Sei $f : X \to X$ ein Endomorphismus eines g-dimensionalen komplexen Torus und seien $\lambda_1, \dots, \lambda_g$ dessen analytische Eigenwerte (mit algebraischer Multiplizität gezählt). Dann haben wir für jede ganze Zahl $n \geq 1$ die Gleichung*

$$\#\operatorname{Fix}(f^n) = \left| \prod_{i=1}^{g} (1 - \lambda_i^n) \right|^2 .$$

Beweis. Nach der Holomorphen Lefschetz-Fixpunktformel kann die Fixpunktanzahl mithilfe der analytischen Darstellung $\rho_a(f) \in M_g(\mathbb{C})$ berechnet werden,

$$\#\operatorname{Fix}(f^n) = |\det(\mathbb{1}_g - \rho_a(f)^n|^2 .$$

Da die Eigenwerte von $\rho_a(f)^n$ genau $\lambda_1^n, \dots, \lambda_g^n$ sind, erhalten wir die behauptete Aussage. □

Mit Blick auf unsere Leitfrage haben wir also einerseits die möglichen analytischen Eigenwerte zu bestimmen und andererseits deren Auswirkungen auf das Fixpunktverhalten zu klären.

Um einen ersten Eindruck für das mögliche Verhalten der Fixpunktfunktion

$$n \mapsto \#\operatorname{Fix}(f^n)$$

zu bekommen, betrachten wir zwei charakteristische Beispiele, in denen wir die analytische Darstellung $\rho_a(f)$ zu f und somit auch die analytischen Eigenwerte konkret angeben können:

Beispiel 2.1.2. (a) Wir betrachten zu einer ganzen Zahl $m > 1$ auf einem g-dimensionalen komplexen Torus X die Multiplikationsabbildung

$$m_X : X \to X, \quad x \mapsto m \cdot x.$$

Die analytische Darstellung dieser Abbildung ist $m \cdot \mathbb{1}_g$, sodass für alle Eigenwerte $\lambda_i = m$ gilt. Mit Satz 2.1.1 folgt

$$n \mapsto \#\operatorname{Fix}(m_X^n) = |1 - m^n|^{2g} .$$

Die Fixpunktfunktion wächst folglich exponentiell in n. Geometrisch betrachtet entsprechen die Fixpunkte von m_X genau den $(m-1)$-Teilungspunkten von X.

(b) Sei X wiederum ein komplexer Torus der Dimension g. Die Funktion

$$(-1)_X : X \to X, \quad x \mapsto -x$$

hat die analytische Darstellung $-\mathbb{1}_g$ und alle analytischen Eigenwerte sind demnach -1. Die daraus resultierende Fixpunktfunktion

$$n \mapsto \#\operatorname{Fix}((-1)_X^n) = |1-(-1)^n|^{2g}$$

nimmt für $n \equiv 0 \mod 2$ den Wert Null und für $n \equiv 1 \mod 2$ den Wert 2^{2g} an, sie verhält sich also periodisch.

Kehren wir zur Aussage

$$\#\operatorname{Fix}(f^n) = \left|\prod_{i=1}^{g}(1-\lambda_i^n)\right|^2$$

des obigen Satzes zurück, dann sehen wir, dass die Fixpunktfunktion $n \mapsto \#\operatorname{Fix}(f^n)$ wie in Teil (a) des Beispiels exponentiell wächst, wenn alle analytischen Eigenwerte λ_i betraglich größer als 1 sind. Ebenso sehen wir, dass die Funktion $n \mapsto \#\operatorname{Fix}(f^n)$ ähnlich wie in Teil (b) des Beispiels periodisch ist, wenn alle analytischen Eigenwerte λ_i Einheitswurzeln sind. An dieser Stelle eröffnen sich uns weitere Fragen, die eng miteinander zusammenhängen:

- Können Eigenwerte verschieden von ± 1 überhaupt Betrag 1 haben? Oder allgemeiner, sind alle Eigenwerte vom Betrag 1 Einheitswurzeln?
- Zu welchem Fixpunktverhalten würden Eigenwerte vom Betrag 1 führen, die keine Einheitswurzeln sind?
- Existieren Eigenwerte vom Betrag < 1 und wie wirken sie sich auf das Fixpunktverhalten aus? Können diese Eigenwerte sogar beliebig klein sein?
- Welche Konstellationen von Eigenwerten bezüglich des Betrags sind möglich und wie wirken sie sich auf das Fixpunktverhalten aus? Kann ein Eigenwert zum Beispiel Betrag 1 haben und ein weiterer Betrag > 1?

Wir beschränken uns im Folgenden auf den Flächenfall, diese Fragen werden uns dabei für den Rest des Kapitels beschäftigen. Wir zeigen in einem ersten Beispiel, dass neben ± 1 weitere Eigenwerte vom Betrag 1 existieren und zwar in Form von Einheitswurzeln:

Beispiel 2.1.3. *(Eigenwerte vom Betrag* 1*).* Nehmen wir eine elliptische Kurve E und betrachten wir den komplexen Torus $X = E \times E$. Der Endomorphismus

$$f : X \to X, \quad (x,y) \mapsto (x-y, x)$$

hat die Eigenwerte $\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ und $\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$. Die Fixpunktfunktion von f ist, wie oben erwähnt, periodisch und nimmt nach Satz 2.1.1 folgende Wert an:

$$\#\operatorname{Fix}(f^n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \equiv 0 \pmod 6 \\ 1, & \text{falls } n \equiv 1 \text{ oder } n \equiv 5 \pmod 6 \\ 9, & \text{falls } n \equiv 2 \text{ oder } n \equiv 4 \pmod 6 \\ 16, & \text{falls } n \equiv 3 \pmod 6 . \end{cases}$$

Unwahrscheinlicher erscheint dagegen die Existenz von analytischen Eigenwerten vom Betrag < 1. Deren Existenz wird jedoch durch folgendes Beispiel belegt:

Beispiel 2.1.4. *(Eigenwerte vom Betrag < 1).* Beispiele dieser Art wurden von McMullen [McM2, Sect. 4] konstruiert, um Salem-Zahlen vom Grad 6 zu generieren (siehe auch [Res1]). Dabei zeigt McMullen, dass das Polynom

$$P(t) = t^4 + at^2 + t + 1$$

für jede ganze Zahl $a \geq 0$ als charakteristisches Polynom der rationalen Darstellung eines Endomorphismus auf einem zweidimensionalen komplexen Torus auftritt. Man überprüfe, dass die Nullstellen von $P(t)$ in konjugierten Paaren $\alpha, \overline{\alpha}, \beta, \overline{\beta}$ mit $|\alpha| < |\beta|$ auftreten. Da 1 den konstanten Term von P darstellt, folgt $|\alpha| < 1$.

Die natürliche Anschlussfrage, ob dieser Eigenwert vom Betrag < 1 sogar beliebig klein sein kann, können wir ebenfalls bejahen:

Satz 2.1.5. *Für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein zweidimensionaler komplexer Torus mit einem Endomorphismus, der einen von Null verschiedenen Eigenwert vom Betrag kleiner als ϵ hat.*

Beweis. Wir greifen die in Beispiel 2.1.4 konstruierten komplexen Tori auf. Um die Behauptung zu zeigen, weisen wir nach, dass für hinreichend große Werte von a eine Nullstelle des Polynoms

$$P(t) = t^4 + at^2 + t + 1$$

auf der Kreisscheibe $B_\epsilon(0)$ liegt. Wir wenden nun den Satz von Rouché an: Für $a \gg 0$ ergibt sich auf dem Rand der ϵ-Umgebung die Ungleichung

$$\left|at^2\right| = a\epsilon^2 > \epsilon^4 + \epsilon + 1 = \left|t^4\right| + |t| + 1 \geq \left|t^4 + t + 1\right|,$$

sodass die Polynome at^2 und $P(t)$ genau dieselbe Anzahl an Nullstellen auf der Kreisscheibe $B_\epsilon(0)$ haben müssen. $\square$

Im ersten Beispiel haben wir gesehen, dass Eigenwerte vom Betrag 1 in der projektiven Situation auftreten. Das nächste Beispiel gibt an, dass Eigenwerte vom Betrag < 1 ebenso auf abelschen Flächen zu finden sind:

Beispiel 2.1.6. Betrachten wir für eine elliptische Kurve E die abelsche Fläche $X = E \times E$. Dann definiert jede Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ einen Automorphismus f auf X. Dessen analytisches charakteristisches Polynom ist $t^2 - (a+d)t + 1$, und man überprüfe, dass f für hinreichend große $a + d$ einen Eigenwert beliebig nahe 0 hat.

Nachdem wir wissen, dass ein analytischer Eigenwert vom Betrag < 1 beliebig klein sein kann und ebenso im projektiven Fall auftritt, klären wir, was dies für die weiteren analytischen Eigenwerte bedeutet. Die vorherigen Beispiele lassen schon erahnen, dass ein zweiter Eigenwert dann betraglich > 1 ist. Folgender Satz klärt diesen Sachverhalt in beliebiger Dimension:

Satz 2.1.7. *Sei X ein g-dimensionaler komplexer Torus und $f : X \to X$ ein Endomorphismus. Wenn f einen von Null verschiedenen analytischen Eigenwert vom Betrag < 1 hat, dann hat f auch einen analytischen Eigenwert vom Betrag > 1.*

Beweis. Das charakteristische Polynom der analytischen Darstellung $\rho_a(f)$ ist

$$\chi_f^a(t) = \det(t \cdot \mathbb{1}_g - \rho_a(f)) = (t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_g).$$

Da die rationale Darstellung $\rho_r(f)$ die direkte Summe von $\rho_a(f)$ und dessen Konjugiertem ist, ist das charakteristische Polynom von $\rho_r(f)$ durch

$$\chi_f^r(t) = \chi_f^a(f) \cdot \overline{\chi}_f^a(t) = (t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_g)(t - \overline{\lambda}_1) \cdot \ldots \cdot (t - \overline{\lambda}_g)$$

gegeben. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_i$ genau die von Null verschiedenen Eigenwerte. Dann erhalten wir für den Summanden $a_{2g-2i}t^{2g-2i}$ des Polynoms $\chi_f^r(t)$ die Gleichung

$$a_{2g-2i} = \lambda_1\overline{\lambda}_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_i\overline{\lambda}_i.$$

Da $\chi_f^r(t)$ ein ganzzahliges Polynom ist, muss der Koeffizient a_{2g-2i} eine ganze Zahl ungleich Null sein. Ist demnach ein von Null verschiedener analytischer Eigenwert betraglich kleiner als Eins, dann muss ein weiterer analytischer Eigenwert betraglich größer als Eins sein. □

Wir bleiben kurz im höherdimensionalen Fall und fragen uns, welches Verhalten die Funktion $n \mapsto \#\operatorname{Fix}(f^n)$ bei einem Eigenwert vom Betrag < 1 hat, wobei kein weiterer Eigenwert vom Betrag 1 sei. Betrachten wir wieder die Formel

$$\#\operatorname{Fix}(f^n) = \left| \prod_{i=1}^{g} (1 - \lambda_i^n) \right|^2,$$

dann sehen wir, dass die Existenz eines Eigenwerts vom Betrag > 1, die uns der vorherige Satz liefert, zu exponentiellem Wachstum führt. Die Faktoren $(1 - \lambda_i^n)$ streben nämlich betraglich entweder gegen Eins oder Unendlich.

Wir kehren zum Flächenfall zurück und kommen zu Eigenwerten vom Betrag 1. Sind alle Einheitswurzeln, dann haben wir gesehen, dass die Fixpunktfunktion periodisch ist. Folgender Satz macht eine wichtige Aussage, denn er sagt uns, dass alle analytischen Eigenwerte vom Betrag 1 im Flächenfall bereits Einheitswurzeln sind und beispielsweise keine Nullstellen eines Salem-Polynoms sein können:

Satz 2.1.8. *Sei X ein zweidimensionaler komplexer Torus und $f : X \to X$ ein Endomorphismus. Falls f einen Eigenwert λ mit $|\lambda| = 1$ hat, dann ist λ eine Einheitswurzel.*

Beweis. Wir nehmen zunächst $\lambda \neq \pm 1$ an, da sonst nichts zu zeigen ist. Seien nun λ_1 und λ_2 die Eigenwerte von f. Als ersten Fall betrachten wir $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$. Das charakteristische Polynom χ_f^r von f ist dann ein normiertes ganzzahliges Polynom, dessen Nullstellen alle vom Betrag 1 sind. Es folgt, dass dann alle Nullstellen Einheitswurzeln sind (siehe [Coh, Prop. 3.3.9]), womit wir die Behauptung für diesen Fall gezeigt haben.

Es bleibt nun der Fall zu betrachten, dass $|\lambda_1| = 1$ und $|\lambda_2| \neq 1$ gilt. Nach Satz 2.1.7 wissen wir, dass notwendigerweise $|\lambda_2| > 1$ oder $\lambda_2 = 0$ gilt. Sei h das Minimalpolynom zu

λ_1 über $\mathbb{Q}$. (λ_1 ist eine Nullstelle von χ_f^r und daher ganz-algebraisch.) Nach Lemma 1.3.1 wissen wir, dass h ein symmetrisches ganzzahliges Polynom vom Grad 2 oder 4 ist, dessen Nullstellen in reziproken Paaren auftreten.

Wir gehen nun auf diese beiden Fälle ein:

Fall 1: $\deg h = 2$. In diesem Fall ist die zweite Nullstelle von h bereits $\overline{\lambda_1}$. Dann sind alle Nullstellen von h vom Betrag 1. Wie zuvor schließen wir, dass λ_1 eine Einheitswurzel ist.

Fall 2: $\deg h = 4$. Dann stimmt h mit χ_f^r überein, sodass dessen Nullstellen $\lambda_1, \overline{\lambda_1}, \lambda_2, \overline{\lambda_2}$ sind. Aber wegen $|\lambda_2| > |\lambda_1| = 1$ können die Nullstellen dieses Polynoms nicht in reziproken Paaren auftreten.

□

In einem letzten Beispiel legen wir dar, dass auch die Kombination, dass ein Eigenwert eine Einheitswurzel und der andere betraglich > 1 ist, auftritt.

Beispiel 2.1.9. *(Ein Eigenwert vom Betrag > 1 und der andere eine Einheitswurzel).* Wir betrachten die abelsche Fläche $X = E \times E$ zu einer elliptischen Kurve E, die komplexe Multiplikation in $\mathbb{Z}[i]$ hat. Der Endomorphismus

$$X \to X, \quad (x, y) \mapsto (ix, 2iy)$$

hat die Eigenwerte i und $2i$ und die zugehörige Fixpunktfunktion nimmt folgende Werte an:

$$\#\operatorname{Fix}(f^n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \equiv 0 \pmod 4 \\ h(n), & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei die Funktion h exponentiell wächst, $h(n) \sim 2^{2n}$.

Bemerkenswert an diesem Beispiel ist, dass die Fixpunktfunktion $n \mapsto \#\operatorname{Fix}(f^n)$ zum ersten Mal weder exponentiell wächst noch periodisch ist, sondern eine Kombination dieser beiden Fälle darstellt.

Wir sind nun in der Lage, unsere Leitfrage für den Flächenfall zu beantworten und mit Theorem 1 das erste Hauptresultat dieser Arbeit zu beweisen:

Theorem 1. *Sei X ein zweidimensionaler komplexer Torus und sei $f : X \to X$ ein von Null verschiedener Endomorphismus. Dann ist die Fixpunktfunktion $n \mapsto \#\operatorname{Fix}(f^n)$ von einem der folgenden drei Typen:*

(V1) *Sie wächst exponentiell in n, d.h., es existieren reelle Konstanten $A, B > 1$ und eine ganze Zahl N, sodass für alle $n \geq N$*

$$A^n \leq \#\operatorname{Fix}(f^n) \leq B^n$$

gilt. In diesem Fall sind beide analytischen Eigenwerte betraglich ungleich 1.

(V2) *Sie ist eine periodische Funktion. In diesem Fall sind die von Null verschiedenen analytischen Eigenwerte von f in der Menge der k-ten Einheitswurzeln enthalten, wobei $k \in \{1, \ldots, 6, 8, 10, 12\}$.*

(V3) *Sie ist von der Form*

$$\#\operatorname{Fix}(f^n) = \begin{cases} 0, & \textit{falls } n \equiv 0 \pmod r \\ h(n), & \textit{sonst,} \end{cases}$$

wobei $r \geq 2$ eine ganze Zahl und h eine Funktion mit exponentiellem Wachstum ist. In diesem Fall ist ein analytischer Eigenwert von f vom Betrag > 1 und der andere ist eine Einheitswurzel.

Alle drei Typen der Fixpunktfunktion treten bereits im projektiven Fall auf, also auf abelschen Flächen.

Beweis. Sei $f : X \to X$ ein Endomorphismus eines zweidimensionalen komplexen Torus und seien λ_1 und λ_2 die Eigenwerte dessen analytischer Darstellung (mit algebraischer Vielfachheit gezählt). Nach Umnummerieren nehmen wir $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$ an. Wir haben dann nach Satz 2.1.1 für jede ganze Zahl $n \geq 1$ die Gleichung

$$\#\operatorname{Fix}(f^n) = \left|(1-\lambda_1^n)(1-\lambda_2^n)\right|^2 .$$

Wir gehen zuerst von $|\lambda_1| > 1$ aus. Dann haben wir nach unserem Setting, dass ebenfalls $|\lambda_2| > 1$ gilt, sodass die Fixpunktfunktion $\#\operatorname{Fix}(f^n)$ exponentiell wächst. Wir sind also im Fall (V1).

Nehmen wir als Nächstes $0 < |\lambda_1| < 1$ an, dann folgt $|\lambda_2| > 1$ nach Satz 2.1.7 und die Funktion $\#\operatorname{Fix}(f^n)$ verhält sich wiederum exponentiell.

Wir nehmen nun $|\lambda_1| = 1$ an. Dann sagt uns Satz 2.1.8, dass λ_1 eine Einheitswurzel sein muss. Falls wir $|\lambda_2| = 1$ haben, dann gilt dasselbe für λ_2, sodass $\#\operatorname{Fix}(f^n)$ eine periodische Funktion ist und wir den Fall (V2) haben. Und für $|\lambda_2| > 1$ hat die Fixpunktfunktion das in Fall (V3) beschriebene Verhalten. Die Einheitswurzeln sind stets vom algebraischen Grad ≤ 4, da sie Nullstellen des rationalen charakteristischen Polynoms sind. Sie sind demnach k-te Einheitswurzeln, wobei k in der Menge $\{1, \ldots, 6, 8, 10, 12\}$ liegt.

Zuletzt betrachten wir $\lambda_1 = 0$. Dann haben wir Verhalten (V1) für $|\lambda_2| > 1$ und Verhalten (V2) für $|\lambda_2| = 1$.

Es bleibt zu zeigen, dass alle drei Typen tatsächlich auftreten. Fall (V1) erscheint für die Multiplikationsabbildung $x \mapsto mx$ auf jedem komplexen Torus, falls $|m| \geq 2$ gegeben ist. Beispiel 2.1.3 belegt die Existenz von Typ (V2) und das vorherige Beispiel 2.1.9 gibt an, dass Fall (V3) vorkommt. Für alle drei Typen haben wir projektive Beispiele. □

Bemerkung 2.1.10. *(Theorem 1 in beliebiger Dimension).* Theorem 1 haben wir als Teil der Arbeit [BH] publiziert. Dies greifen Alvarado und Auffarth in [AA] auf und behandeln den Fall, dass ein analytischer Eigenwert vom Betrag 1 keine Einheitswurzel ist. Sie kommen mithilfe des Mahler-Maßes zu dem Ergebnis, dass in diesem Fall ein weiterer Eigenwert vom Betrag > 1 existieren muss, der zu exponentiellem Fixpunktwachstum führt. Das Resultat ist, dass die Fixpunktfunktion $n \mapsto \#\operatorname{Fix}(f^n)$ zu einem Endomorphismus $f : X \to X$ eines komplexen Torus X beliebiger Dimension auch wieder von einem der drei Typen ist, die wir in Theorem 1 angeben.

Wir fassen zum Abschluss noch kurz zusammen, welche Eigenwerte zu welchem Fixpunktwachstum führen.

Bemerkung 2.1.11. Sei $f : X \to X$ ein Endomorphismus eines g-dimensionalen komplexen Torus X und seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_g$ dessen analytische Eigenwerte, die jeweils $\neq 1$ sind. Dann gilt:

1. Ist kein Eigenwert λ_i eine Einheitswurzel, dann wächst die Funktion $n \mapsto \# \operatorname{Fix}(f^n)$ exponentiell.
2. Sind alle λ_i Einheitswurzeln, dann verhält sich die Funktion $n \mapsto \# \operatorname{Fix}(f^n)$ periodisch.
3. Ist ein Eigenwert λ_i eine Einheitswurzel und ein weiterer Eigenwert λ_j keine Einheitswurzel, dann existieren ganze Zahlen $m_1, \ldots, m_r > 1$ und eine exponentiell wachsende Funktion $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit
$$\# \operatorname{Fix}(f^n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \equiv 0 \pmod{m_i} \text{ für ein } i \in \{1, \ldots, r\} \\ h(n), & \text{sonst.} \end{cases}$$

2.2. Einfache abelsche Varietäten

Wir wenden uns dem projektiven Fall zu und betrachten Endomorphismen abelscher Varietäten. Wir haben im vorherigen Abschnitt gesehen, dass deren Fixpunktverhalten durch ihre analytischen Eigenwerte bestimmt ist. Mit folgender Bemerkung begründen wir, weshalb wir unsere Fixpunktbetrachtungen auf einfachen abelschen Varietäten fortsetzen. Sie belegt nämlich, dass im nicht-einfachen Fall jede ganz-algebraische Zahl als Eigenwert eines Endomorphismus vorkommt:

Bemerkung 2.2.1. Wir zeigen an dieser Stelle, dass jede ganz-algebraische Zahl als Eigenwert eines Endomorphismus einer abelschen Varietät auftritt.

Zu einem Polynom
$$P(t) = (-1)^n (t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0) \in \mathbb{Z}[t]$$
wählen wir uns eine beliebige elliptische Kurve E. Auf dessen Produkt E^n hat der Endomorphismus
$$f = \begin{pmatrix} 0 & & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ & & \ddots & 0 & \vdots \\ & 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$
das charakteristische Polynom $P(t)$, dessen Nullstellen somit die analytischen Eigenwerte sind. Versehen wir also das Minimalpolynom einer ganz-algebraischen Zahl mit dem passenden Vorzeichen, dann tritt diese Zahl als analytischer Eigenwert eines Endomorphismus auf.

Anders als für komplexe Tori kennt man die möglichen Endomorphismenalgebren einfacher abelscher Varietäten. Ausgehend davon gehen wir im Folgenden auf die zweite Kernfrage der Einleitung ein:

Wie können wir für einen gegebenen Endomorphismus $f : X \to X$ einer einfachen abelschen Varietät X konkret das Verhalten seiner Fixpunktfunktion $n \mapsto \#\operatorname{Fix}(f^n)$ angeben?

In den folgenden beiden Abschnitten geben wir in Form von Theorem 2 eine Antwort auf diese Frage. Im ersten Abschnitt beantworten wir sie für den Flächenfall sogar vollständig. Im höherdimensionalen Fall geben wir eine Antwort für bestimmte Endomorphsimenalgebren. Wir beweisen Theorem 2 also zuerst für den Flächenfall und danach für beliebige Dimension, da die Beweise des Flächenfalls nur bedingt für die in beliebiger Dimension genutzt werden können. Zudem kommt mit total definiter Quaternionenmultiplikation in höherer Dimension ein neuer Fall hinzu und bei total indefiniter Quaternionenmultiplikation entdecken wir in höherer Dimension Sonderfälle, die im Flächenfall nicht auftreten.

2.2.1. Abelsche Flächen

Wie oben beschrieben, befassen wir uns mit unserer zweiten Kernfrage und beweisen Theorem 2 für den Flächenfall. Bevor wir die drei möglichen Endomorphismenalgebren einer einfachen abelschen Fläche separat betrachten, geben wir das Hauptresultat dieses Abschnitts an:

Satz 2.2.2 (Theorem 2 in Dimension 2)**.** *Sei X eine einfache abelsche Fläche. Dann ist die Fixpunktfunktion eines von Null verschiedenen Endomorphismus $f \in \operatorname{End}(X)$ entweder exponentiell (V1) oder periodisch (V2), während Verhalten (V3) nicht vorkommt. Speziell haben wir:*

(a) *Angenommen X habe reelle Multiplikation, d.h., $\operatorname{End}_{\mathbb{Q}}(X) = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ für eine quadratfreie ganze Zahl $d > 1$. Dann ist $\#\operatorname{Fix}(f^n)$ periodisch, wenn $f = \pm id$ gilt, und wächst sonst exponentiell.*

(b) *Angenommen X habe indefinite Quaternionenmultiplikation, d.h., $\operatorname{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ ist von der Form $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}+j\mathbb{Q}+ij\mathbb{Q}$, wobei $i^2 = \alpha \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$, $j^2 = \beta \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ mit $ij = -ji$ und $\alpha > 0$, $\alpha \geq \beta$ gilt. Ein $f \in \operatorname{End}(X)$ schreiben wir als $a + bi + cj + dij$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Dann ist $\#\operatorname{Fix}(f^n)$ periodisch, wenn $\left|a + \sqrt{b^2\alpha + c^2\beta - d^2\alpha\beta}\right| = 1$ gilt, und wächst sonst exponentiell.*

(c) *Angenommen X habe komplexe Multiplikation und $\sigma : \operatorname{End}(X) \hookrightarrow \mathbb{C}$ sei eine Einbettung. Dann ist $\#\operatorname{Fix}(f^n)$ periodisch, wenn $|\sigma(f)| = 1$ gilt, und wächst sonst exponentiell.*

Im periodischen Fall sind alle analytischen Eigenwerte Einheitswurzeln und in der exponentiellen Situation sind alle Eigenwerte betraglich $\neq 1$.

Wir möchten mit unserer Argumentation bei der konkreten Gestalt eines Endomorphismus $f : X \to X$ einer einfachen abelschen Fläche ansetzen, die f als Element der jeweiligen Endomorphismenalgebra $\operatorname{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ erhält. Daher liegt es nahe, die zweite Fixpunktformel für abelsche Varietäten aus Satz 1.2.2 zu benutzen, die im einfachen Fall wie folgt formuliert ist: Sei K das Zentrum von $\operatorname{End}_{\mathbb{Q}}(X)$, $e = [K : \mathbb{Q}]$, $d^2 = [\operatorname{End}_{\mathbb{Q}}(X) : K]$, und sei $N : \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X) \to \mathbb{Q}$ die reduzierte Normabbildung. Für den Endomorphismus f gilt dann

$$\mathrm{Fix}(f) = \Big(N(1-f)\Big)^{\frac{4}{de}}.$$

Diese Formel gibt uns bei Iteration von f jedoch keine Auskunft über die Fixpunktfunktion $n \mapsto \#\,\mathrm{Fix}(f^n)$. Wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, benötigen wir dafür Kenntnisse über die Eigenwerte der Matrix $\rho_a(f)$. Unser Ansatz besteht demnach darin, beginnend mit der konkreten Gestalt von f, die durch die jeweilige Endomorphismenalgebra $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ gegeben ist, auf die analytischen Eigenwerte zu schließen.

Wir betrachten daher einzeln die drei möglichen Typen der Endomorphismenalgebra, einen reell-quadratischen Zahlkörper, eine total indefinite Quaternionenalgebra über $\mathbb{Q}$ und einen CM-Körper vom Grad 4. Wir verfahren in der Reihenfolge der Auflistung. Die folgenden drei Sätze beweisen Theorem 2 für den Flächenfall.

Bei reeller Multiplikation nutzen wir die Besonderheit, dass sich die analytische Darstellung in Dimension 2 konkret angeben lässt. Der Beweis des folgenden Satzes kann daher nicht auf höhere Dimension übertragen werden.

Satz 2.2.3. *(Reelle Multiplikation). Sei X eine einfache abelsche Fläche mit reeller Multiplikation und f ein von Null verschiedener Endomorphismus, d.h., f liegt in einer Ordnung eines reell-quadratischen Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Dann ist $\#\,\mathrm{Fix}(f^n)$ periodisch, wenn $f = \pm\,\mathrm{id}$, und wächst sonst exponentiell.*

Beweis. Da X reelle Multiplikation hat, haben wir $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X) = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, wobei $d > 1$ eine quadratfreie ganze Zahl ist. Jeder Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(X)$ ist dann von der Form $f = a + b\omega$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$, wobei

$$\omega = \begin{cases} \sqrt{d}, & \text{falls } d \equiv 2, 3 \pmod 4 \\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{d}), & \text{falls } d \equiv 1 \pmod 4). \end{cases}$$

Bezüglich geeigneter Koordinaten in $\mathbb{C}^2$ ist die analytische Darstellung $\rho_a : \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X) = \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \to M_2(\mathbb{C})$ durch

$$1 \mapsto \mathbb{1}_2 \quad \text{und} \quad \sqrt{d} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{d} & 0 \\ 0 & -\sqrt{d} \end{pmatrix}$$

gegeben (siehe [Ru]). Demnach hat $\rho_a(f) = (a + b\omega)$ die Eigenwerte

- $a \pm b\sqrt{d}$, falls $d \equiv 2, 3 \pmod 4$,
- $a + b\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{d})$, falls $d \equiv 1 \pmod 4$.

Falls $b = 0$, dann entspricht f der Multiplikation mit a und hat genau dann exponentielles Fixpunktwachstum, wenn $|a| > 1$. Und wenn $b \neq 0$, dann sind beide Eigenwerte vom Absolutbetrag $\neq 1$. Aufgrund des Satzes 2.1.7 sehen wir, dass f dann exponentielles Fixpunktwachstum hat. □

Im zweiten Satz kommen wir zur total indefiniten Quaternionenmultiplikation und erstmals zu nicht-kommutativen Endomorphismenalgebren. Im Unterschied zum vorherigen und nachfolgenden Satz wird dieser sich nicht auf höhere Dimension übertragen lassen, die auftretenden Sonderfälle werden wir im nächsten Teil besprechen.

Satz 2.2.4. *(Total indefinite Quaternionenmultiplikation). Sei X eine einfache abelsche Fläche mit total indefiniter Quaternionenmultiplikation, d.h., es existieren $\alpha, \beta \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ mit $\alpha \geq \beta$ und $\alpha > 0$, sodass wir $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X) \simeq \left(\frac{\alpha,\beta}{\mathbb{Q}}\right)$ mit den Relationen $i^2 = \alpha$, $j^2 = \beta$ und $ij = -ji$ haben. Die Fixpunktfunktion eines von Null verschiedenen Endomorphismus $a + bi + cj + dij$ ist periodisch, wenn $\left|a + \sqrt{b^2\alpha + c^2\beta - d^2\alpha\beta}\right| = 1$ ist, und wächst sonst exponentiell.*

Beweis. Da $B := \left(\frac{\alpha,\beta}{\mathbb{Q}}\right)$ ein Schiefkörper ist, stellt $\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha})$ einen Zerfällungskörper für B dar. Wir erhalten also die Isomorphie

$$\psi : \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{\alpha}) \to M_2(\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha})),$$

die durch

$$i \otimes 1 \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad j \otimes 1 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Für ein Element $f \in \mathrm{End}(X)$, das wir als $f = a+bi+cj+dij$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ schreiben können, haben wir

$$\psi(f) = \begin{pmatrix} a + b\sqrt{\alpha} & c\beta + d\beta\sqrt{\alpha} \\ c - d\sqrt{\alpha} & a - b\sqrt{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Die reduzierte Norm von f über $\mathbb{Q}$ ist durch $N(f) = \det(\psi(f)) = a^2 - b^2\alpha - c^2\beta + d^2\alpha\beta$ gegeben. Nach Diagonalisieren von $\psi(f)$ können wir die reduzierte Norm von $1 - f^n$ als

$$\begin{aligned} N(1 - f^n) &= \det \begin{pmatrix} 1 - (a + \sqrt{b^2\alpha + c^2\beta - d^2\alpha\beta})^n & 0 \\ 0 & 1 - (a - \sqrt{b^2\alpha + c^2\beta - d^2\alpha\beta})^n \end{pmatrix} \\ &= (1 - t_1^n)(1 - t_2^n) \end{aligned}$$

schreiben, wobei $t_i = a \pm \sqrt{b^2\alpha + c^2\beta - d^2\alpha\beta}$. Demnach haben wir $\#\,\mathrm{Fix}(f^n) = ((1 - t_1^n)(1 - t_2^n))^2$. Betrachten wir nun das *reduzierte charakteristische Polynom* von f,

$$\chi_f(t) = t^2 - T(f)t + N(f) = t^2 - \mathrm{tr}(\psi(f))t + \det(\psi(f)).$$

Da f in einer Ordnung enthalten ist, ist es algebraisch ganz, sodass χ_f ganzzahlige Koeffizienten hat. Für jede ganze Zahl m haben wir

$$\begin{aligned} \chi_f(m)^2 &= (m - t_1)^2(m - t_2)^2 = N(m - f)^2 \\ &= N(1 - (f - (m - 1)))^2 = \#\,\mathrm{Fix}(f - (m - 1)) \\ &= (\mathbb{1}_4 - \rho_r(f - (m - 1))) = \det(\mathbb{1}_4 - \rho_r(f) + (m - 1)\mathbb{1}_4) \\ &= \det(m\mathbb{1}_4 - \rho_r(f)) = \chi_f^r(m) \end{aligned}$$

und dies impliziert $\chi_f(t)^2 = \chi_f^r(t)$ als Polynome in t. Folglich, wenn λ_1 und λ_2 die analytischen Eigenwerte von f sind, dann gilt $t_1 \in \{\lambda_1, \overline{\lambda}_1\}$ und $t_2 \in \{\lambda_2, \overline{\lambda}_2\}$.

- Falls $|t_1| > 1$ und $|t_2| > 1$ gilt, dann wächst $\#\,\mathrm{Fix}(f^n)$ asymptotisch mit $|t_1 t_2|^{2n}$.

- Falls $|t_1| < 1$ vorliegt, dann haben wir $|\lambda_2| > 1$ nach Satz 2.1.7. Die Fixpunktanzahl wächst in diesem Fall daher ebenfalls exponentiell.
- Falls $|t_1| = |t_2| = 1$ gegeben ist, dann kommen als mögliche reelle Werte für t_1 und t_2 nur ± 1 infrage. Falls t_1 und t_2 komplex sind, dann sind sie Einheitswurzeln, da sie Nullstellen des ganzzahligen Polynoms χ_f darstellen. Die Funktion $n \mapsto \#\,\mathrm{Fix}(f^n)$ ist dann periodisch.
- Wir zeigen nun, dass der Fall $|t_1| > 1$ und $|t_2| = 1$ nicht auftreten kann. Wir nehmen das Gegenteil an. Da t_1 und t_2 Nullstellen eines Polynoms vom Grad 2 sind, wissen wir, dass t_2 entweder 1 oder -1 sein muss. Wegen $t_1 \neq t_2$ muss mindestens einer der Koeffizienten b, c oder d ungleich Null sein (denn sonst gilt $a = t_1 = t_2$). Aber dann impliziert $t_2 = \pm 1$, dass $f \mp 1$ einen von Null verschiedenen Endomorphismus der Norm Null darstellt, sodass die Quaternionenalgebra kein Schiefkörper sein kann, was einen Widerspruch ergibt.

□

Wir kommen zur komplexen Multiplikation und kehren zum kommutativen Fall zurück.

Satz 2.2.5. *(Komplexe Multiplikation). Sei X eine einfache abelsche Fläche mit komplexer Multiplikation, d.h., es existiert ein Isomorphismus σ zwischen $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ und einem CM-Körper. Die Fixpunktanzahl eines von Null verschiedenen Endomorphismus f ist dann periodisch, wenn $|\sigma(f)| = 1$ gilt, und wächst sonst exponentiell.*

Beweis. Zunächst sei $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ isomorph zu einer imaginär-quadratischen Erweiterung K des reell-quadratischen Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, wobei d eine quadratfreie ganze Zahl > 1 ist.

Wir betrachten nun den Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(X)$, wobei λ_1 und λ_2 die Eigenwerte der analytischen Darstellung $\rho_a(f)$ seien. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton genügt f seinem rationalen charakteristischen Polynom χ_f^r. Da der Isomorphismus $\sigma : \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X) \to K$ die rationalen Zahlen fixiert, ist die komplexe Zahl $\tilde{f} = \sigma(f)$ ebenfalls eine Nullstelle von χ_f^r. Dies bedeutet, dass sie in der Menge $\{\lambda_1, \overline{\lambda}_1, \lambda_2, \overline{\lambda}_2\}$ enthalten ist. Nach Umnummerierung haben wir somit $\tilde{f} = \lambda_1$ oder $\tilde{f} = \overline{\lambda}_1$. Wir nehmen nun Fallunterscheidungen bezüglich $\tilde{f}$ vor:

- Falls $|\tilde{f}| < 1$ vorliegt, dann wissen wir durch Satz 2.1.7, dass $|\lambda_2| > 1$ gelten muss. Demnach wächst die Fixpunktanzahl in diesem Fall exponentiell.
- Falls $|\tilde{f}| = 1$, dann sagt uns Satz 2.1.8, dass λ_1, und folglich auch $\tilde{f}$, eine Einheitswurzel ist. Die Fixpunktfunktion $n \mapsto \#\,\mathrm{Fix}(f^n) = N(1 - f^n)$ ist dann periodisch.
- Sei $|\tilde{f}| > 1$ und $\tilde{f} \in \mathbb{R}$. Dann ist $\tilde{f}$ von der Form $a + b\sqrt{d}$, sodass wir wie im Fall reeller Multiplikation exponentielles Fixpunktwachstum haben.
- Sei $|\tilde{f}| > 1$ und $\tilde{f} \notin \mathbb{R}$. Es gilt also $|\lambda_1| > 1$. Unser Ziel ist es zu zeigen, dass daraus $|\lambda_2| \neq 1$ folgt, was exponentielles Fixpunktwachstum impliziert. Unsere Widerspruchsannahme sei nun $|\lambda_2| = 1$. Der Beweis des Satzes 2.1.8 sagt zunächst aus, dass das Minimalpolynom zu λ_1 vom Grad 2 sein muss. Daher können wir λ_1 als

$a + b\sqrt{-e}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ schreiben, wobei e eine positive quadratfreie ganze Zahl ist. Für $t \in \mathbb{Z}$ berechnen wir die Norm von $t - f$,

$$\begin{aligned} N_{K/\mathbb{Q}}(t-f) &= N_{\mathbb{Q}(\sqrt{-e})/\mathbb{Q}}(N_{K/\mathbb{Q}(\sqrt{-e})}(t-f)) \\ &= N_{\mathbb{Q}(\sqrt{-e})/\mathbb{Q}}((t-f)^2) \\ &= ((t-a)^2 + b^2 e)^2. \end{aligned}$$

Andererseits stimmt $N_{K/\mathbb{Q}}(t-f)$ als Polynom in t mit $\chi_f^r(t)$ überein und daher entspricht λ_2 dem Wert $\tilde{f}$ oder dessen Konjugiertem. Folglich kann λ_2 nicht vom Betrag 1 sein, was einen Widerspruch bedeutet.

□

Wir haben in den drei vorherigen Sätzen gesehen, dass die analytischen Eigenwerte von Endomorphismen auf einfachen abelschen Flächen hinsichtlich der Fixpunktfunktion von zwei Arten sind:

Entweder sind alle Eigenwerte Einheitswurzeln und das Fixpunktverhalten ist periodisch, oder kein Eigenwert ist vom Betrag 1 und die Anzahl der Fixpunkte wächst exponentiell.

Im Fall reeller Multiplikation kommen in der periodischen Situation als Eigenwerte nur 1 und -1 infrage. Für komplexe und Quaternionenmultiplikation geben wir zum Ende dieses Abschnitts eine vollständige Liste der möglichen und tatsächlich auftretenden Eigenwerte vom Betrag 1 an.

Satz 2.2.6. (a) *Wenn X eine einfache abelsche Fläche mit Quaternionenmultiplikation und f ein von Null verschiedener Endomorphismus auf X mit periodischem Fixpunktverhalten ist, dann sind alle Eigenwerte von f Einheitswurzeln von algebraischem Grad ≤ 2, d.h., sie liegen in der folgenden Menge:*

in Grad 1:	± 1	
in Grad 2:	$\pm i,$	$\pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{-3}}{2}$

Umgekehrt tritt jede dieser Zahlen als Eigenwert eines Endomorphismus auf einer einfachen abelschen Fläche mit Quaternionenmultiplikation auf.

(b) *Wenn X eine einfache abelsche Fläche mit komplexer Multiplikation und f ein von Null verschiedener Endomorphismus auf X mit periodischem Fixpunktverhalten ist, dann sind alle Eigenwerte von f Einheitswurzeln von algebraischem Grad ≤ 4, d.h., sie sind in der folgenden Menge enthalten:*

in Grad 1:	± 1	
in Grad 2:	$\pm i,$	$\pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{-3}}{2}$
in Grad 4:	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{-2}}{2},$	$\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{\sqrt{-1}}{2},$
	$\pm(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}) \pm i\sqrt{\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}},$	$\pm(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}) \pm i\sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}}$

Umgekehrt tritt jede dieser Zahlen als Eigenwert eines Endomorphismus auf einer einfachen abelschen Fläche mit komplexer Multiplikation auf.

Beweis. Eine Richtung ist bereits klar: Wenn f periodisches Fixpunktverhalten hat, dann wissen wir, dass alle Eigenwerte Einheitswurzeln sind. Im Quaternionenfall sind sie Nullstellen von χ_f und daher vom Grad ≤ 2, und im Fall komplexer Multiplikation sind sie Nullstellen von χ_f^r und daher vom Grad ≤ 4.

Wir kommen zur Existenzaussage in (a): Für ± 1 ist die Aussage klar. Wir geben nun indefinite Quaternionenalgebren B_1 und B_2 an, die Schiefkörper sind. Weiter bestimmen wir Ordnungen $\mathcal{O}_1 \subset B_1$ und $\mathcal{O}_2 \subset B_2$, die Elemente beinhalten, die zu den geforderten Eigenwerten $\pm i$ und $\pm\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{-3}}{2}$ führen. Nach Shimuras Theorie (vgl. [CAV, §9.4] bzw. [Sh]) ist jede Ordnung $\mathcal{O}_k$ im Endomorphismenring einer einfachen abelschen Fläche enthalten.

Wir betrachten zuerst die Quaternionenalgebra $B_1 = \left(\frac{3,2}{\mathbb{Q}}\right)$, die ein Schiefkörper ist und die Ordnung $\mathcal{O}_1 = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}j + \mathbb{Z}ij$ enthält. Das Element $f_1 = i + j + ij$ hat das reduzierte charakteristische Polynom $\chi_{f_1}(t) = t^2 + 1$, dessen Nullstellen $\pm\sqrt{-1}$ sind.

Weiter kommen wir zu $B_2 = \left(\frac{-3,2}{\mathbb{Q}}\right)$ und dem Zerfällungskörper $L = \mathbb{Q}(i)$, wobei $i^2 = -3$. Die maximale Ordnung in L ist $S = \mathbb{Z} + \frac{1+i}{2}\mathbb{Z}$ und es folgt, dass $S + Sj$ mit $j^2 = 2$ eine Ordnung in B_2 ist. Das Element $f_2 = \frac{1+i}{2} \in S$ hat das reduzierte charakteristische Polynom $\chi_{f_2}(t) = t^2 - t + 1$, dessen Nullstellen $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ sind. Und das Element $f_3 = \frac{-1+i}{2} \in S$ hat das reduzierte charakteristische Polynom $\chi_{f_3}(t) = t^2 + t + 1$, dessen Nullstellen $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ sind.

Wir kommen zur Existenzaussage in (b): Jede Einheitswurzel ζ von algebraischem Grad 4 ist algebraisch ganz im CM-Körper $\mathbb{Q}(\zeta)$ und daher existieren einfache abelsche Flächen von CM-Typ, auf denen die Wurzel einen Endomorphismus f darstellt (vgl. [CAV, §9.6] oder [Sh]). Für die Einheitswurzeln von Grad 2 betrachten wir einen beliebigen reellquadratischen Zahlkörper L und nehmen den CM-Körper $L(\zeta)$. □

2.2.2. Abelsche Varietäten beliebiger Dimension

Wir bleiben weiterhin bei unserer zweiten Kernfrage. Im letzten Abschnitt haben wir diese mit Theorem 2 in Dimension 2 für den Flächenfall vollständig beantworten können. An dieser Stelle wenden wir uns dem höherdimensionalen Fall zu und beantworten die Leitfrage für bestimmte Quaternionenalgebren, wobei wir einen Sonderfall präsentieren, der im Flächenfall nicht auftritt. Folgendes ist das Hauptresultat dieses Unterkapitels:

Satz 2.2.7 (Theorem 2 in höherer Dimension). (1) *Sei X eine einfache abelsche Varietät mit $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ isomorph zu einem total reellen Zahlkörper, einer total definiten Quaternionenalgebra oder einem CM-Körper. Dann gilt für einen von Null verschiedenen Endomorphismus f:*

(a) *Angenommen X habe reelle Multiplikation, d.h., $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ ist ein total reeller Zahlkörper. Dann ist $\#\,\mathrm{Fix}(f^n)$ periodisch, wenn $f = \pm id$ gilt, und wächst sonst exponentiell.*

(b) *Angenommen X habe total definite Quaternionenmultiplikation, d.h., $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ ist von der Form $F + iF + jF + ijF$ mit $i^2 = \alpha \in F \setminus \{0\}$, $j^2 = \beta \in F \setminus \{0\}$*

und $ij = -ji$, *wobei* F *ein total reeller Zahlkörper ist und* $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X) \otimes_\sigma \mathbb{R} \simeq \mathbb{H}$ *für jede Einbettung* $\sigma : F \hookrightarrow \mathbb{R}$ *gilt. Ein* $f \in \mathrm{End}(X)$ *schreiben wir als* $f = a + bi + cj + dij$ *mit* $a, b, c, d \in F$. *Dann ist* $\#\,\mathrm{Fix}(f^n)$ *periodisch, wenn* $\left|a + \sqrt{b^2\alpha + c^2\beta - d^2\alpha\beta}\right| = 1$ *gilt, und wächst sonst exponentiell.*

(c) *Angenommen* X *habe komplexe Multiplikation, d.h.,* $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ *ist ein CM-Körper. Dann ist* $\#\,\mathrm{Fix}(f^n)$ *periodisch, wenn* $|f| = 1$ *gilt, und wächst sonst exponentiell.*

Wenn die Fixpunktfunktion $\#\,\mathrm{Fix}(f^n)$ *periodisch ist, dann sind alle analytischen Eigenwerte Einheitswurzeln, und wenn* $\#\,\mathrm{Fix}(f^n)$ *exponentiell wächst, dann sind alle Eigenwerte betraglich* $\neq 1$.

(2) *Es existieren einfache abelsche Varietäten mit total indefiniter Quaternionenmultiplikation, die Endomorphismen mit analytischen Eigenwerten vom Betrag* 1 *haben, die keine Einheitswurzeln sind.*

Bemerkung 2.2.8. Den ersten Teil des Theorems 2 kann man mit Bezug auf die Rosati-Involution $'$ umformulieren: Falls $f \cdot f' = 1$ gilt, dann ist $\#\,\mathrm{Fix}(f^n)$ periodisch, und wächst sonst exponentiell.

Ähnlich wie im Flächenfall beginnen wir unsere Argumentation wieder mit der konkreten Gestalt eines Endomorphismus $f : X \to X$ einer einfachen abelschen Varietät X der Dimension g. Wir nutzen wieder die zweite Fixpunktformel für abelsche Varietäten aus Satz 1.2.2, die in dieser Situation wie folgt formuliert ist: Sei K das Zentrum von $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$, $e = [K : \mathbb{Q}]$, $d^2 = [\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X) : K]$, und sei $N : \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X) \to \mathbb{Q}$ die reduzierte Normabbildung. Für den Endomorphismus f gilt dann

$$\#\,\mathrm{Fix}(f) = \Big(N(1-f)\Big)^{\frac{2g}{de}}.$$

Wir haben an dieser Stelle dasselbe Problem wie im Flächenfall, bei Iteration von f liefert uns diese Formel keine Information über das Verhalten der Funktion $n \mapsto \#\,\mathrm{Fix}(f^n)$. Um wieder Aussagen über die Eigenwerte der Matrix $\rho_a(f)$ zu gewinnen, werden wir diese Formel mit der Holomorphen Lefschetz-Fixpunktformel abgleichen. Anders als im Flächenfall werden wir im Folgenden über die genaue algebraische Struktur der Endomorphismenalgebren argumentieren. Wir betrachten in folgender Reihenfolge die Fälle reeller, komplexer und total definiter Quaternionenmultiplikation. Daran anschließend kommen wir zur total indefiniten Quaternionenmultiplikation, bei der wir auf einen Spezialfall stoßen werden, der bei den anderen Endomorphismenalgebren nicht auftritt.

Wir kommen zur reellen Multiplikation, anders als im Flächenfall können wir die analytische Darstellung in beliebiger Dimension nicht angeben.

Satz 2.2.9. *(Reelle Multiplikation). Sei* X *eine einfache* g*-dimensionale abelsche Varietät mit reeller Multiplikation, d.h.,* $F := \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ *ist ein total reeller Zahlkörper. Dann ist die Fixpunktfunktion eines von Null verschiedenen Endomorphismus* $f \in \mathrm{End}(X)$ *periodisch, wenn* $f = \pm\,\mathrm{id}$ *ist, und wächst sonst exponentiell.*

Beweis. Ein Endomorphismus f definiert einen Unterkörper $\mathbb{Q}(1-f)$ von F, der nach Lemma 1.1.2 wiederum total reell ist. Sei $e := [F : \mathbb{Q}]$, $m := [F : \mathbb{Q}(1-f)]$, $l := [\mathbb{Q}(1-f) : \mathbb{Q}]$ und seien $\sigma_1, \dots \sigma_l$ die $\mathbb{Q}$-Einbettungen von $\mathbb{Q}(1-f)$ in die komplexen Zahlen. Dann lassen sich die Nullstellen des Minimalpolynoms von $1-f$ als

$$\sigma_1(1-f) = 1-\sigma_1(f), \dots, \sigma_l(1-f) = 1-\sigma_l(f)$$

schreiben. Aufgrund der Holomorphen Lefschetz-Fixpunktformel aus Satz 1.2.1 und der Fixpunktformel aus Satz 1.2.2 haben wir nun

$$\prod_{i=1}^{g}(1-\lambda_i)(1-\overline{\lambda_i}) = \#\,\mathrm{Fix}(f) = (N_{F/\mathbb{Q}}(1-f))^{2g/e} = \Big(\Big(\prod_{j=1}^{l} 1-\sigma_j(f)\Big)^m\Big)^{2g/e},$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_g$ die analytischen Eigenwerte von f sind. Betrachten wir für eine ganze Zahl k die Fixpunktanzahl von $f-k+1$, dann ergibt obige Gleichung

$$\prod_{i=1}^{g}(k-\lambda_i)(k-\overline{\lambda_i}) = \#\,\mathrm{Fix}(f-k+1) = \Big(\Big(\prod_{j=1}^{l} k-\sigma_j(f)\Big)^m\Big)^{2g/e}.$$

Da die beiden Polynome in jeder ganzen Zahl k übereinstimmen, entspricht jeder Eigenwert λ_i einem Element $\sigma_j(f)$. Da alle $\sigma_j(f)$ reell sind, kann jeder Eigenwert vom Betrag 1 nur ± 1 sein. Wenn 1 oder -1 eine Nullstelle des Minimalpolynoms von f ist, dann ist f bereits id oder $-\mathrm{id}$. Folglich ist die Funktion $n \mapsto \#\,\mathrm{Fix}(f^n)$ nur periodisch, wenn $f = \pm\,\mathrm{id}$ ist, und wächst sonst exponentiell. □

Wie im letzten Satz wird sich unsere Argumentation auch in den weiteren Fällen darum drehen, ob Eigenwerte vom Betrag 1 Einheitswurzeln sind oder nicht. Dabei wird der folgende Satz nützlich sein, denn er sagt uns, dass Eigenwerte vom Betrag 1, die in einem CM-Körper liegen, bereits Einheitswurzeln sind.

Satz 2.2.10 ([Da], Theorem 2)**.** *Sei K ein Zahlkörper, der unter der komplexen Konjugation abgeschlossen ist. Dann enthält K genau dann unimodulare Einheiten, die keine Einheitswurzeln sind, wenn K imaginär und kein CM-Körper ist.*

Satz 2.2.11. *(Komplexe Multiplikation). Sei X eine einfache g-dimensionale abelsche Varietät mit komplexer Multiplikation, d.h., $F := \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ ist ein CM-Körper, und sei f ein von Null verschiedener Endomorphismus. Dann ist die Fixpunktfunktion periodisch, wenn $|f| = 1$ ist, und wächst sonst exponentiell.*

Insbesondere sind im periodischen Fall alle analytischen Eigenwerte Einheitswurzeln und im exponentiellen Fall ist kein Eigenwert vom Betrag Eins.

Beweis. Wenn ein Endomorphismus f in einem CM-Körper liegt, dann ist der Unterkörper $\mathbb{Q}(1-f) = \mathbb{Q}(f)$ nach Lemma 1.1.4 entweder ein total reeller Zahlkörper oder ein CM-Körper. Wir gehen an dieser Stelle vom zweiten Fall aus, da der erste bereits in Satz 2.2.9 behandelt wird. Wir übernehmen die Notation $e := [F : \mathbb{Q}]$, $m := [F : \mathbb{Q}(1-f)]$ und

$l := [\mathbb{Q}(1-f) : \mathbb{Q}]$ aus Satz 2.2.9 und wie im Beweis des Satzes 2.2.9 erhalten wir für eine beliebige ganze Zahl k die Gleichung

$$\prod_{i=1}^{g}(k-\lambda_i)(k-\overline{\lambda_i}) = \#\operatorname{Fix}(f-k+1) = \left(\left(\prod_{j=1}^{l} k-\sigma_j(f)\right)^m\right)^{2g/e},$$

sodass jeder analytische Eigenwert λ_i von f mit einer konjugierten Nullstelle $\sigma_j(f)$ von f übereinstimmt. Alle λ_i liegen im normalen Abschluss von F, der nach Lemma 1.1.4 wieder ein CM-Körper ist. In einem CM-Körper müssen alle Elemente vom Betrag 1 nach Satz 2.2.10 Einheitswurzeln sein. Da alle λ_i Nullstellen des Minimalpolynoms von f sind, genügt es zu überprüfen, ob f Absolutbetrag 1 hat oder nicht.

Wenn $|f| = 1$ gegeben ist, dann sind folglich alle λ_i Einheitswurzeln und die Funktion $n \mapsto \#\operatorname{Fix}(f^n)$ ist periodisch. Andererseits wächst diese Funktion im Fall $|f| \neq 1$ exponentiell und kein λ_i ist vom Betrag 1. □

Um den Fall total definiter Quaternionenmultiplikation bearbeiten zu können, benötigen wir eine äquivalente Formulierung der Definition der totalen Definitheit:

Lemma 2.2.12. *Sei F ein total reeller Zahlkörper und $B = \left(\frac{\alpha,\beta}{F}\right)$ eine Quaternionenalgebra.*

(a) *B ist genau dann total definit, wenn $\sigma(\alpha) < 0$ und $\sigma(\beta) < 0$ für jede $\mathbb{Q}$-Einbettung $\sigma : F \hookrightarrow \mathbb{C}$ gilt.*

(b) *B ist genau dann total indefinit, wenn $\sigma(\alpha) > 0$ oder $\sigma(\beta) > 0$ für jede $\mathbb{Q}$-Einbettung $\sigma : F \hookrightarrow \mathbb{C}$ gilt.*

Beweis. Wir beweisen nur Teil (a), da (b) auf dieselbe Weise folgt.

Seien $\mathbb{H} = \left(\frac{-1,-1}{\mathbb{R}}\right)$ die Hamiltonschen Quaternionen mit $i^2 = -1$ und $j^2 = -1$ und gelte $I^2 = \alpha$ und $J^2 = \beta$ für B.

Gehen wir zunächst davon aus, dass $\sigma(\alpha) < 0$ und $\sigma(\beta) < 0$ für jede $\mathbb{Q}$-Einbettung $\sigma : F \hookrightarrow \mathbb{C}$ gilt. Dann sind $\sqrt{-\sigma(\alpha)}$ und $\sqrt{-\sigma(\beta)}$ reelle Zahlen und wir erhalten den Isomorphismus $B \otimes_\sigma \mathbb{R} \simeq \mathbb{H}$ durch

$$I \otimes_\sigma 1 \mapsto i\sqrt{-\sigma(\alpha)} \quad \text{und} \quad J \otimes_\sigma 1 \mapsto j\sqrt{-\sigma(\beta)},$$

womit die totale Definitheit von B folgt.

Gehen wir umgekehrt davon aus, dass B total definit ist, aber gleichzeitig $\sigma(\alpha) > 0$ für eine $\mathbb{Q}$-Einbettung $\sigma : F \hookrightarrow \mathbb{C}$ gilt. Dann ist $\sqrt{\sigma(\alpha)}$ eine reelle Zahl und aufgrund der Gleichung

$$(I \otimes_\sigma 1 - 1 \otimes_\sigma \sqrt{\sigma(\alpha)})(I \otimes_\sigma 1 + 1 \otimes_\sigma \sqrt{\sigma(\alpha)}) = \alpha \otimes_\sigma 1 - 1 \otimes_\sigma \sigma(\alpha) = 0$$

beinhaltet $B \otimes_\sigma \mathbb{R}$ Nullteiler, was einen Widerspruch zu $B \otimes_\sigma \mathbb{R} \simeq \mathbb{H}$ bedeutet.

□

Wir kommen zum Fall total definiter Quaternionenmultiplikation, der im Flächenfall nicht möglich war.

Satz 2.2.13. *(Total definite Quaternionenmultiplikation). Sei X eine einfache g-dimensionale abelsche Varietät mit total definiter Quaternionenmultiplikation* $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X) = \left(\frac{\alpha,\beta}{F}\right)$ *und sei $f = a + bi + cj + hij$ ein von Null verschiedener Endomorphismus. Dann ist die Fixpunktfunktion $n \mapsto \#\,\mathrm{Fix}(f^n)$ periodisch, wenn $|a + \sqrt{b^2\alpha + c^2\beta - h^2\alpha\beta}| = 1$ ist, und wächst sonst exponentiell.*

Insbesondere sind im periodischen Fall alle analytischen Eigenwerte Einheitswurzeln und im exponentiellen Fall ist kein Eigenwert vom Betrag Eins.

Beweis. Der total reelle Zahlkörper F ist das Zentrum von $D = \left(\frac{\alpha,\beta}{F}\right)$ und wir definieren $d^2 := [D : F]$ und $e := [F : \mathbb{Q}]$. Entsprechend der Klassifikation der Endomorphismenalgebren einfacher abelscher Varietäten (siehe Satz 1.1.1) haben wir $d = 2$. Einen Endomorphismus f können wir durch $a + bi + cj + hij$ ausdrücken, wobei $i^2 = \alpha$, $j^2 = \beta$ und $ij = -ji$ mit $\alpha, \beta \in F$ gegeben ist. Da der Fall $f \in F$ bereits in Satz 2.2.9 behandelt wird, gehen wir im Folgenden von $f \in D \setminus F$ aus.

Um mehr über die Eigenschaften der analytischen Eigenwerte von f zu erfahren, benutzen wir die Fixpunktformel für abelsche Varietäten aus Satz 1.2.2 und erhalten

$$\begin{aligned}\#\,\mathrm{Fix}(f) &= (N_{D/\mathbb{Q}}(1-f))^{2g/2e} = (N_{F/\mathbb{Q}}(N_{D/F}(1-f)))^{2g/2e} \\ &= (N_{F/\mathbb{Q}}((1-a)^2 - b^2\alpha - c^2\beta + h^2\alpha\beta))^{2g/2e}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Das reduzierte charakteristische Polynom von f ist

$$N_{D/F}(x-f) = x^2 - T_{D/F}(f)x + N_{D/F}(f) = (x-t_1)(x-t_2)$$

mit $t_{1/2} = a \pm \sqrt{b^2\alpha + c^2\beta - h^2\alpha\beta} = a \pm \sqrt{t}$. Der Körper $F(\sqrt{t})$ muss eine quadratische Erweiterung von F sein, denn aus $\sqrt{t} \in F$ folgt

$$N_{D/F}(\sqrt{t} + bi + cj + hij) = t - b^2\alpha - c^2\beta + h^2\alpha\beta = 0,$$

was in einem Schiefkörper allerdings nicht möglich ist. Betrachten wir weiter ein Element g aus F, dann folgt

$$N_{F/\mathbb{Q}}(g)^2 = N_{F(\sqrt{t})/\mathbb{Q}}(g).$$

Nach Voraussetzung teilt $2e$ die Dimension g (siehe Satz 1.1.1), sodass wir mit (2.1) folgendermaßen fortfahren können:

$$\begin{aligned}\#\,\mathrm{Fix}(f) &= (N_{F/\mathbb{Q}}((1-a)^2 - b^2\alpha - c^2\beta + h^2\alpha\beta))^{2g/2e} \\ &= (N_{F/\mathbb{Q}}((1-t_1)(1-t_2)))^{2g/2e} = (N_{F(\sqrt{t})/\mathbb{Q}}((1-t_1)(1-t_2)))^{g/2e}.\end{aligned}$$

Wegen $[F(\sqrt{t}) : \mathbb{Q}] = 2e$ haben wir weiter $2e$ verschiedene $\mathbb{Q}$-Einbettungen $\sigma_1, \ldots, \sigma_{2e}$ von $F(\sqrt{t})$ in die komplexen Zahlen. Nutzen wir die Multiplikativität der Normabbildung und zudem die Holomorphe Lefschetz-Fixpunktformel aus Satz 1.2.1, dann erhalten wir

$$\Big(\prod_{j=1}^{2e}(1-\sigma_j(t_1))\prod_{j=1}^{2e}(1-\sigma_j(t_2))\Big)^{g/2e} = \#\,\mathrm{Fix}(f) = \prod_{i=1}^{g}(1-\lambda_i)(1-\overline{\lambda_i}),$$

wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_g$ die analytischen Eigenwerte von f sind. Für eine beliebige ganze Zahl k führt diese Gleichung zu

$$\Big(\prod_{j=1}^{2e}(k-\sigma_j(t_1))\prod_{j=1}^{2e}(k-\sigma_j(t_2))\Big)^{g/2e} = \#\operatorname{Fix}(f-k+1) = \prod_{i=1}^{g}(k-\lambda_i)(k-\overline{\lambda_i}),$$

sodass jedes λ_i nach demselben Argument wie in Satz 2.2.9 und Satz 2.2.11 mit einem $\sigma_j(t_1)$ übereinstimmen muss. Um den Beweis abzuschließen, benötigen wir mehr Informationen über die Eigenwerte λ_i, weshalb wir die $\mathbb{Q}$-Einbettungen des Körpers $F(\sqrt{t})$ betrachten. Wir werden zeigen, dass dieser Körper ein CM-Körper ist, was bedeutet, dass dessen normaler Abschluss nach Lemma 1.1.4 ebenfalls ein CM-Körper ist. Da in dieser Situation alle λ_i im normalen Abschluss von $F(\sqrt{t})$ liegen, können sie nach Satz 2.2.10 nur Einheitswurzeln sein, wenn sie Absolutbetrag 1 haben.

Nehmen wir einen Eigenwert λ_i, dann finden wir stets eine $\mathbb{Q}$-Einbettung $\sigma_j : F(\sqrt{t}) \hookrightarrow \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$\sigma_j(t_1) = \sigma_j(a) + \sigma_j(\sqrt{t}) = \lambda_i.$$

Da a Element des total reellen Zahlkörpers F ist, ist auch dessen Bild $\sigma_j(a)$ reell. Nehmen wir nun an, dass $\sigma_j(\sqrt{t})$ reellwertig ist, dann muss $\sigma_j(\sqrt{t})^2$ eine positive reelle Zahl sein. Wir haben also

$$\sigma_j(\sqrt{b^2\alpha + c^2\beta - h^2\alpha\beta})^2 = \sigma_j(b)^2\sigma_j(\alpha) + \sigma_j(c)^2\sigma_j(\beta) - \sigma_j(h)^2\sigma_j(\alpha)\sigma_j(\beta) > 0.$$

Dies ist nicht möglich, da $\sigma_j(\alpha) < 0$ und $\sigma_j(\beta) < 0$ nach Lemma 2.2.12 gilt. Demnach ist jedes λ_i komplexwertig, sodass $F(\sqrt{t})$ und dessen normaler Abschluss CM-Körper sind und jedes λ_i von Betrag 1 eine Einheitswurzel sein muss. Da alle λ_i Nullstellen des Minimalpolynoms von t_1 sind, genügt es zu prüfen, ob t_1 Absolutbetrag 1 hat oder nicht. Folglich ist die Fixpunktfunktion $n \mapsto \#\operatorname{Fix}(f^n)$ periodisch, wenn $|a + \sqrt{b^2\alpha + c^2\beta - h^2\alpha\beta}| = 1$ ist, und wächst sonst exponentiell. □

Bevor wir zur total indefiniten Quaternionenmultiplikation kommen, fragen wir noch kurz, was es in den oberen Fällen für einen Endomorphismus bedeutet, periodisches Fixpunktwachstum zu haben.

Korollar 2.2.14. *Sei X eine einfache abelsche Varietät mit reeller, total definiter Quaternionen- oder komplexer Multiplikation und sei f ein Endomorphismus mit $\#\operatorname{Fix}(f^n) = 0$ für ein n. Dann ist f ein Automorphismus.*

Beweis. Sei f ein Endomorphismus mit $\#\operatorname{Fix}(f^n) = 0$ für ein n. Unter Berücksichtigung der Fixpunktformel aus Satz 2.1.1 muss es mindestens einen analytischen Eigenwert λ_i mit der Eigenschaft $\lambda_i^n = 1$ geben. Dieser ist folglich eine Einheitswurzel, womit nach obigen Sätzen alle Eigenwerte Einheitswurzeln sind.

Ist $\operatorname{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ ein Zahlkörper und f ein Endomorphismus, der eine Einheitswurzel ist, dann ist ebenso $f^{-1} = \overline{f}$ in $\operatorname{End}(X)$ enthalten. Falls der Endomorphismus $f = a + bi + cj + dij$, dessen analytische Eigenwerte Einheitswurzeln sind, in einer Ordnung einer Quaternionenalgebra liegt, dann ist auch $f' = a - bi - cj - dij$ darin enthalten und

$$f \cdot f' = (a + \sqrt{b^2\alpha + c^2\alpha - d^2\alpha\beta})(a - \sqrt{b^2\alpha + c^2\beta - d^2\alpha\beta}) = 1$$

folgt aus $|a \pm \sqrt{b^2\alpha + c^2\beta - d^2\alpha\beta}| = 1$ und $-b^2\alpha - c^2\beta + d^2\alpha\beta \in \mathbb{R}_{>0}$. □

Folgende Bemerkung belegt, dass die Umkehrung dieses Korollars im Allgemeinen nicht gilt.

Bemerkung 2.2.15. Die Umkehrung dieser Aussage ist im Allgemeinen falsch. Denn nach dem Dirichletschen Einheitensatz (siehe [Ne, S. 39 – 44]) existieren Ordnungen in total reellen Zahlkörpern und CM-Körpern, deren Einheitengruppen Elemente vom Betrag $\neq 1$ enthalten. Elementare Beispiele existieren bereits im Fall abelscher Flächen, zum Beispiel enthält der Ganzheitsring im reell quadratischen Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ die Einheit $1+\sqrt{2}$.

Wir wenden uns dem Fall total indefiniter Quaternionenmultiplikation zu. Im nächsten Satz leiten wir ein Beispiel einer total indefiniten Quaternionenalgebra her, die zugleich ein Schiefkörper ist und eine Ordnung enthält, in der ein Element mit einer Nullstelle eines Salem-Polynoms korrespondiert, dessen Betrag 1 ist. Dieser Satz wird uns im anschließenden Satz zum ersten Beispiel einer einfachen abelschen Varietät führen, auf der ein Endomorphismus existiert, dessen analytische Eigenwerte Nullstellen eines Salem-Polynoms sind. Es treten also erstmals Eigenwerte vom Betrag 1 auf, die keine Einheitswurzeln sind.

Satz 2.2.16. *Die Quaternionenalgebra*

$$B := \left(\frac{2,\ -2-2\sqrt{13}}{\mathbb{Q}(\sqrt{13})}\right)$$

ist ein Schiefkörper und total indefinit. Weiter existiert eine Ordnung $\mathcal{O}$ in B, die das Element $f := \frac{1}{4}(1-\sqrt{13}+i)$ enthält. Dessen charakteristisches Polynom hat die Nullstelle $\gamma := \frac{1}{4}(1-\sqrt{13}+\sqrt{-2-2\sqrt{13}})$, die eine zu einer Salem-Zahl konjugierte Nullstelle vom Betrag 1 ist.

Beweis. Zunächst kann man mit Magma nachweisen, dass B ein Schiefkörper ist, indem man folgenden Code benutzt:

```
_<x> := PolynomialRing(Rationals());
K<sqrt13> := NumberField(x^2-13);
B := QuaternionAlgebra(K, 2, -2-2*sqrt13);
IsMatrixRing(B);
```

Per Definition gelte $i^2 = -2-2\sqrt{13}$ und $j^2 = 2$. Identifizieren wir i mit $\sqrt{-2-2\sqrt{13}}$ und j mit $\sqrt{2}$, dann ergeben sich injektive $\mathbb{Q}(\sqrt{13})$-Algebrenhomomorphismen

$$\iota_1 : L := \mathbb{Q}(\sqrt{13})(\sqrt{2}) \hookrightarrow B \quad \text{und} \quad \iota_2 : K := \mathbb{Q}(\sqrt{-2-2\sqrt{13}}) \hookrightarrow B.$$

Nach Lemma 1.1.7 sind K und L somit Zerfällungskörper für B. Da das Bild von 2 unter jeder $\mathbb{Q}$-Einbettung von $\mathbb{Q}(\sqrt{13})$ positiv ist, ist B nach Lemma 2.2.12 total indefinit. Kennzeichne nun S den Ring ganzer Zahlen in K, dann können wir S als $\mathbb{Z}$-Ordnung in K auffassen. Weiter ergibt $\mathcal{O} := S \oplus Sj$ via ι_2 ein $\mathbb{Z}$-Gitter in B. Die Gleichung $\sqrt{-2-2\sqrt{13}}j = j(-\sqrt{-2-2\sqrt{13}})$ entspricht in diesem Fall $ij = -ji$. Die Zahl $j^2 = 2$

liegt in $\mathbb{Z}$ und mittels Nachrechnen können wir zeigen, dass $\mathcal{O}$ ebenfalls eine Ringstruktur hat und demnach eine $\mathbb{Z}$-Ordnung in B darstellt. Die Zahl

$$\gamma := \frac{1}{4}\Big(1 - \sqrt{13} + \sqrt{-2 - 2\sqrt{13}}\Big),$$

eine komplexe Nullstelle des Salem-Polynoms

$$x^4 - x^3 - x^2 - x + 1,$$

ist in S enthalten und dessen Bild unter ι_2 entspricht

$$f := \frac{1}{4}(1 - \sqrt{13} + i).$$

Betrachten wir das charakteristische Polynom von f, dann haben wir

$$\begin{aligned} & x^2 - T_{B/\mathbb{Q}(\sqrt{13})}(f)x + N_{B/\mathbb{Q}(\sqrt{13})}(f) \\ &= x^2 - \frac{1}{4}(1 - \sqrt{13})x + 1 = (x - t_1)(x - t_2) \end{aligned}$$

mit $t_1 = \gamma$ und $t_2 = \overline{\gamma}$. $\square$

Folgender Satz komplettiert Theorem 2 und wir erhalten den ersten Endomorphismus einer einfachen abelschen Varietät, der einen Eigenwert vom Betrag 1 hat, der keine Einheitswurzel ist. Die Aussage zu abelschen Flächen mit Quaternionenmultiplikation kann somit nicht auf höhere Dimensionen übertragen werden.

Satz 2.2.17. *(Total indefinite Quaternionenmultiplikation). Es existiert eine einfache abelsche Varietät mit total indefiniter Quaternionenmultiplikation, die einen Endomorphismus mit einem analytischen Eigenwert vom Betrag* 1 *hat, der keine Einheitswurzel ist.*

Beweis. Zunächst schreiben wir $F := \mathbb{Q}(\sqrt{13})$ und übernehmen die Notation aus Satz 2.2.16. Nach [CAV, §9.4] existiert eine abelsche Varietät X der Dimension 4 mit $\mathcal{O} \subseteq \operatorname{End}(X)$. Nach Konstruktion ist B dessen Endomorphismenalgebra, sodass X einfach sein muss, da B ein Schiefkörper ist.

Betrachten wir den Endomorphismus $f \in \mathcal{O}$, nach Satz 2.2.16 sind dann $t_1 = \gamma$ und $t_2 = \overline{\gamma}$ Nullstellen des zugehörigen reduzierten charakteristischen Polynoms. Da K eine quadratische Erweiterung von F ist und γ und $\overline{\gamma}$ enthält, erhalten wir

$$(N_{F/\mathbb{Q}}(1 - t_1)(1 - t_2))^2 = N_{K/\mathbb{Q}}(1 - t_1)(1 - t_2).$$

Berechnen wir die Norm und nutzen wir beide Fixpunktformeln, dann bekommen wir

$$\Big(\prod_{j=1}^{4} 1 - \sigma_j(t_1)\Big)\Big(\prod_{j=1}^{4} 1 - \sigma_j(t_2)\Big) = \#\operatorname{Fix}(f) = \prod_{i=1}^{4}(1 - \lambda_i)(1 - \overline{\lambda_i}),$$

wobei $\sigma_1, \dots \sigma_4$ die $\mathbb{Q}$-Einbettungen von K in $\mathbb{C}$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ die analytischen Eigenwerte von f sind. Wie im Beweis des Satzes 2.2.9 sehen wir, dass $\gamma = t_1$ mit einem Eigenwert λ_i übereinstimmt. Dieses Element ist vom Betrag 1, aber keine Einheitswurzel. $\square$

Wir geben an dieser Stelle noch weitere Beispiele für Quaternionenalgebren mit denselben Eigenschaften wie diejenige in Satz 2.2.16. Den Beweis des vorherigen Satz können wir für diese Beispiele analog durchführen.

Bemerkung 2.2.18. An dieser Stelle weisen wir nach, dass noch weitere total indefinite Quaternionenalgebren wie in Satz 2.2.16 existieren, was sich auf dieselbe Weise zeigen lässt. Weiter können wir ausgehend von diesen Algebren analog zum Beweis des Satzes 2.2.17 zeigen, dass noch weitere einfache abelsche Varietäten existieren, die Endomorphismen mit Eigenwerten vom Betrag 1 liefern, die keine Einheitswurzeln sind.

(a) Die total indefinite Quaternionenalgebra

$$\left(\frac{2,\, 94-14\sqrt{61}}{\mathbb{Q}(\sqrt{61})}\right)$$

hat für $i^2 = 94-14\sqrt{61}$ eine Ordnung mit dem Element $\frac{1}{4}(7-\sqrt{61}+i)$, das den analytischen Eigenwert

$$\frac{1}{4}\left(7-\sqrt{61}+\sqrt{94-14\sqrt{61}}\right)$$

liefert, der eine komplexe Nullstelle des Salem-Polynoms $x^4-7x^3-x^2-7x+1$ ist.

(b) Die total indefinite Quaternionenalgebra

$$\left(\frac{2,\, 10-6\sqrt{17}}{\mathbb{Q}(\sqrt{17})}\right)$$

hat für $i^2 = 10-6\sqrt{17}$ eine Ordnung mit dem Element $\frac{1}{4}(3-\sqrt{17}+i)$, das den analytischen Eigenwert

$$\frac{1}{4}\left(3-\sqrt{17}+\sqrt{10-6\sqrt{17}}\right)$$

liefert, der eine komplexe Nullstelle des Salem-Polynoms x^4-3x^3-3x+1 ist.

Zuletzt klären wir noch, warum wir für einen Endomorphismus f auf einer einfachen abelschen Varietäten mit total indefiniter Quaternionenmultiplikation keine Kriterien wie in den anderen behandelten Fällen formulieren können, die uns das Verhalten der Fixpunktfunktion $n \mapsto \#\operatorname{Fix}(f^n)$ angeben.

Bemerkung 2.2.19. Die Endomorphismen

$$\frac{1}{4}(1-\sqrt{13}+i), \quad \frac{1}{4}(7-\sqrt{61}+i)$$

und

$$\frac{1}{4}(3-\sqrt{17}+i)$$

erfüllen die Bedingungen des Satzes 2.2.13, aber ihre Fixpunktfunktionen wachsen exponentiell, statt periodisch zu sein, da ein Eigenwert eine Salem-Zahl ist, die betraglich größer als 1 ist.

2.3. Kummer-Varietäten

Wir werden in diesem Kapitel die Fixpunktformel für komplexe Tori aus Satz 1.2.1 auf die Objekte T/ι erweitern, wobei T ein komplexer Torus und ι die durch $x \mapsto -x$ definierte Involution ist. Für einen Endomorphismus $F : T/\iota \to T/\iota$, der von einem Endomorphismus $f : T \to T$ induziert wird, werden wir anschließend das Verhalten der Fixpunktfunktion $n \mapsto \#\,\mathrm{Fix}(F^n)$ bestimmen.

Wir beginnen mit Multiplikationsabbildungen $[m] : T/\iota \to T/\iota$, $x \mapsto mx$ zu ganzen Zahlen m. Für $m = 0$ hat diese Abbildung nur 0 als Fixpunkt und für $m = \pm 1$ wird ganz T/ι punktweise fixiert, sodass wir $\#\,\mathrm{Fix}([m]) = 0$ haben. Es bleibt also der Fall $m \in \mathbb{Z}$ mit $|m| > 1$ zu betrachten. Wir beginnen mit $m > 1$ und führen $m < 1$ anschließend darauf zurück. Wir gebrauchen die Fixpunktformel 1.2.1 zunächst nicht, sondern argumentieren elementar über die m-Teilungspunkte. Die Erweiterung dieser Fixpunktformel auf Endomorphismen $F : T/\iota \to T/\iota$ wird im Anschluss erfolgen.

Aus den Grundlagen ist bekannt, dass jeder Endomorphismus $f : T \to T$ auf natürliche Weise einen Endomorphismus $F : T/\iota \to T/\iota$ induziert.

Satz 2.3.1. *Sei $T = \mathbb{C}^g/\Lambda$ ein komplexer Torus. Für eine natürliche Zahl $m > 1$ hat die Abbildung $[m] : T/\iota \to T/\iota, x \mapsto mx$ die Fixpunktanzahl*

$$\#\mathrm{Fix}([m]) = \frac{(m-1)^{2g} + (m+1)^{2g}}{2}.$$

Beweis. Für einen Fixpunkt x der Abbildung $[m]$ muss die Relation

$$m \cdot x \equiv_\Lambda x \quad \text{oder} \quad m \cdot x \equiv_\Lambda -x$$

gelten. Dies entspricht der Aussage

$$(m-1) \cdot x \in \Lambda \quad \text{oder} \quad (m+1) \cdot x \in \Lambda,$$

sodass der Fixpunkt x ein $(m-1)$- oder $(m+1)$-Teilungspunkt des Gitters Λ sein muss. Ist x ein $(m-1)$- und $(m+1)$-Teilungspunkt, dann ist x eine Halbperiode. Wir unterscheiden nun, ob m gerade oder ungerade ist. Ein ω bezeichne im Folgenden eine Periode des Gitters Λ.

Fall 1: m ungerade. Für $k \in \{1, \dots, \frac{m-1}{2}\}$ werden die Punkte $\frac{k}{m-1} \cdot \omega$ und $\frac{m-1-k}{m-1} \cdot \omega$ auf T/ι miteinander identifiziert, da

$$\frac{-k}{m-1} \cdot \omega \equiv_\Lambda \frac{-k}{m-1} \cdot \omega + \omega = \frac{m-1-k}{m-1} \cdot \omega$$

gilt und $\frac{k}{m-1} \cdot \omega$ und $\frac{-k}{m-1} \cdot \omega$ auf T/ι einander entsprechen. Analog folgt für $k \in \{1, \dots, \frac{m+1}{2}\}$, dass die Punkte $\frac{k}{m+1} \cdot \omega$ und $\frac{m+1-k}{m+1} \cdot \omega$ auf T/ι miteinander identifiziert werden. Da m ungerade ist, sind die 2-Teilungspunkte die einzigen $(m-1)$- bzw. $(m+1)$-Teilungspunkte, die als Elemente von T/ι nur einen Repräsentanten im Fundamentalparallelotop von T haben. Addieren wir die Hälfte der Anzahl der $(m-1)$- und $(m+1)$-Teilungspunkten, wobei wir jeweils die Anzahl der Halbperioden abgezogen haben, mit der Anzahl der Halbperioden, dann entspricht die Summe genau der Fixpunktanzahl von $[m]$. Die Fixpunktanzahl der Abbildung $[m]$ ist somit

$$\#\mathrm{Fix}([m]) = \frac{(m-1)^{2g} - 2^{2g}}{2} + \frac{(m+1)^{2g} - 2^{2g}}{2} + 2^{2g} = \frac{(m-1)^{2g} + (m+1)^{2g}}{2}.$$

Fall 2: m gerade. Wie im vorherigen Fall werden die Punkte $\frac{k}{m-1} \cdot \omega$ und $\frac{m-1-k}{m-1} \cdot \omega$ in T/ι miteinander identifiziert. Dies gilt ebenso für $\frac{k}{m+1} \cdot \omega$ und $\frac{m+1-k}{m+1} \cdot \omega$. Einzig der Nullpunkt, der ein $(m-1)$- und $(m+1)$-Teilungspunkt ist, hat als Element von T/ι nur einen Repräsentanten im Fundamentalparallelotop von T hat. Mit denselben Überlegungen wie im vorherigen Fall kommen wir zu der Fixpunktanzahl

$$\#\,\mathrm{Fix}([m]) = \frac{(m-1)^{2g} - 1}{2} + \frac{(m+1)^{2g} - 1}{2} + 1 = \frac{(m-1)^{2g} + (m+1)^{2g}}{2}.$$

□

Wir führen in folgendem Lemma nun den Fall $m < 1$ auf diesen Satz zurück:

Korollar 2.3.2. *Sei $T = \mathbb{C}^g/\Lambda$ ein komplexer Torus. Für eine natürliche Zahl $m > 1$ hat die Abbildung $[-m] : T/\iota \to T/\iota$ die Fixpunktanzahl*

$$\#\mathrm{Fix}([-m]) = \frac{(m-1)^{2g} + (m+1)^{2g}}{2}.$$

Beweis. Für einen Fixpunkt x der Abbildung $[-m]$ muss $-m \cdot x \equiv x$ oder $-m \cdot x \equiv -x$ gelten. Dies ist aber gleichbedeutend mit $m \cdot x \equiv -x$ oder $m \cdot x \equiv x$, sodass die Fixpunktanzahl der Abbildung $[-m]$ mit der der Abbildung $[m]$ übereinstimmt. □

Wir kommen zur Erweiterung der Holomorphen Lefschetz-Fixpunktformel aus Satz 1.2.1 auf Endomorphismen von Kummer-Varietäten, die durch Endomorphismen komplexer Tori induziert sind.

Satz 2.3.3. *Sei T ein komplexer Torus der Dimension g. Jeder Endomorphismus $f : T \to T$ induziert auf natürliche Weise einen Endomorphismus $F : T/\iota \to T/\iota$, für den die Fixpunktformel*

$$\#\mathrm{Fix}(F) = \frac{|\det(E_g - \rho_a(f))|^2 + |\det(E_g + \rho_a(f))|^2}{2}$$

gilt.

Beweis. Aus den Grundlagen ist bekannt, dass ein Endomorphismus $f : T \to T$ in natürlicher Weise einen Endomorphismus $F : T/\iota \to T/\iota$ induziert.

Für einen Fixpunkt x der Abbildung F muss somit

$$f(x) \equiv_\Lambda -x \quad \text{oder} \quad f(x) \equiv_\Lambda x$$

gelten. Es sind also die Fixpunkte der Abbildungen f und $-f$ zu betrachten. Ist x ein Fixpunkt der Abbildung f, dann ist wegen der Gleichung

$$0 \equiv_\Lambda f(x-x) \equiv_\Lambda f(x) + f(-x) \equiv_\Lambda x + f(-x)$$

auch $-x$ ein Fixpunkt von f. Dies gilt ebenso für $-f$. Die Halbperioden sind die einzigen Punkte auf T, für die die Gleichung $x \equiv_\Lambda -x$ gilt. Daher kann nur für die Halbperioden gelten: Ist x ein Fixpunkt von f, dann ist x auch ein Fixpunkt von $-f$ und umgekehrt. Zusammen kommen wir demnach zu der Formel

$$\begin{aligned}\#\mathrm{Fix}(F) = &\frac{|\det(E_g - \rho_a(f))|^2 - \#\{\text{ Halbperioden, die Fixpunkte von } f \text{ sind}\}}{2} \\ &+\frac{|\det(E_g + \rho_a(f))|^2 - \#\{\text{ Halbperioden, die Fixpunkte von } f \text{ sind}\}}{2} \\ &+\#\{\text{ Halbperioden, die Fixpunkte von } f \text{ sind}\} \\ &= \frac{|\det(E_g - \rho_a(f))|^2 + |\det(E_g + \rho_a(f))|^2}{2}.\end{aligned}$$

□

Unsere erweiterte Fixpunktformel lässt eine direkte Folgerung zum Verhalten der Fixpunktfunktion $n \mapsto \#\,\mathrm{Fix}(F^n)$ zu:

Korollar 2.3.4. *Sei $f : T \to T$ ein Endomorphismus eines g-dimensionalen komplexen Torus T, der den Endomorphismus $F : T/\iota \to T/\iota$ induziert. Weiter seien $\lambda_1, \dots, \lambda_g$ die analytischen Eigenwerte von f. Dann tritt einer der folgenden drei Fälle ein:*

1. *Ein λ_i ist keine Einheitswurzel und für je zwei λ_j und λ_k und alle ganzen Zahlen $m \geq 1$ gilt nie gleichzeitig $\lambda_j^m = 1$ und $\lambda_k^m = -1$. Dann wächst $n \mapsto \#\,\mathrm{Fix}(F^n)$ exponentiell.*
2. *Alle λ_i sind Einheitswurzeln. Dann ist $n \mapsto \#\,\mathrm{Fix}(F^n)$ periodisch.*
3. *Ein λ_i ist keine Einheitswurzel und für zwei λ_j und λ_k und eine ganze Zahl $m \geq 1$ gilt $\lambda_j^m = 1$ und $\lambda_k^m = -1$. Dann existieren ganze Zahlen $m_1, \dots, m_r \geq 1$ und eine exponentiell wachsende Funktion $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit*

$$\#\,\mathrm{Fix}(F^n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n = l \cdot m_i \quad \text{für } i \in \{1, \dots, r\} \text{ und } l \equiv 1 \pmod 2 \\ h(n), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Der zweite Fall ist klar, sind alle Eigenwerte der Matrix $\rho_a(f)$ Einheitswurzeln, dann sind die Werte von $|\det(E_g - \rho_a(f))|^2$ und $|\det(E_g + \rho_a(f))|^2$ beim Potenzieren dieser Eigenwerte periodisch.

Die Gleichung
$$\frac{|\det(E_g - \rho_a(f))|^2 + |\det(E_g + \rho_a(f))|^2}{2}$$
ist nur dann Null, wenn $\lambda_j^m = 1$ und $\lambda_k^m = -1$ für zwei λ_j und λ_k und eine ganze Zahl $m \geq 1$ gilt. Weiter gilt $\lambda_k^{l \cdot m} = -1$ nur für ungerade ganze Zahlen l. Zuletzt folgt aus der Existenz eines Eigenwerts λ_i, der keine Einheitswurzel ist, die Existenz eines Eigenwerts λ_s vom Betrag > 1. Hiermit folgen also die Aussagen des ersten und dritten Falls. □

2.4. K3-Flächen

Wir kommen nun zum Fixpunktverhalten von Automorphismen auf K3-Flächen. Unsere Problematik besteht darin, dass uns in dieser Situation keine Fixpunktformel zur Verfügung steht. Unsere Idee ist daher, die Wirkung eines Automorphismus auf dessen Kohomologiegruppen zu betrachten und über die durch die Eigenwerte dieser Wirkung definierte Lefschetz-Zahl die Fixpunktanzahl abzuschätzen. Kenntnisse über diese Eigenwerte werden wir aus den Entropiebetrachtungen gewinnen.

Da wir in diesem Abschnitt mehrere Aussagen McMullens [McM2] nutzen werden und die folgende Argumentation möglichst verständlich halten wollen, übernehmen wir einzig für diesen Abschnitt seine Definition einer Salem-Zahl und verzichten auf die Forderung der Existenz einer konjugierten Nullstelle vom Betrag 1.

Sei X nun eine K3-Fläche. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Aut}(X)$ die Gruppe ihrer biholomorphen Abbildungen $f : X \to X$ und mit $\mathrm{Aut}(H^2(X,\mathbb{Z}), H^{2,0}(X), \mathcal{K}_X)$ die Gruppe der Hodge-Isometrien $\phi : H^2(X,\mathbb{Z}) \to H^2(X,\mathbb{Z})$, die zusätzlich den Kähler-Kegel $\mathcal{K}_X$ in den Kähler-Kegel abbilden.

Der Satz von Torelli sagt uns, dass einerseits jedes Element f aus $\mathrm{Aut}(X)$ durch f^* treu auf $H^2(X,\mathbb{Z})$ operiert und dabei die Schnittform, die Hodgestruktur und den Kähler-Kegel erhält, und dass andererseits zu jeder Hodge-Isometrie ϕ, die den Kähler-Kegel erhält, ein eindeutiger Automorphismus $f \in \mathrm{Aut}(X)$ mit $f^* = \phi$ existiert. Hiermit erhalten wir einen Isomorphismus

$$\mathrm{Aut}(X) \to \mathrm{Aut}(H^2(X,\mathbb{Z}), H^{2,0}(X), \mathcal{K}_X), \quad f \mapsto f^*. \tag{2.2}$$

Wir führen weiter die angesprochene Lefschetz-Zahl ein und besprechen in anschließender Bemerkung ihre Bedeutung.

Definition 2.4.1 ([GH], S. 421)**.** Sei $f : X \to X$ ein Automorphismus einer K3-Fläche X. Die *Lefschetz-Zahl* von f ist durch

$$L(f) = \sum_{q=0}^{4} (-1)^q \mathrm{Spur}(f^* | H^q(X,\mathbb{Z}))$$

definiert.

Bemerkung 2.4.2. ([GH], S. 419 - 426). Hat der Automorphismus f eine endliche Fixpunktanzahl, dann gibt die Lefschetz-Zahl $\mathrm{L}(f)$ diese mit Vielfachheiten gezählt an. Hat f zudem nur *transversale Fixpunkte*, schneidet der Graph von f die Diagonale in $X \times X$ also nur transversal, dann haben wir die Abschätzung $\#\,\mathrm{Fix}(f) \geq |L(f)|$.

Um mithilfe der Lefschetz-Zahl die Fixpunktanzahl abschätzen zu können, benötigen wir nun Kenntnisse über die Eigenwerte von f^* auf $H^2(X,\mathbb{Z})$. Da sich f^* auf $H^0(X,\mathbb{Z})$ und $H^4(X,\mathbb{Z})$ trivial verhält und sonst $H^1(X,\mathbb{Z}) = H^3(X,\mathbb{Z}) = 0$ gilt, bleibt nur der Fall $H^2(X,\mathbb{Z})$ zu betrachten. Hilfreiche Aussagen zu den Eigenwerten von f^* auf $H^2(X,\mathbb{Z})$ entnehmen wir McMullen [McM2], der diese Aussagen im Rahmen von Entropiebetrachtungen herleitet.

Mit $O(p,q) \subset GL_n(\mathbb{R})$ bezeichnet man die orthogonale Gruppe der reell-quadratischen Formen

$$x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$$

mit Signatur (p,q). Dass f^* konjugiert zu einem Element T in $O(2,0) \times O(1,19)$ ist, nutzt McMullen, um mit folgendem Lemma, das die Anzahl der Eigenwerte von T außerhalb des Einheitskreises angibt, den anschließenden Satz zu beweisen:

Lemma 2.4.3 ([McM2], Lemma 3.1, S. 211)**.** *Eine Transformation $T \in O(p,q)$ hat höchstens* $\min(p,q)$ *Eigenwerte außerhalb des Einheitskreises, die mit ihrer Vielfachheit gezählt werden.*

Satz 2.4.4 ([McM2], Theorem 3.2, S. 211)**.** *Entweder sind alle Eigenwerte von $f^*|H^2(X,\mathbb{Z})$ Einheitswurzeln oder es existiert genau ein Eigenwert λ mit* $|\lambda| > 1$ *und dieser ist eine Salem-Zahl.*

Dieser Satz sagt uns, dass das charakteristische Polynom von f^* auf $H^2(X,\mathbb{Z})$ ein Produkt von Kreisteilungspolynomen oder von Kreisteilungspolynomen mit genau einem Salem-Polynom ist.

Mit diesen Vorbemerkungen sind wir nun in der Lage unser Hauptresultat zum Fixpunktverhalten von Automorphismen auf K3-Flächen zu beweisen:

Satz 2.4.5. *Sei $f : X \to X$ ein Automorphismus einer K3-Fläche X, wobei die Iterationen f^n bei endlicher Fixpunktanzahl nur transversale Fixpunkte haben. Dann tritt einer der folgenden beiden Fälle ein:*

(a) *Alle Eigenwerte von $f^*|H^2(X,\mathbb{Z})$ sind Einheitswurzeln und die Funktion* $n \mapsto \#\,\mathrm{Fix}(f^n)$ *ist periodisch.*

(b) *Ein Eigenwert von $f^*|H^2(X,\mathbb{Z})$ ist eine Salem-Zahl und die Fixpunktfunktion $n \mapsto$* $\#\,\mathrm{Fix}(f^n)$ *wächst mindestens exponentiell.*

Beweis. Aufgrund des Isomorphismus in (2.2) induziert f^n die Abbildung $(f^*)^n|H^2(X,\mathbb{Z})$. Da f^* ähnlich zu einer Matrix $T \in O(2,0) \times O(1,19)$ ist, entsprechen die Eigenwerte von $(f^*)^n$ den Potenzen der Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_{22}$ von f^*. Nach Satz 2.4.4 sind nun entweder alle λ_i Einheitswurzeln oder ein λ_j ist eine Salem-Zahl λ.

Im ersten Fall existiert folglich ein l mit $(f^*)^l = \mathrm{id}$, sodass nach dem Satz von Torelli auch $f^l = \mathrm{id}$ gilt und das Fixpunktverhalten von f demnach periodisch ist.

Wegen Bemerkung 2.4.2 gilt im zweiten Fall zunächst

$$\#\,\mathrm{Fix}(f^n) \geq |L(f^n)|\,.$$

Da sich $(f^*)^n$ auf $H^0(X,\mathbb{Z})$ und $H^4(X,\mathbb{Z})$ trivial verhält, erhalten wir somit

$$\#\,\mathrm{Fix}(f^n) \geq |1 + (\lambda_1^n + \cdots + \lambda_{22}^n) + 1| = |L(f^n)|\,.$$

Da ein λ_j einer Salem-Zahl λ entspricht, wächst die Fixpunktanzahl im zweiten Fall mindestens exponentiell mit λ^n. □

Wir kommen nun zu Automorphismen glatter Kummer-Flächen. Ist $f : X \to X$ ein Automorphismus eines zweidimensionalen komplexen Torus X, dann führt dieser, wie in den Grundlagen gesehen, zu einem Automorphismus $F : Y \to Y$ auf der zu X gehörigen glatten Kummer-Fläche Y.

Unsere Frage ist nun, ob wir vom Fixpunktverhalten von f auf das von F schließen können. Um den vorherigen Satz nutzen zu können, werden wir darlegen, dass ein Bezug zwischen den analytischen Eigenwerten von f und den Eigenwerten von F^* auf $H^2(Y, \mathbb{Z})$ besteht. Folgender Satz gibt einen Zusammenhang zwischen den Eigenwerten von f^* auf $H^2(X, \mathbb{Z})$ und F^* auf $H^2(Y, \mathbb{Z})$ an:

Satz 2.4.6 ([McM2], Theorem 4.3, S. 215)**.** *Sei $f : X \to X$ ein Automorphismus eines 2-dimensionalen komplexen Torus und F der entsprechende Automorphismus der zu X gehörigen glatten Kummer-Fläche Y. Dann entspricht der Spektralradius von f^* auf $H^*(X, \mathbb{Z})$ dem von F^* auf $H^*(Y, \mathbb{Z})$.*

Wie folgt hängt das Fixpunktverhalten von F von dem von f ab:

Satz 2.4.7. *Sei $f : X \to X$ ein Automorphismus eines 2-dimensionalen komplexen Torus und F der entsprechende Automorphismus der zu X gehörigen glatten Kummer-Fläche Y, dessen Iterationen F^n bei endlicher Fixpunktanzahl nur transversale Fixpunkte haben. Dann tritt einer der beiden Fälle ein:*

(a) *Die Fixpunktfunktionen $n \mapsto \#\operatorname{Fix}(f^n)$ und $n \mapsto \#\operatorname{Fix}(F^n)$ sind periodisch.*

(b) *Die Funktion $n \mapsto \#\operatorname{Fix}(f^n)$ wächst exponentiell und die Fixpunktfunktion $n \mapsto \#\operatorname{Fix}(F^n)$ wächst mindestens exponentiell.*

Beweis. Seien $\lambda_1, \lambda_2, \overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2$ die rationalen Eigenwerte des Automorphismus f. Da das rationale charakteristische Polynom von f als konstanten Term 1 hat, sind entweder alle rationalen Eigenwerte vom Betrag 1 oder ein Eigenwert, sagen wir λ_1, ist betraglich > 1 (und somit auch $\overline{\lambda}_1$), während λ_2 und $\overline{\lambda}_2$ betraglich < 1 sind. Wir haben die Wirkung von f^* auf den Kohomologiegruppen in den Grundlagen besprochen und wissen, dass der Spektralradius von f^* auf $H^*(X, \mathbb{Z})$ der größte Betrag der Produkte paarweise verschiedener rationaler Eigenwerte ist.

- Sind alle Eigenwerte von f Einheitswurzeln, dann hat f periodisches Fixpunktverhalten und der Spektralradius von f^* auf $H^*(X, \mathbb{Z})$ ist 1. Nach Satz 2.4.6 und Satz 2.4.4 sind demnach auch alle Eigenwerte von F^* auf $H^2(Y, \mathbb{Z})$ Einheitswurzeln, sodass F nach Satz 2.4.5 periodisches Fixpunktverhalten hat.

- Im anderen Fall hat f exponentielles Fixpunktwachstum und der betraglich größte Eigenwert von f^* auf $H^*(X, \mathbb{Z})$ ist $\lambda_1 \cdot \overline{\lambda}_1 = |\lambda_1|^2$. Aufgrund des Satzes 2.4.6 und des Satzes 2.4.4 ist ein Eigenwert von F^* auf $H^2(Y, \mathbb{Z})$ dann eine Salem-Zahl, sodass F nach Satz 2.4.5 mindestens exponentielles Fixpunktwachstum hat.

$\square$

Kapitel 3

Anwendung – Entropie von Endomorphismen

In einem letzten Kapitel werden wir unsere Ergebnisse zu Fixpunkten von Endomorphismen einfacher abelscher Varietäten für Betrachtungen der Entropie dieser Abbildungen nutzen. Wir werden uns mit einfachen abelschen Varietäten beliebiger Dimension beschäftigen, die Entropie von Automorphismen auf komplexen Tori der Dimension Zwei und auf abelschen Flächen hat Reschke ([Res1] und [Res2]) bereits vollständig klassifiziert. Ebenso liefert McMullen ([McM1] und [McM2]) für K3-Flächen ein vollständiges Bild und gibt die kleinsten Werte positiver Entropie an. In den genannten Fällen zeigen die Autoren, dass im Falle positiver Entropie dieser Wert stets dem Logarithmus einer Salem-Zahl entspricht. Ergebnisse dieser Art zu einfachen abelschen Varietäten beliebiger Dimension sind bisher nicht bekannt.

Wir übernehmen die Leitfragen der Arbeiten McMullens und Reschkes in Form unserer dritten Kernfrage der Einleitung:

(a) *Wie können wir für einen Endomorphismus $f : X \to X$ einer einfachen abelschen Varietät X entscheiden, ob f positive Entropie hat oder ob diese Null ist?*

(b) *Hat ein solcher Endomorphismus f positive Entropie $h(f) = \log(\gamma)$, welche algebraische Struktur hat dann die Zahl γ?*

Im letzten Kapitel haben wir Kenntnisse zu den analytischen Eigenwerten eines Endomorphismus f auf einer einfachen abelschen Varietät erworben. Unser Zugang zur Entropie $h(f)$ von f wird in der in den Grundlagen eingeführten Formel

$$h(f) = \max_{0 \leq j \leq \dim X} \log(\rho(f^* : H^{j,j}(X) \to H^{j,j}(X)))$$

bestehen, wobei ρ für den Spektralradius steht.

Das Ergebnis dieses Kapitels wird Theorem 3 der Einleitung sein, das wir in zwei Schritten beweisen. Im ersten Unterkapitel werden wir uns mit Endomorphismen einfacher abelscher Varietäten beschäftigen und den ersten Teil dieses Theorems beweisen. Im zweiten Abschnitt gehen wir auf Automorphismen einfacher abelscher Varietäten ein und beweisen Teil 2 von Theorem 3. Wir werden uns im Folgenden mit denselben Typen von Endomorphismenalgebren befassen wie im letzten Kapitel.

3.1. Endomorphismen einfacher abelscher Varietäten

Wir gehen nun auf die beiden Fragen zu Beginn des Kapitels ein, das Ergebnis dieses Abschnitts wird der folgende Satz sein:

Satz 3.1.1. *(Theorem 3, Teil 1). Sei X eine einfache abelsche Varietät mit reeller, komplexer oder total definiter Quaternionenmultiplikation. Oder sei X eine einfache abelsche Fläche mit total indefiniter Quaternionenmultiplikation. Für einen von Null verschiedenen Endomorphismus $f : X \to X$ mit Entropie $h(f) = \log(\gamma)$ gilt dann:*

(a) *Ist $\#\,\mathrm{Fix}(f^n)$ periodisch, dann folgt $h(f) = 0$, und wächst $\#\,\mathrm{Fix}(f^n)$ exponentiell, dann folgt $h(f) > 0$.*

(b) *Der Körper, den die Zahl γ erzeugt, ist in dem normalen Abschluss eines maximalen total reellen Unterkörpers von $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ enthalten oder wir können ihn in einen einbetten.*

Wir geben zunächst unseren Ansatz für die Entropiebetrachtungen an. Wir haben bereits erwähnt, dass wir unsere Kenntnisse über die analytischen Eigenwerte λ_i eines Endomorphismus $f : X \to X$ einer einfachen abelschen Varietät X zur Berechnung der Entropie $h(f)$ mittels der Formel

$$h(f) = \max_{0 \le j \le \dim X} \log(\rho(f^* : H^{j,j}(X) \to H^{j,j}(X)))$$

nutzen wollen, wobei ρ für den Spektralradius steht. Dies tun wir wie folgt:

Da das Bild eines von Null verschiedenen Endomorphismus $f : X \to X$ nicht Null sein kann und eine abelsche Untervarietät von X darstellt, muss f surjektiv und demnach eine Isogenie sein. Folglich ist die analytische Darstellung $\rho_a(f)$ ein Isomorphismus und alle analytischen Eigenwerte sind ungleich Null. Aus diesen Eigenwerten können wir diejenigen von f^* auf $H^*(X, \mathbb{C})$ gewinnen und auf den Spektralradius ρ schließen. Die Eigenwerte von f^* auf $H^{j,j}(X)$ sind nämlich das Produkt $2j$ paarweise verschiedener rationaler Eigenwerte und der Spektralradius ρ entspricht dem maximalen Betrag dieser Produkte. (Seien $\mu_1, \dots, \mu_{2g}$ die rationalen Eigenwerte. Mit verschieden meinen wir, dass keiner dieser Eigenwerte doppelt in einem Produkt auftritt, wobei $\mu_i = \mu_j$ für $i \neq j$ nicht ausgeschlossen ist.)

Mit diesen Überlegungen beantworten wir nun die erste Leitfrage dieses Kapitels und beweisen damit Teil (a) des obigen Satzes.

Korollar 3.1.2. *Sei X eine einfache abelsche Varietät.*

(a) *Habe X reelle oder komplexe Multiplikation und sei f ein von Null verschiedener Endomorphismus auf X. Dann folgt:*
Falls f Absolutbetrag 1 hat, dann hat f Entropie Null, und sonst ist f von positiver Entropie.

(b) *Habe X total definite Quaternionenmultiplikation $\left(\frac{\alpha,\beta}{F}\right)$ und sei $f = a+bi+cj+dij$ ein von Null verschiedener Endomorphismus auf X. Dann folgt:*
Falls $|a + \sqrt{b^2\alpha + c^2\beta - d^2\alpha\beta}| = 1$ gegeben ist, dann hat f Entropie Null, und sonst ist f von positiver Entropie.

(c) *Gelte* $\dim X = 2$*, habe* X *total indefinite Quaternionenmultiplikation* $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathbb{Q}}\right)$ *und sei* $f = a + bi + cj + dij$ *ein von Null verschiedener Endomorphismus auf* X*. Dann folgt:*
Falls $|a + \sqrt{b^2\alpha + c^2\beta - d^2\alpha\beta}| = 1$ *gegeben ist, dann hat* f *Entropie Null, und sonst ist* f *von positiver Entropie.*

Beweis. Unter Berücksichtigung des Satzes 2.2.2 und des Satzes 2.2.7 und unter der Annahme $|f| = 1$ bzw. $|a + \sqrt{b^2\alpha + c^2\beta - d^2\alpha\beta}| = 1$ folgt, dass alle analytischen Eigenwerte vom Betrag 1 sind und f somit Entropie Null hat.

Gehen wir von $|f| \neq 1$ bzw. $|a+\sqrt{b^2\alpha + c^2\beta - d^2\alpha\beta}| \neq 1$ aus, dann sagen uns dieselben Sätze, dass mindestens ein analytischer Eigenwert betraglich größer als 1 ist, sodass f positive Entropie hat. □

Teil (b) des Satzes 3.1.1 beweisen wir nun in zwei Schritten, einmal für einfache abelsche Varietäten mit reeller, komplexer und total definiter Quaternionenmultiplikation und anschließend für abelsche Flächen mit total indefiniter Quaternionenmultiplikation.

Satz 3.1.3. *Sei* X *eine einfache* g*-dimensionale abelsche Varietät mit reeller, total definiter Quaternionen- oder komplexer Multiplikation und sei* f *ein von Null verschiedener Endomorphismus von Entropie* $\log(\gamma)$*. Sei* K *der von den analytischen Eigenwerten von* f *erzeugte Körper. Dann liegt* γ *in dem maximalen total reellen Unterkörper* L *von* K*.*

Genauer gesagt ist L *in dem normalen Abschluss des maximalen total reellen Unterkörpers von* $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ *enthalten.*

Beweis. Die Entropie eines Endomorphismus f auf X können wir wiederum durch

$$\max_{1\leq j\leq g} \log \rho(f^* : H^{j,j}(X) \to H^{j,j}(X)) = \log(\gamma)$$

berechnen, wobei ρ für den Spektralradius von f^* steht. Zudem wissen wir bereits, dass die Eigenwerte von f^* auf $H^{j,j}(X)$ das Produkt $2j$ paarweise verschiedener rationaler Eigenwerte sind. (Seien $\mu_1, \ldots, \mu_{2g}$ die rationalen Eigenwerte. Mit verschieden meinen wir wie oben, dass keiner dieser Eigenwerte doppelt in einem Produkt auftritt, wobei $\mu_i = \mu_j$ für $i \neq j$ nicht ausgeschlossen ist.)

Nach den Beweisen des Satzes 2.2.9, des Satzes 2.2.11 und des Satzes 2.2.13 wissen wir, dass entweder alle Eigenwerte λ_i reell oder alle komplex sind.

Hat X reelle Multiplikation, dann folgt unsere Aussage direkt, da alle Eigenwerte als Nullstellen des Minimalpolynoms von f reellwertig sind.

Nehmen wir an, dass X total definite Quaternionen- oder komplexe Multiplikation hat. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_i$ alle analytischen Eigenwerte vom Betrag größer als 1. Dann haben wir

$$\gamma = |\lambda_1|^2 \cdot \ldots \cdot |\lambda_i|^2.$$

Da alle λ_i in einem CM-Körper liegen, der unter komplexer Konjugation abgeschlossen ist, sind alle Produkte $\lambda_i \cdot \overline{\lambda_i} = |\lambda_i|^2$ in dessen maximalem total reellen Zahlkörper enthalten. Im Fall komplexer Multiplikation ist die Aussage damit gezeigt. Wenn X total definite Quaternionenmultiplikation in $\left(\frac{\alpha,\beta}{F}\right)$ hat, dann wissen wir durch den Beweis des Satzes 2.2.13, dass alle λ_i in dem normalen Abschluss des CM-Körpers $F(\sqrt{t})$ liegen, der wiederum ein CM-Körper ist. Folglich liegen alle $|\lambda_i|^2$ im normalen Abschluss von F. □

Im Fall reeller und komplexer Multiplikation ist klar, was der maximale total reelle Unterkörper von $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ ist. Dass dieser im Fall total definiter Quaternionenmultiplikation $\left(\frac{\alpha,\beta}{F}\right)$ dem Grundkörper F entspricht, legen wir in der folgenden Bemerkung dar:

Bemerkung 3.1.4. Wenn X eine einfache abelsche Varietät mit total definiter Quaternionenmultiplikation in $B = \left(\frac{\alpha,\beta}{F}\right)$ ist, dann ist F dessen maximaler total reeller Unterkörper. Denn falls eine reell-quadratische Erweiterung K von F existiert, die in B liegt, dann definiert K einen Zerfällungskörper für B. Aber die Existenz eines solchen Körpers K steht im Widerspruch zur totalen Definitheit von B.

Wir komplettieren Satz 3.1.1 und kommen zum Fall einer einfachen abelschen Fläche mit total indefiniter Quaternionenmultiplikation.

Satz 3.1.5. *Sei X eine einfache abelsche Fläche mit total indefiniter Quaternionenmultiplikation $B = \left(\frac{\alpha,\beta}{\mathbb{Q}}\right)$. Sei $f = a+bi+cj+dij$ mit $a,b,c,d \in \mathbb{Q}$ ein von Null verschiedener Endomorphismus mit Entropie $\log(\gamma)$. Dann ist γ entweder in $\mathbb{Q}$ oder in einem reell-quadratischen Zahlkörper enthalten, den wir in B einbetten können.*

Beweis. Seien $\lambda_1, \overline{\lambda}_1, \lambda_2, \overline{\lambda}_2$ die rationalen Eigenwerte des Endomorphismus f. Dann ist γ der maximale Betrag der Produkte aus diesen vier Eigenwerten, wobei kein Produkt einen Eigenwert doppelt enthalten darf. Für den Fall, dass alle Eigenwerte betraglich 1 sind, folgt $\gamma = 1$. Im Beweis des Satzes 2.2.4 haben wir gesehen, dass die Situation $|\lambda_1| > 1$ und $|\lambda_2| = 1$ nicht auftreten kann. Es bleiben also folgende Fälle zu betrachten:

- Gilt $|\lambda_1| > 1$ und $|\lambda_2| > 1$, dann folgt $\lambda_1 \cdot \overline{\lambda}_1 \cdot \lambda_2 \cdot \overline{\lambda}_2 \in \mathbb{Z}$, da dieser Wert genau dem konstanten Term des rationalen charakteristischen Polynoms von f entspricht, das ganzzahlig ist.

- Gelte $|\lambda_1| > 1$ und $|\lambda_2| < 1$ und sei λ_1 echt komplex. Nach dem Beweis des Satzes 2.2.4 gilt für $t_i = a \pm \sqrt{b^2\alpha + c^2\beta - d^2\alpha\beta}$ einerseits $t_1 \in \{\lambda_1, \overline{\lambda}_1\}$ und andererseits $t_2 \in \{\lambda_2, \overline{\lambda}_2\}$. Ist λ_1 nun komplex, dann müssten λ_1 und λ_2 betraglich gleich sein. Wir kommen zu einem Widerspruch, dieser Fall kann nicht auftreten.

- Gelte $|\lambda_1| > 1$ und $|\lambda_2| < 1$ und sei λ_1 reell. Wiederum nach dem Beweis des Satzes 2.2.4 entspricht λ_1 nun dem betraglich größeren Wert von $a \pm \sqrt{b^2\alpha + c^2\beta - d^2\alpha\beta}$. Wir gehen von $a + \sqrt{b^2\alpha + c^2\beta - d^2\alpha\beta}$ aus, für den anderen Wert können wir analog argumentieren. Folglich gilt

$$\gamma = (a + \sqrt{b^2\alpha + c^2\beta - d^2\alpha\beta})^2 = a^2 + 2a\sqrt{b^2\alpha + c^2\beta - d^2\alpha\beta} + b^2\alpha + c^2\beta - d^2\alpha\beta$$

  und γ ist demnach in dem Zahlkörper $K := \mathbb{Q}(\sqrt{b^2\alpha + c^2\beta - d^2\alpha\beta})$ enthalten. Um zu zeigen, dass K in B liegt, weisen wir mit Bezug auf Lemma 1.1.7 nach, dass K ein Zerfällungskörper für B ist. Dafür zeigen wir, dass die Quaternionenalgebra $B \otimes_{\mathbb{Q}} K = \left(\frac{\alpha,\beta}{K}\right)$ Nullteiler hat.

  Das Element $(1 \otimes \sqrt{b^2\alpha + c^2\beta - d^2\alpha\beta}) + ((bi + cj + dij) \otimes 1)$ ist genau ein Nullteiler wegen

$$(1\otimes\sqrt{b^2\alpha + c^2\beta - d^2\alpha\beta}+(bi+cj+dij)\otimes 1)(1\otimes\sqrt{b^2\alpha + c^2\beta - d^2\alpha\beta}-(bi+cj+dij)\otimes 1)$$

$$= 1 \otimes (b^2\alpha + c^2\beta - d^2\alpha\beta) - (b^2\alpha + c^2\beta - d^2\alpha\beta) \otimes 1 = 0.$$

Gemäß Lemma 1.1.7 können wir den reell-quadratischen Zahlkörper K also in B einbetten.

$\square$

In folgender Bemerkung weisen wir nach, dass der Fall tatsächlich auftritt, in dem der Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{b^2\alpha + c^2\beta - d^2\alpha\beta})$ nicht direkt in B enthalten ist, aber darin eingebettet werden kann.

Bemerkung 3.1.6. Entspreche die Endomorphismenalgebra $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ einer einfachen abelschen Fläche X der total indefiniten Quaternionenalgebra $B = \left(\frac{2,3}{\mathbb{Q}}\right)$ mit $i^2 = \alpha = 2$ und $j^2 = \beta = 3$, die einen Schiefkörper darstellt. Der Endomorphismus $f = 1 + i$ hat die analytischen Eigenwerte $1 \pm \sqrt{2}$. Wir sind also genau im letzten Fall des Beweises des vorherigen Satzes, sodass $\gamma = (1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2}$ in dem reell-quadratischen Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ liegt, den wir mittels der Vorschrift

$$1 \mapsto 1 \quad \text{und} \quad \sqrt{2} \mapsto i$$

in B einbetten können.

3.2. Automorphismen und Salem-Zahlen – ein Spezialfall

In diesem Abschnitt fragen wir uns einerseits, ob die Entropie eines Endomorphismus der Logarithmus einer Salem-Zahl sein kann, und andererseits, welche positiven Entropiewerte Automorphismen haben können. Wir beenden dieses Kapitel mit einem besonderen Fall, dem ersten Beispiel eines Automorphismus einer höherdimensionalen einfachen abelschen Varietät, dessen Entropie der Logarithmus einer Salem-Zahl ist.

Da Salem-Zahlen nicht in total reellen Zahlkörpern liegen können, folgt mit Satz 3.1.3 direkt:

Korollar 3.2.1. *Sei X eine einfache abelsche Varietät mit reeller, total definiter Quaternionen- oder komplexer Multiplikation und sei f ein von Null verschiedener Endomorphismus von Entropie* $\log(\gamma)$*. Dann ist γ keine Salem-Zahl.*

Dass auf diesen einfachen abelschen Varietäten aber dennoch Automorphismen mit positiver Entropie existieren können, sagt uns folgendes Korollar:

Korollar 3.2.2. *Es existieren einfache abelsche Varietäten mit reeller, total definiter Quaternionen- und komplexer Multiplikation, auf denen es Automorphismen von positiver Entropie gibt.*

Beweis. Sei F ein total reeller Zahlkörper vom Grad r oder ein CM-Körper vom Grad $2r$. Dann enthält jede maximale Ordnung $\mathcal{O}$ in F nach dem Dirichletschen Einheitensatz (siehe [Ne, S. 39 – 44]) genau $r-1$ Fundamentaleinheiten $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{r-1}$, sodass sich jede Einheit ϵ als

$$\epsilon = \zeta \cdot \epsilon_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot \epsilon_{r-1}^{m_{r-1}}$$

schreiben lässt, wobei ζ eine Einheitswurzel und m_i ganze Zahlen sind. Für $r > 1$ existieren demnach bereits Einheiten vom Betrag größer als 1, die zu Automorphismen positiver Entropie führen, wie zum Beispiel $1 + \sqrt{2}$ in dem reell quadratischen Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. □

Auch für den Flächenfall mit total indefiniter Quaternionenmultiplikation finden wir Automorphismen von positiver Entropie:

Bemerkung 3.2.3. In Bemerkung 3.1.6 zeigen wir, dass auf einer einfachen abelschen Fläche mit total indefiniter Quaternionenmultiplikation in $\left(\frac{2,3}{\mathbb{Q}}\right)$ der Automorphismus $1 + i$ mit positiver Entropie $\log(3 + 2\sqrt{2})$ existiert. Die zu $1 + i$ inverse Abbildung ist $-1 + i$, da $i^2 = 2$ gilt.

Um Missverständnissen vorzubeugen, weisen wir nochmal kurz darauf hin, dass Salem-Zahlen von einigen Autoren anders definiert werden, als wir es tun.

Bemerkung 3.2.4. Nach unserer Definition einer Salem-Zahl, die die ursprüngliche von Salem [S, Seite 26] ist, entspricht der Wert $\gamma = 3 + 2\sqrt{2}$ der vorherigen Bemerkung keiner Salem-Zahl. McMullen und Reschke verzichten bei der Definition einer Salem-Zahl auf die Bedingung, dass eine zu dieser Salem-Zahl konjugierte Nullstelle vom Betrag 1 existiert. Daher würden sie bei $\gamma = 3 + 2\sqrt{2}$ von einer Salem-Zahl sprechen.

Wir schließen diese Arbeit mit dem Nachweis, dass die Entropie eines Automorphismus einer einfachen abelschen Varietät von Dimension 4 dem Logarithmus einer Salem-Zahl entsprechen kann. Dies war für Dimension > 2 bisher nicht bekannt.

Satz 3.2.5. *(Theorem 3, Teil 2). Es existieren einfache abelsche Varietäten mit total indefiniter Quaternionenmultiplikation, auf denen Automorphismen mit positiver Entropie* $\log(\gamma)$ *existieren, sodass* γ *eine Salem-Zahl ist.*

Beweis. Die Endomorphismen aus Satz 2.2.17 und Bemerkung 2.2.18 sind Automorphismen, da sie invers zur Quaternionenkonjugation ihrer selbst sind. Die Eigenwerte sind jeweils Nullstellen eines Salem-Polynoms. Bekanntermaßen entspricht die Entropie dem Logarithmus des maximalen Betrages der Produkte paarweise verschiedener rationaler Eigenwerte vom Betrag größer 1. In unserer Situation ist der einzige analytische Eigenwert vom Betrag größer 1 eine Salem-Zahl λ, sodass die Entropie der Logarithmus dessen Quadrates ist, da wir neben λ auch $\overline{\lambda} = \lambda$ als rationalen Eigenwert haben. Dass das Quadrat einer Salem-Zahl wieder eine Salem-Zahl ist, vervollständigt den Beweis. □

Literaturverzeichnis

[AKM] Adler, R., Konheim, A., McAndrew, M.: Topological entropy. Trans. Amer. Math. Soc. 114, 309–319 (1965)

[Al1] Albert, A.A.: A solution of the principal problem in the theory of Riemann matrices. Ann. of Math. 35, 500 – 515 (1934)

[Al2] Albert, A.A.: On the construction of Riemann matrices II. Ann. of Math. 36, 376 – 394 (1935)

[AA] Alvarado, M., Auffarth, R.: Fixed points of endomorphisms on complex tori. arXiv:1705.09681 [math.AG]

[BPV] Barth, W., Hulek, K., Peters, C., Van de Ven, A.: Compact complex surfaces. Springer, 2004.

[BH] Bauer, T., Herrig, T.: Fixed-points of endomorphisms on two-dimensional complex tori. J. Algebra 458, 352–363 (2016)

[BDGPS] Bertin, M.J., Decomps-Guilloux, A., Grandet-Hugot, M., Pathiaux-Delefosse, M., Schreiber, J.P.: Pisot and Salem numbers. Birkhäuser, 1992.

[BL] Birkenhake, C., Lange, H.: Fixed-point free automorphisms of abelian varieties. Geom. Dedicata 51, No.3, 201–213 (1994)

[CAV] Birkenhake, C., Lange, H.: Complex abelian varieties. Springer, 2004.

[CT] Birkenhake, C., Lange, H.: Complex Tori. Progress in Mathematics Nr. 177, Birkhäuser, 1999.

[BGL] Birkenhake, C., Gonzaléz-Aguilera, V., Lange, H.: Automorphisms of 3-dimensional abelian varieties. Contemporary Mathematics, 240, 25 – 47 (1999)

[Bo] Bosch, S.: Algebra. Springer, 2009.

[Coh] Cohen, H.: Number Theory. Volume I: Tools and Diophantine Equations. Springer, 2007.

[Da] Daileda, R.: Algebraic integers on the unit circle. J. Number Theory 118(2), S. 189–191 (2006)

[DKL] De Fernex, T., Küronya, A. , Lazarsfeld, R.: Higher cohomology of divisors on a projective variety. Math. Ann. 337, No. 2, 443–455 (2007)

[EEL] Ein, L., Erman, D., Lazarsfeld, R.: Asymptotics of random Betti tables. J. Reine

Angew. Math. 702, 55–75 (2015)

[EL] Ein, L., Lazarsfeld, R.: Asymptotic syzygies of algebraic varieties. Invent. Math. 190, No. 3, 603–646 (2012)

[ELMNP] Ein, L., Lazarsfeld, R., Mustaţă, M., Nakamaye, M., Popa, M.: Asymptotic invariants of base loci. Ann. Inst. Fourier 56, No. 6, 1701–1734 (2006)

[Fr] Friedland, S.: Entropy of polynomial and rational maps. Ann. Math. 133, 359–368 (1991)

[GS] Gille, P., Szamuely, T.: Central Simple Algebras and Galois Cohomology. Cambridge University Press, 2006.

[GH] Griffiths, Ph., Harris, J.: Principles of algebraic geometry. John Wiley & Sons, New York, 1978

[Gr] Gromov, M.: On the entropy of holomorphic maps. L'Enseign. Math. 49, 217–235 (2003), Manuscript (1977)

[Gu] Guedji, V.: Propriétés ergodiques des applications rationelles. In: Quelques aspects des systèmes dynamiques polynomiaux, Panoramas et synthèses vol. 30, 97 –202 (2010)

[He] Herrig, T.: Fixed points and entropy of endomorphisms on simple abelian varieties. arXiv:1706.05908 [math.AG]

[McM1] McMullen, C.: K3 surfaces, entropy and glue. J. reine angew. Math. 658, 1–25 (2011)

[McM2] McMullen, C.: Dynamics on K3 surfaces: Salem numbers and Siegel disks. J. reine angew. Math 545, 201–233 (2002)

[Ne] Neukirch, J.: Algebraic number theory. Springer, 1999.

[Res1] Reschke, P.: Salem Numbers and Automorphisms of Complex Surfaces. Math. Res. Lett. 19(2), 475–482 (2012)

[Res2] Reschke, P.: Salem numbers and automorphisms of abelian surfaces. Osaka J. Math. 54, 1–15 (2017)

[Rin] Ringler, A.: Fixed points of smooth varieties with Kodaira dimension zero. arXiv:0708.3587 [math.AG]

[Ru] Ruppert, W.: Two-dimensional complex tori with multiplication by $\sqrt{d}$. Arch. Math. 72, 278–281 (1999)

[S] Salem, R.: Algebraic numbers and Fourier Analysis. Heath, 1963.

[Sh] Shimura, G.: On analytic families of polarized abelian varieties and automorphic functions. Ann. of Math. 78, 149 – 193 (1963)

[SS] Shub, M., Sullivan, D.: A remark on the Lefschetz fixed point formula for differentiable maps. Topology 13, 189–191 (1974)

[Vo] Voight, J.: Quaternion algebras. Preprint.
https://math.dartmouth.edu/~jvoight/quat-book.pdf

[Vi] Vignéras, M.-F.: Arithmétique des algèbres de quaternions. Lecture Notes in Math. 800, Springer, 1980.

[Yo] Yomdin, Y.: Volume growth and entropy. Israel J. Math. 57, 285–300 (1987)

Anhang

English abstract

Considering a holomorphic map $f : X \to X$ on a complex variety X, it is natural to ask for its number of fixed points $\#\operatorname{Fix}(f)$. This number may vary a lot between different endomorphisms, a simple comparison of the number of fixed points will not provide any regularity. Therefore we choose an approach common in Algebraic Geometry and adopt an asymptotic perspective. This is motivated by papers on base loci [ELMNP], growth of higher cohomology [DKL], syzygies [EL] and Betti numbers [EEL]. Concerning the question of fixed points, adopting an asymptotic perspective means to consider large iterates f^n of a given map.

For an endomorphism $f : X \to X$ of a complex torus X – and further of an abelian variety – our first guiding question becomes:

What is the asymptotic behaviour of the fixed-points function

$$n \mapsto \#\operatorname{Fix}(f^n)$$

where $f^n = f \circ \cdots \circ f$ denotes the n-th iterate of f?

This question is of interest in analytic (e.g. [SS]) as well as algebro-geometric contexts. In the latter it was already treated for endomorphisms on abelian varieties [Rin]. However, the offered result relevant in our context (Theorem 1.2 in [Rin]) is unfortunately erroneous.[1] The approach of that paper is to study the pullback of a line bundle.

We choose another one. Birkenhake and Lange investigate fixed-point free automorphisms [BL] and together with Gonzaléz-Aguilera they classify automorphisms on 3-dimensional abelian varieties [BGL]. One important tool in their papers is the Holomorphic Lefschetz Fixed-Point Formula which is the starting point of our investigation. For an endomorphism $f : X \to X$ of a complex torus X whose analytic representation is the matrix $\rho_a(f)$ this formula says

$$\#\operatorname{Fix}(f) = |\mathbb{1} - \rho_a(f)|^2 .$$

Thanks to this equation we will first conclude that the behaviour of the fixed-points function $n \mapsto \#\operatorname{Fix}(f^n)$ is essentially determined by the eigenvalues of the matrix $\rho_a(f)$. As a result the question will be whether an eigenvalue of absolute value greater, smaller or equal to 1 exists and how it influences the behaviour of the fixed-points function. Eigenvalues of absolute value 1 will play a special role, because they will lead to two

[1] Considering a multiplication map on an elliptic curve, one sees that the formula stated in that theorem cannot hold. The origin of the problem lies in the proof of [Rin, Lemma 3.3].

different types of fixed-point behaviour. The first main result of this thesis answers the first guiding question completely for two-dimensional complex tori and states the occurring eigenvalues as well. We have published it as part of the paper [BH].

Theorem 1. *Let X be a two-dimensional complex torus and let $f : X \to X$ be a non-zero endomorphism. Then the fixed-points function $n \mapsto \#\operatorname{Fix}(f^n)$ has one of the following three behaviours:*

(V1) *It grows exponentially in n, i.e., there are real constants $A, B > 1$ and an integer N such that for all $n \geqslant N$,*
$$A^n \leqslant \#\operatorname{Fix}(f^n) \leqslant B^n .$$
In this case both eigenvalues of f (i.e., of its analytic representation $\rho_a(f) \in M_2(\mathbb{C})$) are of absolute value $\neq 1$.

(V2) *It is a periodic function. In this case the non-zero eigenvalues of f are roots of unity, and they are contained in the set of k-th roots of unity where $k \in \{1, \ldots, 6, 8, 10, 12\}$.*

(V3) *It is of the form*
$$\#\operatorname{Fix}(f^n) = \begin{cases} 0, & \text{if } n \equiv 0 \pmod r \\ h(n), & \text{otherwise,} \end{cases}$$
where $r \geqslant 2$ is an integer and h is an exponentially growing function. In this case one of the eigenvalues of f is of absolute value > 1 and the other is a root of unity.

All three behaviours occur already in the projective case, i.e., on abelian surfaces.

Alvarado and Auffarth refer to this theorem in [AA] and consider the case that an eigenvalue of absolute value 1 is not a root of unity. Using the logarithmic Mahler measure, they show that this case leads to an exponential fixed-points growth and that the fixed-points function in the higher dimensional case is again of one of the three types of our theorem. They provide no information about the eigenvalues which really occur for endomorphims of simple abelian varieties. This leads to our second guiding question:

How can we determine the exact behaviour of the fixed-points function $n \mapsto \#\operatorname{Fix}(f^n)$ for a given endomorphism $f : X \to X$ of a simple abelian variety X?

According to Albert's classification one knows the possible types of endomorphism algebras $\operatorname{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ of a simple abelian variety X (see section 5.5 in [CAV]) and hence f gets an exact form depending on $\operatorname{End}_{\mathbb{Q}}(X)$. Via a second fixed-point formula for abelian varieties which is also used in the papers [BL] and [BGL] one can directly compute the fixed-point number of f. But considering iterates of the function f this formula gives no information about the asymptotic behaviour of the fixed-points function $n \mapsto \#\operatorname{Fix}(f^n)$. Hence knowledge about the eigenvalues of the matrix $\rho_a(f)$ is necessary. Since one cannot state the concrete form of the matrix $\rho_a(f)$, our idea is to compare the equation of the fixed-point formula for abelian varieties with the one of the Holomorphic Lefschetz Formula to get information about these eigenvalues dependent on the concrete form of f. We will investigate the possible types of the endomorphism algebra $\operatorname{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ one after another.

In the surface case we answer the second guiding question completely, this is also part of the paper [BH]. In higher dimensions we give an answer for simple abelian varieties with real, complex and totally definite quaternion multiplication which one can find in the paper [He] I recently submitted for publication. Therein one finds the first examples of endomorphisms that exhibit eigenvalues of absolute value 1 which are not roots of unity. They occur in dimension 4 in the case of totally indefinite quaternion multiplication. All this is stated in the second main result of this thesis:

Theorem 2 (Satz 2.2.2 and Satz 2.2.7). (1) *Let X be a simple abelian variety and $f : X \to X$ a non-zero endomorphism. Then for f we have:*

(a) *Suppose that X has real multiplication, i.e., $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ is a totally real number field. Then $\#\,\mathrm{Fix}(f^n)$ is periodic if $f = \pm\,\mathrm{id}_X$, and it grows exponentially otherwise.*

(b) *Suppose that X has definite quaternion multiplication, i.e., $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ is of the form $F + iF + jF + ijF$ with $i^2 = \alpha \in F \setminus \{0\}$, $j^2 = \beta \in F \setminus \{0\}$ and $ij = -ji$, where F is a totally real number field and $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X) \otimes_\sigma \mathbb{R} \simeq \mathbb{H}$ holds for every embedding $\sigma : F \hookrightarrow \mathbb{R}$. Write $f \in \mathrm{End}(X)$ as $f = a + bi + cj + dij$ with $a, b, c, d \in F$. Then $\#\,\mathrm{Fix}(f^n)$ is periodic if $|a + \sqrt{b^2\alpha + c^2\beta - d^2\alpha\beta}| = 1$, and it grows exponentially otherwise.*

(c) *Suppose that X has complex multiplication, i.e., $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ is a CM-field. Then f has periodic fixed-point behaviour if $|f| = 1$, and it has exponential fixed-points growth otherwise.*

(d) *Suppose $\dim X = 2$ and that X has totally indefinite quaternion multiplication, i.e., $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ is of the form $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q} + j\mathbb{Q} + ij\mathbb{Q}$, where $i^2 = \alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $j^2 = \beta \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ with $ij = -ji$ and $\alpha > 0$, $\alpha \geqslant \beta$. Write $f \in \mathrm{End}(X)$ as $f = a + bi + cj + dij$ with $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Then $\#\,\mathrm{Fix}(f^n)$ is periodic if $|a + \sqrt{b^2\alpha + c^2\beta - d^2\alpha\beta}| = 1$, and it grows exponentially otherwise.*

Moreover, if $\#\,\mathrm{Fix}(f^n)$ is periodic, then all analytic eigenvalues are roots of unity, and if $\#\,\mathrm{Fix}(f^n)$ grows exponentially, then they are all of absolute value $\neq 1$.

(2) *There exist simple abelian varieties with totally indefinite quaternion multiplication possessing endomorphisms with analytic eigenvalues of absolute value 1 which are not roots of unity.*

This insight into the analytic eigenvalues of a given endomorphism $f : X \to X$ of a simple abelian variety X suggests to ask for the entropy of f. The entropy $h(f)$ of f is defined dependent on the open covers of X (cf. [AKM]), but due to Friedland [Fr], Gromov [Gr] and Yomdin [Yo] one can compute it via

$$\max_{0 \le j \le \dim X} \log(\rho(f^* : H^{j,j}(X) \to H^{j,j}(X))),$$

where ρ is the spectral radius. Beginning with the eigenvalues of the matrix $\rho_a(f)$, one can determine the eigenvalues of f^*, this will be our approach.

In recent years the investigation of entropies on algebraic surfaces has attracted a lot of attention, and it is a leading question to ask whether an automorphism is of zero or positive entropy. Results concerning K3 surfaces (([McM1] and [McM2]), two-dimensional complex tori [Res1] and abelian surfaces [Res2] show that the entropy is the logarithm of a Salem number in the case of positive entropy.

We adopt the common research questions, such that our third guiding question becomes:

How can we decide whether a given endomorphism $f : X \to X$ of a simple abelian variety is of zero or positive entropy $h(f)$? If $h(f) = \log(\gamma) > 0$ holds, what can we say about the algebraic structure of γ?

We consider the same types of endomorphism algebras as in Theorem 2 and point out that there is a close connection between the fixed-point behaviour and the entropy of a function. We prove that only in the case of totally indefinite quaternion multiplication the entropy can be the logarithm of a Salem number, we exhibit the first examples of this special case. Starting from the special type of endomorphism algebra, we show in the remaining cases that the entropy is always the logarithm of a number contained in a certain totally real number field. So the third main result of this thesis is:

Theorem 3 (Satz 3.1.1 and Satz 3.2.5). (1) *Let X be a simple abelian variety with real, complex or totally definite quaternion multiplication. Or let X be a simple abelian surface X with totally indefinite quaternion multiplication. For a given non-zero endomorphism $f : X \to X$ with entropy $h(f) = \log(\gamma)$ we have:*

(a) *If $\#\operatorname{Fix}(f^n)$ is periodic, then $h(f) = 0$ holds, and if $\#\operatorname{Fix}(f^n)$ grows exponentially, then $h(f) > 0$ follows.*

(b) *The field generated by the number γ is contained in the normal closure of a maximal totally real subfield of $\operatorname{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ or it can be embedded in it.*

(2) *There exist simple abelian varieties with totally indefinite quaternion multiplication possessing automorphisms of positive entropy $\log(\gamma)$, such that γ is a Salem number.*

Our results concerning the fixed-points behaviour of an endomorphism lead to results concerning its entropy. Besides the theorems above we investigate the fixed-points behaviour of automorphisms of K3 surfaces. In contrast to complex tori no fixed-points formulae are available, but instead there exist results about the entropy. Therefore we proceed in the inverse direction and use results about the entropy to treat the question of fixed-point behaviour. In this topic we adopt the first two guiding questions and show that the fixed-point function $n \mapsto \#\operatorname{Fix}(f^n)$ of an automorphism $f : X \to X$ of a K3 surface is either periodic or grows at least exponentially. We prove this dependent on the eigenvalues of f^*. Besides K3 surfaces we also answer these questions for endomorphisms on Kummer varieties by extending the Holomorphic Lefschetz Fixed-Point Formula to these objects.

The structure of this thesis is as follows: In the first chapter we present the basics needed for chapter 2 and 3 which contain our research contribution. We start chapter 2 with developing Theorem 1. In the following part we prove Theorem 2 in two steps, first we show it in the two-dimensional case and secondly we treat the higher dimensional situation. We proceed in this way because we have first proven it in the two-dimensional case as part of our paper [BH] and then in my paper [He] I treated the higher dimensional case which requires further methods. We complete the second chapter with the investigation of the fixed-point function of Kummer varieties and automorphisms of K3 surfaces. In chapter 3 we apply our knowledge about the eigenvalues of endomorphisms of simple abelian varieties to determine the entropy of these functions.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei allen bedanken, die mich auf dem Weg zu dieser Arbeit begleitet haben, sei es mental, fachlich oder einfach in anregendem Miteinander:

Prof. Dr. Thomas Bauer für die gewissenhafte Betreuung, die interessanten und lehrreichen Diskussionen und die Ratschläge zu dieser Arbeit und darüber hinaus,

Prof. Dr. Herbert Lange für die kurzfristige Zusage, das Zweitgutachten zu übernehmen, und für das Erstellen davon,

Carsten Bornträger und Lukas Sawatzki für die Durchsicht einzelner Manuskriptversionen und die damit verbundenen Anregungen,

und natürlich meiner Familie und meinen Freunden für eure mentale Unterstützung und die schöne Zeit.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass dies mein erster Versuch einer Promotion ist.

Ich versichere hiermit, dass ich die vorliegende Dissertation

Fixpunkte von Endomorphismen komplexer Tori

selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, nicht andere als die in ihr angegebenen Quellen oder Hilfsmittel benutzt, alle vollständig oder sinngemäß übernommenen Zitate als solche gekennzeichnet sowie die Dissertation in der vorliegenden oder einer ähnlichen Form noch bei keiner in- oder ausländischen Hochschule anlässlich eines Promotionsgesuchs oder zu anderen Prüfungen eingereicht habe.

Thorsten Herrig

Marburg, den 04.09.2017

Die Seite 67 (Lebenslauf) enthält persönliche Daten. Sie ist deshalb nicht Bestandteil der Online-Veröffentlichung.