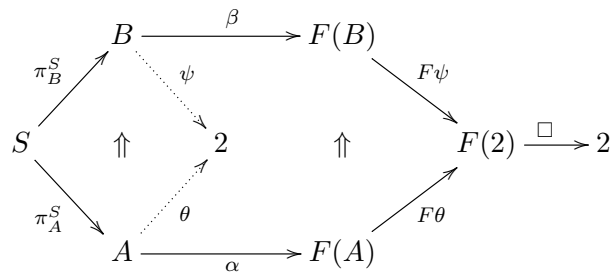


Coalgebraische Similarität



Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

dem Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg

Hochschulkenziffer 1180

vorgelegt von

Dipl.-Inform. **Mehdi Zarrad**

geboren in

Ksar Hellal, Tunesien

Marburg, 2017

Erstgutachter: Prof. Dr. H. Peter Gumm

Zweitgutachter: Prof. Dr. Jiří Adámek

Einreichungstermin: 22.05.2017

Prüfungstermin: 30.08.2017

Inhaltsverzeichnis

Abstract	6
Einleitung und Übersicht	8
1 Grundlagen	10
1.1 Einleitung und Literatur	10
1.2 Kategorientheoretische Grundlagen	10
1.2.1 Kategorien	10
1.2.2 Limites und Colimites	11
1.2.3 Spezielle Klassen von Morphismen	13
1.2.4 Spezielle Pullbacks	14
1.2.5 Stabilität via Pullbacks und Pushouts	16
1.2.6 Funktoren	16
1.2.7 Natürliche Transformationen	17
1.3 Mengenfunktoren	18
1.3.1 Unterfunktoren	20
1.3.2 Funktor-Beschränkung	20
1.3.3 Funktor-Zerlegung	21
1.3.4 Trennbarkeit	21
1.4 Mengentheoretische Grundlagen	21
1.4.1 Relationale Begriffe	21
1.4.2 Difunktionalität	22
2 Kategorie der F-Coalgebren	25
2.1 Einleitung und Literatur	25
2.2 F -Coalgebren, Homomorphismen, Untercoalgebren	25
2.3 Bisimulationen	28
2.4 Kongruenzen	29
2.5 Epis und Monos in Set_F	32
2.6 Coalgebraische Modallogik	33
2.7 Korrektheit und Vollständigkeit der coalgebraischen Modallogik	36
3 Erhaltung spezieller Limites	37
3.1 Einleitung und Literatur	37
3.2 Schwache Pullbackerhaltung	37
3.3 Gesunde Funktoren	38
3.4 Urbilderhaltung	39
3.5 Urbild-Bereinigung	40

3.6	Schwache Kernpaarerhaltung	45
3.7	Fazit	46
4	Similarität via Predicate Liftings und Boxen	47
4.1	Einleitung und Literatur	47
4.2	Gerichtete Diagramme	47
4.3	Starke Simulationen via Boxen	49
4.4	Monotonie	51
4.5	Homomorphismen via Boxen	55
4.6	Kongruenzen und Trennbarkeit	57
4.7	Fazit	59
5	Similarität via Relation Lifting	61
5.1	Einleitung und Literatur	61
5.2	Relation Lifting und L -Simulation	61
5.3	Lax-Extension und Kongruenzen	66
5.4	Eindeutigkeit der Lax-Extensions	68
5.5	L_{\square} -Simulationen	68
5.6	Fazit	72
6	Transitivität und Difunktionalität der Bisimilarität	73
6.1	Einleitung und Literatur	73
6.2	Einfachheit, Extensionalität und die Beobachtungsäquivalenz	74
6.3	Die Restriktion der Bisimulationen	76
6.4	Schwache Kernpaarerhaltung	78
6.5	Summe der regulären (Epi/Mono)-Morphismen in Set_F	82
6.6	Kongruenz-Verbände	83
6.7	Transitivität der Bisimilarität	84
6.8	Difunktionalität der Bisimilarität	86
6.9	Difunktionale Hülle der L -Similarität	87
6.10	Fazit	88
7	Erweiterte Bisimilarität	89
7.1	Einleitung und Literatur	89
7.2	A, B -Nachbarschaftsfunktor A^{B^-}	89
7.3	Monotoner Nachbarschaftsfunktor $\mathcal{M}^{A,B}(-)$	91
7.4	Urbilder erhaltender Nachbarschaftsfunktor $\mathcal{S}^{A,B}(-)$	97
7.5	Bisimilarität bei trennbaren Funktoren	102
7.6	Schwache Pullbackerhaltung von $\mathcal{S}^{A,B}$	105
	Ausblick	115
	Summary	116
	Literaturverzeichnis	118

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	126
Index	127
Danksagung	131
Erklärung	132

Abstract

This thesis deals with the study of several notions of similarity between coalgebras. We discuss derived coalgebraic structures, especially simulations congruences. Therefore, we make use of certain functor properties such as weak pulback preservation, weak kernel preservation and preimage preservation. In this work we found equivalent statements for weak kernel preservation and the preimage preservation.

We show that every set functor contains a largest subfunctor preserving preimages. We define a functor modification, which we call preimage correction (Bereinigung). The resulting functor preserves preimages. The idea was inspired by the transformation given by [Trn69, Bar93], whose result is a sound functor. The resulting functor has the advantage, that its subfunctors are precisely the subfunctors which preserve preimages. Especially we present the correction of the general neighborhoodfunctor as a relevant example.

Furthermore we examine the subsets of $F2$, which we call boxes, give rise to modal operators for the Pattinson/Schröder logic of coalgebras. We show that the monotonic separable boxes provide a correct and complete modal logic. In order to lift the concept of λ -similarity categorically, we replace λ -simulations by strong \square -simulations that have the advantages that proofs are diagrammatical and monotonicity does not need to be assumed. We examine the role of monotonicity by showing equivalent statements for monotonicity and separability.

We find an example that the 2-congruences between two coalgebras contrary to congruences do not in general form a lattice. Assuming that the functor preserves preimages, or that a family of monotonic separable boxes $(\square_i)_{i \in I}$ exists, the 2-congruences form a complete lattice. The supremum is defined as the difunctional closure of their union.

We summarize the equivalences between the properties of relation liftings L and L -simulations. A canonical translation of boxes $(\square_i)_{i \in I}$ to relation liftings $L_{(\square_i)_{i \in I}}$ is introduced, thereby certain correspondences hold.

Consequently, we obtain a canonical characterization of the lax extensions, preserving diagonals. The similarity of such relations is precisely the observation equivalence, as it is already known from [MV12]. A negative result is shown by an example that the lax extensions, which preserve diagonals, are not unique. They agree on difunctional relations.

Since the difunctionality of L -Simulations have played a role in completeness, we examine this concept. We first exhibit conditions under which bisimulations restrict to subcoalgebras without requiring the type functor to preserve preimages. From this we derive a series of equivalent formulations to weak kernel pair preservation.

Further, we show that if the transitive, resp. difunctional hull of bisimilarity covers observational equivalence then bisimilarity and observational equivalence agree. If bisi-

ABSTRACT

milarity is transitive for all F -coalgebras, then it agrees with observational equivalence. Regarding difunctionality, we receive an undesirable result, namely that difunctionality is not enough for equality between bisimilarity and observational equivalence, as it has been shown in a counterexample. Assuming preimage preservation for the type functor, we prove that transitivity and difunctionality of bisimilarity are equivalent.

We provide an equivalent statement for up-to-bisimilarity by the general neighborhood-functor. Quite surprisingly the preimage correction of the general neighborhoodfunctor provides a functor, that preserves weak pullbacks. Finally, we show how we receive monotonic separable boxes $(\square_i)_{i \in I}$ from coalgebras with finite patterns. The similarity and the observational equivalence coincide in this case.

Einleitung und Übersicht

In den 1990er Jahren hat Jan Rutten eine einheitliche Theorie für zustandsbasierte Systeme entwickelt. J. Rutten demonstrierte in [Rut00] anhand vieler Beispiele, dass sich zustandsbasierte Systeme als Coalgebren eines Set-Endofunktors auffassen lassen. Zuvor hatte M. Marvan in [Mar85] die Operationen der universellen Algebra dualisiert. Einige Jahre später haben E. de Vink und J. Rutten in [dVR99] stochastische Transitionssysteme als Coalgebren dargestellt. B. Jacobs hat die Objektklassen der objektorientierten Programmiersprachen in [Jac96] und [Jac98] als Coalgebren modelliert. In [HJ97] wurden Beweismethoden wie z. B. die Induktion coalgebraisch beschrieben.

In den zustandsbasierten Systemen setzt eine Bisimulation Zustände in Relation, die anhand ihres Verhaltens nicht unterscheidbar sind. Auf Grundlage dessen führten P. Aczel und N. Mendler in dem Artikel [AM89] den Begriff der Bisimulationen zwischen Coalgebren ein. Analog zu Kongruenzen in der universellen Algebra wurde der Begriff „Kongruenz“ in [AM89] eingeführt. Zustände, die in einer Kongruenz liegen, nennt man beobachtungsäquivalent. In vielen Arbeiten (wie in [Rut00, Mos99]) stimmen die beiden Begriffe „Bisimilarität“ und „Beobachtungsäquivalenz“ überein, da schwache Pullbackerhaltung vorausgesetzt wird. Der Zusammenhang zwischen Erhaltungseigenschaften von Funktoren und Coalgebren wurden in [GS05] näher untersucht. Es wurde gezeigt, dass Kompositionen von Bisimulationen genau dann Bisimulationen sind, wenn der Funktor schwache Pullbacks erhält. In Kapitel 1 und 2 wiederholen wir zum großen Teil die notwendigen Grundlagen der Kategorientheorie und die Kategorie der Coalgebren.

Bei den Kripke-Strukturen werden Eigenschaften durch modallogische Formeln beschrieben. Allgemein wurde die Modallogik in [Pat03] coalgebraisch eingeführt. L. Schröder [Sch05] hat die coalgebraische Modallogik weiter fortgeführt. Aus dem engen Zusammenhang zwischen Bisimilarität und logischer Äquivalenz werden wir die Rolle der schwachen Pullbackerhaltung und der Trennbarkeit in Kapitel 3 genauer untersuchen. Bei ([Trn69, Bar93]) wurde eine Abänderung auf Funktoren definiert, so dass der resultierende Funktor leere Schnitte erhält. Inspiriert davon definieren wir eine Modifikation, die zu einem Funktor führt, welcher Urbilder erhält.

Aus dem Zusammenhang zwischen Bisimilarität und logischer Äquivalenz haben D. Gorín und L. Schröder in [GS13] einen Zwischenbegriff λ -Simulation eingeführt, wobei λ ein Predicate Lifting ist. Dieser Begriff wurde mengentheoretisch definiert. Außerdem wurde angenommen, dass Predicate Liftings monoton sind. In Kapitel 4 führen wir die starken \square -Simulationen ein. Die neue Definition liefert bei vielen Beweisen diagrammatische Vorteile. Unter Annahme, dass \square monoton ist, wird gezeigt, dass die beiden Begriffe miteinander übereinstimmen. Die Resultate dieses Kapitels erschienen bereits zu großen Teilen in [GZ14]. Der Zusammenhang der starken \square -Simulationen mit Bisimulationen und Kongruenzen wird dort erläutert.

Die alternative Definition von Bisimulationen bei C. Hermida und B. Jacobs zieht jede Relation R in $A \times B$ zu einer bestimmten Relation $\bar{F}R \subseteq F(A) \times F(B)$ hoch, bekannt als Barr-Extension von R ([HJ98]). Bei früheren Artikeln [Trn77, CKW90, AT90] wurde \bar{F} als *Rel*-Funktorkonstruktion angesehen. Solche Liftings hat A. Thijs in [Thi96] allgemeiner untersucht. Die Relation Liftings führten zu dem Begriff L -Similarität. Solche Similaritäten wurden in anderen Arbeiten ([HJ03, Bal00, MV12, Enq13, Mar, Lev11]) weiterverwendet. In Kapitel 5 werden wir bestimmte Analogien zwischen \square - und L -Similaritäten verdeutlichen.

Viele Resultate von Rutten wurden in [Gum99, IH03, Gum01] auf beliebige Funktoren erweitert. Bei ihnen wurde eine neue coalgebraische Konstruktion der terminalen Coalgebra entdeckt. Die terminalen Coalgebren erfüllen das Coinduktionsprinzip $x \sim y \Rightarrow x = y$. Dieses Prinzip gilt bereits allgemeiner auf jeder extensionalen Coalgebra. Der Nachteil der Bisimilarität $\sim_{\mathcal{A}}$ im Gegensatz zu der Beobachtungsäquivalenz $\nabla_{\mathcal{A}}$ liegt darin, dass die Bisimilarität $\sim_{\mathcal{A}}$ im Allgemeinen auf beliebigen Coalgebren nicht transitiv ist. Deshalb erweisen sich die Bisimulationen im Vergleich zu Kongruenzen als nachteilig, da die logische Äquivalenz transitiv ist. Weil die Transitivität zwischen verschiedenen Mengen undefiniert ist, verwenden wir die Difunktionalität [Rig48] als mögliche Verallgemeinerung der Transitivität. Wir werden in Kapitel 6 den Zusammenhang zwischen Bisimulationen und 2-Kongruenzen bezüglich der Difunktionalität untersuchen. Dieses Kapitel basiert hauptsächlich auf dem Artikel [GZ16]. Für bestimmte Beweise werden wir auf die Urbilderhaltung verzichten, indem wir eine neue Annahme zwischen Bisimulationen und Untercoalgebren voraussetzen.

In Kapitel 7 werden wir uns auf trennbare Funktoren beschränken. Diese Funktoren sind genau die Unterfunktoren der verallgemeinerten Nachbarschaftsfunktoren [Sch05]. Wir führen den Begriff up-to-Bisimilarität bezüglich der oberen Funktoren ein. Dieses „up-to“-Konzept erscheint bereits in vielen Artikeln [Len99, Bar04, Luo06, RBR13, BPPR15]. Zuerst wird die schwache Kernpaarerhaltung des allgemeinen (monotonen) Nachbarschaftsfunktors A^{B^-} gezeigt. Der übliche Nachbarschaftsfunktorkonstruktion wurde bereits in [HKP07] untersucht. Dann werden wir eine äquivalente Aussage für die up-to-Bisimilarität liefern. Zusätzlich wird ein positives Ergebnis gezeigt, nämlich dass der Funktor, der von der Urbild-Bereinigung des allgemeinen Nachbarschaftsfunktors resultiert, schwache Pullbacks erhält. Zum Schluss zeigen wir, wie man über $\tilde{F}_{<\omega}$ -Coalgebren, d.h. Coalgebren mit endlichen Mustern, monotone trennbare Boxen $(\square_i)_{i \in I}$ gewinnen kann. Die Coerzeugung der größten Simulation bezüglich der Boxen $(\square_i)_{i \in I}$ auf jeder $\tilde{F}_{<\omega}$ -Coalgebra \mathcal{A} liefert in diesem Fall die größte Kongruenz in \mathcal{A} .

1 Grundlagen

1.1 Einleitung und Literatur

Mit Hilfe der Kategorientheorie wurde die Strukturtheorie der Coalgebren „dual“ zur universellen Algebra entwickelt. Dabei ließen sich viele Begriffe in der universellen Coalgebra präziser beschreiben. Wir werden die notwendigen kategorientheoretischen Grundlagen präsentieren. Die Definitionen und die Schreibweisen basieren hauptsächlich auf dem Lehrbuch [AHS90], sowie auf der Literatur [Lan71, Bor94a, Bor94b, Awo06]. Im Spezialfall wird die Kategorie *Set* beschrieben. Wir werden relevante Eigenschaften von *Set*-Endofunktoren aus den Artikeln [Trn69, Kou71, Trn71a, Trn71b] verwenden.

1.2 Kategorientheoretische Grundlagen

1.2.1 Kategorien

Definition 1.2.1. Eine *Kategorie* \mathbb{C} besteht aus

- einer Klasse O von \mathbb{C} -Objekten.
- einer Klasse Hom von Morphismen. Jeder Morphismus hat genau ein Start- und ein Zielobjekt, genannt *Domain* und *Codomain*, bezeichnet mit dom und $codom$. Ist A das Startobjekt von einem Morphismus f und B das Zielobjekt von f , so schreibt man $f : A \rightarrow B$. Wir bezeichnen mit $Hom(A, B)$ die Klasse aller Morphismen von A nach B .
- einem Morphismus $id_A : A \rightarrow A$ für jedes Objekt A .
- einer Operation \circ , die je zwei Morphismen $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ einen Morphismus $g \circ f : A \rightarrow C$ zuordnet.

Die Kategorie erfüllt folgende Bedingungen:

- Die Komposition \circ ist assoziativ.
- Für jeden Morphismus $f : A \rightarrow B$ gilt: $f \circ id_A = f = id_B \circ f$.

Beispiel 1.2.2 (Kategorie der Mengen). Die Kategorie *Set* ist die Kategorie, deren Objekte Mengen und deren Morphismen Abbildungen sind.

Beispiel 1.2.3 (Kategorie Rel). Die Kategorie *Rel* ist die Kategorie, deren Objekte Mengen und deren Morphismen zweistellige Relationen sind. Die Komposition der Relationen ist das Relationsprodukt.

Beispiel 1.2.4 (Kategorie der topologischen Räume). Die Kategorie Top ist die Kategorie, deren Objekte topologische Räume und deren Morphismen stetige Abbildungen sind.

Beispiel 1.2.5 (Kategorie der Halbordnungen). Die Kategorie $Poset$ ist die Kategorie, deren Objekte Halbordnungen und deren Morphismen monotone Abbildungen sind.

Ein *Diagramm* D besteht aus einer Menge der Objekte $Obj(D)$ und einer Menge der Morphismen, deren Domains und Codomains in $Obj(D)$ enthalten sind.

Definition 1.2.6. Für jede Kategorie $\mathbb{C} = (Obj, Hom)$ ist $\mathbb{C}^{op} = (Obj^{op}, Hom^{op})$ die *duale Kategorie*, wobei $Obj = Obj^{op}$ und $Hom^{op}(A, B) = Hom(B, A)$.

Zu jeder Aussage über Objekte und Morphismen einer Kategorie kann man die *duale Aussage* bilden, indem man Domain und Codomain jedes Morphismus vertauscht und alle Kompositionen umkehrt. Das *Dualitätsprinzip* besagt, dass jede Aussage in einer Kategorie \mathbb{C} genau dann gilt, wenn ihre duale Aussage in der dualen Kategorie \mathbb{C}^{op} auch gilt.

Eine Familie von Morphismen mit gleicher Domain heißt *Quelle* oder *Source*. Der duale Begriff dazu ist der *Sink*.

1.2.2 Limites und Colimites

Definition 1.2.7. Sei D ein Diagramm, bestehend aus Objekten $(O_i)_{i \in I}$, Morphismen $(f_k)_{k \in K}$ und einem Objekt $L \in Obj(\mathbb{C})$. Ein *Kegel* ist eine Source $(l_i : L \rightarrow O_i)_{i \in I}$, so dass für jeden Morphismus $f_k : O_i \rightarrow O_j$ mit $k \in K$ und $i, j \in I$ gilt: $f_k \circ l_i = l_j$.

Ein *Cokegel* lässt sich dual zum Kegel definieren.

Ein Kegel $(l_i : L \rightarrow O_i)_{i \in I}$ eines Diagramms D heißt *Limes*, wenn es für jeden Kegel $(k_i : K \rightarrow O_i)_{i \in I}$ einen eindeutigen Morphismus $q : K \rightarrow L$ gibt, so dass $l_i \circ q = k_i$ für jedes $i \in I$ gilt. Ist q nicht eindeutig, heißt der Kegel *schwacher Limes*. Ein *Colimes* lässt sich dual zum Limes definieren.

Der Limes des leeren Diagramms besteht nur aus einem Objekt, das *Terminal* heißt. Der duale Colimes heißt *Initial*. Limites und Colimites sind bis auf Isomorphie eindeutig.

Spezielle Limites (Produkt, Equalizer, Pullback) und Colimites (Summe, Coequalizer, Pushout)

Definition 1.2.8. Das *Produkt* einer Familie von Objekten $(A_i)_{i \in I}$ ist der Limes des Diagramms, welches nur aus A_i 's besteht. Man schreibt den Limes als

$$(\pi_i : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_i)_{i \in I}.$$

Die π_i 's heißen *Projektionen*. Der Limes des folgenden Diagramms

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

heißt *Equalizer* von f und g . Der Limes eines Sinks $(f_i)_{i \in I}$ heißt *Pullback*:

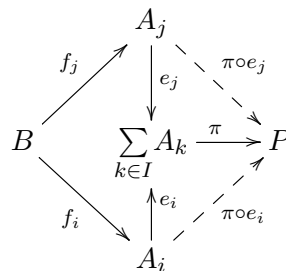
$$A_i \xrightarrow{f_i} B.$$

Coprodukt (Summe), *Coequalizer* und *Pushout* sind dual zu Produkt, Equalizer, Pullback definiert. Eine Kategorie heißt *(co)vollständig*, wenn *(Co)Limites* beliebiger Diagramme existieren. Man schreibt die Summe einer Familie von Objekten $(A_i)_{i \in I}$ als

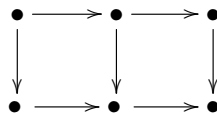
$$(e_i : A_i \rightarrow \sum_{i \in I} A_i).$$

Die e_i 's heißen *Einbettungen*. Bei einem gegebenen Sink $(q_i : A_i \rightarrow Q)_{i \in I}$, so schreiben wir den induzierten Morphismus aus der Summe $\sum A_i \rightarrow Q$ als $[(q_i)_{i \in I}]$.

Existieren in einer Kategorie beliebige (Co)Produkte und (Co)Equalizer, dann ist die Kategorie (co)vollständig. Aus Summen und Coequalizer gewinnt man Pushouts, indem man die Summe $(\sum_{i \in I} A_i, e_i : A_i \rightarrow \sum_{i \in I} A_i)$ und dann den Coequalizer $\pi : \sum_{i \in I} A_i \rightarrow P$ der Familie $(e_i \circ f_i)_{i \in I}$ bildet, wodurch man insgesamt den Pushout $(\pi \circ e_i)_{i \in I}$ von $(f_i)_{i \in I}$ erhält. Dual gewinnt man Pullbacks aus Equalizern und Produkten.



(Pullbacks) Pushouts können wie folgt aneinandergereiht werden:



Sind die inneren Quadrate (Pullbacks) Pushouts, dann ist auch das äußere Rechteck ein (Pullback) Pushout.

Beliebige Limites existieren folgendermaßen in *Set*:

- Das Produkt in *Set* ist das kartesische Produkt.

- Die Summe der Mengen ist deren disjunkte Vereinigung mit den Injektionen.
- Der Equalizer zweier Abbildungen $f, g : A \rightarrow B$ ist die Inklusion $\iota_E^A : E \hookrightarrow A$ mit $E := \{x \in A \mid f(x) = g(x)\}$.
- Der Pullback zweier Abbildungen $f : A_0 \rightarrow B$ und $g : A_1 \rightarrow B$ ist

$$(P, \pi_0 : P \rightarrow A_0, \pi_1 : P \rightarrow A_1),$$

wobei

$$P := \{(x, y) \in A_0 \times A_1 \mid f(x) = g(y)\}$$

und π_0, π_1 die Projektionen sind.

- Der Coequalizer zweier Abbildungen $f, g : A \rightarrow B$ ist die Faktorprojektion

$$\pi_\theta : B \rightarrow B/\theta,$$

wobei θ die kleinste Äquivalenzrelation ist, die $\{(f(x), g(x)) \mid x \in A\}$ umfasst. Die Faktorprojektion π_θ ordnet jedem Element x seine Äquivalenzklasse $[x]_\theta$ zu.

1.2.3 Spezielle Klassen von Morphismen

Definition 1.2.9. Ein Morphismus $f : A \rightarrow B$ heißt

- *mono*, falls für je zwei Morphismen g und h mit $f \circ g = f \circ h$ folgt: $g = h$.
- *regulär mono*, wenn f ein Equalizer von zwei Morphismen ist.
- *split mono*, wenn ein Morphismus $l : B \rightarrow A$ mit $l \circ f = id_A$ existiert. l heißt *Linksinverse* von f .
- *iso*, wenn f ein Inverses inv hat, d. h. $inv \circ f = id_A$ und $f \circ inv = id_B$.

Die Begriffe *Epi*, *regulär Epi*, *split Epi* sind dual definiert.

Epi und Mono kann man durch Pushouts bzw. Pullbacks charakterisieren. Ein Morphismus $f : A \rightarrow B$ ist genau dann epi, wenn das Diagramm (f, f, id_B, id_B) ein Pushout ist. Analog ist f genau dann mono, wenn (id_A, id_A, f, f) ein Pullback ist. Monos mit nicht-leeren Domains sind in *Set* split mono. Das Auswahlaxiom besagt, dass jeder Epi split epi in *Set* ist. Jede Kategorie mit Summen erfüllt das folgende Lemma:

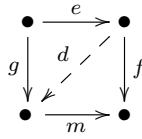
Lemma 1.2.10. Für jeden Morphismus $f : A \rightarrow B$ ist $[f, id_B] : A + B \rightarrow B$ split epi.

Definition 1.2.11. Eine Quelle $(f_i : A \rightarrow B)_{i \in I}$ heißt *Monosource*, wenn für je zwei Morphismen g und h mit $f_i \circ g = f_i \circ h$ für jedes $i \in I$ folgt: $g = h$.

Ein Sink $(f_i : A_i \rightarrow B)_{i \in I}$ heißt *Episink*, wenn für je zwei Morphismen g und h mit $g \circ f_i = h \circ f_i$ für jedes $i \in I$ folgt: $g = h$.

Limites sind Monosources und Colimites sind Episinks.

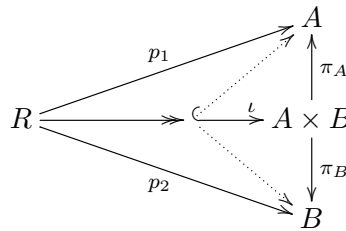
(E,M)-Quadrat [IH03] Seien E, M zwei Klassen von Morphismen, $e \in E$ und $m \in M$. Seien f und g zwei Morphismen mit $f \circ e = m \circ g$. Dann heißt das folgende Quadrat (E,M) -Quadrat:



Ein Morphismus d heißt *Diagonale*, wenn $d \circ e = g$ und $m \circ d = f$ gelten.
 Ein Morphismus e ist stark epi, wenn jedes $(\{e\}, Mono)$ -Quadrat genau eine Diagonale besitzt. Die Klassifikation von Epis und Monos liefert für jeden Morphismus f :

$$\begin{aligned}
 f \text{ split epi} &\Rightarrow f \text{ regulär epi} \Rightarrow f \text{ stark epi} \Rightarrow f \text{ epi} \\
 f \text{ split mono} &\Rightarrow f \text{ regulär mono} \Rightarrow f \text{ mono}.
 \end{aligned}$$

Faktorisierung Ein Paar (e, m) von Morphismen, wobei $e \in E$ und $m \in M$, heißt (E,M) -Faktorisierung oder (E,M) -Zerlegung von f , falls $m \circ e = f$ gilt.
 In jeder vollständigen Kategorie hat jeder Morphismus eine $(Epi, Mono)$ -Faktorisierung [AHS90], und daher jede Quelle eine $(Epi, Monosource)$ -Faktorisierung.



1.2.4 Spezielle Pullbacks

Definition 1.2.12. Der Pullback $(P, p_1 : P \rightarrow A, p_2 : P \rightarrow B)$ zweier Morphismen $f : A \rightarrow C$ und $g : B \rightarrow C$ heißt

- *Kern*, wenn $f = g$ gilt,
- *Urbild*, wenn f oder g regulär mono sind,
- *Schnitt*, wenn f und g regulär mono sind,
- *Epi-Pullback*, wenn p_1, p_2, f und g epi sind.

Das folgende Lemma zeigt den Zusammenhang zwischen Coequalizern und Kernen.

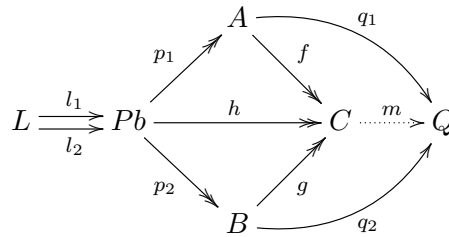
Lemma 1.2.13 ([AHS90]). Sei (P, p_1, p_2) Kern eines regulären Epis f . Dann ist f der Coequalizer von p_1 und p_2 .

Da *Set* vollständig ist und jeder Epi in *Set* nach dem Auswahlaxiom split epi, also auch regulär epi ist, kann man aus dem folgenden Lemma schließen, dass jeder Epi-Pullback in *Set* ein Pushout ist. Das Lemma wurde bereits in [CKP93] bewiesen. Wir liefern den Beweis noch einmal mittels der kategorientheoretischen Grundlagen dieser Arbeit.

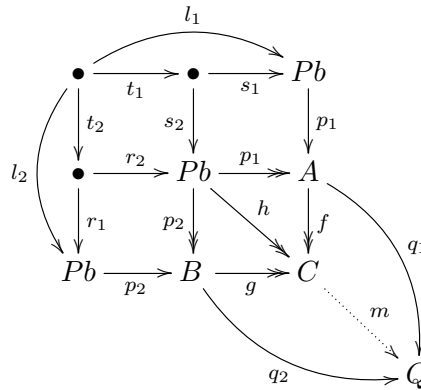
Lemma 1.2.14 ([CKP93]). *In jeder vollständigen Kategorie, in der jeder Epi regulär ist, ist jeder Epi-Pullback ein Pushout.*

Beweis. Sei (Pb, p_1, p_2) Pullback von f und g . Wir wollen nun zeigen, dass (C, f, g) ein Pushout von p_1 und p_2 ist. Seien $q_1: A \rightarrow Q$ und $q_2: B \rightarrow Q$ mit $q_1 \circ p_1 = q_2 \circ p_2$. Gesucht ist eine Abbildung $m: C \rightarrow Q$ mit $m \circ f = q_1$ und $m \circ g = q_2$.

Sei $h := f \circ p_1 = g \circ p_2$. Bilde den Kern (L, l_1, l_2) von h . Laut dem Lemma 1.2.13 ist h der Coequalizer von l_1 und l_2 .



Die Kompositionen $f \circ p_1$ und $g \circ p_2$ gestatten folgendermaßen eine Zusammensetzung des Pullbacks von $f \circ p_1$ und $g \circ p_2$:



Wähle $q := q_1 \circ p_1 = q_2 \circ p_2$. Wegen

$$\begin{aligned}
 q \circ l_1 &= q_1 \circ p_1 \circ s_1 \circ t_1 \\
 &= q_1 \circ p_1 \circ r_2 \circ t_2, \text{ da die oberen Quadrate kommutieren} \\
 &= q_2 \circ p_2 \circ r_2 \circ t_2 \\
 &= q_2 \circ p_2 \circ r_1 \circ t_2, \text{ da die linken Quadrate kommutieren} \\
 &= q \circ l_2
 \end{aligned}$$

folgt, dass es genau einen Morphismus m mit $m \circ h = q$ gibt. Weil p_1 und p_2 epi sind,

folgt $f \circ m = q_1$ und $g \circ m = q_2$.

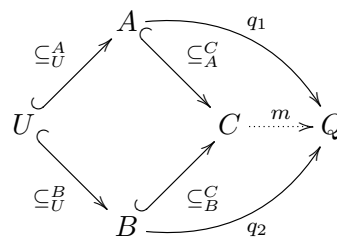
□

Das folgende Lemma liefert eine analoge Aussage für alle Schnitte in *Set*.

Lemma 1.2.15. *In Set ist jeder nicht-leere Schnitt ein schwacher Pushout.*

Beweis. Betrachte den folgenden Schnitt. Die Menge Q ist offensichtlich nicht leer, weil U nicht leer ist. Somit gibt es ein $y_0 \in Q$. Wähle dann

$$m(x) := \begin{cases} q_1(x) & \text{wenn } x \in A \\ q_2(x) & \text{wenn } x \in B \\ y_0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

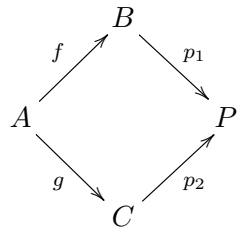


□

1.2.5 Stabilität via Pullbacks und Pushouts

Bestimmte Eigenschaften von Morphismen bleiben durch Pushouts und Pullbacks erhalten.

Satz 1.2.16. [AHS90] *Sei das folgende Pushout-Diagramm gegeben:*



Ist f epi (regulär epi, split mono), so auch p_2 .

1.2.6 Funktoren

Definition 1.2.17. Seien \mathbb{C}, \mathbb{A} zwei Kategorien. Ein (kovarianter) *Funktor* F von \mathbb{A} nach \mathbb{C} ordnet jedem Objekt X aus \mathbb{A} ein Objekt FX aus \mathbb{C} und jedem Morphismus $f : X \rightarrow Y$ aus \mathbb{A} einen Morphismus $Ff : FX \rightarrow FY$ aus \mathbb{C} zu, wobei gelten muss:

- Für alle X aus \mathbb{A} gilt: $Fid_X = id_{FX}$.

- Für je zwei Morphismen f und g mit $\text{dom}(f) = \text{codom}(g)$ gilt: $F(f \circ g) = Ff \circ Fg$.

Ein Funktor von einer Kategorie \mathbb{C} zu sich selbst, nennt man \mathbb{C} -Endofunktor. Ein Funktor F heißt *kontravariant*, falls $F(f \circ g) = Fg \circ Ff$. Dies bedeutet, dass F als Funktor von \mathbb{A} zu der dualen Kategorie \mathbb{C}^{op} aufgefasst werden kann.

Beispiel 1.2.18 (Kontravarianter Potenzfunktor). Der kontravariante Potenzfunktor $\kappa^- : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$ bildet jede Menge A auf die Menge aller Abbildungen von A nach κ ab, und jede Abbildung $f : A \rightarrow B$ auf die Abbildung $\kappa^f : \kappa^B \rightarrow \kappa^A$ mit $\kappa^f(\sigma) = \sigma \circ f$.

Aus (kovarianten) \mathbb{C} -Endofunktoren F und G lassen sich weitere Funktoren folgendermaßen konstruieren:

- Die Komposition $G \circ F$

$$\begin{aligned} (G \circ F)A &:= G(FA) \\ (G \circ F)f &:= G(Ff) \end{aligned}$$

- Die Summe $G + F$ (wenn binäre Summen in \mathbb{C} existieren)

$$\begin{aligned} (G + F)A &:= GA + FA \\ (G + F)f &:= [e_{GB} \circ Ff, e_{FB} \circ Gf] \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{Ff} & FB \\ \downarrow e_{FA} & & \downarrow e_{FB} \\ FA + GA & \xrightarrow{[e_{FB} \circ Ff, e_{GB} \circ Gf]} & FB + GB \\ \uparrow e_{GA} & & \uparrow e_{GB} \\ GA & \xrightarrow{Gf} & GB \end{array}$$

- Das Produkt $G \times F$ (wenn binäre Produkte in \mathbb{C} existieren) ist analog zur Summe definiert.

- Die Komposition $G \circ F$ zweier kontravarianter Funktoren liefert einen kovarianten Funktor.

Beispiel 1.2.19 (Nachbarschaftsfunktor). Der Nachbarschaftsfunktor $2^{2^-} : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$ ist die Komposition des kontravarianten Funktors 2^- mit sich selbst. Er bildet jede Menge A auf die Menge $\{U \mid U \subseteq \mathbb{P}(A)\}$ aller Teilmengensysteme von A ab, und jede Abbildung $f : A \rightarrow B$ auf $2^{2^f} : 2^{2^A} \rightarrow 2^{2^B}$ mit $2^{2^f}(\sigma) := \{V \subseteq Y \mid f^{-1}[V] \in \sigma\}$. Allgemeiner kann man den A, B -Nachbarschaftsfunktor A^{B^-} als $A^- \circ B^-$ definieren.

1.2.7 Natürliche Transformationen

Definition 1.2.20. Seien $F, G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{E}$ Funktoren. Dann heißt $\eta : F \xrightarrow{\bullet} G$ von F nach G eine *natürliche Transformation*, wenn η jedes Objekt $X \in \mathbb{C}$ auf einen \mathbb{E} -Morphismus $\eta_X : FX \rightarrow GX$ abbildet und für jeden \mathbb{C} -Morphismus $f : X \rightarrow Y$ gilt:

$$Gf \circ \eta_X = \eta_Y \circ Ff.$$

$$\begin{array}{ccc}
 FX & \xrightarrow{Ff} & FY \\
 \eta_X \downarrow & & \downarrow \eta_Y \\
 GX & \xrightarrow{Gf} & GY
 \end{array}$$

Im Fall $\mathbb{E} = \text{Set}$ ist η *injektiv*, wenn η_X für jede Menge X injektiv ist. In diesem Fall heißt F *Unterfunctor* von G . Wenn η iso ist, dann heißen F und G *isomorph*.

Man nennt η *kartesisch in f* , wenn das obige Diagramm ein Pullback ist. η heißt *sub-kartesische natürliche Transformation*, wenn η in allen injektiven Abbildungen kartesisch ist.

1.3 Mengenfunktoren

Set-Endofunktoren beschreiben typischerweise Mengenkonstruktionen, wie Listen, Arrays, Bäume usw. . In dieser Arbeit befassen wir uns hauptsächlich mit Set-Endofunktoren, daher nennen wir diese Funktoren auch *Mengenfunktoren*. F beschreibt den Typ der Konstruktion. Jedes Element aus FX wird aus Elementen aus X konstruiert. Solche Elemente nennt man *X -Muster*. Ein X -Muster p aus FX ist endlich, wenn eine endliche Teilmenge $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$ existiert, so dass $p \in F(\{x_1, \dots, x_n\})$. In diesem Fall schreibt man p als $p(x_1, \dots, x_n)$.

Definition 1.3.1. Für jede Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ersetzt die Anwendung

$$Ff : F(X) \rightarrow F(Y)$$

jedes x_i in X -Muster $p \in FX$ durch $f(x_i)$. In diesem Fall gilt:

$$(Ff)p(x_1, \dots, x_n) = p(f(x_1), \dots, f(x_n)).$$

Beispiel 1.3.2 (Potenzmengen-Funktor). Der Potenzmengen-Funktor $\mathbb{P}(-)$ bildet jede Menge A auf ihre Potenzmenge $\mathbb{P}A$ ab, und jede Abbildung $f : A \rightarrow B$ auf

$$\mathbb{P}f : \mathbb{P}A \rightarrow \mathbb{P}B$$

mit $\mathbb{P}f(M) := f[M]$.

Beispiel 1.3.3. Der Funktor $(-)^2 - (-) + 1$ bildet jede Menge A auf

$$A^2 - A + 1 := \{(x, y) \in A^2 \mid x \neq y\} \cup \{\perp\}$$

ab und jede Abbildung $f : A \rightarrow B$ auf $f^2 - f + 1$ mit

$$\begin{aligned} (f^2 - f + 1)(\perp) &:= \perp \\ (f^2 - f + 1)(x, y) &:= \begin{cases} (f(x), f(y)) & \text{falls } f(x) \neq f(y) \\ \perp & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Beispiel 1.3.4 ([Zmr01]). Der Funktor $\mathcal{B}(-) : \mathit{Set} \rightarrow \mathit{Set}$ bildet jede Menge A auf ihre Potenzmenge $\mathbb{P}A$ ab, und jede Abbildung $f : A \rightarrow B$ auf die Abbildung $\mathcal{B}f : \mathcal{B}A \rightarrow \mathcal{B}B$ mit

$$\mathcal{B}f(M) := \begin{cases} f[M] & \text{wenn } f|_M \text{ injektiv ist} \\ \emptyset & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $f|_M$ die *Restriktion* von f auf M ist, d.h. $f|_M = f \circ \subseteq_M^A$.

Beispiel 1.3.5 (Potenzfunktor oder Hom-Funktor). Der Potenzfunktor $-^C : \mathit{Set} \rightarrow \mathit{Set}$ bildet jede Menge A auf die Menge aller Abbildungen von C nach A , und jede Abbildung $f : A \rightarrow B$ auf die Abbildung $f^C : A^C \rightarrow B^C$ mit $f^C(\sigma) = f \circ \sigma$.

Beispiel 1.3.6. Der monotone Nachbarschaftsfunktor $\mathcal{M}(-)$ bildet jede Menge A auf die Menge $\{\sigma \in \mathbb{P}A \mid \sigma \text{ ist monoton}\}$ ab. Ein System σ ist monoton, wenn für alle $U \subseteq V \subseteq A$ gilt: $U \in \sigma \Rightarrow V \in \sigma$. Der monotone Nachbarschaftsfunktor ist auf den Abbildungen genauso wie der Nachbarschaftsfunktor definiert.

Beispiel 1.3.7 (Filter-Funktor). Der Filterfunktor $\mathcal{F}(-)$ bildet jede Menge A auf die Menge $\{\sigma \in \mathbb{P}A \mid \sigma \text{ ist ein Filter über } A\}$ ab. Ein *Filter* σ über A ist ein System aus $\mathbb{P}A$, das monoton und unter endlichen Schnitten abgeschlossen ist, d.h. für alle $U, V \in \sigma$ gilt $U \cap V \in \sigma$. Der Filterfunktor ist auf den Abbildungen genauso wie der Nachbarschaftsfunktor definiert.

Beispiel 1.3.8 ([GS01a]). Der Funktor $M^- : \mathit{Set} \rightarrow \mathit{Set}$ für ein kommutatives Monoid $(M, 0_M, +)$ bildet jede Menge A auf die Menge aller Abbildungen

$$M^A := \{\sigma : A \rightarrow M \mid \{a \in A \mid \sigma(a) \neq 0\} \text{ ist endlich}\}$$

ab, und jede Abbildung $f : A \rightarrow B$ auf die Abbildung $M^f : M^A \rightarrow M^B$ mit

$$M^f(\sigma)(y) := \sum_{f(x)=y} \sigma(x).$$

1.3.1 Unterfunktoren

Definition 1.3.9. Sind F und G zwei Mengenfunktoren, so heißt F *Unterfunktoren* von G , wenn eine injektive natürliche Transformation $\eta : F \xrightarrow{\bullet} G$ existiert. Wir nennen F *Teilfunktoren* von G , wenn für jede Menge X die Menge FX Teilmenge von GX ist.

Jeder Unterfunktoren liefert durch Faktorisierung einen Teilfunktoren. Umgekehrt sind Teilfunktoren im Allgemeinen keine Unterfunktoren. Als Beispiel stimmen der Potenzmengen-Funktoren \mathbb{P} und der Funktoren \mathcal{B} miteinander in Objekten überein, obwohl sie nicht isomorph sind. Wir werden die Teilfunktoren des konstanten Funktoren untersuchen.

Lemma 1.3.10 ([Kou71]). *Gegeben seien eine Menge X und ein Funktoren F . Gilt*

$$|FX| \lesssim |X|,$$

dann ist F konstant auf allen Kardinalitäten kleiner als $|X|$.

Beispiel 1.3.11. Jeder Teilfunktoren des konstanten Funktoren C_M ist ein konstanter Unterfunktoren des Funktoren C_M . Sei F ein Teilfunktoren von C_M . Für jede Menge X mit Kardinalität strikt größer als C_M gilt: $|FX| \leq C_M \lesssim |X|$. Unter Verwendung des vorherigen Lemmas folgt, dass F auf allen Kardinalitäten kleiner als $|X|$ konstant ist. Somit ist F konstant.

Analog kann man auch sehen, dass jeder Teilfunktoren des Identitätsfunktoren entweder der leere konstante Funktoren C_\emptyset oder er selbst ist.

1.3.2 Funktoren-Beschränkung

Gegeben sei eine Kardinalzahl κ . Die κ -*Beschränkung* eines Funktoren F ist als ein Unterfunktoren definiert ([Trn69]) durch:

$$F_{\leq \kappa} X := \bigcup_{U \subseteq X, |U| \leq \kappa} (F \subseteq_U^X)[FU].$$

Die *strikte κ -Beschränkung* $F_{< \kappa}$ ist analog definiert. F ist (*strikte*) κ -*beschränkt*, wenn $(F = F_{< \kappa}) F = F_{\leq \kappa}$. Der Funktoren F ist *beschränkt*, wenn eine Kardinalzahl κ existiert, so dass F κ -*beschränkt* ist. Wir nennen F *finitär*, wenn F strikt ω -beschränkt ist.

Beispiel 1.3.12 (Beschränkter Potenzmengen-Funktoren). Der Funktoren $\mathbb{P}_{\leq \kappa}$ bildet jede Menge A auf die Menge ihrer Teilmengen mit Kardinalität kleiner gleich κ ab, und wendet die Abbildungen genau wie \mathbb{P} an. Dieser Funktoren ist offensichtlich ein Unterfunktoren des Potenzmengen-Funktoren \mathbb{P} .

1.3.3 Funktor-Zerlegung

Jeder Mengenfunktor F ist die Summe von Funktoren ([Trn71a])

$$F = \bigoplus_{a \in F1} F_a,$$

wobei F_a als ein Unterfunktor von F durch $F_a X := (F!_X)^{-1}[\{a\}]$ definiert ist. Solche Funktoren nennt man *Komponenten* von F .

1.3.4 Trennbarkeit

Ein Funktor ist κ -trennbar, wenn für jede Menge X und für alle $u \neq v$ aus FX eine Abbildung $f : X \rightarrow \kappa$ existiert, so dass $Ff(u) \neq Ff(v)$. Der Potenzmengen-Funktor ist 2-trennbar, da für je zwei Mengen $U \neq V$ folgt, dass ein Element $u \in (U \setminus V) \cup (V \setminus U)$ existiert, also $\mathbb{P}\chi_{\{u\}}(U) \neq \mathbb{P}\chi_{\{u\}}(V)$.

Theorem 1.3.13 ([Sch05]). *F ist genau dann κ -trennbar, wenn F Unterfunktor vom Nachbarschaftsfunktor $F(\kappa)^{\kappa^-}$ ist.*

Wir werden jetzt Beispiele von Funktoren zeigen, die für jede Kardinalität κ nicht κ -trennbar sind.

Beispiel 1.3.14. Der Funktor \mathcal{B} ist für jede Kardinalität κ nicht κ -trennbar. Gegeben sei eine Menge X mit der Kardinalität 2^κ und ein Element $e \in X$. Für alle $f : X \rightarrow \kappa$ gilt: $(\mathcal{B}f)(X) = \emptyset = (\mathcal{B}f)(X \cup \{e\})$.

Beispiel 1.3.15. Der Funktor $\mathbb{P}\mathbb{P}(-)$ „erhält schwache Pullbacks“ (siehe Kapitel 3) und er ist für jede Kardinalität κ nicht κ -trennbar. Gegeben seien eine Menge X mit der Kardinalität 2^κ und zwei Mengensysteme $\sigma_1 := \mathbb{P}X$, $\sigma_2 := \mathbb{P}_{\leq \kappa} X$. Für alle $f : X \rightarrow \kappa$ gilt $(\mathbb{P}\mathbb{P}f)(\sigma_1) = (\mathbb{P}\mathbb{P}f)(\sigma_2)$.

1.4 Mengentheoretische Grundlagen

1.4.1 Relationale Begriffe

Die Umkehrrelation zu einer Relation $R \subseteq A \times B$ ist $R^- := \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$. Das Bild einer Teilmenge $U \subseteq X$ ist $R[U] := \{b \in B \mid \exists u \in U. (u, b) \in R\}$. Die Relation R ist *total*, wenn ihre Projektionen surjektiv sind.

Eine Relation $R \subseteq A \times A$ ist transitiv, wenn für alle $x, y, z \in A$ gilt:

$$(x, y), (y, z) \in R \implies (x, z) \in R.$$

Daraus folgt: R ist genau dann transitiv, wenn $R \circ R \subseteq R$, wobei \circ die relationale Komposition ist. Gegeben seien $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$ zwei Relationen, dann gilt:

$$R \circ S := \{(a, c) \mid \exists b \in B. aRb \wedge bSc\}.$$

Es gilt offensichtlich, dass $(R \circ S)^- = S^- \circ R^-$ ist.

Wir bezeichnen mit $R \bowtie S$ den Pullback von π_B^R und π_B^S . Dann ist $R \circ S$ das Bild der (Epi, Monosource)-Faktorisierung der Quelle $(R \bowtie S, \pi_A^{R \bowtie S}, \pi_C^{R \bowtie S})$:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & S & \longrightarrow & C \\
 & \nearrow^{\pi_S^{R \bowtie S}} & & \searrow & \\
 R \bowtie S & \xrightarrow{p} & R \circ S & & B \\
 & \searrow_{\pi_R^{R \bowtie S}} & & \nearrow & \\
 & & R & \longrightarrow & A
 \end{array}$$

Für eine Relation $R \subseteq A \times A$ schreibt man die *transitive Hülle* als R^* . Die kleinste Äquivalenzrelation, die R umfasst, ist $\text{Eq}(R) := (\Delta_A \cup R \cup R^-)^*$, wobei Δ_A die Identitätsrelation über A ist. Wir definieren den Kern einer Abbildung $f : A \rightarrow B$ als

$$\ker f := \{(a, a') \mid f(a) = f(a')\}.$$

Es ist offensichtlich, dass Kerne Äquivalenzrelationen sind.

Umgekehrt ordnet die *Faktorprojektion* $\pi_\theta : A \rightarrow A/\theta$ für jede Äquivalenzrelation $\theta \subseteq A \times A$ jedem Element $a \in A$ seine Äquivalenzklasse

$$[a]\theta := \{x \in A \mid x\theta a\}$$

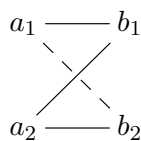
zu. Die Menge aller Äquivalenzklassen modulo θ bezeichnen wir mit A/θ .

1.4.2 Difunktionalität

Wenn $R \subseteq A \times B$ eine Relation zwischen verschiedenen Mengen ist, dann sind *difunktionale* Relationen eine mögliche Verallgemeinerung von Äquivalenzrelation, da Transitivität in diesem Fall undefiniert ist.

Definition 1.4.1. Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt *difunktional* oder *z-abgeschlossen*, wenn für alle $a_1, a_2 \in A$ und $b_1, b_2 \in B$ gilt:

$$(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_2, b_2) \in R \implies (a_1, b_2) \in R.$$



Analog zur Transitivität, lässt sich die Difunktionalität mehrfach “verketteten”. So erhält man die kleinste difunktionale Relation, die R umfasst. Wir nennen sie *difunktionale Hülle*.

$$R^d := R \circ (R^- \circ R)^* = (R \circ R^-)^* \circ R$$

Die difunktionale Hülle erhält man durch den Pullback des Pushouts von π_A^R und π_B^R [Rig48].

Lemma 1.4.2 ([Rig48]). *R ist difunktional $\iff R \circ R^- \circ R \subseteq R \iff R^- \circ R \circ R^- \subseteq R^- \iff R^-$ ist difunktional.*

Jede Äquivalenzrelation ist offensichtlich difunktional. Allgemeiner ist der Kern zwischen zwei Abbildungen $f : A \rightarrow C$ und $g : B \rightarrow C$ definiert als:

$$\ker(f, g) := \{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\}.$$

Das folgende Lemma zeigt, dass Kerne difunktional sind und jede difunktionale Relation von dieser Form ist:

Lemma 1.4.3. *Eine Relation $R \subseteq A \times B$ ist genau dann difunktional, wenn*

$$R = \ker(f, g)$$

für geeignete Abbildungen $f : A \rightarrow C$, $g : B \rightarrow C$ gilt.

Beweis. Sei $R \subseteq A \times B$ eine difunktionale Relation. Seien

$$e_A : A \rightarrow A + B \text{ und } e_B : B \rightarrow A + B$$

die Einbettungen. Wir definieren in $A + B$:

$$\bar{R} := \{(e_A(x), e_B(y)) \mid (x, y) \in R\}.$$

Man sieht leicht, dass \bar{R} auch difunktional ist. Also

$$\bar{R} \circ \bar{R}^- \circ \bar{R} \subseteq \bar{R} \text{ und } \bar{R}^- \circ \bar{R} \circ \bar{R}^- \subseteq \bar{R}^-.$$

Aus der Definition von \bar{R} folgt $\bar{R} \circ \bar{R} = \emptyset = \bar{R}^- \circ \bar{R}^-$. Also ist

$$\theta := \Delta_{A+B} \cup \bar{R} \cup \bar{R}^- \cup \bar{R} \circ \bar{R}^- \cup \bar{R}^- \circ \bar{R}$$

eine Äquivalenzrelation, da $E \circ E \subseteq E$. Offensichtlich gilt:

$$(e_A[A] \times e_B[B]) \cap \theta = \bar{R}.$$

Es sei $\pi_\theta : A+B \rightarrow (A+B)/\theta$ die Projektion, so zeigen wir jetzt $R = \ker(\pi_\theta \circ e_A, \pi_\theta \circ e_B)$:

$$\begin{aligned} (x, y) \in \ker(\pi_\theta \circ e_A, \pi_\theta \circ e_B) &\iff (e_A(x), e_B(y)) \in \theta \\ &\iff (e_A(x), e_B(y)) \in \bar{R} \\ &\iff (x, y) \in R. \end{aligned}$$

□

2 Kategorie der F -Coalgebren

2.1 Einleitung und Literatur

In [Rut95] hat J. Rutten Transitionssysteme mit coalgebraischen Methoden untersucht. Einige Jahre später haben E. de Vink und J. Rutten in [dVR99] stochastische Transitionssysteme als Coalgebren dargestellt. Bezüglich der objektorientierten Programmiersprachen hat B. Jacobs in [Jac96] und [Jac98] die Objektklassen als Coalgebren modelliert. Datentypen und Beweismethoden wie Induktion wurden in [HJ97] coalgebraisch beschrieben.

Die Arbeit [Rut00] lieferte eine grundlegende Einführung über Coalgebren. J. Rutten demonstrierte anhand vieler Beispiele, dass sich zustandsbasierte Systeme als Coalgebren eines Set-Endofunktors auffassen lassen. In den zustandsbasierten Systemen setzt eine Bisimulation Zustände in Relation, die anhand ihres Verhaltens nicht unterscheidbar sind [Par81]. In diesem Fall nennt man solche Zustände bisimilar. R. Milner untersuchte in [Mil89] die Bisimilarität in den zustandsbasierten Systemen. Anhand dieser coalgebraischen Sichtweise haben P. Aczel und N. Mendler in [AM89] Bisimulationen zwischen Coalgebren definiert. In [Rut00] wurde angenommen, dass Funktoren schwache Pullbacks erhalten. Die gleiche Annahme wurde auch in [Mos99] vorausgesetzt. H. Peter Gumm untersuchte in [Gum01] Funktoren, die schwache Pullbacks nicht erhalten. In [GS05] wurde der Zusammenhang zwischen Erhaltungseigenschaften von Funktoren und bestimmten Eigenschaften der Coalgebren verdeutlicht. Im Spezialfall wurde der Zusammenhang zwischen schwacher Pullbackerhaltung und Bisimulationen erläutert.

2.2 F -Coalgebren, Homomorphismen, Untercoalgebren

Analog zu einer allgemeinen Algebra, die aus einer Grundmenge und einer Familie endlichstelliger Operationen besteht, ist die Coalgebra folgendermaßen definiert:

Definition 2.2.1. Sei F ein *Set*-Endofunktor. Eine F -Coalgebra \mathcal{A} ist ein Paar (A, α_A) bestehend aus einer Menge A und einer Abbildung $\alpha_A : A \rightarrow FA$.

$$\begin{array}{c} A \\ \alpha_A \downarrow \\ F(A) \end{array}$$

Die Menge A heißt *Grundmenge* der Coalgebra \mathcal{A} . Der Morphismus α_A heißt *Struktur* der Coalgebra \mathcal{A} .

Die Kategorie Set_F besteht aus F -Coalgebren (Objekte) und Homomorphismen (Morphismen).

Seien (A, α_A) , (B, α_B) zwei F -Coalgebren und $\varphi : A \rightarrow B$ eine Abbildung. φ heißt *Homomorphismus*, wenn $F\varphi \circ \alpha_A = \alpha_B \circ \varphi$ gilt.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \alpha_A \downarrow & & \downarrow \alpha_B \\ FA & \xrightarrow{F\varphi} & FB \end{array}$$

Eine Coalgebra (U, α_U) heißt *Unteralgebra* von (A, α_A) , wenn die Inklusion ι_U^A ein Homomorphismus ist. Man schreibt $U \leq A$.

Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit grundsätzlich mit der Kategorie Set_F , d.h. F ist ein *Set*-Endofunktor. Wichtige Eigenschaften in der Kategorie der Mengen sind in Set_F von Bedeutung. Homomorphismen lassen sich durch injektive und surjektive Homomorphismen abkürzen [Rut00], d.h. für je zwei Abbildungen

$$g : (A, \alpha_A) \rightarrow (B, \alpha_B) \text{ und } f : (B, \alpha_B) \rightarrow (C, \alpha_C),$$

wobei $f \circ g$ ein Homomorphismus ist, gelten:

- Ist g ein surjektiver Homomorphismus, dann ist f ein Homomorphismus.
- Ist f ein injektiver Homomorphismus, dann ist g ein Homomorphismus.

Außerdem gilt das bekannte Diagrammlemma für Set auch in Set_F [Gum99]:

Lemma 2.2.2. *Ist $\varphi : A \rightarrow B$ ein surjektiver Homomorphismus und $\psi : A \rightarrow C$ ein Homomorphismus, so existiert genau dann ein Homomorphismus $\tau : B \rightarrow C$ mit $\tau \circ \varphi = \psi$, wenn $\ker \varphi \subseteq \ker \psi$. Der Homomorphismus τ ist eindeutig bestimmt.*

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & \nearrow \varphi & | \\ A & \xrightarrow{\psi} & C \\ & & \downarrow \tau \\ & & C \end{array}$$

Das „duale“ Lemma besagt:

Lemma 2.2.3. *Ist $\varphi : A \hookrightarrow B$ ein injektiver Homomorphismus und $\psi : A \rightarrow C$ ein Homomorphismus, so existiert genau dann ein Homomorphismus $\tau : C \rightarrow B$ mit $\varphi \circ \tau = \psi$, wenn $\psi[C] \subseteq \varphi[B]$. Der Homomorphismus τ ist notwendigerweise eindeutig.*

$$\begin{array}{ccc} C & & \\ | & \searrow \psi & \\ \tau | & & \\ \downarrow & & \\ B & \xrightarrow{\varphi} & A \end{array}$$

Aus den obigen Lemmatas folgt, dass jeder Homomorphismus in Set_F eine (Epi,Mono)-Faktorisierung hat. Folglich sind die Bilder von Homomorphismen Untercoalgebren ihrer Codomains.

Beispiel 2.2.4. Eine *Kripke-Struktur* über einer Menge ist ein Tripel (S, \rightarrow, v) , wobei S eine Menge von Zuständen, $\rightarrow \subseteq S \times S$ eine Transitionsrelation und $v : S \rightarrow \mathbb{P}\Phi$ eine Abbildung ist, wobei Φ eine Menge von atomaren Aussagen ist. Mit Kripke-Strukturen lassen sich parallel ablaufende Prozesse modellieren. Dabei repräsentieren die Elemente der Menge S die Zustände eines solchen Systems und ein Paar $(s, t) \in \rightarrow$ repräsentiert einen möglichen Zustandsübergang von s nach t .

Wir fassen Kripke-Strukturen als eine $C_{\mathbb{P}\Phi} \times \mathbb{P}$ -Coalgebra auf. Dabei wird die Zustandsmenge S zur Grundmenge der Coalgebra. Die Transitionsrelation kodieren wir als Abbildung von S nach $\mathbb{P}S$, die jedem Zustand die Menge seiner Nachfolgezustände zuordnet. Homomorphismen $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ zwischen Kripke-Strukturen erhalten und reflektieren die Nachfolger und ihre atomaren Werte auf folgende Weise: $\varphi[\rightarrow_1(a)] = \rightarrow_2(\varphi(a))$ und $v_1(a) = v_2(\varphi(a))$.

Beispiel 2.2.5 ([Gum01]). Topologische Räume lassen sich als Coalgebren modellieren. Sei τ eine Topologie auf einer Menge X . Man kann für jedes Element $a \in X$ den Filter seiner Umgebung

$$\{U \subseteq X \mid \exists V \in \tau. V \subseteq U \wedge a \in V\}$$

betrachten. Somit kann man jeden topologischen Raum auf eindeutige Weise als \mathcal{F} -Coalgebra auffassen. Sei

$$f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$$

eine Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen. Die Abbildung f ist genau dann ein \mathcal{F} -Homomorphismus, wenn f stetig und offen ist, d.h. für alle $x \in X$ gilt, dass jede Teilmenge $V \subseteq Y$ genau dann in einer offenen Umgebung von $f(x)$ liegt, wenn auch $f^{-1}[V]$ in einer offenen Umgebung von x liegt. Da die üblichen Morphismen in der Kategorie der topologischen Räume Top die stetigen Abbildungen sind, können die Homomorphismen zwischen \mathcal{F} -Coalgebren die Morphismen in Top nicht „vollständig“ präsentieren.

Covollständigkeit der Kategorie Set_F

Der *Vergißfunktork* ist ein Funktor von Set_F nach Set , der eine Coalgebra auf ihre Grundmenge und einen Homomorphismus auf ihre Grundabbildung abbildet. Jeder Colimes in Set_F ist ein Colimes in Set , wenn man die Strukturabbildungen vergisst. Die Gegenrichtung gilt auch, indem man den Colimes in Set bildet und eine bestimmte Strukturabbildung auf ihm definiert. Also folgt aus der Covollständigkeit von Set die Covollständigkeit von Set_F . In [TG69, AKP72, AK72, Ptá72, Poh73, Adá76, KP77] wurden die (Co)Limites der Kategorie Set_F hergeleitet.

2.3 Bisimulationen

Bisimulationen sind die verträglichen Relationen auf Coalgebren. Dieser Begriff spielt eine große Rolle bei Transitionssystemen, denn Bisimulationen setzen „ununterscheidbare“ Zustände in Relation.

Sei $R \subseteq A \times B$ eine Relation zwischen zwei F -Coalgebren (A, α) und (B, β) . Man nennt R *Bisimulation* [AM89], wenn eine Strukturabbildung $\gamma : R \rightarrow FR$ existiert, so dass die kanonische Projektionen $\pi_A : R \rightarrow A$ und $\pi_B : R \rightarrow B$ Homomorphismen sind.

$$\begin{array}{ccccc} A & \xleftarrow{\pi_A} & R & \xrightarrow{\pi_B} & B \\ \alpha \downarrow & & \gamma \downarrow & & \downarrow \beta \\ F(A) & \xleftarrow{F\pi_A} & FR & \xrightarrow{F\pi_B} & F(B) \end{array}$$

Die leere Menge \emptyset ist immer eine Bisimulation und die Vereinigung von Bisimulationen ist wieder eine Bisimulation. Wir bezeichnen mit $[R]$ die Vereinigung aller Bisimulationen, die in R enthalten sind. Also bilden die Bisimulationen zwischen \mathcal{A} und \mathcal{B} einen vollständigen Verband, wobei

$$\begin{aligned} \bigvee_{i \in I} R_i &:= \bigcup_{i \in I} R_i \\ \bigwedge_{i \in I} R_i &:= \left[\bigcap_{i \in I} R_i \right]. \end{aligned}$$

Die größte Bisimulation zwischen zwei Coalgebren \mathcal{A} und \mathcal{B} bezeichnen wir mit $\sim_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$. Wir nennen zwei Elemente $a, b \in A \times B$ *bisimilar*, wenn $a \sim_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} b$. Die Aussage, dass eine Coalgebra \mathcal{P} , zwei Homomorphismen $\varphi_A : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{A}$ und $\varphi_B : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{B}$ und ein Element $p \in \mathcal{P}$ mit $\varphi_A(p) = a$ und $\varphi_B(p) = b$ existieren, ist dazu äquivalent.

Man erhält die Bisimilarität $\sim_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$ auch als Vereinigung aller Bisimulation in R . Typische Bisimulation sind Graphen von Homomorphismen $\text{Gr}(\varphi) := \{(a, \varphi(a)) \mid a \in A\}$. Jede Abbildung $f : A \rightarrow B$ ist genau dann ein Homomorphismus, wenn ihr Graph eine Bisimulation ist [Rut00]. Da die Diagonale Δ_A eine Bisimulation ist und das Inverse von Bisimulationen wieder Bisimulationen sind, ist \sim_A reflexiv und symmetrisch. Die Bisimilarität \sim lässt sich coerzeugen [Sch01].

Bisimulationen zwischen Kripke-Strukturen

Die Bisimulationen zwischen $C \times \mathbb{P}$ -Coalgebren stimmen mit den klassischen Bisimulationen zwischen Kripke-Strukturen überein. Eine Relation $R \subseteq S_1 \times S_2$ zwischen zwei Kripke-Strukturen $(S_1, \rightarrow_1, v_1)$ und $(S_2, \rightarrow_2, v_2)$ ist eine Bisimulation, wenn für alle $(s_1, s_2) \in R$ gilt:

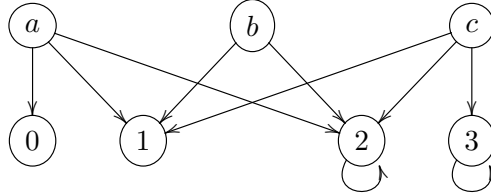
- $v_1(s_1) = v_2(s_2)$.
- Für jeden Nachfolger t_1 von s_1 gibt es einen Nachfolger t_2 von s_2 mit $(t_1, t_2) \in R$.

- Für jeden Nachfolger t_2 von s_2 gibt es einen Nachfolger t_1 von s_1 mit $(t_1, t_2) \in R$.

Wenn man den Funktor beschränkt, kann die Transitivität der Bisimilarität verletzt werden [GS05].

Das folgende Beispiel zeigt eine größte Bisimulation, die nicht transitiv ist.

Beispiel 2.3.1. Betrachte die folgende Kripke-Struktur als $\mathbb{P}_{\leq 3}$ -Coalgebra. Es ist einfach zu prüfen, dass $\{(0, 1), (2, 3), (a, b), (b, c)\} \cup \Delta$ eine Bisimulation ist. Somit gelten $a \sim b$ und $b \sim c$.



Wir nehmen an, dass $(a, c) \in \sim$. Es gibt dann eine Menge $M \in \mathbb{P}_{\leq 3}(\sim)$ mit

$$\pi_1[M] = (0, 1, 2) \text{ und } \pi_2[M] = (1, 2, 3).$$

Also $M = \{(0, 1), (1, 1), (2, 2), (2, 3)\}$. Das ergibt einen Widerspruch, weil $|M| = 4$.

2.4 Kongruenzen

Den Kern eines Homomorphismus $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ in der Kategorie Set ($\ker \varphi$) nennt man *Kongruenz* auf der Coalgebra \mathcal{A} . Die Kongruenzen einer Coalgebra \mathcal{A} bilden einen vollständigen Verband mit

$$\bigvee_{i \in I} \theta_i = \left(\bigcup_{i \in I} \theta_i \right)^*.$$

Wir bezeichnen mit $Con(\mathcal{A})$ den Verband aller Kongruenzen und mit $\nabla_{\mathcal{A}}$ die größte Kongruenz. Dieser Begriff der Kongruenz auf einer einzelnen Coalgebra wurde bereits zur Kongruenz zwischen zwei Coalgebren verallgemeinert ([Kur00]):

Definition 2.4.1. Eine *2-Kongruenz* θ zwischen zwei Coalgebren \mathcal{A} und \mathcal{B} ist der Kern (Pullback in Set) zweier Homomorphismen $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ und $\psi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$:

$$\theta = \ker(\varphi, \psi) := \{(a, b) \in A \times B \mid \varphi(a) = \psi(b)\}.$$

Die größte 2-Kongruenz $\nabla_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$ existiert immer [IH03] und hängt von der größten Kongruenz $\nabla_{\mathcal{A} + \mathcal{B}}$ in der Summe $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ ab. Wir nennen zwei Elemente $a, b \in A \times B$ *beobachtungsäquivalent*, wenn $a \nabla_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} b$.

Lemma 2.4.2 ([IH03]). $(a, b) \in \nabla_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} \iff (e_{\mathcal{A}}(a), e_{\mathcal{B}}(b)) \in \nabla_{\mathcal{A} + \mathcal{B}}$.

Beweis.

$$\begin{aligned}
 (a, b) \in \nabla_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} &\iff \exists \mathcal{C} \in \text{Set}_F, \varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}, \psi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}. \varphi(a) = \psi(b) \\
 &\iff \exists \mathcal{C} \in \text{Set}_F, \chi : \mathcal{A} + \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}, \chi(e_{\mathcal{A}}(a)) = \chi(e_{\mathcal{B}}(b)) \\
 &\iff (e_{\mathcal{A}}(a), e_{\mathcal{B}}(b)) \in \nabla_{\mathcal{A} + \mathcal{B}}.
 \end{aligned}$$

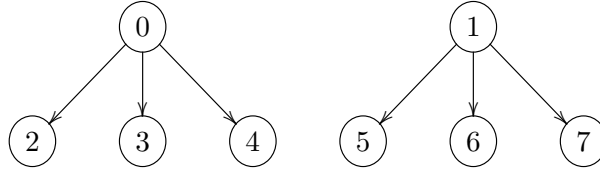
□

Im Gegenteil zu Kongruenzen bilden die 2-Kongruenzen keinen Verband.

Beispiel 2.4.3. Betrachte den Funktor \mathcal{B} 1.3.4. Eine Abbildung $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ ist genau dann ein Homomorphismus, wenn für alle $a \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\rightarrow_2(\varphi(a)) = \begin{cases} \varphi[\rightarrow_1(a)] & \text{wenn } \varphi|_{\rightarrow_1(a)} \text{ injektiv} \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Gegeben seien eine \mathcal{B} -Coalgebra \mathcal{A}



und eine \mathcal{B} -Coalgebra \mathcal{C} :

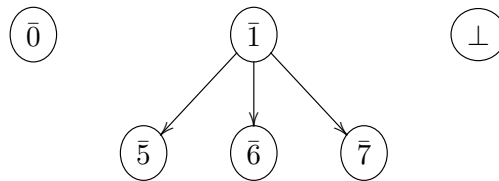


Wir prüfen nun, dass

$$\theta_1 := \{(0, a), (5, b), (6, c), (7, d)\} \text{ und } \theta_2 := \{(1, a), (2, b), (3, 6), (4, d)\}$$

2-Kongruenzen sind.

Sei \mathcal{E} eine \mathcal{B} -Coalgebra:



Wir definieren zwei Homomorphismen $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E}$ und $\psi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ mit

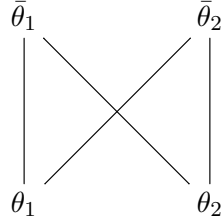
$$\varphi(x) := \text{if}(x \in \{0, 1, 5, 6, 7\}) \bar{x} \text{ else } \perp$$

und $\psi(a) := \bar{0}$, $\psi(b) := \bar{5}$, $\psi(c) := \bar{6}$, $\psi(d) := \bar{7}$. Somit ist $\theta_1 = \ker(\varphi, \psi)$ eine 2-Kongruenz. Analog prüfen wir, ob $\theta_2 := \{(1, a), (2, b), (3, 6), (4, d)\}$ eine 2-Kongruenz ist.

$\theta_1 \cup \theta_2$ ist keine Kongruenz. Aber

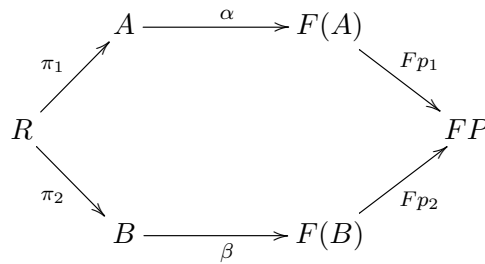
$$\bar{\theta}_1 := \theta_1 \cup \theta_2 \cup \{(3, b), (6, b)\} \text{ und } \bar{\theta}_2 := \theta_1 \cup \theta_2 \cup \{(4, b), (7, b)\}$$

sind 2-Kongruenzen. Die folgende Veranschaulichung zeigt, dass θ_1 und θ_2 kein Supremum haben.

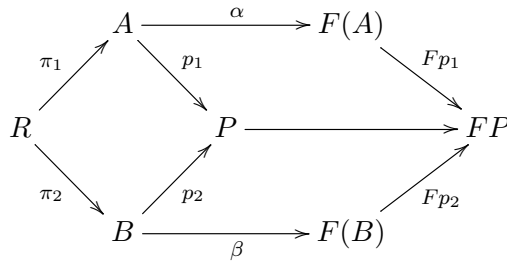


Im Allgemeinen sind Bisimulationen keine 2-Kongruenzen. P. Aczel und N. Mendler führten in [AM89] eine Definition von Kongruenzen ein, die “näher” an der Definition der Bisimulationen ist.

Definition 2.4.4. Eine Relation $R \subseteq A \times B$ zwischen zwei F -Coalgebren (A, α) und (B, β) heißt *2-Präkongruenz*, wenn $Fp_1 \circ \alpha \circ \pi_1 = Fp_2 \circ \beta \circ \pi_2$, wobei (P, p_1, p_2) der Pushout der Projektionen von R ist.



Wenn eine Struktur auf P existiert, so dass p_1 und p_2 Homomorphismen sind, dann kommutiert das ganze Diagramm.



Es ist leicht zu sehen, dass Bisimulationen 2-Präkongruenzen sind. Da p_1 und p_2 Homomorphismen sind, ist die difunktionale Hülle $R^d = \ker(p_1, p_2)$ der 2-Präkongruenz R eine 2-Kongruenz. Somit erhält man die Inklusionen:

$$\text{dif. Bisimulationen} \subseteq \text{dif. 2-Präkongruenzen} \subseteq \text{2-Kongruenzen.}$$

Die Vereinigung von 2-Präkongruenzen ist wieder eine 2-Präkongruenz [HKP09]. Daher bilden die 2-Kongruenzen einen Verband mit dem kleinsten Element \emptyset .

Satz 2.4.5 ([HKP07]). *Sei $R \subseteq A \times B$ eine totale Relation zwischen zwei Coalgebren (A, α) und (B, β) . Dann ist R genau dann eine 2-Kongruenz, wenn R eine difunktionale 2-Präkongruenz ist.*

Definition 2.4.6. Wir nennen eine Relation R zwischen zwei F -Coalgebren (A, α) und (B, β) *exakt*, wenn die Bilder $\pi_1[R]$ und $\pi_2[R]$ von R Untercoalgebren von (A, α) und (B, β) sind.

Bisimulationen sind durch die *(epi, reg mono)*-Faktorisierung der Projektionen immer exakt.

Satz 2.4.7. *Die exakten difunktionalen 2-Präkongruenzen sind genau die exakten 2-Kongruenzen.*

Beweis. " \subseteq ": offensichtlich, weil jede difunktionale 2-Präkongruenz eine 2-Kongruenz ist. " \supseteq ": Sei R eine exakte 2-Kongruenz zwischen zwei F -Coalgebren (A, α) und (B, β) . Da R exakt ist, bleibt zu zeigen, dass R eine 2-Präkongruenz ist. Die *(epi, mono)*-Zerlegungen der Projektionen gestatten eine Zusammensetzung des Pushouts (P, p_1, p_2) in *Set* folgendermaßen:

$$\begin{array}{ccccc}
 R & \xrightarrow{\bar{\pi}_1} & \pi_1[R] & \xrightarrow{\iota_1} & B \\
 \bar{\pi}_2 \downarrow & & \downarrow \bar{p}_1 & & \downarrow \\
 \pi_2[R] & \xrightarrow{\bar{p}_2} & \bar{P} & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\
 \downarrow \iota_2 & & \downarrow & & \downarrow \\
 A & \xrightarrow{\quad} & \bullet & \xrightarrow{\quad} & P
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \curvearrowright p_2 \\
 \curvearrowleft p_1
 \end{array}$$

Wir wollen nun eine Struktur auf P finden, so dass p_1 und p_2 Homomorphismen sind. Wegen der Exaktheit von R sind ι_1 und ι_2 Homomorphismen. Es reicht eine Struktur auf \bar{P} zu finden, so dass \bar{p}_1 und \bar{p}_2 Homomorphismen sind. Da R eine 2-Kongruenz zwischen (A, α) und (B, β) ist, folgt aus der Pullbackbildung, dass R eine totale 2-Kongruenz zwischen den Untercoalgebren $\pi_1[R]$ und $\pi_2[R]$ ist. Laut dem Satz 2.4.5 ist R dann eine difunktionale 2-Präkongruenz zwischen den Coalgebren $\pi_1[R]$ und $\pi_2[R]$. Also gibt es eine Struktur auf P , so dass p_1 und p_2 Homomorphismen sind. \square

2.5 Epis und Monos in Set_F

Die Epimorphismen sind genau die surjektiven Homomorphismen [Rut00]. Gegeben eine Bisimulation R in einer Coalgebra \mathcal{A} . Die kleinste Äquivalenzrelation, die R umfasst, ist eine Kongruenz [AM89]. Solche Kongruenzen nennt man *reguläre Kongruenzen*. Der folgende Satz charakterisiert die regulären Epis und Monos in Set_F :

Lemma 2.5.1 ([GS05]). *Ein Homomorphismus $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ist genau dann mono, wenn*

$$[\ker \varphi] = \Delta_A,$$

und er ist genau dann regulär mono, wenn er injektiv ist.

Ein Epimorphismus $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ist genau dann regulär, wenn $\ker \varphi$ eine reguläre Kongruenz ist.

Wir nennen die Homomorphismen, deren Kerne Bisimulationen sind, *streng regulär*. Ist φ regulär epi, dann gilt $\ker \varphi = [\ker \varphi]$.

Die regulären Kongruenzen bilden einen vollständigen Verband, weil reguläre Epimorphismen unter Pushouts stabil sind (Satz 1.2.16). Wir bezeichnen ihn mit $\text{RegCon}(-)$.

In jeder covollständigen Kategorie, insbesondere in Set_F , ist jeder mono genau dann regulär mono, wenn jeder Epi stark ist [AHS90, Zar12]. Der Kern (in Set) eines starken Epis nennt man *starke Kongruenz*. Starke Kongruenzen bilden auch einen Verband, der mit $\text{StrongCon}(-)$ bezeichnet wird.

2.6 Coalgebraische Modallogik

Die modallogische Formeln (bei Hennessy-Milner) beschreiben zu jeder Kripke-Struktur (X, \rightarrow, v) die Eigenschaften, die in den Nachfolgern eines Zustandes $s \in X$ erfüllt sind. Wenn φ eine Formel ist, dann erfüllt der Zustand s die Formel $\Box\varphi$, wenn jeder Nachfolger von s die Formel φ erfüllt [HM85]. Jede Eigenschaft $\varphi : X \rightarrow 2$ wird *Prädikat* genannt. Unter \Box versteht man dann ein *Lifting*, das jedem Prädikat φ über der Menge X ein Prädikat $\lambda_X(\varphi) \subseteq \mathbb{P}(X)$ zuordnet. Jedes Element x erfüllt genau dann $\Box\varphi$, wenn $\alpha(a)$ das „hochgehobene“ Prädikat $\lambda_X(\varphi)$ erfüllt. Allgemeiner definiert für einen beliebigen Funktor F Pattinson Predicate Liftings $\lambda_X : 2^X \rightarrow 2^{F(X)}$ als natürliche Transformationen zwischen dem kontravarianten Potenzmengen-Funktor $2^{(-)}$ und $2^{F(-)}$ ([Pat03]). Die Logik, welche von Pattinson eingeführt wurde, benutzt Predicate Liftings als Modalitäten. In diesem Sinne wurde sie auch von L. Schröder [Sch05] fortgeführt.

Definition 2.6.1. Ein *Predicate Lifting* λ eines Funktors F ist eine natürliche Transformation $\lambda : 2^- \rightarrow 2^{F(-)}$.

Die Idee des Predicate Liftings besteht darin, jede Eigenschaft auf Elementen aus X in eine Eigenschaft auf Elementen aus FX zu transformieren. Bei der Multi-Modallogik lässt man, indem man Tupel $\langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle$ von Formeln betrachtet, n -stellige Predicate Liftings $\lambda : (2^-)^n \rightarrow 2^{F(-)}$ zu ([BD16]). Eine vereinfachte Darstellung der Modalitäten durch $\{0, 1\}$ -Muster wird von H.P. Gumm in [Gum09] eingeführt. Hierbei werden die durch Predicate Liftings definierten Modalitäten durch Teilmengen aus $\{0, 1\}$ -Mustern dargestellt. Wir nennen die Modalitäten $\Box \subseteq F(2)$ *Boxen*. Das Yoneda-Lemma [Yon54] zeigt, dass die Teilmengen aus $\{0, 1\}$ -Mustern genau den Predicate Liftings entsprechen.

$$\text{Nat}((2^-)^n, 2^{F(-)}) \cong 2^{F(2^n)}$$

Es liefert eine Bijektion zwischen den natürlichen Transformationen $\lambda : (2^-)^n \rightarrow 2^{F(-)}$ und den Teilmengen $\square \subseteq F(2^n)$. Wir beschränken uns zuerst auf den Fall $n = 1$. Jedes Predicate Lifting $\lambda : 2^- \rightarrow 2^{F(-)}$ ist eindeutig bestimmt, wenn man λ_2 auf id_2 anwendet, wobei $\llbracket id_2 \rrbracket = \{1\} \subseteq 2$. Somit ist $\lambda_2(id_2)$ ein Prädikat in $F(2)$ [Sch05].

Sei umgekehrt $\square : F(2) \rightarrow 2$ ein Prädikat, dann definiert $\lambda_\theta : 2^X \cdot \square \circ F\theta$ ein Predicate Lifting, und es ist lediglich zu prüfen, ob die Anwendung auf id_2 wieder das Prädikat \square liefert.

Gegeben sei $\theta \in 2^X$ ein Prädikat. Das Predicate Lifting λ_X ordnet jedem X -Muster $p(a_1, \dots, a_n) \in F(X)$ den Wert 1 zu, wenn $p(\theta(a_1), \dots, \theta(a_n)) \in \square$, ansonsten den Wert 0. Das folgende Diagramm veranschaulicht die Übersetzung zwischen den beiden Varianten. In dieser Arbeit werden wir uns mit den Boxen $\square : F(2) \rightarrow 2$ befassen.

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{\theta} & 2 & \xrightarrow{id} & 2 \\
 \alpha \downarrow \dots & & & & \\
 F(A) & \xrightarrow{F\theta} & F(2) & \xrightarrow[\lambda_2(id_2)]{\square} & 2 \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & \lambda_A(\theta) &
 \end{array}$$

Definition 2.6.2. Gegeben eine Menge von Boxen $\square_i : F(2) \rightarrow 2$, $i \in I$. Die Menge der Formeln \mathcal{L} (siehe [Pat03]) ist gegeben durch

$$\varphi ::= \perp \mid \top \mid \varphi_1 \vee \varphi_2 \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid \neg \varphi \mid \square_i \varphi \text{ for each } i \in I$$

Eine Formel φ heißt *positiv*, wenn \neg in φ nicht vorkommt. Sei nun $\mathcal{A} = (A, \alpha)$ eine F -Coalgebra. Wir definieren die Semantik $\llbracket _ \rrbracket : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{P}A$ induktiv durch:

$$\begin{aligned}
 \llbracket \perp \rrbracket &:= \emptyset \\
 \llbracket \top \rrbracket &:= A \\
 \llbracket \neg \varphi \rrbracket &:= A \setminus \llbracket \varphi \rrbracket \\
 \llbracket \varphi \vee \psi \rrbracket &:= \llbracket \varphi \rrbracket \cup \llbracket \psi \rrbracket \\
 \llbracket \varphi \wedge \psi \rrbracket &:= \llbracket \varphi \rrbracket \cap \llbracket \psi \rrbracket \\
 \llbracket \square \varphi \rrbracket &:= \llbracket \square \circ F\varphi \circ \alpha \rrbracket
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\varphi} & 2 \\
 \alpha \downarrow & \searrow & \square \varphi \\
 F(A) & \xrightarrow{F\varphi} & F(2) \xrightarrow{\square} 2
 \end{array}$$

Wir führen die Semantik der Erfüllbarkeitsrelation $\models \subseteq A \times \mathcal{L}$ ein. Dabei gelte $a \models \varphi$ genau dann, wenn $a \in \llbracket \varphi \rrbracket$.

Definition 2.6.3. Zwei Elemente heißen *logisch äquivalent*, wenn sie die gleichen Formeln erfüllen. Wir bezeichnen mit \approx die logische Äquivalenz, d.h. für je zwei Elemente $a, b \in A$ gilt:

$$a \approx b :\Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{L}. a \models \varphi \Leftrightarrow b \models \varphi.$$

Das Komplement einer Box \square erhält man durch $inv \circ \square$, wobei inv die Negation ist.

$$F(2) \xrightarrow{\square} 2 \xrightarrow{inv} 2$$

\square^C

Definition 2.6.4. Eine Box \square heißt

- *monoton*, wenn für je zwei Teilmengen $U \subseteq V \subseteq X$ die Inklusion

$$[[\square\chi_U]] \subseteq [[\square\chi_V]]$$

gilt.

- *anti-monoton*, wenn für je zwei Teilmengen $U \subseteq V \subseteq X$ die Inklusion

$$[[\square\chi_V]] \subseteq [[\square\chi_U]]$$

gilt.

Durch Komplementbildung monotoner Boxen \square erhält man die anti-monotonen Boxen.

Wir legen eine Menge von Boxen Ω fest. Ω heißt *komplementär*, wenn für alle $\square \in \Omega$ das Komplement \square^C auch in Ω ist. Wir werden Formeln bezüglich Ω betrachten.

Wir modifizieren die Sprache der modallogischen Formel zu der Sprache \mathcal{L}_Ω , indem man nur monotone und anti-monotone Boxen zulässt. Induktiv definieren wir eine Übersetzung *trans* zu positiven Formeln, indem man die Negationen folgendermaßen nach innen schiebt:

$$\text{trans}(\varphi) := \begin{cases} \top & \text{falls } \varphi = \neg \perp \\ \perp & \text{falls } \varphi = \neg \top \\ \text{trans}(\neg\varphi_1) \wedge \text{trans}(\neg\varphi_2) & \text{falls } \varphi = \neg(\varphi_1 \vee \varphi_2) \\ \text{trans}(\neg\varphi_1) \vee \text{trans}(\neg\varphi_2) & \text{falls } \varphi = \neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \\ \square^C \text{trans}(\varphi_1) & \text{falls } \varphi = \neg \square \varphi_1. \end{cases}$$

Zu jeder Formel φ erhält man eine äquivalente positive Formel, indem man die Negationen nach innen schiebt. Somit sind die monotonen und anti-monotonen Boxen für die ‘‘Vollständigkeit’’ der Logik ausreichend. Die monotone Modallogik, d.h. die Modallogik, deren Boxen monoton sind, wurde von H. Hansen und C. Kupke in [HK04] verwendet.

2.7 Korrektheit und Vollständigkeit der coalgebraischen Modallogik

Bei den bild-endlichen Kripke-Strukturen sind bisimilare Zustände genau die Zustände, die gleiche Formeln erfüllen [HM85]. Mit den coalgebraischen modallogischen Formeln wollen wir das Verhalten von Coalgebren beschreiben. Unter *Korrektheit* der coalgebraischen Modallogik verstehen wir, dass die Formeln invariant unter Homomorphismen sind. Homomorphismen sollen dabei das Verhalten nicht verändern, d.h. für jeden Homomorphismus $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ soll $a \approx f(a)$ gelten. Somit sollen beobachtungsäquivalente Elemente dieselben Formeln erfüllen.

Umgekehrt verstehen wir unter *Vollständigkeit* der coalgebraischen Modallogik, dass zwei Elemente beobachtungsäquivalent sind, wenn sie dieselben Formeln erfüllen.

Definition 2.7.1. Die coalgebraische Modallogik heißt

- *korrekt*, wenn $\nabla \subseteq \approx$ für je zwei Coalgebren \mathcal{A} und \mathcal{B} gilt.
- *vollständig*, wenn $\approx \subseteq \nabla$ für je zwei Coalgebren \mathcal{A} und \mathcal{B} gilt.

Unter der Voraussetzung, dass die Logik unendliche Konjunktionen und Disjunktionen zulässt, wird die 2-Trennbarkeit für die Vollständigkeit benötigt. Wenn nur endliche Konjunktionen und Disjunktionen zugelassen sind, wird als zusätzliche Bedingung benötigt, dass der Funktor finitär und 2-trennbar ist.

Satz 2.7.2 ([Gum09]). *Wenn F finitär und 2-trennbar ist, dann ist die coalgebraische Modallogik korrekt und vollständig.*

Im nächsten Kapitel werden wir sehen, unter welchen Voraussetzungen die Bisimilarität und die logische Äquivalenz miteinander übereinstimmen.

3 Erhaltung spezieller Limites

3.1 Einleitung und Literatur

In [Rut00] hat J. Rutten die Theorie der Coalgebra unter der Voraussetzung entwickelt, dass Funktoren schwache Pullbacks erhalten. Die schwache Pullbackerhaltung wurde bereits in der Kategorientheorie untersucht [AT90]. Ein wichtiges Resultat aus [GS00] ist, dass jeder Funktor genau dann schwache Pullbacks erhält, wenn jede 2-Kongruenz eine Bismulation ist. Die schwache Pullbackerhaltung ist ausreichend, damit je zwei beobachtungsäquivalente Zustände bisimilar sind [Rut00, Tur96]. In [GS05] wurde gezeigt, dass die schwache Pullbackerhaltung zur schwachen Kernpaarerhaltung und Urbilderhaltung äquivalent ist. Die schwache Kernerhaltung wurde in [RT93, TR98, GS05] untersucht. Dort wurde bewiesen, dass genau dann ein Funktor F schwache Kernpaare erhält, wenn jede F -Kongruenz eine Bismulation ist.

3.2 Schwache Pullbackerhaltung

Gegeben sei ein Diagramm D . Ein Funktor F erhält D -Limites *schwach*, wenn F jeden D -Limes auf einen schwachen D -Limes abbildet. Es ist bekannt, dass F die D -Limites genau dann schwach erhält, wenn F schwache D -Limites erhält [Gum01, Rut00].

Aus [GS05] wissen wir bereits, dass ein Funktor genau dann schwache Pullbacks erhält, wenn 2-Kongruenzen und difunktionale Bismulationen miteinander übereinstimmen. Dieses Resultat folgt aus dem folgenden Lemma:

Lemma 3.2.1 ([GS05]). *Seien $f : A \rightarrow C$ und $g : B \rightarrow C$ zwei Abbildungen mit $\ker(f, g) \neq \emptyset$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i) F erhält den Pullback von f und g schwach.
- (ii) $\ker(f, g)$ ist eine Bismulation für alle Strukturen auf A , B und C , für die f und g Homomorphismen sind.

Wir werden uns zuerst mit schwacher Pullbackerhaltung von *Set*-Funktoren befassen. Wir werden das folgende Kriterium verwenden.

Lemma 3.2.2. *Gegeben seien ein Funktor F und ein Pullback (P, p_1, p_2) zweier Morphismen $f : A \rightarrow C$ und $g : B \rightarrow C$.*

F erhält genau dann (P, p_1, p_2) schwach, wenn für alle $a \in FA$, $b \in FB$ mit

$$(Ff)a = (Fg)b$$

ein $p \in FP$ existiert mit $(Fp_1)p = a$ und $(Fp_2)p = b$.

Eine wichtige Eigenschaft der *Set*-Funktoen ist, dass sie endliche nicht-leere Schnitte erhalten [Trn69].

3.3 Gesunde Funktoen

Wir nennen einen Funktor *gesund*, wenn er endliche Schnitte erhält. Jeder *Set*-Funktor F lässt sich auf die leere Menge abändern, so dass der entstehende Funktor \hat{F} leere Schnitte erhält ([Trn69]). \hat{F} ist ein gesunder Funktor. Eine Modifikation wurde von Barr definiert ([Bar93]). Gegeben seien eine zweielementige Menge $2 = \{0, 1\}$ und die Injektionen

$$e_0, e_1 : 1 \rightarrow 2.$$

Intuitiv definieren wir $\hat{F}\emptyset$ als Equalizer der beiden Injektionen. Sei $e : E \rightarrow F1$ der Equalizer von Fe_0 und Fe_1 . Für eine beliebige Menge X und zwei Elemente x, x' ergibt sich das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{e} & F1 & \xrightarrow{Fe_0} & F2 \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & FX & & \end{array}$$

(Additional arrows in the original diagram: $F1 \xrightarrow{Fe_1} F2$, $F1 \xrightarrow{Fe_{x'}} FX$, $F1 \xrightarrow{Fe_x} FX$, $F2 \xrightarrow{Fe_{x,x'}} FX$, and a dashed arrow $E \xrightarrow{\quad} FX$)

Man sieht dann leicht, dass $Fe_x \circ e = Fe_{x'} \circ e$ gilt. Dies motiviert die Definition von Barr:

$$\begin{aligned} \hat{F}(\emptyset) &:= E \\ \hat{F}(X) &:= F(X) \text{ sonst} \\ \hat{F}\emptyset_X &:= Fe_y \circ e \\ \hat{F}f &:= Ff \text{ sonst.} \end{aligned}$$

Die Modifikation von Barr verträgt sich mit den Unterfunktoren, d.h. wenn F Unterfunktor von G ist, dann ist \hat{F} auch Unterfunktor von \hat{G} . Jede injektive natürliche Transformation $\eta : F \xrightarrow{\bullet} G$ setzt sich auch auf $\hat{\eta} : \hat{F} \xrightarrow{\bullet} \hat{G}$ fort, indem man η_\emptyset als $\eta_1 \circ eq(Fe_0, Fe_1)$ definiert.

$$\begin{array}{ccccc} \hat{F}\emptyset & \xrightarrow{eq(Fe_0, Fe_1)} & F1 & \xrightarrow{Fe_0} & F2 \\ \downarrow & & \downarrow \eta_1 & \swarrow Fe_1 & \downarrow \eta_2 \\ \hat{G}\emptyset & \xrightarrow{eq(Ge_0, Ge_1)} & G1 & \xrightarrow{Ge_0} & G2 \\ & & & \swarrow Ge_1 & \end{array}$$

Lemma 3.3.1 ([Sch01, AGT10]). *Jede injektive natürliche Transformation zwischen gesunden Funktoen ist subkartesisch.*

Wenn der Funktor gesund ist, reicht es für die schwache Pullbackerhaltung die nicht-leeren Pullbacks zu betrachten. Zudem zerlegt sich die schwache Pullbackerhaltung in schwache Kernpaarerhaltung und Urbildererhaltung.

Theorem 3.3.2 ([GS05]). *Für jeden Funktor F sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i) F erhält Pullbacks schwach.
- (ii) F erhält nicht leere Pullbacks schwach.
- (iii) F erhält schwache Kernpaare und Urbilder.

3.4 Urbilderhaltung

Die Urbilderhaltung lässt sich durch Eigenschaften von Bisimulationen und Homomorphismen charakterisieren.

Theorem 3.4.1 ([GS00]). *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- (i) F erhält Urbilder.
- (ii) Wenn $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein Homomorphismus und $\mathcal{U} \leq \mathcal{B}$ eine Untercoalgebra ist, dann ist $\varphi^{-1}[\mathcal{U}]$ eine Untercoalgebra von \mathcal{A} .
- (iii) Wenn $\mathcal{U} \leq \mathcal{A}$ und $\mathcal{V} \leq \mathcal{B}$ Untercoalgebren sind, dann sind die Bisimulationen zwischen \mathcal{U} und \mathcal{V} genau die Bisimulationen \mathcal{A} und \mathcal{B} eingeschränkt auf $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$.

Die Urbilderhaltung lässt sich auf die Erhaltung *klassifizierender* Urbilder zurückführen. In [GS05] wird gezeigt, dass ein Funktor genau dann Urbilder erhält, wenn er Urbilder der Form

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\chi_U} & 2 \\ \subseteq_U^X \uparrow & & \uparrow \subseteq_1^2 \\ U & \xrightarrow{!_U} & 1 \end{array}$$

erhält, wobei \subseteq_1^2 die Inklusionsabbildung und χ_U die charakteristische Funktion ist.

Theorem 3.4.2. F erhält genau dann Urbilder, wenn jede 2-Kongruenz exakt ist.

Beweis. " \rightarrow ": Es reicht zu zeigen, dass die Bilder der Projektionen einer beliebigen 2-Kongruenz Untercoalgebren sind. Gegeben sei eine 2-Kongruenz $\theta = \ker(\varphi, \psi)$ zwischen zwei Coalgebren \mathcal{A} und \mathcal{B} . Die (epi, mono)-Zerlegungen von φ und ψ gestatten folgendermaßen eine Zusammensetzung des Pullbacks $\ker(\varphi, \psi)$.

$$\begin{array}{ccccc} \theta & \xrightarrow{\bar{\pi}_1} & \pi_1[\theta] & \hookrightarrow & B \\ \bar{\pi}_2 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \pi_2[\theta] & \xrightarrow{\quad} & \downarrow & \xrightarrow{\quad} & \downarrow \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{\quad} & \downarrow & \xrightarrow{\quad} & C \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \varphi & & \psi \end{array}$$

Da F Urbilder erhält, sind $\pi_1[\theta]$ und $\pi_2[\theta]$ Untercoalgebren.

" \leftarrow ": Seien nun $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein Homomorphismus und $\mathcal{V} \leq \mathcal{B}$. Nach Voraussetzung ist $\ker(\varphi, \subseteq_V^{\mathcal{B}})$ exakt. Somit ist das Bild $\ker(\varphi, \subseteq_V^{\mathcal{B}})[V] = \varphi^{-}[V]$ eine Untercoalgebra von \mathcal{A} . \square

In Kapitel 2 zeigt das Beispiel 2.4.3, dass die 2-Kongruenzen im Allgemeinen keinen Verband bilden.

Satz 3.4.3. *Wenn F Urbilder erhält, dann bilden die 2-Kongruenzen zwischen zwei Coalgebren einen vollständigen Verband $(\text{Con}(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \emptyset, \vee)$ mit $\bigvee_i \theta_i := (\bigcup_i \theta_i)^d$.*

Beweis. Sei $(\theta_i)_{i \in I}$ eine Familie von 2-Kongruenzen zwischen zwei Coalgebren. Unter Voraussetzung der Urbildererhaltung sind 2-Kongruenzen wieder 2-Präkongruenzen [Sta11]. Somit ist jede 2-Kongruenz θ_i eine 2-Präkongruenz. Deren Vereinigung $\bigcup_i \theta_i$ ist wieder eine 2-Präkongruenz [HKP07]. Sei (p_1, p_2, P) der Pushout der Projektionen von $\bigcup_i \theta_i = \ker(\varphi, \psi)$. Da $\bigcup_i \theta_i$ eine 2-Präkongruenz ist, kann man p_1 und p_2 durch eine Struktur auf P zu Homomorphismen erweitern, deren Kern $(\bigcup_i \theta_i)^d$ eine 2-Kongruenz ist. \square

3.5 Urbild-Bereinigung

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass für jeden Funktor F ein größter Unterfunktor \bar{F} existiert, der Urbilder erhält. Man kann alle Unterfunktoren, die gleichzeitig Teilfunktoren sind, vereinigen.

$$\begin{aligned} \bar{F}X &:= \{a \in FX \mid \text{es gibt einen Unterfunktor } G, \\ &\quad \text{der Urbilder erhält und } a \in GX \} \\ \bar{F}f &:= \lambda x : \bar{F}X. Ff(x) \end{aligned}$$

Für jede Abbildung $f : A \rightarrow B$ ist die Wohldefiniertheit von \bar{F} offensichtlich.

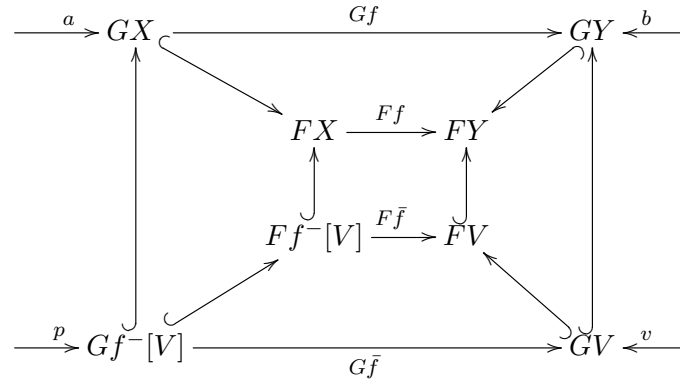
Satz 3.5.1. *\bar{F} erhält Urbilder.*

Beweis. Gegeben sei das folgende Diagramm. Seien $a \in \bar{F}X$ und $v \in \bar{F}V$ mit

$$(\bar{F}f)(a) = (\bar{F} \subseteq_V^Y)(v).$$

Gesucht ist ein Element $p \in \bar{F}(f^{-}[V])$ mit $\bar{F} \subseteq_{f^{-}[V]}^X(p) = a$ und $\bar{F}\bar{f}(p) = v$. Aus der Definition von \bar{F} folgt, dass ein Unterfunktor G von F existiert, der Urbilder erhält und

$a \in GX$. Also gilt $\bar{F}f(a) \in GY$.



Der Funktor G ist auch ein Unterfunctor von \bar{F} . Aus dem Lemma 3.3.1 folgt, dass die injektive natürliche Transformation von G nach \bar{F} subkartesisch ist. Daraus folgt: $u \in GU$. Da G Urbilder erhält, gibt es ein $p \in G(f^{-}[V])$ mit $G \subseteq_{f^{-}[V]}^Y (p) = a$ und $G\bar{f}(p) = u$. Da G ein Unterfunctor von \bar{F} ist, ist p das gesuchte Element. \square

Diese Methode hat einen offensichtlichen Nachteil: Es ist nicht einfach zu prüfen, ob ein Element in einem Urbilder erhaltenden Unterfunctor enthalten ist, denn die Unterfunctoren können eine echte Klasse bilden. Den Urbilder erhaltenden Funktor erhält man auch, indem man alle „ungünstigen“ Elemente entfernt, die dafür verantwortlich sind, dass der Funktor Urbilder nicht erhält. Es genügt klassifizierende Urbilder zu betrachten. Intuitiv sind „ungünstige“ Elemente, die X -Muster p , die nicht U -Muster für eine Teilmenge $U \subseteq X$ sind, und deren „Bildmuster“ $F\chi_U(p)$ ein 1-Muster ist [Gum].

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{F\chi_U} & F2 \\ \uparrow & & \uparrow \\ FU & \xrightarrow{F!_U} & F1 \end{array}$$

Daraus ergibt sich der Funktor:

$$\begin{aligned} \tilde{F}X &:= \{u \in FX \mid \forall U \subseteq X (F\chi_U(u) \in F \subseteq_1^2 [F1] \Rightarrow u \in F \subseteq_U^X [FU])\} \\ \tilde{F}f &:= \lambda x : \tilde{F}X. Ff(x). \end{aligned}$$

Satz 3.5.2. \tilde{F} ist ein Funktor.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass \tilde{F} wohldefiniert ist. Sei $u \in \tilde{F}X$. Wir zeigen jetzt $\tilde{F}f(u) \in \tilde{F}Y$.

Sei $V \subseteq Y$ mit $F\chi_V(\tilde{F}f(u)) \in F \subseteq_1^2 [F1]$. Es bleibt zu zeigen: $\tilde{F}f(u) \in F \subseteq_V^Y [FV]$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F\chi_{f^{-}[V]} & & \\
 & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\
 FX & \xrightarrow{Ff} & FY & \xrightarrow{F\chi_V} & F2 \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 F(f^{-}[V]) & \xrightarrow{F\tilde{f}} & \tilde{F}V & \xrightarrow{F!_V} & \tilde{F}1 \\
 & \curvearrowleft & & \curvearrowright & \\
 & & F!_{f^{-}[V]} & &
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & F\chi_V(\tilde{F}f(u)) \in F \subseteq_1^2 [F1] \\
 \Rightarrow & F(\chi_{f^{-}[V]})(u) \in F \subseteq_1^2 [F1] & \chi_V \circ f = \chi_{f^{-}[V]} \\
 \Rightarrow & u \in F \subseteq_{f^{-}[V]}^X [F(f^{-}[V])] & u \in \tilde{F}X \\
 \Rightarrow & Ff(u) \in F(f \circ \subseteq_{f^{-}[V]}^X)[F(f^{-}[V])] \\
 \Rightarrow & Ff(u) \in F(\subseteq_V^Y \circ \tilde{f})[F(f^{-}[V])] & f \circ \subseteq_{f^{-}[V]}^X = \subseteq_V^Y \circ \tilde{f} \\
 \Rightarrow & Ff(u) \in F \subseteq_V^Y [FV].
 \end{aligned}$$

□

Es ist offensichtlich, dass der Funktor \tilde{F} Urbilder erhält. Wir nennen solche Modifikationen *Urbild-Bereinigung*. Die beiden Konstruktionen liefern den gleichen Funktor:

Satz 3.5.3. $\bar{F} = \tilde{F}$.

Der Beweis hierzu folgt später.

Beispiel 3.5.4. Die Urbild-Bereinigung des Funktors $(-)^2 - (-) + 1$ liefert den konstanten Funktor C_1 .

Beispiel 3.5.5. Die Urbild-Bereinigung des Funktors \mathcal{B} liefert den Identitätsfunktor.

Beispiel 3.5.6. Die Urbild-Bereinigung des Funktors M^- (siehe Beispiel 1.3.8) für ein kommutatives Monoid $(M, 0_M, +)$ liefert den Funktor G . Eine Abbildung $\sigma : X \rightarrow M$ ist in GX enthalten, wenn die folgenden Bedingungen gelten:

- $\{x \in X \mid \sigma(x) \neq 0\}$ ist endlich.
- Für alle $x_1, \dots, x_n \in X$ gilt: $\sum_{i \in \{1..n\}} \sigma(x_i) = 0 \Rightarrow \forall i \in \{1..n\}. \sigma(x_i) = 0$.

Beispiel 3.5.7. Die Urbild-Bereinigung des Nachbarschaftsfunktors 2^{2^-} liefert einen Unterfunktor \mathcal{S} . Ein System σ ist in $\mathcal{S}X$ enthalten, wenn die folgenden Bedingungen gelten:

- Wenn $\emptyset \notin \sigma$ und $X \in \sigma$, dann gilt für alle $U \in \sigma$ mit $U^C \notin \sigma$: für alle $V \subseteq X$:

$$V \in \sigma \Leftrightarrow U \cap V \in \sigma.$$

- Wenn $\emptyset \in \sigma$ und $X \notin \sigma$, dann gilt für alle $U \in \sigma$ mit $U^C \notin \sigma$: für alle $V \subseteq X$:

$$V \in \sigma \Leftrightarrow U^C \cap V \in \sigma.$$

- Wenn $\emptyset \in \sigma$ und $X \in \sigma$, dann gilt für alle $U \in \sigma$ mit $U^C \in \sigma$: für alle $V \subseteq X$:

$$V \in \sigma \Leftrightarrow U \cap V \in \sigma.$$

- Wenn $\emptyset \notin \sigma$ und $X \notin \sigma$, dann gilt für alle $U \notin \sigma$ mit $U^C \notin \sigma$: für alle $V \subseteq X$:

$$V \in \sigma \Leftrightarrow U \cap V \in \sigma.$$

Eine genaue Erläuterung von diesem Beispiel folgt in Kapitel 7.

Wir wollen jetzt beweisen, dass der Funktor \tilde{F} alle Urbilder erhaltenden Unterfunktoren umfasst. Wir zitieren zuerst den folgenden Satz:

Satz 3.5.8 ([Gum05]). *Sei $\eta : G \xrightarrow{\bullet} F$ eine subkartesische natürliche Transformation zwischen Mengenfunktoren. Erhält F Urbilder, dann auch G .*

Im Fall von Unterfunktoren bedeutet der vorherige Satz, dass die Urbilderhaltung auf Unterfunktoren übertragen wird, wenn die natürliche Transformation subkartesisch ist. Der Satz wird benötigt, um zu zeigen, dass die Unterfunktoren von \tilde{F} wieder Urbilder erhaltend sind.

Satz 3.5.9. *Sei G ein Unterfunktor von F . G erhält genau dann Urbilder, wenn G Unterfunktor von \tilde{F} ist.*

Beweis. " \rightarrow ": Aus der Urbilderhaltung von G folgt: für alle $U \subseteq X$ und für alle $x \in GX$ mit $G\chi_U(x) \in G \subseteq_1^2 [G1]$, gibt es ein $u \in GU$ mit $G \subseteq_U^X(u) = x$.

Wir wollen jetzt zeigen, dass $GX \subseteq \tilde{F}X$. Gegeben seien ein $x \in GX$ und $U \subseteq X$. Wir nehmen an: $F\chi_U(x) \in F \subseteq_1^2 [F1]$. Wir suchen ein $u \in FU$ mit $F \subseteq_U^X(u) = x$:

$$\begin{aligned} & F\chi_U(x) \in F \subseteq_1^2 [F1] \\ \Rightarrow & G\chi_U(x) \in F \subseteq_1^2 [F1] && x \in GX \text{ und } G \hookrightarrow F \text{ nat.} \\ \Rightarrow & G\chi_U(x) \in G \subseteq_1^2 [G1] && G\chi_U(x) \in G2 \wedge G \hookrightarrow F \text{ subkart. (Lem. 3.3.1)} \\ \Rightarrow & \exists u \in GU \text{ mit } G \subseteq_U^X(u) = x \\ \Rightarrow & \exists u \in FU \text{ mit } F \subseteq_U^X(u) = x && G \hookrightarrow F \text{ nat.} \end{aligned}$$

" \leftarrow ": Aus dem Lemma 3.3.1 folgt, dass $G \hookrightarrow \tilde{F}$ subkartesisch ist. Aufgrund des Satzes 3.5.8 reicht es zu zeigen, dass \tilde{F} Urbilder erhält.

Seien $x \in \tilde{F}X$ und $U \subseteq X$. Wir nehmen an: $\tilde{F}\chi_U(x) \in \tilde{F} \subseteq_1^2 [\tilde{F}1]$. Wir suchen ein $u \in \tilde{F}U$ mit $\tilde{F} \subseteq_U^X (u) = x$.

Laut Definition von \tilde{F} gilt: $\tilde{F}\chi_U(x) = F\chi_U(x)$.

Somit ist

$$F\chi_U(x) \in \tilde{F} \subseteq_1^2 [\tilde{F}1] \subseteq F \subseteq_1^2 [F1].$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} & F\chi_U(x) \in F \subseteq_1^2 [F1] \\ \Rightarrow & x \in F \subseteq_U^X [FU] && x \in \tilde{F}X \\ \Rightarrow & \exists u \in FU \text{ mit } F \subseteq_U^X (u) = x \\ \Rightarrow & \exists u \in \tilde{F}U \text{ mit } \tilde{F} \subseteq_U^X (u) = x && x \in \tilde{F}X \text{ und } \tilde{F} \hookrightarrow F \text{ subkart. (Lemma 3.3.1)} \end{aligned}$$

□

Beweis vom Satz 3.5.3. Die beiden Funktoren \bar{F} und \tilde{F} sind Unterfunktoren von F . Es genügt zu zeigen, dass $\bar{F}X = \tilde{F}X$ für jede Menge X gilt.

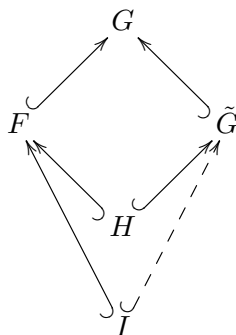
" \subseteq ": \bar{F} erhält Urbilder, wegen des Satzes 3.5.1. Aus dem obigen Satz folgt, dass \bar{F} Unterfunctor von \tilde{F} ist.

" \supseteq ": Da \tilde{F} Urbilder erhält, folgt aus der Definition von \bar{F} , dass $\tilde{F}X \subseteq \bar{F}X$ gilt. □

Beispiel 3.5.10. Aus dem Satz 3.5.9 und dem Beispiel 1.3.11 folgt, dass der leere konstante Funktor C_\emptyset und der Identitätsfunctor $Id(-)$ die einzigen Urbilder erhaltenden Unterfunktoren des Funktor \mathcal{B} sind.

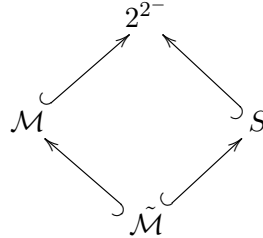
Satz 3.5.11. Sei F ein Unterfunctor von G . Seien $\eta : F \hookrightarrow G$ und $\mu : \tilde{G} \hookrightarrow G$ die jeweiligen natürlichen Transformationen. Der Schnitt der beiden natürlichen Transformationen liefert den Urbilder erhaltenden Funktor \tilde{F} .

Beweis. Sei H der Funktor, der aus dem Schnitt resultiert. Wir wollen jetzt zeigen: $H = \tilde{F}$. Wir verwenden den Satz 3.5.9. Sei I ein Unterfunctor von F , der Urbilder erhält. Es ist zu zeigen, dass I Unterfunctor von H ist. I ist offensichtlich auch ein Unterfunctor von G . Aus dem Satz 3.5.9 folgt, dass I auch ein Unterfunctor von \tilde{G} ist. Da H der Schnitt ist, ist I Unterfunctor von H .



□

Beispiel 3.5.12. Die Urbild-Bereinigung des monotonen Nachbarschaftsfunktors \mathcal{M} erhält man, indem den Schnitt zwischen den Funktoren \mathcal{S} und \mathcal{M} bildet.



$\tilde{\mathcal{M}}X$ enthält alle Systeme $\sigma \in \mathcal{M}X$, die notwendigerweise die folgenden Bedingung erfüllen:

Für alle $U \in \sigma$ mit $U^C \notin \sigma$: für alle $V \subseteq X$: $V \in \sigma \Leftrightarrow U \cap V \in \sigma$.

3.6 Schwache Kernpaarerhaltung

Wir zitieren zuerst ein wichtiges Resultat aus [GS05], das die Auswirkung der schwachen Kernpaarerhaltung in einer einzigen Coalgebra verdeutlicht.

Theorem 3.6.1 ([GS05]). *Ein Funktor F erhält genau dann schwache Kernpaare, wenn jede Kongruenz eine Bisimulation ist.*

Für die schwache Kernpaarerhaltung verwenden wir ein nützliches Resultat von H.P. Gumm und C. Henkel, das in der Diplomarbeit von C. Henkel [Hen10] erschienen ist:

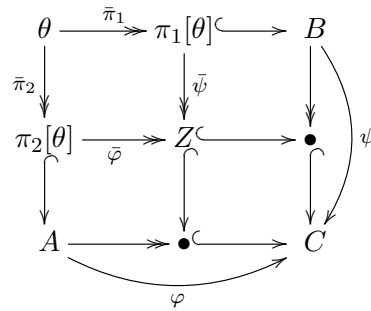
Theorem 3.6.2 ([Hen10]). *Ein Funktor F erhält genau dann schwache Kernpaare, wenn er Epi-Pullbacks schwach erhält.*

Wir werden jetzt den Zusammenhang zwischen schwacher Kernpaarerhaltung und exakten Kongruenzen verdeutlichen.

Theorem 3.6.3. *F erhält genau dann schwache Kernpaare, wenn jede exakte 2-Kongruenz eine Bisimulation ist.*

Beweis. " \rightarrow ": Sei $\theta = \ker(\varphi, \psi)$ eine exakte 2-Kongruenz zwischen zwei Coalgebren \mathcal{A} und \mathcal{B} . Dann sind $\pi_1[\theta] \leq \mathcal{A}$ und $\pi_2[\theta] \leq \mathcal{B}$ Untercoalgebren. Die (epi, mono)-Zerlegungen

von φ und ψ gestatten eine Zusammensetzung des Pullbacks $\ker(\varphi, \psi)$ auf folgende Weise:

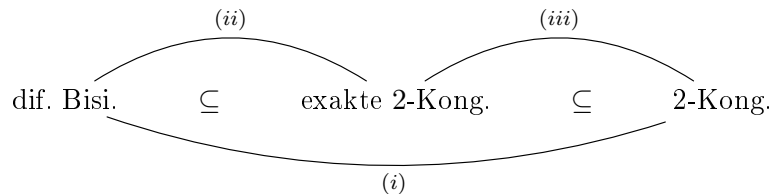


Wir wollen nun zeigen, dass θ eine Bisimulation zwischen den Coalgebren $\pi_1[\theta]$ und $\pi_2[\theta]$ ist. Aufgrund von Lemma 3.2.1 reicht es zu zeigen, dass F den Pullback $(\theta, \bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2)$ von $(\bar{\varphi}, \bar{\psi})$ schwach erhält. Das folgt aber direkt aus der Voraussetzung wegen des Theorems 3.6.2.

" \leftarrow ": Aufgrund von Satz 3.6.1 reicht es zu zeigen, dass jede Kongruenz eine Bisimulation ist. Sei θ eine Kongruenz auf einer Coalgebra \mathcal{A} . Dann ist θ wieder eine 2-Kongruenz zwischen \mathcal{A} und sich selbst. Aus der Reflexivität von θ folgt, dass θ exakt ist. Aus der Voraussetzung folgt dann, dass θ eine Bisimulation ist. \square

3.7 Fazit

Es ist bereits bekannt, dass (i) zur schwachen Pullbackerhaltung äquivalent ist ([GS00]). Analog dazu fanden wir äquivalente Aussagen für die schwachen Kerpaareerhaltung (ii) und die Urbildererhaltung (iii).



Inspiziert von der Transformation bei ([Trn69, Bar93]), aus der ein gesunder Funktor entsteht, definieren wir eine neue Transformation, die einen Urbilder erhaltenden Funktor liefert. Den resultierenden Funktor \tilde{F} nennen wir Urbilder erhaltenden Funktor. Außerdem sind die Urbilder erhaltenden Unterfunktoren von F genau die Unterfunktoren von \tilde{F} . Im nächsten Kapitel werden wir sehen, wie die Korrektheit und die Vollständigkeit der Modallogik durch eine bestimmte Familie von Boxen $(\Box_i)_{i \in I}$ erreichbar sind.

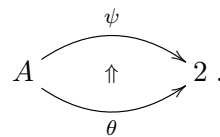
4 Similarität via Predicate Liftings und Boxen

4.1 Einleitung und Literatur

Die coalgebraische Modallogik wurde von D. Pattinson in [Pat03] und von L. Schröder [Sch05] eingeführt. Daraus entstanden neue Varianten der Modallogik [CKP⁺08, MPS09, SP10]. Oft wurde die logische Äquivalenz als Bisimulation charakterisiert. Dies lieferte “automatisch” die logische Äquivalenz bisimilarer Zustände. In diesem Zusammenhang haben D. Gorín und L. Schröder den Begriff der λ -Simulation eingeführt, wobei λ ein Predicate Lifting ist. Dieser Begriff wurde mengentheoretisch definiert und Beweise werden daher ebenfalls mengentheoretisch durchgeführt. Weiterhin wurde vorausgesetzt, dass die Predicate Liftings monoton sind. Wir haben den Begriff der λ -Simulationen durch starke \square -Simulationen ersetzt. Die neue Definition liefert bei vielen Beweisen diagrammatische Vorteile. Unter der Annahme, dass \square monoton ist, stimmt unsere Definition mit der Definition von [GS13] überein. Kapitel 4 basiert hauptsächlich auf dem Artikel [GZ14]. Wir fügen hierbei jedoch den Begriff des \square -Homomorphismus hinzu. Wir werden den Zusammenhang von starken \square -Simulationen mit Aczel-Mendler Bisimulationen und Kongruenzen verdeutlichen.

4.2 Gerichtete Diagramme

Gegeben seien zwei Prädikate $\psi, \theta : A \rightarrow 2$. Wir schreiben $\theta \implies \psi$, wenn $[\theta] \subseteq [\psi]$. Zur Veranschaulichung ist es vorteilhaft, die Inklusionspfeile diagrammatisch darzustellen. Im folgenden Beispiel sagt man, dass das Diagramm *nach oben kommutiert*.

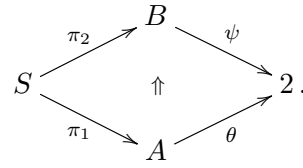


Im Allgemeinen bedeuten die Pfeile, dass $\theta(a) \leq \psi(a)$ für alle $a \in A$. Wir verallgemeinern diese Schreibweise folgendermaßen:

Definition 4.2.1. Gegeben seien $S \subseteq A \times B$ eine Relation, $\theta : A \rightarrow 2$ und $\psi : B \rightarrow 2$ Prädikate. Wir definieren

$$\theta \xrightarrow{S} \psi \quad : \iff \quad \forall (x, y) \in S. (x \models \theta \implies y \models \psi).$$

Diese Implikation $\theta \xrightarrow{S} \psi$ kann man mit dem folgenden gerichteten Diagramm darstellen:



Falls $A = B$ und $S = \Delta_A$, erhält man $\theta \implies \psi$. Dies hat die gleiche Bedeutung wie $\theta \xrightarrow{\Delta_A} \psi$.

Interpretiert man die Relation $S \subseteq A \times B$ als eine Abbildung zwischen zwei Potenzmengen $S : \mathbb{P}(A) \rightarrow \mathbb{P}(B)$ mit $S(U) := \{b \in B \mid \exists a \in U. (a, b) \in S\}$, erhalten wir die folgende Äquivalenz:

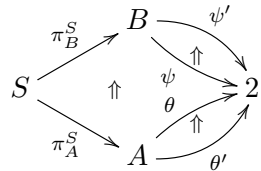
$$\theta \xrightarrow{S} \psi \iff S(\llbracket \theta \rrbracket) \subseteq \llbracket \psi \rrbracket.$$

Diese Schreibweise bezieht sich auf die Schreibweise vom *Hoare Triple*. Eine Relation S wird als Semantik eines imperativen Programms gesehen. Daraus kann man auf einige Eigenschaften schließen. Die folgenden Eigenschaften entsprechen der schwächsten Vorbedingung, der stärksten Nachbedingung und der Hintereinanderausführung:

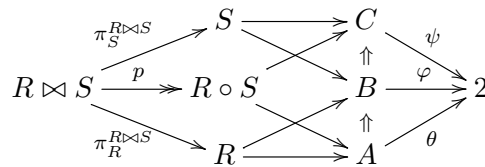
Lemma 4.2.2.

- (i) $\theta' \subseteq \theta \xrightarrow{S} \psi$ impliziert $\theta' \xrightarrow{S} \psi$.
- (ii) $\theta \xrightarrow{S} \psi \subseteq \psi'$ impliziert $\theta \xrightarrow{S} \psi'$.
- (iii) $\theta \xrightarrow{R} \varphi$ und $\varphi \xrightarrow{S} \psi$ impliziert $\theta \xrightarrow{R \circ S} \psi$.

Beweis. Die ersten beiden Aussagen kann man einfach dem Diagramm entnehmen:



Für die dritte Aussage bilden wir den Pullback $R \bowtie S$ von π_B^R und π_B^S . Wir erhalten dann die Komposition $R \circ S$ durch die (*Epi, Monosource*)-Faktorisierung:



Das Diagramm kommutiert nach oben folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
\theta \circ \pi_A^{R \circ S} \circ p &= \theta \circ \pi_A^R \circ \pi_R^{R \triangleleft S} \\
&\leq \varphi \circ \pi_B^R \circ \pi_R^{R \triangleleft S} \\
&= \varphi \circ \pi_B^S \circ \pi_S^{R \triangleleft S} \\
&\leq \psi \circ \pi_C^S \circ \pi_S^{R \triangleleft S} \\
&= \psi \circ \pi_C^{R \circ S} \circ p.
\end{aligned}$$

Da p surjektiv ist, gilt $\theta \circ \pi_A^{R \circ S} \leq \psi \circ \pi_C^{R \circ S}$. \square

4.3 Starke Simulationen via Boxen

Gegeben sei ein Predicate Lifting λ . Eine Relation $S \subseteq A \times B$ zwischen zwei Coalgebren $\mathcal{A} = (A, \alpha)$ und $\mathcal{B} = (B, \beta)$ heißt λ -Simulation [GS13], wenn für jedes Paar $(x, y) \in S$ und jedes Prädikat $\theta : A \rightarrow 2$ gilt:

$$\alpha(x) \models \lambda_A(\theta) \implies \beta(y) \models \lambda_B(S[\theta]).$$

Im Artikel [GS13] wurde vorausgesetzt, dass λ ein *monotones Predicate Lifting* ist. Dies bedeutet: für alle U, V, A mit $U \subseteq V \subseteq A$ gilt $\lambda_A(U) \subseteq \lambda_A(V)$. Die folgenden Implikationen wurden bereits in [GS13] bewiesen:

- Wenn λ monoton ist, dann ist jede Bisimulation eine λ -Simulation.
- Wenn λ monoton ist, dann erhält jede λ -Simulation positive Formeln.

Die Beweise wurden mengentheoretisch durchgeführt. Um die Begriffe kategorientheoretisch hochzuziehen, führen wir die starken \square -Simulationen ein, die folgende Vorteile haben:

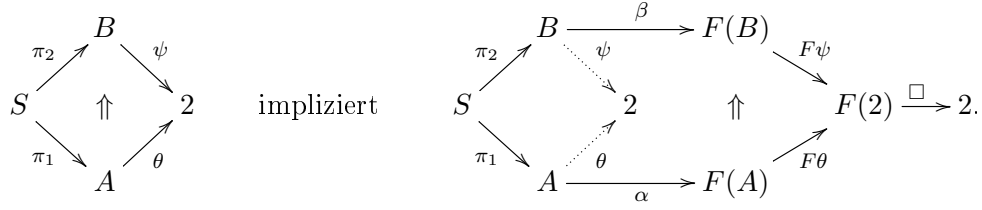
- Beweise sind diagrammatisch.
- Monotonie wird nicht vorausgesetzt.

Solche Simulationen repräsentieren dasselbe wie λ -Simulationen, wobei λ das durch \square definierte Predicate Lifting ist.

Definition 4.3.1. Gegeben sei eine Box \square . Eine Relation $S \subseteq A \times B$ zwischen zwei Coalgebren $\mathcal{A} = (A, \alpha)$ und $\mathcal{B} = (B, \beta)$ heißt *starke \square -Simulation*, wenn für alle Prädikate $\theta : A \rightarrow 2$ und $\psi : B \rightarrow 2$ gilt:

$$\theta \xRightarrow{S} \psi \text{ impliziert } \square \theta \xRightarrow{S} \square \psi.$$

Diagrammatisch:



Jede starke \square -Simulation ist offensichtlich eine \square -Simulation, weil die Prämisse für $\psi = S[\theta]$ erfüllt ist.

Lemma 4.3.2. *Starke \square -Simulationen sind unter Vereinigung und Komposition abgeschlossen, d.h. wenn $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$ starke Simulationen sind, dann auch $R \cup S$ und $R \circ S$.*

Beweis. Die Abgeschlossenheit unter Vereinigung ist leicht zu überprüfen. Wir nehmen die Implikation $\theta \xrightarrow{R \circ S} \psi$ an. Somit gelten $\theta \xrightarrow{R} R[\theta]$ und $R[\theta] \xrightarrow{S} \psi$. Da R und S \square -Simulationen sind, erhalten wir $\square\theta \xrightarrow{R} \square R[\theta]$ und $\square R[\theta] \xrightarrow{S} \square\psi$. Aufgrund des Lemmas 4.2.2 gilt dann $\square\theta \xrightarrow{R \circ S} \square\psi$. \square

Starke \square -Simulationen sind gerichtet definiert. In deren Richtung werden positive Formeln erhalten, d.h. für jede starke \square -Simulation S und für jede positive Formel φ gilt:

$$\varphi \xrightarrow{S} \varphi.$$

Theorem 4.3.3. *Starke \square -Simulationen erhalten positive Formeln.*

Beweis. Gegeben seien eine starke \square -Simulation S zwischen zwei Coalgebren \mathcal{A} und \mathcal{B} , und ein Paar $(x, y) \in S$. Wir zeigen durch Induktion über den Aufbau von Formeln, dass für jede positive Formel ϕ gilt:

$$\phi_{\mathcal{A}} \xrightarrow{S} \phi_{\mathcal{B}}.$$

Gegeben sei $\phi = \square\psi$, wobei ψ eine positive Formel ist. Seien $\psi_{\mathcal{A}}$ und $\psi_{\mathcal{B}}$ in \mathcal{A} und \mathcal{B} definierte Prädikate. Die Induktionsvoraussetzung besagt, dass $\psi_{\mathcal{A}} \xrightarrow{S} \psi_{\mathcal{B}}$. Aus der Definition der starken \square -Simulation folgt $\square\psi_{\mathcal{A}} \xrightarrow{S} \square\psi_{\mathcal{B}}$. \square

Definition 4.3.4. *Eine bidirektionale (starke) \square -Simulation ist eine (starke) \square -Simulation S , wobei ihr Inverses S^{-1} wieder eine \square -Simulation ist.*

Bidirektionale \square -Simulationen erhalten alle Formeln. Dieser Begriff darf nicht mit Bisimulationen verwechselt werden, denn nicht jede Bisimulation ist eine bidirektionale \square -Simulation.

Anhand der beiden Lemmata 1.4.2 und 4.3.2 sieht man leicht:

Lemma 4.3.5. *Die difunktionale Hülle bidirektionaler (starker) \square -Simulation ist wieder eine bidirektionale (starke) \square -Simulation.*

Wir nennen die Vereinigung aller (starken) \square -Simulationen (starke) \square -*Similarität*. Wir bezeichnen sie mit \approx^\square . Die Similarität \approx^\square lässt sich coerzeugen [GS13]. Die Similarität heißt *korrekt*, wenn similitäre Zustände beobachtungsäquivalent sind. Umgekehrt heißt sie *vollständig*.

4.4 Monotonie

Die Monotonie von Boxen (siehe Def. 2.6.4) kann diagrammatisch folgendermaßen dargestellt werden:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \begin{array}{c} \xrightarrow{\psi} \\ \uparrow \\ \xrightarrow{\theta} \end{array} & 2 \\
 & \implies & \\
 F(A) & \begin{array}{c} \xrightarrow{F\psi} \\ \uparrow \\ \xrightarrow{F\theta} \end{array} & F(2) \xrightarrow{\square} 2.
 \end{array}$$

Lemma 4.4.1. *Eine Box $\square : F(2) \rightarrow 2$ ist genau dann monoton, wenn für jede Menge A und je zwei Prädikate θ, ψ auf A mit $\theta \implies \psi$ gilt: $\square \circ F\theta \implies \square \circ F\psi$.*

Wir erhalten dann die folgende Charakterisierung:

Lemma 4.4.2. *$\square : F(2) \rightarrow 2$ ist genau dann monoton, wenn das durch \square definierte Predicate Lifting monoton ist.*

Beweis. " \leftarrow ": Wir nehmen an, dass $\lambda_A = \square \circ F(-)$ monoton ist, Wir setzen $\theta \implies \psi$ und $\square \circ F\theta = 1$ voraus. Somit gilt: $\lambda_A(\theta) = 1$. Aus der Monotonie folgt dann $\lambda_A(\psi) = 1$, d. h. $\square \circ F\psi = 1$.

" \rightarrow ": Gegeben seien $U \subseteq V \subseteq A$ und $u \in \lambda_A(U)$, wobei $\lambda_A(U) = \llbracket \square \circ F\chi_U \rrbracket$ gilt. Dann gelten: $\chi_U \implies \chi_V$ und $(\square \circ F\chi_U)(u) = 1$. Aus der Voraussetzung folgt $(\square \circ F\chi_V)(u) = 1$, d. h. $u \in \lambda_A(V)$. Somit ist λ_A monoton. \square

Die Monotonie wurde bereits durch ternäre Muster charakterisiert. Diese Charakterisierung erschien in der Journalversion [Sch08] von [Sch05] bei L. Schröder. Durch unsere diagrammatische Sicht werden die Beweise offensichtlicher.

Lemma 4.4.3. *\square ist genau dann monoton, wenn für jedes ternäre Muster $p(x, y, z)$ gilt:*

$$p(1, 0, 0) \in \square \implies p(1, 1, 0) \in \square.$$

Beweis. Wenn $\theta \implies \psi$ gilt, bilden wir die Faktorisierung mit $\theta = \chi_{\{x\}} \circ f$ und $\psi = \chi_{\{x,y\}} \circ f$. Die Monotonie wird dann in der folgenden Implikation übersetzt:

$$\begin{array}{ccc}
 A \xrightarrow{f} \{x, y, z\} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\psi} \\ \uparrow \\ \xrightarrow{\theta} \end{array} & 2 \\
 & \implies & \\
 F(A) \xrightarrow{Ff} F(\{x, y, z\}) & \begin{array}{c} \xrightarrow{F\psi} \\ \uparrow \\ \xrightarrow{F\theta} \end{array} & F(2) \xrightarrow{\square} 2
 \end{array}$$

Die äußeren Diagramme kommutieren genau dann nach oben, wenn die Inneren kommutieren. Das Diagramm in der Prämisse kommutiert immer nach oben. Also ist \square genau dann monoton, wenn das innere Diagramm in der Konklusion nach oben kommutiert.

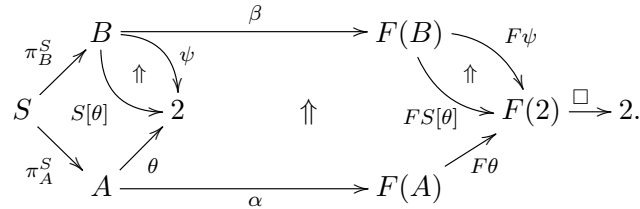
Es genügt die Monotonie für $\theta = \chi_{\{x\}}$ und $\psi = \chi_{\{x,y\}}$ zu überprüfen, d.h.

$$p(1, 0, 0) \in \square \implies p(1, 1, 0) \in \square$$

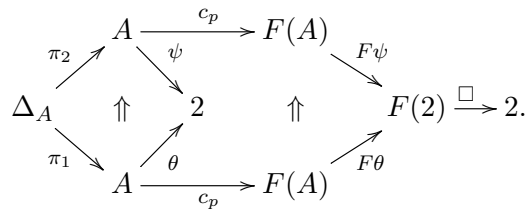
für jedes ternäre Muster $p \in F(\{x, y, z\})$. \square

Theorem 4.4.4. \square ist genau dann monoton, wenn jede \square -Simulation stark ist.

Beweis. " \rightarrow ": Wir nehmen an, dass \square monoton ist. Sei S eine \square -Simulation zwischen zwei Coalgebren $\mathcal{A} = (A, \alpha)$ und $\mathcal{B} = (B, \beta)$. Aus $\theta \xrightarrow{S} \psi$ folgt $S[\theta] \leq \psi$. Somit kommutiert der linke Teil des Diagramms nach oben. Da S eine \square -Simulation ist, kommutiert der rechte Teil des Diagramms zwischen $F\theta$ und $FS[\theta]$ nach oben. Durch die Monotonie kommutiert der obere rechte Teil des Diagramms ebenfalls. Also kommutiert das gesamte Diagramm.



" \leftarrow ": Sei Δ_A die Identitätsrelation auf A . Sie ist offensichtlich eine \square -Simulation. Aus der Voraussetzung folgt, dass sie stark ist. Gegeben seien $p \in F(A)$ und zwei Prädikate $\theta \leq \psi : A \rightarrow 2$. Wähle \mathcal{A} als konstante Coalgebra-Struktur $c_p : A \rightarrow F(A)$. Wenn der linke Teil des Diagramms nach oben kommutiert, dann kommutiert das gesamte Diagramm, da Δ_A eine starke \square -Simulation ist. Somit ist \square monoton.



\square

Theorem 4.4.5. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i) \square ist monoton.
- (ii) Jede Bisimulation ist eine \square -Simulation.
- (iii) Jede Bisimulation ist eine starke \square -Simulation.

Der folgende Satz zeigt, dass Bisimulationen über die Coalgebra-Strukturen im folgenden Sinn erweiterbar sind:

Satz 4.4.6. *Seien $\mathcal{A}_1 = (A_1, \alpha_1)$ und $\mathcal{A}_2 = (A_2, \alpha_2)$ zwei Coalgebren und $R \subseteq A_1 \times A_2$ eine Bisimulation. Dann ist jede Relation R' mit $R \subseteq R' \subseteq \ker \alpha_1 \circ R \circ \ker \alpha_2$ auch eine Bisimulation.*

Beweis. Seien R eine Bisimulation zwischen zwei Coalgebren $\mathcal{A}_1 = (A_1, \alpha_1)$ und $\mathcal{A}_2 = (A_2, \alpha_2)$ und R' eine Relation mit $R \subseteq R' \subseteq \ker \alpha_1 \circ R \circ \ker \alpha_2$. Dann gibt es eine Struktur $\rho : R \rightarrow F(R)$ mit $\alpha_i \circ \pi_i^R = F\pi_i^R \circ \rho$. Sei $\iota : R \rightarrow R'$ die Inklusionsabbildung. Dann gilt offensichtlich $\pi_i^R = \pi_i^{R'} \circ \iota$. Aus der Voraussetzung folgt, dass für jedes Paar $(x', y') \in R'$ ein Paar $(x, y) \in R$ existiert, so dass $\alpha_1(x) = \alpha_1(x')$ und $\alpha_2(y) = \alpha_2(y')$. Das Auswahlaxiom liefert eine Abbildung $\mu : R' \rightarrow R$, die das Folgende erfüllt:

$$\alpha_i \circ \pi_i^{R'} \circ \iota \circ \mu = \alpha_i \circ \pi_i^R.$$

Wir definieren jetzt die Struktur $\rho' : R' \rightarrow F(R')$ mit $\rho' := F\iota \circ \rho \circ \mu$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & R' & & \\
 & \swarrow \mu & \downarrow \pi_i^{R'} & \searrow \pi_i^{R'} & \\
 R & \xrightarrow{\iota} & & \xrightarrow{\quad} & A_i \\
 & \downarrow \rho & \downarrow \rho' & \downarrow \alpha_i & \\
 F(R) & \xrightarrow{F\mu} & F(R') & \xrightarrow{F\pi_i^{R'}} & F(A_i) \\
 & \swarrow F\iota & \searrow F\pi_i^{R'} & & \\
 & & & &
 \end{array}$$

Der Rest des Beweises lässt sich einfach berechnen. □

Korollar 4.4.7. *Sei $\mathcal{A} = (A, \alpha)$ eine Coalgebra. Jede reflexive Relation $R \subseteq \ker \alpha$ ist eine Bisimulation.*

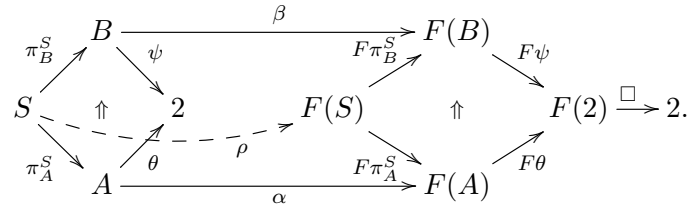
Beweis. Da Δ_A eine Bisimulation ist, ist jede Relation mit

$$\Delta_A \subseteq R \subseteq \ker \alpha = \ker \alpha \circ \ker \alpha = \ker \alpha \circ \Delta_A \circ \ker \alpha$$

eine Bisimulation. □

Wir beweisen nun den Satz 4.4.5.

Beweis. (i) \rightarrow (iii): Gegeben seien $S \subseteq A \times B$ eine Bisimulation zwischen den Coalgebren $\mathcal{A} = (A, \alpha)$ und $\mathcal{B} = (B, \beta)$. Wir setzen $\theta \xrightarrow{S} \psi$ voraus, d.h. der linke Teil des Diagramms kommutiert nach oben. Da \square monoton ist, kommutiert auch das rechte Quadrat mit \square durch die Anwendung von F .



Durch die Bisimulationsstruktur ρ kommutiert das gesamte Diagramm nach oben:

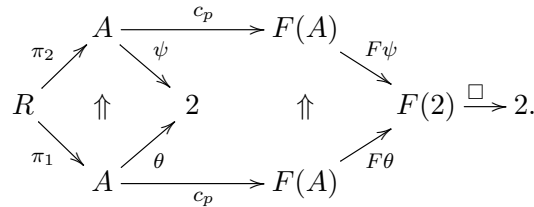
$$\begin{aligned}
 \square \circ F\theta \circ \alpha \circ \pi_A^S &= \square \circ F\theta \circ F\pi_A^S \circ \rho \\
 &\leq \square \circ F\psi \circ F\pi_B^S \circ \rho \\
 &= \square \circ F\psi \circ \beta \circ \pi_B^S.
 \end{aligned}$$

Also ist S eine starke Simulation. Die Implikation $(iii) \rightarrow (ii)$ ist trivial.

$(ii) \rightarrow (i)$: Laut dem Lemma 4.4.3 kann die Monotonie nur für $A = \{x, y, z\}$, $\theta = \chi_{\{x\}}$ und $\psi = \chi_{\{x, y\}}$ überprüft werden. Sei $p \in F(A)$ mit $p(1, 0, 0) \in \square$, d.h. $(\square \circ F\theta)(p) = 1$. Definiere eine Coalgebra \mathcal{A}_p auf A mit einer konstanten Struktur c_p . Laut dem Satz 4.4.6 ist $R := \Delta_A \cup \{(x, y), (y, x)\}$ eine Bisimulation. Es gilt $\psi = R[\theta]$. Aus der Voraussetzung folgt, dass R eine Simulation ist. Somit gilt $\square \circ F\theta \circ c_p \xrightarrow{R} \square \circ F\psi \circ c_p$. Diese Implikation bedeutet:

$$\begin{aligned}
 (\square \circ F\psi)(p) &= (\square \circ F\psi \circ c_p \circ \pi_2)(x, x) \\
 &\geq (\square \circ F\theta \circ c_p \circ \pi_1)(x, x) \\
 &= (\square \circ F\theta)(p) \\
 &= 1,
 \end{aligned}$$

d.h. $p(1, 1, 0) \in \square$. Dies sieht im Diagramm wie folgt aus:



□

Analog zu Bisimulationen lassen sich die starken \square -Simulationen über die Strukturen erweitern:

Satz 4.4.8. *Seien $\mathcal{A}_1 = (A_1, \alpha_1)$ und $\mathcal{A}_2 = (A_2, \alpha_2)$ zwei Coalgebren und $R \subseteq A_1 \times A_2$ eine (starke) \square -Simulation. Dann ist jede Relation R' mit $R \subseteq R' \subseteq \ker \alpha_1 \circ R \circ \ker \alpha_2$ auch eine (starke) \square -Simulation.*

Beweis. Seien R eine starke \square -Simulation zwischen zwei Coalgebren $\mathcal{A}_1 = (A_1, \alpha_1)$ und $\mathcal{A}_2 = (A_2, \alpha_2)$ und R' eine Relation mit $R \subseteq R' \subseteq \ker \alpha_1 \circ R \circ \ker \alpha_2$. Wir wollen zeigen,

dass R' eine Simulation ist. Seien $\varphi : A_1 \rightarrow 2$ und $\psi : A_2 \rightarrow 2$ zwei Prädikate mit $\varphi \xrightarrow{R'} \psi$. Aus der Inklusion $R \subseteq R'$ folgt $\varphi \xrightarrow{R} \psi$. Folglich gilt $\Box\varphi \xrightarrow{R} \Box\psi$, weil R eine starke \Box -Simulation ist. Sei $(x', y') \in R$. Aus der Inklusion $R' \subseteq \ker \alpha_1 \circ R \circ \ker \alpha_2$ ergibt sich ein Paar $(x, y) \in R$ mit $\alpha_1(x') = \alpha_1(x)$ und $\alpha_2(y') = \alpha_2(y)$.

$$\begin{array}{ll}
 x' \models \Box\varphi & \\
 \Leftrightarrow x \models \Box\varphi & \alpha_1(x') = \alpha_1(x) \\
 \Rightarrow y \models \Box\psi & \Box\varphi \xrightarrow{R} \Box\psi \\
 \Leftrightarrow y' \models \Box\psi &
 \end{array}$$

□

4.5 Homomorphismen via Boxen

λ -Homomorphismen wurden bereits bei [GS13] und [Enq13] betrachtet. Wir definieren die \Box -Homomorphismen bezüglich der starken Simulation, um die diagrammatischen Vorteile zu nutzen.

Definition 4.5.1. Eine Abbildung $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ist ein \Box -Homomorphismus, wenn der Graph von f eine starke \Box -Simulation ist.

Es stellt sich die Frage, inwiefern die Homomorphismen und die \Box -Homomorphismen miteinander übereinstimmen.

Theorem 4.5.2. Eine Box \Box ist genau dann monoton, wenn jeder Homomorphismus ein \Box -Homomorphismus ist.

Beweis. " \rightarrow ": Aus dem Theorem 4.4.5 folgt, dass jede Bisimulation auch eine starke \Box -Simulation ist. Folglich sind die Graphen der Homomorphismen auch starke \Box -Simulationen. Somit ist jeder Homomorphismus ein \Box -Homomorphismus.

" \leftarrow ": Gegeben seien $p \in F(A)$ und zwei Prädikate $\theta \leq \psi : A \rightarrow 2$. Wähle \mathcal{A} als konstante Coalgebra-Struktur $c_p : A \rightarrow F(A)$.

Nach der Voraussetzung ist id_A ein \Box -Homomorphismus. Somit ist Δ_A auch eine starke \Box -Simulation. Wenn der linke Teil des Diagramms nach oben kommutiert, dann kommutiert das gesamte Diagramm, da Δ_A eine starke \Box -Simulation ist. Somit ist \Box monoton.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A & \xrightarrow{c_p} & F(A) \\
 & \nearrow \pi_2 & \searrow \psi & & \searrow F\psi \\
 \Delta_A & & & & 2 \\
 & \searrow \pi_1 & \nearrow \theta & & \nearrow F\theta \\
 & & A & \xrightarrow{c_p} & F(A) \\
 & & & & \searrow F\theta \\
 & & & & F(2) \xrightarrow{\Box} 2.
 \end{array}$$

□

Analog zu üblichen Homomorphismen bilden die \square -Homomorphismen unter Voraussetzung der Monotonie eine Kategorie.

Satz 4.5.3. *Die Coalgebren bilden mit \square -Homomorphismen und Komposition genau dann eine Kategorie, wenn \square monoton ist.*

Beweis. Aus dem Lemma 4.3.2 folgt, dass die Komposition von \square -Homomorphismen wieder ein \square -Homomorphismus ist. Der Rest des Beweises lässt sich analog zum obigen Theorem führen. \square

In [Enq13] wurden λ -Homomorphismen auch in Rückrichtung betrachtet, d.h. für alle $x \in X$ und jedes Prädikate $\theta : Y \rightarrow 2$ gilt:

$$\beta(f(x)) \models \lambda_B(\theta) \implies \alpha(x) \models \lambda_A(f^{-1}[\theta]).$$

Daher definieren die rückwärts gerichteten \square -Homomorphismen:

Definition 4.5.4. Eine Abbildung $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ist genau dann ein *rückwärts gerichteter \square -Homomorphismus*, wenn das Inverse ihres Graphen $\text{Gr}(f)^{-}$ eine starke \square -Simulation ist.

Analog erhält man die Resultate:

Theorem 4.5.5. *Eine Box \square ist genau dann monoton, wenn jeder Homomorphismus ein rückwärts gerichteter \square -Homomorphismus ist.*

Satz 4.5.6. *Die Coalgebren bilden mit rückwärts gerichteten \square -Homomorphismen genau dann eine Kategorie, wenn \square monoton ist.*

Zusammenfassend erhält man das folgende Theorem:

Theorem 4.5.7. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- (i) \square ist monoton.
- (ii) Jeder Homomorphismus ist ein \square -Homomorphismus.
- (iii) Jeder Homomorphismus ist ein rückwärts gerichteter \square -Homomorphismus.
- (iv) Die Coalgebren bilden mit \square -Homomorphismen und Komposition eine Kategorie.
- (v) Die Coalgebren bilden mit rückwärts gerichteten \square -Homomorphismen und Komposition eine Kategorie.

Beispiel 4.5.8. Betrachte die topologischen Räume als \mathcal{F} -Coalgebren wie im Beispiel 2.2.5. Gegeben sei $\square : \mathcal{F}2 \rightarrow 2$ mit $\square(\sigma) := \{1\} \in \sigma$. Es ist lediglich zu prüfen, dass \square monoton ist. Die rückwärts gerichteten \square -Homomorphismen sind genau die stetigen Abbildungen. Dieser Zusammenhang wurde bereits für λ -Homomorphismen in [Enq13] und für schwache Homomorphismen in [Chu07] betrachtet.

4.6 Kongruenzen und Trennbarkeit

Theorem 4.6.1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- (i) \square ist monoton.
- (ii) Jede Kongruenz ist eine \square -Simulation.
- (iii) Jede 2-Kongruenz ist eine \square -Simulation.
- (iv) Jede 2-Kongruenz ist eine starke \square -Simulation.

Beweis. (i) \rightarrow (iv): Jede 2-Kongruenz $\theta = \ker(\varphi, \psi)$ ist die Komposition zweier Relationen: $\theta = \text{Gr}(\varphi) \circ \text{Gr}(\psi)^-$, wobei $\text{Gr}(\varphi)$ und $\text{Gr}(\psi)$ die Graphen von φ und ψ sind. Die Graphen von Homomorphismen sind Bisimulationen ([Rut00]). Da \square monoton ist, gilt laut dem Satz 4.4.5, dass $\text{Gr}(\varphi)$ und $\text{Gr}(\psi)^-$ starke \square -Simulationen sind. Laut dem Lemma 4.3.2 ist die Komposition wieder eine starke \square -Simulation. Somit ist θ eine starke \square -Simulation. (iv) \rightarrow (iii) gilt offensichtlich, weil jede starke \square -Simulation eine \square -Simulation ist.

(iii) \rightarrow (ii) ist offensichtlich, da jede Kongruenz eine 2-Kongruenz ist.

(ii) \rightarrow (i) ist analog zu (iii) \rightarrow (ii) des Theorems 4.4.5. Die Relation R ist eine Kongruenz in der konstanten Coalgebra $\mathcal{A}_p = \mathcal{A}_{p(x,y,z)}$, da R der Kern vom Homomorphismus ist, der von $\mathcal{A}_p = \mathcal{A}_{p(x,y,z)}$ zu der konstanten Coalgebra $\mathcal{A}_{p(x,x,z)}$ mit Grundmenge $\{x, z\}$ gegeben ist. \square

Gesucht ist eine Familie von Boxen $(\square_i)_{i \in I}$, die ausreichend ist, um nachzuweisen, dass die coalgebraische Modallogik vollständig bleibt. Wir wollen den Begriff der Trennbarkeit von Funktoren zu Boxen übertragen:

Definition 4.6.2. $(\square_i)_{i \in I}$ ist 2-trennbar, wenn:

$$\forall p \neq q \in F(X). \exists \phi : X \rightarrow 2. \exists i \in I. (\square_i \circ F\phi(p) \neq \square_i \circ F\phi(q)).$$

Aus der Trennbarkeit der Boxen folgt die Trennbarkeit des Funktors. Daher wird die Modallogik vollständig. Im Fall von einer Familie von Boxen $(\square_i)_{i \in I}$ ist dann eine Relation R eine (*starke*) *Simulation bezüglich* $(\square_i)_{i \in I}$, wenn R für jedes $i \in I$ eine (*starke*) \square_i -Simulation ist.

Theorem 4.6.3. *Wenn $(\square_i)_{i \in I}$ 2-trennbar ist, dann ist jede difunktionale bidirektionale starke Simulation bezüglich $(\square_i)_{i \in I}$ eine 2-Präkongruenz, insbesondere eine 2-Kongruenz.*

Beweis. Sei S eine difunktionale starke Simulation bezüglich $(\square_i)_{i \in I}$ zwischen den Coalgebren $\mathcal{A} = (A, \alpha)$ und $\mathcal{B} = (B, \beta)$ mit π_1, π_2 Projektionen.

Wir bilden den Pushout $(P, f : A \rightarrow P, g : B \rightarrow P)$ von (S, π_1, π_2) in *Set*. Da S difunktional ist, ist (S, π_1, π_2) der Pullback von f und g in *Set*. Wir wollen nun zeigen, dass $(FP, Ff \circ \alpha, Fg \circ \beta)$ Konkurrent vom Pushout (P, f, g) in *Set* ist, d.h.

$$Ff \circ \alpha \circ \pi_1 = Fg \circ \beta \circ \pi_2.$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & A & \xrightarrow{f} & P & \xrightarrow{\phi} 2 \\
 S & \xrightarrow{\pi_1} & & \nearrow g & \\
 & \downarrow \pi_2 & & & \\
 & B & & & \\
 & \downarrow & \xrightarrow{Ff} & F(P) & \xrightarrow{F\phi} F(2) \xrightarrow{\square_i} 2 \\
 & F(A) & & \downarrow Fg & \\
 & & & F(B) &
 \end{array}$$

Sei $(x, y) \in S$. Da $(\square_i)_{i \in I}$ 2-trennbar ist, genügt es zu zeigen, dass für jedes $i \in I$ und jedes Prädikate $\phi : P \rightarrow 2$ gilt:

$$Ff \circ \alpha(x) \models \square_i \theta \iff Fg \circ \beta(y) \models \square_i \theta.$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & B & \xrightarrow{\beta} & F(B) & \\
 S & \xrightarrow{\pi_2} & & \searrow F(\phi \circ g) & \\
 & \circ & & & \uparrow \\
 & \downarrow \pi_1 & & & \\
 & A & \xrightarrow{\alpha} & F(A) & \xrightarrow{F(\phi \circ f)} F(2) \xrightarrow{\square_i} 2 \\
 & & & & \nearrow F(\phi \circ f)
 \end{array}$$

Der linke Teil des Diagramms kommutiert, da (P, f, g) ein Pushout ist. Insbesondere kommutiert er nach oben. Da S eine starke Simulation ist, gilt:

$$Ff \circ \alpha(x) \models \square \theta \implies Fg \circ \beta(y) \models \square \theta.$$

Da S^- eine starke Simulation ist, gilt analog:

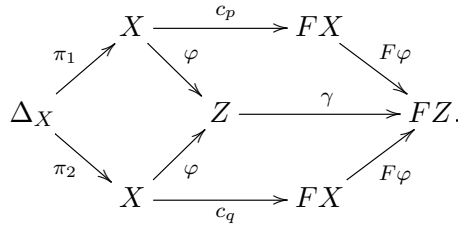
$$Fg \circ \beta(y) \models \square \theta \implies Ff \circ \alpha(x) \models \square \theta.$$

□

Theorem 4.6.4. *Sei F ein gesunder Funktor. Ist jede difunktionale Simulation bezüglich $(\square_i)_{i \in I}$ eine 2-Kongruenz, dann ist $(\square_i)_{i \in I}$ 2-trennbar.*

Beweis. Gegeben seien $p, q \in FX$ mit $p \models \square_i \theta \iff q \models \square_i \theta$ für jedes $i \in I$ und für jedes $\theta : X \rightarrow 2$. Zu zeigen ist nun: $p = q$. Der Beweis lässt sich in zwei Fälle zerlegen:

Fall 1. $X \neq \emptyset$: Wir definieren zwei Coalgebren $\mathcal{X}_p = (X, c_p)$ und $\mathcal{X}_q = (X, c_q)$, wobei c_p und c_q konstante Abbildungen sind. Aus der Voraussetzung folgt, dass Δ_X eine difunktionale Simulation zwischen \mathcal{X}_p und \mathcal{X}_q ist. Aus der Voraussetzung folgt, dass Δ_X eine 2-Kongruenz ist. Es gibt dann zwei Homomorphismen $\varphi : \mathcal{X}_p \rightarrow \mathcal{Z} = (Z, \gamma)$ und $\psi : \mathcal{X}_q \rightarrow \mathcal{Z}$ mit $\Delta_X = \ker(\varphi, \psi)$. Man sieht leicht, dass $\varphi = \psi$ und φ injektiv ist.



Das Diagramm kommutiert, weil φ ein Homomorphismus ist, d.h.

$$(F\varphi)(p) = (F\varphi \circ c_p \circ \pi_1)(x) = (F\varphi \circ c_q \circ \pi_2)(x) = (F\varphi)(q).$$

Somit gilt $p = q$.

Fall 2. $X = \emptyset$: Aus der Annahme, dass F gesund ist, folgt, dass $F\iota : F\emptyset \rightarrow F1$ injektiv ist. Um zwei Elemente $p \neq q \in F\emptyset$ durch ein Prädikat zu trennen, reicht es ihre Bilder $(F\iota)(p) \in F(1)$ und $(F\iota)(q) \in F(1)$ durch ein Prädikat zu trennen. Im ersten Fall wird diese Trennung dann erfüllt.

□

Korollar 4.6.5. *Wenn $(\square_i)_{i \in I}$ monoton und 2-trennbar ist, dann sind die difunktionalen bidirektionalen Simulationen bezüglich $(\square_i)_{i \in I}$ genau die 2-Kongruenzen.*

Wenn $(\square_i)_{i \in I}$ monoton ist, dann ist die \square -Similarität korrekt, und wenn $(\square_i)_{i \in I}$ 2-trennbar ist, dann ist die \square -Similarität vollständig. Eine weitere Folgerung, die in [GS13] erschien, ergibt sich aus:

Korollar 4.6.6. *Sei $(\square_i)_{i \in I}$ monoton. Die difunktionale bidirektionale Simulation bezüglich $(\square_i)_{i \in I}$ und die Bisimulationen stimmen genau dann miteinander überein, wenn $(\square_i)_{i \in I}$ 2-trennbar ist, und wenn F schwache Pullbacks erhält.*

Man sieht jetzt wegen der Korrektheit und Vollständigkeit der \square -Similarität, dass es sinnvoll ist, die logische Sprache auf monotone gemeinsam trennbare Boxen zu beschränken.

4.7 Fazit

Wir verdeutlichten die Rolle der Monotonie durch äquivalente Aussagen:

- Jede \square -Simulation ist stark.
- Jede Bisimulation ist eine starke \square -Simulation.
- Jede 2-Kongruenz ist eine starke \square -Simulation.

Unter der Annahme, dass eine Familie der Boxen $(\square_i)_{i \in I}$ zusätzlich trennbar ist, fallen die difunktionalen Simulationen und die 2-Kongruenzen zusammen. Auf Grundlage dessen zeigten wir die Implikationen:

- Ist $(\Box_i)_{i \in I}$ trennbar, dann ist jede difunktionale starke Simulation eine 2-Kongruenz.
- Die umgekehrte Richtung gilt, wenn $(\Box_i)_{i \in I}$ monoton ist. Ist jede difunktionale starke Simulation eine 2-Kongruenz, dann ist $(\Box_i)_{i \in I}$ trennbar.

Unter der Voraussetzung, dass eine Familie der monotonen trennbaren Boxen $(\Box_i)_{i \in I}$ existiert, bilden die 2-Kongruenzen zwischen je zwei Coalgebren \mathcal{A} und \mathcal{B} einen vollständigen Verband. In diesem Fall ist das Supremum durch die difunktionale Hülle der Vereinigung gegeben.

Im nächsten Kapitel werden wir die Similarität allgemeiner betrachten, indem man statt der Prädikate Relationen hochzieht, d.h. Simulationen werden bezüglich des Relation Liftings definiert.

5 Similarität via Relation Lifting

5.1 Einleitung und Literatur

Im Vergleich zur Bisimilarität $\sim_{\mathcal{A}}$ scheint der Begriff „Beobachtungsäquivalenz“ $\nabla_{\mathcal{A}}$ näher an der logischen Äquivalenz zu liegen. Nun stellt sich die Frage, ob sich die 2-Kongruenzen als „Simulationen“ charakterisieren lassen.

Die Definition von Bisimulationen von C. Hermida und B. Jacobs zieht jede Relation $R \subseteq A \times B$ zu einer bestimmten Relation $\bar{F}R \subseteq F(A) \times F(B)$ hoch, auch bekannt als *Barr-Extension* von R . Allgemeiner hat A. Thijs in [Thi96] bestimmte Relation Liftings L betrachtet, die *relator* genannt werden. Hughes und Jacobs verallgemeinern in [HJ03] die Definition von Barr-Extension. Die Relation Liftings führten zu dem Begriff *L-Simulationen*. Diese Similarität wurde in anderen Arbeiten ([HJ03, Bal00, C04, MV12, Mar, Enq13, ES14]) weiter behandelt. Levy untersuchte in [Lev11] die Similarität auf der terminalen Coalgebra.

Das Auswahlaxiom vorausgesetzt, fallen beide Begriffe der \bar{F} -Similarität und Bisimilarität zusammen. Mit dem Ziel, dass die *L-Similarität* mit der Beobachtungsäquivalenz übereinstimmt, wurde das Relation Lifting mit den Eigenschaften E0-E4 „Lax-Extension“ eingeführt [MV12]. Unter den Eigenschaften E0-E4 des Relation Liftings stimmen die *L-Simulationen* und 2-Kongruenzen überein. Wir werden diese Eigenschaften zuerst einzeln untersuchen, indem wir Äquivalenzen zwischen Eigenschaften des Relation Liftings L und Eigenschaften der *L-Simulationen* bestimmen.

Zwischen der \square -Similarität und *L-Similarität* in [MV12] tauchten bestimmte Ähnlichkeiten auf [Enq]. In diesem Abschnitt werden wir den Zusammenhang der beiden Similaritäten untersuchen.

5.2 Relation Lifting und *L-Simulation*

Das „Lifting“ \bar{F} ordnet jeder Relation $R \subseteq A \times B$ eine Relation $\bar{F}(R) \subseteq F(A) \times F(B)$ zu. \bar{F} ist unter dem Namen *Barr-Extension* bekannt:

$$\bar{F}(R) := \{(F\pi_A^R(u), F\pi_B^R(u)) \mid u \in F(R)\}.$$

C. Hermida und B. Jacobs lieferten in [HJ98] eine alternative Definition der Bisimulationen. Die Bisimulation ist definiert als eine Relation $R \subseteq A \times B$, die die folgende Eigenschaft erfüllt:

$$x R y \implies \alpha(x) \bar{F}(R) \alpha(y).$$

Man kann \bar{F} auch als *Rel*-Funktork sehen. Es wurde auf verschiedene Weisen gezeigt, dass F schwache Pullbacks erhält, wenn für je zwei Relationen $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$ gilt: $\bar{F}R \circ \bar{F}S \subseteq \bar{F}(R \circ S)$ ([Trn77, Thi96, CKW90, AT90]).

In der allgemeinen Algebra sind Kongruenzen, wie z.B. die Gleichheitsrelation, als verträgliche Relationen definiert, d.h. Relationen, die die folgende Implikation erfüllen:

$$(x_1, \dots, x_n) R^n (y_1, \dots, y_n) \implies f(x_1, \dots, x_n) R f(y_1, \dots, y_n).$$

Analog dazu versteht man in der universellen Coalgebra unter einem „Relation Lifting“ eine Transformation von einer Relation $R \subseteq A \times B$ zu einer Relation $L(R) \subseteq F(A) \times F(B)$.

Definition 5.2.1. Ein *Relation Lifting* L ist eine Transformation, die jeder Relation $R \subseteq A \times B$ eine Relation $L(R) \subseteq F(A) \times F(B)$ zuordnet. Eine Relation $R \subseteq A \times B$ zwischen zwei Coalgebren $\mathcal{A} = (A, \alpha_A)$ und $\mathcal{B} = (B, \alpha_B)$ heißt eine *L-Simulation*, wenn

$$x R y \implies \alpha(x) L(R) \alpha(y)$$

gilt.

Eine Relation R ist genau dann eine *L-Simulation*, wenn das Bild der Abbildung

$$\langle \alpha_A(x), \alpha_B(y) \rangle$$

in $L(R)$ enthalten ist. Das bedeutet, dass eine Abbildung m existiert, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xleftarrow{\pi_A} & R & \xrightarrow{\pi_B} & B \\ \alpha \downarrow & & \circ & m \downarrow & \circ & \downarrow \alpha \\ F(A) & \xleftarrow{\pi_{F(A)}} & LR & \xrightarrow{\pi_{F(B)}} & F(B) \end{array}$$

Beispiel 5.2.2. Das Relation Lifting L ist durch $LR := FX \times FY$ definiert, wobei $R \subseteq X \times Y$ eine beliebige Relation ist. In diesem Fall ist jede Relation eine *L-Simulation*.

Beispiel 5.2.3. Für $L = \bar{F}$ erhält man die Hermida-Jacobs-Bisimulation. Kategorientheoretisch erhält man $\bar{F}(R)$, indem man die Quelle

$$(F\pi_A^R : F(R) \rightarrow F(A), F\pi_B^R : F(R) \rightarrow F(B))$$

als (Epi, Mono-Source) faktorisiert.

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xleftarrow{\pi_{F(A)}} & \bar{F}R & \xrightarrow{\pi_{F(B)}} & F(B) \\ & \swarrow F\pi_A^R & \uparrow q & \searrow F\pi_B^R & \\ & & F(R) & & \end{array}$$

Diese Veranschaulichung zeigt, dass beide Definitionen von Bisimulationen (Hermida-Jacob und Aczel-Mendler) unter dem Auswahlaxiom zusammenfallen. Das Einfügen ei-

ner Bisimulation mit der Struktur $\rho : R \rightarrow F(R)$ im obigen Diagramm liefert eine \bar{F} -Simulation mit $m := q \circ \rho$. Umgekehrt erhält man nach dem Auswahlaxiom ein Rechtsinverses e von q . Dadurch wird die Relation R zur einer Bisimulation mit der Struktur $\rho := e \circ m$.

Beispiel 5.2.4. [HKP07] Seien $R \subseteq X \times Y$ eine beliebige Relation und (P, p_1, p_2) der Pushout der Projektionen von R . Das Relation Lifting Lif ist durch

$$Lif(R) := \ker(Fp_1, Fp_2)$$

definiert. In diesem Fall ist jede 2-Präkongruenz eine Lif -Simulation.

Marti und Venema haben in [MV12] die Lax-Extension mit dem Ziel eingeführt, dass die L -Similarität mit der Beobachtungsäquivalenz übereinstimmt.

Wir definieren die L -Similarität $\approx_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}^L$ zwischen zwei Coalgebren \mathcal{A} und \mathcal{B} als die Vereinigung aller L -Simulationen. Für $L = \bar{F}$ fallen beide Begriffe $\approx_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}^L$ und $\sim_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$ zusammen. Wir werden untersuchen, unter welchen Voraussetzungen die folgenden Aussagen gelten:

- (i) Jede F -Kongruenz ist eine L -Simulation.
- (ii) Jede difunktionale L -Simulation ist eine F -Kongruenz.

Damit die difunktionalen L -Simulationen und 2-Kongruenzen miteinander übereinstimmen, benötigt man die folgenden Eigenschaften:

- (i) (E0) Symmetrie: $(LR)^- \subseteq LR^-$.
- (ii) (E1) Erhaltung der Komposition: $LR \circ LS \subseteq L(R \circ S)$.
- (iii) (E2) Homomorphie: $\text{Gr}(Ff) \subseteq L(\text{Gr } f)$.
- (iv) (E3) Monotonie: $R \subseteq S \implies L(R) \subseteq L(S)$.
- (v) (E4) Erhaltung der Diagonalen: $L(\Delta_X) \subseteq \Delta_{FX}$.

Der Beweis dazu erfolgt in den Theoremen 5.2.8 und 5.3.1. Wir suchen eine äquivalente Charakterisierung für (E0-E4) durch die Eigenschaften von L -Simulationen.

Für jede 2-Kongruenz θ zwischen zwei Coalgebren \mathcal{A} und \mathcal{B} ist die Inverse θ^- eine 2-Kongruenz zwischen \mathcal{B} und \mathcal{A} . Daraus ergibt sich die Eigenschaft:

Eigenschaft (E0) Symmetrie: Ein Relation Lifting L heißt *symmetrisch*, wenn

$$(LR)^- \subseteq LR^-$$

für jede Relation R gilt. Die Symmetrie ist äquivalent dazu, dass $(LR)^- = LR^-$ für jede Relation R gilt.

Lemma 5.2.5. *Ein Relation Lifting L ist genau dann symmetrisch, wenn für alle Coalgebren die Inversen der L -Simulationen wieder L -Simulationen sind.*

Beweis. " \rightarrow " ist trivial nachzurechnen.

" \leftarrow ": Sei $R \subseteq A \times B$. Gegeben sei ein Paar $(\tilde{y}, \tilde{x}) \in (LR)^-$. Die Relation R ist eine L -Simulation zwischen den konstanten Coalgebren $(A, c_{\tilde{x}})$ und $(B, c_{\tilde{y}})$. Nach Voraussetzung ist R^- auch eine L -Simulation. Somit gilt $(\tilde{y}, \tilde{x}) \in LR^-$. \square

Wenn ein Funktor F schwache Pullbacks erhält, dann erfüllt das Relation Lifting \bar{F} für je zwei Relationen $R \subseteq X \times Y$ und $S \subseteq Y \times Z$ die Eigenschaft: $\bar{F}R \circ \bar{F}S \subseteq \bar{F}(R \circ S)$ [Trn77].

Eigenschaft (E1) Erhaltung der Komposition: Ein Relation Lifting L heißt *kompositional*, wenn $LR \circ LS \subseteq L(R \circ S)$ für jede Relation R gilt.

Lemma 5.2.6. *Ein Relation Lifting L ist genau dann kompositional, wenn für alle Coalgebren die Kompositionen von L -Simulationen wieder L -Simulationen sind.*

Beweis. " \rightarrow " ist trivial nachzurechnen.

" \leftarrow ": Seien (\tilde{x}, \tilde{y}) aus LR und (\tilde{y}, \tilde{z}) aus LS . Der Rest ist offensichtlich, indem man die Voraussetzung mit konstanten Coalgebren $(A, c_{\tilde{x}})$, $(B, c_{\tilde{y}})$ und $(B, c_{\tilde{z}})$ instanziiert. \square

Graphen von Homomorphismen sind 2-Kongruenzen, weil für jeden Homomorphismus $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ gilt: $\text{Gr}(\varphi) = \ker(\text{id}_{\mathcal{B}}, \varphi)$. Daraus ergibt sich die Eigenschaft:

Eigenschaft (E2) Homomorphie: Ein Relation Lifting L heißt *homomorph*, wenn $\text{Gr}(Ff) \subseteq L(\text{Gr} f)$ gilt.

Lemma 5.2.7. *Ein Relation Lifting L ist genau dann homomorph, wenn für alle Coalgebren die Graphen von Homomorphismen L -Simulationen sind.*

Beweis. Der Beweis läuft analog zu den vorherigen Lemmatas. \square

Theorem 5.2.8. *Sei L ein symmetrisches und kompositionales Relation Lifting. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (i) L ist homomorph.
- (ii) Jede 2-Kongruenz ist eine L -Simulation.
- (iii) Jede Bisimulation ist eine L -Simulation.

Beweis. (i) \rightarrow (ii): Sei $\theta = \ker(\varphi, \psi)$ eine 2-Kongruenz zwischen zwei Coalgebren \mathcal{A} und \mathcal{B} . Dann ist $\theta = \text{Gr} \varphi \circ (\text{Gr} \psi)^-$. Nach den Lemmatas 5.2.5, 5.2.6 und 5.2.7 folgt, dass θ eine L -Simulation ist.

(i) \rightarrow (iii): Sei R eine Bisimulation zwischen zwei Coalgebren \mathcal{A} und \mathcal{B} . Offensichtlich gilt $R = (\text{Gr} \pi_1)^- \circ \text{Gr} \pi_2$. Nach den Lemmatas 5.2.5, 5.2.6 und 5.2.7 folgt, dass R eine L -Simulation ist.

(ii) \rightarrow (i): Sei $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein Homomorphismus. Es ist zu zeigen, dass der Graph $\text{Gr} \varphi$ eine L -Simulation ist. Laut der Voraussetzung reicht es zu zeigen, dass $\text{Gr} \varphi$ eine F -Kongruenz ist. Das trifft zu, weil $\text{Gr} \varphi = \ker(\varphi, \text{id}_{\mathcal{B}})$ ist.

(iii) \rightarrow (i) folgt direkt, da Graphen von Homomorphismen Bisimulationen sind. \square

Bisimulationen können über die Coalgebra-Strukturen erweitert werden (siehe Satz 4.4.6). Es stellt sich die Frage, aus welcher Eigenschaft die Erweiterbarkeit von Simulationen folgt.

Eigenschaft (E3) Monotonie: Ein Relation Lifting L heißt *monoton*, wenn für je zwei Relationen $R, S \subseteq A \times B$ gilt: $R \subseteq S \implies L(R) \subseteq L(S)$.

Analog zu Bisimulationen können L -Simulationen über die Strukturen erweitert werden (siehe Satz 4.4.6). Wir nennen ein Relation Lifting *erweiterbar*, wenn für alle Coalgebren \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 gilt: Ist eine Relation $R \subseteq A_1 \times A_2$ eine L -Simulation, dann ist jede Relation R' mit $R \subseteq R' \subseteq \ker \alpha_1 \circ R \circ \ker \alpha_2$ auch eine L -Simulation. Dieser Begriff ist äquivalent zur Monotonie:

Satz 5.2.9. *Ein Relation Lifting ist genau dann monoton, wenn es erweiterbar ist.*

Beweis. " \rightarrow ": Diese Richtung ist ähnlich zum Satz 4.4.6, aber nicht identisch mit ihm. Wenn R eine L -Simulation ist, dann gibt es eine Abbildung $\rho : R \rightarrow L(R)$ mit

$$\alpha_i \circ \pi_i^R = \pi_i^{LR} \circ \rho.$$

Sei R' eine Relation mit $R \subseteq R' \subseteq \ker \alpha_1 \circ R \circ \ker \alpha_2$ und sei $\iota : R \rightarrow R'$ die Inklusionsabbildung. Offensichtlich gilt: $\pi_i^R = \pi_i^{R'} \circ \iota$. Aus $R \subseteq R' \subseteq \ker \alpha_1 \circ R \circ \ker \alpha_2$ folgt, dass für jedes Paar $(x', y') \in R'$ ein Paar $(x, y) \in R$ existiert, so dass $\alpha_1(x) = \alpha_1(x')$ und $\alpha_2(y) = \alpha_2(y')$. Das Auswahlaxiom liefert eine Abbildung $\mu : R' \rightarrow R$ mit:

$$\alpha_i \circ \pi_i^{R'} \circ \iota \circ \mu = \alpha_i \circ \pi_i^{R'}.$$

Nach Voraussetzung ist LR eine Teilmenge von LR' . Wir definieren die Coalgebra-Struktur $\rho' : R' \rightarrow L(R')$ als $\rho' := \subseteq \circ \rho \circ \mu$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & R' & & \\
 & \swarrow \mu & \uparrow \iota & \searrow \pi_i^{R'} & \\
 R & \xrightarrow{\subseteq} & R' & \xrightarrow{\pi_i^{R'}} & A_i \\
 \downarrow \rho & & \downarrow \rho' & & \downarrow \alpha_i \\
 L(R) & \xrightarrow{\subseteq} & L(R') & \xrightarrow{\pi_i^{LR'}} & F(A_i) \\
 & & & \swarrow \pi_i^{LR} & \\
 & & & & F(A_i)
 \end{array}$$

" \leftarrow ": Gegeben seien zwei Relationen $R \subseteq R' \subseteq A_1 \times A_2$ und $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in LR$. Es ist zu zeigen, dass $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in LR'$ ist. Wegen $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in LR$, ist R eine L -Simulation zwischen den konstanten Coalgebren $(A_1, c_{\tilde{x}})$ und $(A_2, c_{\tilde{y}})$. Offenbar gilt: $\ker \alpha_1 \circ R \circ \ker \alpha_2 = A_1 \times A_2$. Aus der Voraussetzung folgt, dass R' auch eine L -Simulation ist. Also $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in LR'$. \square

Unter Voraussetzung der Monotonie lässt sich die L -Similarität mit dem gleichen Konzept wie in [Sch01, GS13] coerzeugen, oder durch ein Beweisspiel wie in [Kup09] beschrei-

ben.

Diagonalen sind trivialerweise 2-Kongruenzen. Es stellt sich die Frage, unter welcher Bedingung die Diagonalen L -Simulationen sind.

Eigenschaft (E4) Diagonalen-Erhaltung Ein Relation Lifting L erhält Diagonalen, wenn $L(\Delta_X) \subseteq \Delta_{FX}$.

Bezüglich der L -Simulationen nennen wir ein Relation Lifting *endo-reflexiv*, wenn für je zwei Coalgebren $\mathcal{A}_1 = (A, \alpha_1)$ und $\mathcal{A}_2 = (A, \alpha_2)$ auf derselben Grundmenge Menge A gilt:

Ist Δ_A eine L -Simulation, dann gilt $\alpha_1 = \alpha_2$, d.h. zwischen verschiedenen Strukturen sind die Diagonalen keine L -Simulationen.

Lemma 5.2.10. *Ein Relation Lifting erhält genau dann die Diagonale, wenn es endo-reflexiv ist.*

Beweis. " \rightarrow ": Gegeben seien zwei Coalgebren $\mathcal{A}_1 = (A, \alpha_1)$ und $\mathcal{A}_2 = (A, \alpha_2)$ mit derselben Grundmenge A . Wir setzen voraus, dass Δ_A eine L -Simulation ist. Somit ist $(\alpha_1(x), \alpha_2(x)) \in L\Delta_A \subseteq \Delta_{FA}$ für jedes $x \in A$. Folglich gilt $\alpha_1(x) = \alpha_2(x)$ für jedes $x \in A$.

" \leftarrow ": Sei $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in L(\Delta_A)$. Also ist Δ_A eine L -Simulation zwischen $(A, c_{\tilde{x}})$ und $(A, c_{\tilde{y}})$. Aus der Voraussetzung folgt: $c_{\tilde{x}} = c_{\tilde{y}}$. Also gilt: $\tilde{x} = \tilde{y}$. \square

5.3 Lax-Extension und Kongruenzen

Ein Relation Lifting L heißt in [MV12] *Lax-Extension*, wenn L symmetrisch, kompositional, homomorph und monoton ist (E0-E3). Im Fall der Lax-Extensions sieht man leicht anhand des Theorems 5.2.8, dass 2-Kongruenzen und Bisimulationen L -Simulationen sind. In [MV12] wurden nur die L -Similarität und die Beobachtungsäquivalenz miteinander verglichen. Wir werden den Vergleich allgemeiner durchführen, indem wir alle L -Simulationen betrachten.

Theorem 5.3.1. *Sei L eine Lax-Extension. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i) L erhält die Diagonale.
- (ii) Für jede difunktionale Relation R gilt $L(R) = \ker(Fp_1, Fp_2)$, wobei (p_1, p_2) der Pushout der Projektionen von R ist.
- (iii) Jede difunktionale L -Simulation ist eine 2-Kongruenz.

Beweis. (i) \rightarrow (ii): " \subseteq ": Gegeben sei ein Paar $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in LR$. Betrachte die konstanten Coalgebren $(A, c_{\tilde{x}})$ und $(A, c_{\tilde{y}})$. Da R difunktional ist, erhält man $R = \text{Gr } p_1 \circ (\text{Gr } p_2)^-$.

Somit gilt:

$$\begin{aligned}
 (\text{Gr } p_1)^- \circ R \circ \text{Gr } p_2 &= (\text{Gr } p_1)^- \circ \text{Gr } p_1 \circ (\text{Gr } p_2)^- \circ \text{Gr } p_2 \\
 &= \Delta_{\text{Im}(p_1)} \circ \Delta_{\text{Im}(p_2)} \\
 &= \Delta_{\text{Im}(p_1) \cap \text{Im}(p_2)}.
 \end{aligned}$$

Aus den Lemmatas 5.2.5, 5.2.6 und 5.2.7 folgt, dass $\Delta_{\text{Im}(p_1) \cap \text{Im}(p_2)}$ eine L -Simulation zwischen den konstanten Coalgebren $(P, c_{Fp_1(\tilde{x})})$ und $(P, c_{Fp_2(\tilde{y})})$ ist. Da $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in LR$ gilt, folgt aus den Eigenschaften von L :

$$\begin{aligned}
 (Fp_1\tilde{x}, Fp_2\tilde{y}) &\in (\text{Gr } Fp_1)^- \circ LR \circ \text{Gr } Fp_2 && (\tilde{x}, \tilde{y}) \in LR \\
 &\subseteq L(\text{Gr } p_1)^- \circ LR \circ L(\text{Gr } p_2) && E0 \text{ und } E2 \\
 &\subseteq L((\text{Gr } p_1)^- \circ R \circ \text{Gr } p_2) && E1 \\
 &= L\Delta_{\text{Im}(p_1) \cap \text{Im}(p_2)} \\
 &\subseteq \Delta_P && E3 \text{ und } E4.
 \end{aligned}$$

Somit ist Δ_P auch eine L -Simulation zwischen den konstanten Coalgebren. Aus der Voraussetzung und dem Satz 5.2.10 folgt: $c_{Fp_1\tilde{x}} = c_{Fp_2\tilde{y}}$. Also gilt: $Fp_1\tilde{x} = Fp_2\tilde{y}$.

" \supseteq ": Sei $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in FA \times FB$ mit $Fp_1(\tilde{x}) = Fp_2(\tilde{y})$. Also sind $p_1 : (A, c_{\tilde{x}}) \rightarrow (P, c_{Fp_1\tilde{x}})$ und $p_2 : (B, c_{\tilde{y}}) \rightarrow (P, c_{Fp_1\tilde{x}})$ Homomorphismen. Aus den Sätzen 5.2.5, 5.2.6 und 5.2.7 folgt, dass R eine L -Simulation ist. Also gilt: $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in LR$.

(ii) \rightarrow (iii): Sei R eine difunktionale L -Simulation. Wir bilden den Pushout (P, p_1, p_2) . Da R difunktional ist, reicht es eine Struktur auf P zu finden, so dass p_1 und p_2 Homomorphismen sind. Es genügt dann zu zeigen, dass $(FP, Fp_1 \circ \alpha_1 \circ \pi_{A_1}, Fp_2 \circ \alpha_2 \circ \pi_{A_2})$ ein Konkurrent des Pushouts ist. Anhand des Diagramms sieht man leicht, dass

$$Fp_1 \circ \alpha \circ \pi_1 = Fp_2 \circ \beta \circ \pi_2$$

gilt.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & F(A_2) \\
 \pi_{A_2}^R \nearrow & & \searrow p_2 & \nearrow \pi_{FA_2}^{LR} & \searrow Fp_2 \\
 R & \circ & P & \xrightarrow{\rho} & LR & \circ & FP \\
 \pi_{A_1}^R \searrow & & \nearrow p_1 & \xrightarrow{F\pi_{FA_1}^{LR}} & F(A_1) & \nearrow Fp_1 \\
 & & A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} &
 \end{array}$$

(iii) \Rightarrow (i): Gegeben seien zwei Coalgebren $\mathcal{A}_1 = (A, \alpha_1)$ und $\mathcal{A}_2 = (A, \alpha_2)$ mit derselben Grundmenge A . Wir nehmen an, dass Δ_A eine L -Simulation ist. Laut dem Lemma 5.2.10 reicht es zu zeigen, dass $\alpha_1 = \alpha_2$. Aus der Voraussetzung folgt, dass Δ_A eine 2-Kongruenz zwischen \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 ist. Es gibt dann zwei Homomorphismen $\varphi : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{B}$ und $\psi : \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathcal{B}$ mit $\Delta_A = \ker(\varphi, \psi)$. Es ist leicht zu überprüfen, dass $\varphi = \psi$ und φ injektiv ist. Aus der Homomorphie von φ folgt: $F\varphi \circ \alpha_1 = F\varphi \circ \alpha_2$. Wenn $A = \emptyset$, dann gilt $\alpha_1 = \emptyset = \alpha_2$. Ansonsten ist $F\varphi$ mono, da φ injektiv ist. Somit ist $\alpha_1 = \alpha_2$. \square

5.4 Eindeutigkeit der Lax-Extensions

Im Fall einer Diagonalen erhaltenden Lax-Extension ist eine kanonische Konstruktion wie für Bisimulationen erwünscht. Dafür soll jede Diagonalen erhaltende Lax-Extension eindeutig bestimmt sein, wenn sie existiert. Wir werden uns zuerst auf die difunktionale Relationen begrenzen.

Satz 5.4.1. *Diagonalen erhaltende Lax-Extensions stimmen in difunktionalen Relationen überein.*

Beweis. Seien L_1, L_2 zwei Lax-Extensions, die Diagonalen erhalten. Sei R eine difunktionale Relation. Wir bilden den Pushout (P, p_1, p_2) . Aus dem Theorem 5.3.1 folgt:

$$L_1(R) = \ker(Fp_1, Fp_2) = L_2(R).$$

Für beliebige Relationen fallen Lax Extensions, die Diagonalen erhalten, nicht zusammen. \square

Beispiel 5.4.2. Betrachte den Funktor $(-)^2$. Wir definieren eine Diagonalen erhaltende Lax-Extension:

$$L(R) : = \left\{ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \mid x_1 R y_1 \wedge x_2 R y_2 \vee \right. \\ \left. x_1 R y_1 \wedge x_2 R y_1 \wedge x_1 R y_2 \right\}$$

$$\begin{array}{ccc}
 x_1 \xrightarrow{R} x_2 & \vee & x_1 \xrightarrow{R} x_2 \\
 & & \begin{array}{c} \diagup R \\ \diagdown R \\ y_1 \quad y_2 \end{array} \\
 y_1 \xrightarrow{R} y_2 & &
 \end{array}$$

Die Eigenschaften (E0-E4) lassen sich einfach überprüfen. Da $(-)^2$ schwache Pullbacks erhält, ist die Barr-Extension $\overline{(-)^2}$ auch eine Diagonalen erhaltende Lax-Extension. Die Lax-Extension L und $\overline{(-)^2}$ sind in diesem Beispiel verschieden. Die kleinste Lax-Extension, die Diagonalen erhält, kann man definieren als:

$$L_{inf}(R) : = \{(u, v) \in FX \times FY \mid \text{für jede Lax-Extension } L: (u, v) \in LR\}.$$

Satz 5.4.3. *L_{inf} ist eine Diagonalen erhaltende Lax-Extension. Analog sind Diagonalen erhaltende Lax-Extensions unter beliebigen Schnitten abgeschlossen.*

Gewünscht ist eine kanonische Konstruktion von L_{inf} oder einer beliebigen Lax-Extension.

5.5 L_{\square} -Simulationen

Das Yoneda Lemma liefert $2^{F2} \cong Nat(F(-), 2^{2^-})$. Aus einer Box $\square \subseteq F2$ erhält man eine natürliche Transformation $\eta^{\square} : F \xrightarrow{\bullet} 2^{2^-}$ mit

$$\eta_X^{\square}(u) := \{\varphi : X \longrightarrow 2 \mid \square(F\varphi(u)) = 1\},$$

und umgekehrt liefert eine natürliche Transformation $\eta : F \xrightarrow{\bullet} 2^{2^-}$ eine Box

$$\square_\eta(a) := \eta_2(a)(id_2),$$

d. h.

$$a \in \square_\eta \Leftrightarrow \{1\} \in \eta_2(a).$$

Ersetzt man den Nachbarschaftsfunktor durch den monotonen Nachbarschaftsfunktor $\mathcal{M}(-)$, dann erhält man die monotonen Boxen (siehe Def. 2.6.4).

Lemma 5.5.1. $\{\square \in (2^{F^2}) \mid \square \text{ monoton}\} \cong \text{Nat}(F(-), \mathcal{M}(-)).$

Beweis. " \rightarrow ": Diese Richtung wurde in [MV12] unter Verwendung des Predicate Liftings bewiesen. Wir zeigen es noch einmal in der " \square -Sichtweise". Gegeben seien eine monotone Box \square und ein Element $u \in F(X)$. Wir wollen jetzt zeigen, dass $\eta_X^\square(u) \in \mathcal{M}(X)$ gilt, d.h. aus $\varphi \in \eta_X^\square(u)$ und $\psi \geq \varphi$ folgt $\psi \in \eta_X^\square(u)$:

$$\begin{aligned} & \varphi \in \eta_X^\square(u) \\ \Leftrightarrow & \square(F\varphi(u)) && \text{Def. } \eta^\square \\ \Rightarrow & \square(F\psi(u)) && \square \text{ ist monoton} \\ \Leftrightarrow & \psi \in \eta_X^\square(u). \end{aligned}$$

" \leftarrow ": Ausgehend von einer natürlichen Transformation $\eta : F \xrightarrow{\bullet} \mathcal{M}$ zeigen wir, dass \square_η monoton ist.

Seien $\varphi, \psi : X \rightarrow 2$ zwei Prädikate mit $\varphi \leq \psi$ und u ein Element von $F(X)$.

$$\begin{aligned} & F\varphi(u) \in \square_\eta \\ \Leftrightarrow & \{1\} \in \eta_2(F\varphi(u)) && \text{Def. } \square_\eta \\ \Leftrightarrow & \{1\} \in (\mathcal{M}\varphi)(\eta_X(u)) && \eta \text{ ist natürlich} \\ \Rightarrow & \{1\} \in (\mathcal{M}\psi)(\eta_X(u)) && \varphi \leq \psi \\ \Leftrightarrow & F\psi(u) \in \square_\eta && (\text{analog}). \end{aligned}$$

□

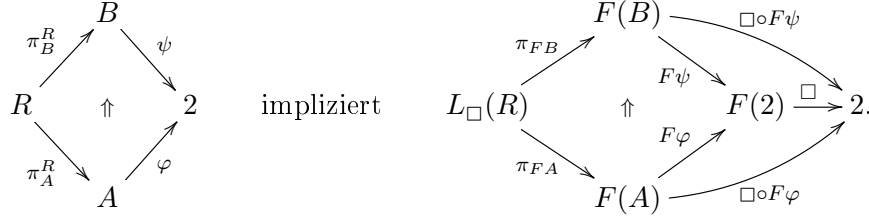
In [MV12] wurde eine Übersetzung von monotonen Boxen zu Relation Liftings gezeigt. Zuerst wurde die monotone Box zu einer natürlichen Transformation von F zu \mathcal{M} gebildet. Dann wurde die Lax-Extension von \mathcal{M} durch die natürliche Transformation zu F „übertragen“. Diese Veranschaulichung der Monotonie über den monotonen Nachbarschaftsfunktor \mathcal{M} wurde auch in [HK04, ESV15] für die monotone Modalogik betrachtet.

Wir versuchen jetzt eine graphische Übersetzung von Boxen \square zu Relation Liftings zu finden.

Definition 5.5.2. Wir definieren $L_{\square}(R)$ als Menge aller Paare $(u, v) \in FA \times FB$, so dass für alle Prädikate $\varphi : A \rightarrow 2$ und $\psi : B \rightarrow 2$ gilt:

$$\varphi \xrightarrow{R} \psi \text{ impliziert } \square F\varphi(u) \xrightarrow{LR} \square F\psi(v)$$

und umgekehrt auch, d.h R^{-} erfüllt die gleiche Eigenschaft. Diagrammatisch sehen wir dann:



Wir nutzen die diagrammatische Darstellung um einen Zusammenhang zu starken \square -Simulationen aufzuzeigen:

Theorem 5.5.3. Sei \square eine Box. Die bidirektionalen starken \square -Simulationen sind genau die L_{\square} -Simulationen.

Beweis. " \Rightarrow ": Gegeben sei eine bidirektionale starke \square -Simulation R zwischen zwei Coalgebren (A, α) und (B, β) . Es ist zu zeigen, dass R eine L_{\square} -Simulation ist, d.h. wir zeigen die Implikation:

$$x R y \implies \alpha(x) L_{\square}(R) \alpha(y).$$

Sei $(x, y) \in R$. Für beliebige Prädikate $\varphi : A \rightarrow 2$ und $\psi : B \rightarrow 2$ mit $\varphi \xrightarrow{R} \psi$ bleibt zu zeigen, dass $\square F\varphi(\alpha(x)) \leq \square F\psi(\beta(y))$ gilt:

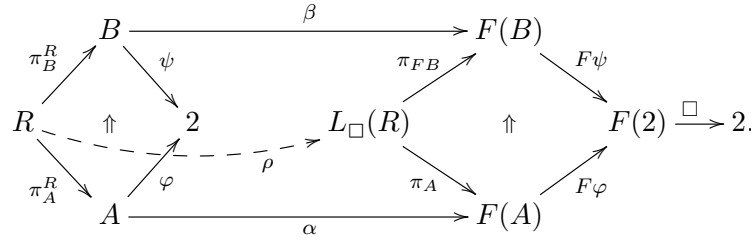
$$\begin{aligned} & \square \circ F\varphi \circ \alpha \\ &= \square \varphi \\ & \xrightarrow{R} \square \psi && R \text{ ist eine starke } \square\text{-Simulation} \\ &= \square \circ F\psi \circ \beta. \end{aligned}$$

Die umgekehrte Implikation von $L_{\square}(R)$ erhält man analog, weil R bidirektional ist.

" \Leftarrow ": Aufgrund von Definition 5.2.1 gibt es eine Abbildung ρ , die jedes Paar $(x, y) \in R$ auf das Paar $(\alpha(x), \beta(y)) \in LR$ abbildet. Wir setzen $\varphi \xrightarrow{R} \psi$ voraus, und wir wollen die Implikation $\square\varphi \xrightarrow{R} \square\psi$ zeigen.

$$\begin{aligned} & \square\varphi \\ &= \square F(\varphi \circ \pi_A) \circ \rho && R \text{ ist } L_{\square}\text{-Simulation} \\ & \xrightarrow{R} \square F(\psi \circ \pi_B) \circ \rho && \square F\varphi \xrightarrow{L_{\square}R} \square F\psi \wedge \text{Def. 5.5.2 von } L_{\square} \\ &= \square\psi. \end{aligned}$$

Im Diagramm sieht der Beweis folgendermaßen aus:



□

Satz 5.5.4. L_{\square} ist symmetrisch, kompositional und monoton.

Beweis. Wegen des vorherigen Theorems reicht es die Eigenschaften bei bidirektionalen starken \square -Simulationen zu prüfen.

Symmetrie: Es ist klar, dass die Inversen der bidirektionalen starken \square -Simulationen (siehe Def. 4.3.4) wieder starke \square -Simulationen sind. Aus dem Satz 5.2.5 folgt, dass L_{\square} symmetrisch ist.

Komposition: Laut dem Lemma 4.3.2 sind starke \square -Simulationen unter Komposition abgeschlossen. Aus dem Satz 5.2.6 folgt, dass L_{\square} kompositional ist.

Monotonie: Nach dem Satz 4.4.8 sind starke \square -Simulationen erweiterbar. Aus dem Satz 5.2.9 folgt, dass L_{\square} monoton ist. □

Theorem 5.5.5. \square ist genau dann monoton, wenn L_{\square} eine Lax-Extension ist.

Beweis. " \rightarrow ": Gegeben sei eine monotone Box \square . Wegen dem vorherigen Satz bleibt dann nur die Homomorphie zu zeigen. Laut dem Theorem 4.4.5 ist jede Bisimulation eine starke \square -Simulation, weil \square monoton ist. Folglich ist jede Bisimulation eine L -Simulation. Aus dem Theorem 5.2.8 folgt, dass L homomorph ist.

" \leftarrow ": Nach der Definition der Lax-Extensions und nach dem Theorem 5.2.8 ist jede Bisimulation eine L_{\square} -Simulation. Laut dem Theorem 5.5.3 ist jede Bisimulation eine starke \square -Simulation. Dann folgt wegen des Theorems 4.4.5, dass \square monoton ist. □

Betrachtet man eine Menge von Boxen, dann definiert man $L_{(\square_i)_{i \in I}}$ als den Schnitt aller L_{\square_i} .

Theorem 5.5.6. Seien F ein gesunder Funktor und $(\square_i)_{i \in I}$ eine Familie monotoner Boxen. Dann ist $(\square_i)_{i \in I}$ genau dann 2-trennbar, wenn $L_{(\square_i)_{i \in I}}$ Diagonalen erhält.

Beweis. " \rightarrow ": Satz 5.4.3 besagt, dass der Schnitt der Lax-Extensions wieder eine Lax-Extension ist. Aus dem vorherigen Theorem folgt, dass $L_{(\square_i)_{i \in I}}$ eine Lax-Extension ist. Wegen des Theorems 5.3.1 bleibt zu zeigen, dass jede difunktionale $L_{(\square_i)_{i \in I}}$ -Simulation eine 2-Kongruenz ist. Laut dem Theorem 5.5.3 ist jede difunktionale $L_{(\square_i)_{i \in I}}$ -Simulation eine difunktionale bidirektionale starke Simulation bezüglich $(\square_i)_{i \in I}$. Da $(\square_i)_{i \in I}$ 2-trennbar ist, sind solche Simulationen nach dem Theorem 4.6.3 2-Kongruenzen.

" \leftarrow ": Unter Voraussetzung der Monotonie sind \square -Simulation stark. Unter Verwendung

vom Theorem 4.6.4 genügt es zu zeigen, dass jede difunktionale starke Simulation bezüglich $(\square_i)_{i \in I}$ eine 2-Kongruenz ist. Laut dem Theorem 5.5.3 wollen wir dann zeigen, dass jede difunktionale $L_{(\square_i)_{i \in I}}$ -Simulation eine 2-Kongruenz ist. Dies folgt direkt aus der Voraussetzung und Theorem 5.3.1. \square

5.6 Fazit

Wir fassen die Äquivalenzen zwischen Eigenschaften des Relation Liftings L und der L -Simulationen in einer Tabelle zusammen:

Relation Lifting L		L -Simulationen
E0 symmetrisch	\Leftrightarrow	unter Inverse abgeschlossen
E1 kompositional	\Leftrightarrow	unter Komposition abgeschlossen
E2 homomorph	\Leftrightarrow	Graphen von Homo. sind L -Simulationen
E3 monoton	\Leftrightarrow	erweiterbar
E4 Diagonalen erhaltend	\Leftrightarrow	endo-reflexiv

Vorausgesetzt, dass L symmetrisch und kompositional ist, erhalten wir die folgenden Äquivalenzen:

- (i) L ist homomorph.
- (ii) Jede 2-Kongruenz ist eine L -Simulation.
- (iii) Jede Bisimulation ist eine L -Simulation.

Setzen wir weiter für L die Monotonie und die Homomorphie voraus, so stimmt L genau mit der Definition des Lax-Extensions überein. Wir erhalten die Äquivalenzen:

- (i) L erhält die Diagonalen.
- (ii) Für jede difunktionale Relation R gilt: $L(R) = \ker(Fp_1, Fp_2)$, wobei (P, p_1, p_2) der Pushout der Projektionen der Relation R ist.
- (iii) Jede difunktionale L -Simulation ist eine 2-Kongruenz.

Zwischen den Resultaten von \square -Simulationen in Kapitel 4 und L -Simulationen in diesem Kapitel tauchten bestimmte Ähnlichkeiten auf. Wir führten eine "kanonische" Übersetzung von Boxen $(\square_i)_{i \in I}$ zu Relation Lifting $L_{(\square_i)_{i \in I}}$ ein. Wir erhalten somit die Äquivalenzen (Analogien) zwischen den beiden Konzepten, wie folgt:

Boxen $(\square_i)_{i \in I}$		Relation Lifting $L_{(\square_i)_{i \in I}}$
Monotonie	\Leftrightarrow	Lax-Extension
Trennbarkeit	\Leftrightarrow	Diagonalen-Erhaltung

6 Transitivität und Difunktionalität der Bisimilarität

6.1 Einleitung und Literatur

Bisimulationen wurden von P. Aczel und N. Mendler in [AM89] als verträgliche Relationen eingeführt. Alternativ dazu haben C. Hermida und B. Jacobs [HJ98] eine äquivalente Definition unter dem Auswahlaxiom gegeben. Der Nachteil der Bisimilarität $\sim_{\mathcal{A}}$ im Gegensatz zu der Beobachtungsäquivalenz $\nabla_{\mathcal{A}}$ ist, dass $\sim_{\mathcal{A}}$ im Allgemeinen nicht transitiv ist. Folglich ist die Bisimilarität nicht fähig die logische Äquivalenz zu „überdecken“. Da die transitive Hülle von Bisimulationen immer eine Kongruenz ist ([AM89]), erhalten wir im Allgemeinen die folgenden Inklusionen:

$$\sim_{\mathcal{A}} \subseteq \sim_{\mathcal{A}}^* \subseteq \nabla_{\mathcal{A}}.$$

In [Gum01] wurde die schwache Pullbackerhaltung untersucht. H.P. Gumm hat viele Resultate aus [Rut00] auf beliebige Funktoren erweitert. Dabei hat er eine neue coalgebraische Konstruktion der terminalen Coalgebra entdeckt, wobei das Coinduktionsprinzip $x \sim y \Rightarrow x = y$ gilt ([Gum99, IH03]).

H.P. Gumm und T. Schröder zeigten in [GS05], dass die Eigenschaften der Bisimulationen und Kongruenzen von den Erhaltungseigenschaften von Pullbacks abhängen. In dem Artikel [GS00] wurde bereits bewiesen, dass sich die Bisimulationen genau dann auf Untercoalgebren einschränken lassen, wenn der Funktor Urbilder erhält. In Kapitel 6 werden wir zunächst versuchen auf diese Urbildererhaltung zu verzichten, indem wir eine ausreichende Voraussetzung zwischen der Bisimulation und den Untercoalgebren finden.

Bisimulationen sind bereits in [AM89] als Relationen zwischen zwei (möglicherweise verschiedenen) Coalgebren \mathcal{A} und \mathcal{B} definiert. In [Kur00] wurde der Begriff Kongruenz zur 2-Kongruenz, d.h. als Kern zweier Homomorphismen, erweitert. 2-Kongruenzen wurden auch von S. Staton in [Sta11] unter den Namen *kernel-bisimulations* untersucht. Im Allgemeinen sind die 2-Kongruenzen keine Bisimulationen. Es ist einfach zu sehen, dass die Bisimilarität $\sim_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ in der Beobachtungsäquivalenz $\nabla_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ enthalten ist. Eine mögliche Verallgemeinerung der Transitivität zwischen verschiedenen Mengen ist die Difunktionalität ([Rig48]). Analog erhalten wir die folgenden Inklusionen:

$$\sim_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \subseteq \sim_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^d \subseteq \nabla_{\mathcal{A},\mathcal{B}}.$$

Die Kongruenzen, die durch die transitive Hülle der Bisimulationen geliefert werden, sind genau die regulären Kongruenzen, d.h. Kerne von Coequalizern [GS05]. Im Artikel [GS05] wurde auch bewiesen, dass der Funktor F genau dann schwache Kernpaare erhält,

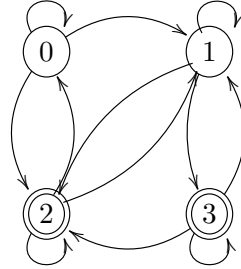
wenn jede Kongruenz eine Bisimulation ist. Kapitel 6 basiert hauptsächlich auf dem Artikel [GZ16]. Wir wollen den Zusammenhang zwischen Bisimulationen und 2-Kongruenzen neu untersuchen. Unter der Voraussetzung, dass ein Relation Lifting L monoton ist, werden wir die Übereinstimmung der difunktionalen Hülle der L -Similarität mit der Beobachtungsäquivalenz untersuchen.

6.2 Einfachheit, Extensionalität und die Beobachtungsäquivalenz

Definition 6.2.1. Eine Coalgebra \mathcal{A} heißt *einfach*, wenn $\nabla_{\mathcal{A}} = \Delta_{\mathcal{A}}$ und *extensional*, wenn $\sim_{\mathcal{A}} = \Delta_{\mathcal{A}}$.

Wegen $\sim \subseteq \nabla$ ist insbesondere jede einfache Coalgebra extensional. Es ist bekannt, dass jede Coalgebra \mathcal{A} genau dann einfach ist, wenn jeder Homomorphismus mit der Domain \mathcal{A} injektiv ist [Gum99]. Für jede Coalgebra \mathcal{A} ist der Faktor $\mathcal{A}/\nabla_{\mathcal{A}}$ einfach. Einfache und extensionale Coalgebren unterscheiden sich [GS01b]. Die Coalgebra des folgenden Beispiels ist extensional aber nicht einfach.

Beispiel 6.2.2.



Gegeben sei eine $2 \times \mathbb{P}_{\leq 3}$ -Coalgebra $\mathcal{A} := (\{0, 1, 2, 3\}, \alpha)$ mit

$$\begin{aligned} \alpha(0) &:= (0, \{0, 1, 2\}) \\ \alpha(1) &:= (0, \{1, 2, 3\}) \\ \alpha(2) &:= (1, \{0, 1, 2\}) \\ \alpha(3) &:= (1, \{1, 2, 3\}). \end{aligned}$$

Es ist leicht zu überprüfen, dass $\nabla = \{(0, 1), (1, 0), (2, 3), (3, 2)\} \cup \Delta_{\mathcal{A}}$ gilt. Wir nehmen jetzt $(0, 1) \in \sim$ an. Dann gibt es $(0, M) \in 2 \times \mathbb{P}_{\leq 3} \sim$ mit

$$\pi_1[M] = (0, 1, 2) \text{ und } \pi_2[M] = (1, 2, 3).$$

Also gilt:

$$M = \{(0, 1), (1, 1), (2, 2), (2, 3)\}.$$

Ein Widerspruch ergibt sich, weil $|M| = 4$. Analog $(2, 3) \notin \sim$. Somit gilt: $\sim = \Delta \neq \nabla$.

Wenn eine terminale Coalgebra \mathcal{T} existiert, dann gibt es einen Zusammenhang zwischen terminaler und einfachen Coalgebren. In diesem Fall sind die einfachen Coalgebren

genau die Untercoalgebren von \mathcal{T} [Gum99]. Das folgende Lemma zeigt, wie man prüft, ob eine Kongruenz θ die größte Kongruenz ∇ ist. Es reicht zu überprüfen, ob die Codomain vom Faktor π_θ einfach ist.

Lemma 6.2.3. *Untercoalgebren einfacher Coalgebren sind auch einfach. Allgemeiner: Wenn $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein Homomorphismus ist, und wenn \mathcal{B} einfach ist, dann gilt: $\ker \varphi = \nabla_{\mathcal{A}}$.*

Beweis. Seien \mathcal{U} eine Untercoalgebra von \mathcal{B} und $\iota : \mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{B}$ die Inklusion, und sei θ eine Kongruenz in \mathcal{U} . Der Pushout von ι mit π_θ liefert einen Homomorphismus $\psi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{P}$. Da \mathcal{B} einfach ist, ist ψ injektiv. Folglich ist π_θ auch injektiv. Somit gilt $\nabla_{\mathcal{U}} = \Delta_{\mathcal{U}}$. Wir zeigen nun den zweiten Teil des Lemmas. Gegeben sei $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein Homomorphismus, wobei \mathcal{B} eine einfache Coalgebra ist. Das Bild von \mathcal{A} unter φ ist eine Untercoalgebra von \mathcal{B} . Laut dem ersten Fall ist diese Untercoalgebra einfach. Also können wir annehmen, dass φ epi ist. Offensichtlich gilt dann: $\ker \varphi \subseteq \nabla_{\mathcal{A}}$. Laut dem Diagrammlemma in Set_F gibt es einen Homomorphismus $\psi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}/\nabla_{\mathcal{A}}$ mit $\pi_{\nabla_{\mathcal{A}}} = \psi \circ \varphi$. Also ist ψ surjektiv und injektiv, weil \mathcal{B} einfach ist. Folglich ist ψ ein Isomorphismus. Dann gilt: $\ker \varphi = \ker \pi_{\nabla_{\mathcal{A}}} = \nabla_{\mathcal{A}}$. \square

Wir wollen jetzt das Lemma 6.2.3 erweitern, indem wir die Senken zweier Homomorphismen betrachten:

Lemma 6.2.4. *Wenn $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ und $\psi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ Homomorphismen sind und wenn \mathcal{C} einfach ist, dann gilt: $\ker(\varphi, \psi) = \nabla_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$.*

Beweis. Betrachte $[\varphi, \psi] : \mathcal{A} + \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ mit $\varphi = [\varphi, \psi] \circ e_{\mathcal{A}}$ und $\psi = [\varphi, \psi] \circ e_{\mathcal{B}}$. Laut dem Lemma 6.2.3 folgt $\ker[\varphi, \psi] = \nabla_{\mathcal{A} + \mathcal{B}}$. Mit Hilfe von Lemma 2.4.2 erhalten wir:

$$\begin{aligned} \varphi(a) = \psi(b) &\iff [\varphi, \psi] \circ e_{\mathcal{A}}(a) = [\varphi, \psi] \circ e_{\mathcal{B}}(b) \\ &\iff (e_{\mathcal{A}}(a), e_{\mathcal{B}}(b)) \in \ker[\varphi, \psi] \\ &\iff (e_{\mathcal{A}}(a), e_{\mathcal{B}}(b)) \in \nabla_{\mathcal{A} + \mathcal{B}} \\ &\iff (a, b) \in \nabla_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}. \end{aligned}$$

\square

Die nachfolgende Konstruktion wird in späteren Beweisen gebraucht. Sie hat als Ziel, die Struktur einer Coalgebra zu modifizieren, ohne die Beobachtungsäquivalenz zu verändern:

Definition 6.2.5. Gegeben seien $\mathcal{A} = (A, \alpha)$ eine Coalgebra, ein Element $x_0 \in A$ und eine Teilmenge $U \subseteq A$. Wir definieren eine neue Coalgebra $\mathcal{A}_{x_0}^U := (A, \bar{\alpha})$ mit derselben Grundmenge, die Elemente aus U auf $\alpha(x_0)$ abbildet. Die anderen Elemente werden durch α weiter abgebildet, d.h.:

$$\bar{\alpha}(x) := \begin{cases} \alpha_{\mathcal{A}}(x_0) & \text{falls } x \in U \\ \alpha_{\mathcal{A}}(x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lemma 6.2.6. *Seien $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein Homomorphismus und $U \subseteq [x_0] \ker \varphi$ für ein $x_0 \in A$. Dann ist die Abbildung φ ein Homomorphismus von $\bar{\mathcal{A}}$ nach \mathcal{B} mit $\bar{\mathcal{A}} := \mathcal{A}_{x_0}^U$. Wenn \mathcal{B} einfach ist, dann gilt $\nabla_{\mathcal{A}} = \nabla_{\bar{\mathcal{A}}}$.*

Beweis. Falls $x \in U$, dann $(F\varphi \circ \bar{\alpha})(x) = (F\varphi)(\alpha_{\mathcal{A}}(x_0)) = \alpha_{\mathcal{B}}(\varphi(x_0)) = \alpha_{\mathcal{B}}(\varphi(x))$. Falls $x \notin U$ bleibt die Homomorphie erhalten. Wenn \mathcal{B} einfach ist, dann gilt $\nabla_{\mathcal{A}} = \ker \varphi = \nabla_{\bar{\mathcal{A}}}$ laut dem Lemma 6.2.3. \square

6.3 Die Restriktion der Bisimulationen

In diesem Abschnitt legen wir eine Bisimulation $R \subseteq A_1 \times A_2$ zwischen den Coalgebren $\mathcal{A}_1 = (A_1, \alpha_1)$ und $\mathcal{A}_2 = (A_2, \alpha_2)$, und Untercoalgebren $\mathcal{U}_i \leq \mathcal{A}_i$ für $i = 1, 2$ fest.

Definition 6.3.1. *R beschränkt sich auf $U := U_1 \times U_2$, wenn $R \upharpoonright U := R \cap (U_1 \times U_2)$ eine Bisimulation zwischen \mathcal{U}_1 und \mathcal{U}_2 ist.*

Im Allgemeinen beschränken sich die Bisimulationen nicht auf Untercoalgebren. Nach [GS00] ist bekannt, dass sich Bisimulationen genau dann auf Untercoalgebren beschränken, wenn der Funktor Urbilder erhält. Wir hatten die Idee eine Annahme an R zu finden, die die Beschränkung von R auf die Untercoalgebren garantiert, ohne zusätzliche Bedingungen für den Funktor anzunehmen.

Theorem 6.3.2. *Gibt es je eine Linksinverse $\kappa_i : A_i \rightarrow U_i$ zu den Inklusionen, die für alle $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$:*

$$(a_1, a_2) \in R \implies (\kappa_1 a_1, \kappa_2 a_2) \in R$$

erfüllt, dann beschränkt sich R auf U .

Durch eine bestimmte Auswahl von Linksinversen erhält man ein vereinfachtes Kriterium, das leicht anzuwenden ist:

Theorem 6.3.3. *Wenn $R[U_1] \subseteq U_2$ und $R^-[U_2] \subseteq U_1$ gelten, dann beschränkt sich R auf U .*

Im Spezialfall $\mathcal{U} \leq \mathcal{A}$ und R als Bisimulation auf der Coalgebra \mathcal{A} erhält man:

Korollar 6.3.4. *Wenn $R[U] \subseteq U$ und $R^-[U] \subseteq U$ gelten, dann beschränkt sich die Bisimulation $R \subseteq A \times A$ auf die Untercoalgebra $\mathcal{U} \leq \mathcal{A}$.*

Gegeben sei $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein Epimorphismus. Das Kriterium $[\ker \varphi]^* = \ker \varphi$ überprüft in [GS05] notwendigerweise, ob φ regulär epi ist. Wir werden sehen, wie sich die größte Bisimulation im Kern der Summe zweier Homomorphismen zerlegt:

Korollar 6.3.5. *Aus den Homomorphismen $\varphi_i : \mathcal{A}_i \rightarrow \mathcal{B}_i$ bilden wir die Summe $\varphi_1 + \varphi_2 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ mit $\mathcal{A} := \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ und $\mathcal{B} := \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2$. Betrachte $\ker \varphi_i$ als Teilmengen von A_i 's, dann gilt: $[\ker(\varphi_1 + \varphi_2)] = [\ker \varphi_1] \cup [\ker \varphi_2]$.*

Wähle $\mathcal{U}_i := \mathcal{A}_i \leq \mathcal{A}$. Wenn $R \subseteq \ker(\varphi_1 + \varphi_2)$ gilt, dann gilt auch

$$R[A_i] \subseteq \ker(\varphi_1 + \varphi_2)[A_i] = A_i \text{ und } R^-[A_i] \subseteq A_i.$$

Laut dem Korollar 6.3.4 beschränkt sich R auf $A_i \subseteq A_1 + A_2$. Somit folgt: $[\ker(\varphi_1 + \varphi_2)] \subseteq [\ker \varphi_1] \cup [\ker \varphi_2]$. Die andere Inklusion gilt offensichtlich, da $\ker \varphi_i \subseteq \ker(\varphi_1 + \varphi_2)$ und $[\ker \varphi_i] \subseteq [\ker(\varphi_1 + \varphi_2)]$.

Wir beweisen jetzt die Theoreme 6.3.2 und 6.3.3:

Beweis. Gegeben sei das folgende Diagramm, wobei ι_i die Inklusionen der Untercoalgebren $\mathcal{U}_i \leq \mathcal{A}_i$ sind. Analog bezeichnen wir mit π_i und $\bar{\pi}_i$ die Projektionen auf die i -te Komponente, für $i = 1, 2$. Seien κ_i die in der Prämisse erwähnten Linksinversen und $\kappa := \kappa_1 \times \kappa_2$. Aus der Prämisse des Theorems folgt, dass das Bild von κ in $R \upharpoonright U$ enthalten ist. Wir können dann die Codomain von κ $R \upharpoonright U$ annehmen. Wir erhalten dann die folgende Gleichung:

$$\bar{\pi}_i \circ \kappa = \kappa_i \circ \pi_i.$$

Wir definieren jetzt die Struktur auf $R \upharpoonright U$:

$$\bar{\rho} := F(\kappa) \circ \rho \circ \iota.$$

Es bleibt dann nur zu prüfen, dass $R \upharpoonright U$ eine Bisimulation ist:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \xrightarrow{\iota} & & \\
 & & \xrightarrow{\kappa} & & \\
 & & \xrightarrow{\kappa_i} & & \\
 R & \xrightarrow{\pi_i} & A_i & \xleftarrow{\iota_i} & U_i & \xleftarrow{\bar{\pi}_i} & R \upharpoonright U \\
 \rho \downarrow & \alpha_{A_i} \downarrow & F\kappa_i \downarrow & \alpha_{U_i} \downarrow & & \bar{\rho} \downarrow & \\
 F(R) & \xrightarrow{F\pi_i} & F(A_i) & \xleftarrow{F\iota_i} & F(U_i) & \xleftarrow{F\bar{\pi}_i} & F(R \upharpoonright U) \\
 & & \xrightarrow{F\kappa} & & & & \\
 & & \xrightarrow{F(\kappa)} & & & &
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 F\bar{\pi}_i \circ \bar{\rho} &= F\bar{\pi}_i \circ F\kappa \circ \rho \circ \iota \\
 &= F\kappa_i \circ F\pi_i \circ \rho \circ \iota \\
 &= F\kappa_i \circ \alpha_{A_i} \circ \pi_i \circ \iota \\
 &= F\kappa_i \circ \alpha_{A_i} \circ \iota_i \circ \bar{\pi}_i \\
 &= F\kappa_i \circ F\iota_i \circ \alpha_{U_i} \circ \bar{\pi}_i \\
 &= \text{Fid}_{A_i} \circ \alpha_{U_i} \circ \bar{\pi}_i \\
 &= \alpha_{U_i} \circ \bar{\pi}_i.
 \end{aligned}$$

Wir zeigen nun das Theorem 6.3.3. Falls $R \upharpoonright U$ leer ist, dann gilt die Konklusion trivialeweise. Ansonsten legen wir ein Paar $(u_1, u_2) \in R \upharpoonright U$ fest. In diesem Fall instanziiieren

wir die Prämisse des Theorems mit der natürlichen Linksinversen bezüglich R :

$$\kappa_i(a) := \text{if } (a \in U_i) \text{ then } a \text{ else } u_i.$$

Sei ein Paar $(a_1, a_2) \in R$. Aus den Inklusionen $R[U_1] \subseteq U_2$ und $R^-[U_2] \subseteq U_1$ folgt die Äquivalenz: $a_1 \in U_1 \iff a_2 \in U_2$. Aus der Definition von κ_i gilt $(\kappa_1 a_1, \kappa_2 a_2) = (a_1, a_2)$ oder $(\kappa_1 a_1, \kappa_2 a_2) = (u_1, u_2)$. In den beiden Fällen ist das Paar (a_1, a_2) in R enthalten. \square

6.4 Schwache Kernpaarerhaltung

Wir werden uns anschauen, welche Aussagen äquivalent zur schwachen Kernpaarerhaltung sind. In [GS05] wurden die folgenden Implikationen $(i) \implies (ii) \implies (iii)$ bereits gezeigt:

- (i) F erhält schwache Kernpaare.
- (ii) Jeder Epi ist regulär.
- (iii) Jeder Mono ist regulär.

In [Sch01] wurde die Implikation $(iii) \rightarrow (i)$ behauptet. Folglich sind alle Aussagen äquivalent. Unglücklicherweise enthält der Beweis einen Fehler. Bis heute bleibt die Implikation $(iii) \rightarrow (i)$ offen. Wir werden im folgenden Theorem 6.4.2 die Äquivalenz zwischen (i) und (ii) zeigen. Die erste Version der Äquivalenz haben wir in der Diplomarbeit [Zar12] gezeigt. Der aktuelle Beweis enthält zwei Verbesserungen, eine davon ist im Beweis des Hilfslemmas enthalten:

Lemma 6.4.1. *Gegeben seien ein Homomorphismus φ als Coequalizer zweier Homomorphismen $\psi_1, \psi_2 : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{A}$ und ein Element $x \in \mathcal{A}$. Es gibt genau dann ein $y \in \mathcal{A}$ mit $x \neq y$ und $\varphi(x) = \varphi(y)$, wenn ein $q \in \mathcal{Q}$ existiert mit: $(\psi_1(q) = x \text{ und } \psi_2(q) \neq x)$ oder $(\psi_1(q) \neq x \text{ und } \psi_2(q) = x)$.*

Beweis. " \rightarrow ": In der Kategorie der Mengen gewinnt man den Coequalizer φ von ψ_1 und ψ_2 durch den Faktor $\pi_{Eq(R)}$, wobei $R = \{(\psi_1(q), \psi_2(q)) \mid q \in \mathcal{Q}\}$. Folglich gilt $\ker \varphi = Eq(R) = (\Delta_{\mathcal{A}} \cup R \cup R^-)^*$. Wenn $x \ker \varphi y$ für ein Paar $y \neq x$ gilt, dann gibt es $y' \neq x$ mit xRy' oder xR^-y' .

" \leftarrow ": Gegeben sei ein $q \in \mathcal{Q}$ mit $\psi_1(q) = x$ und $\psi_2(q) \neq x$. Da φ der Coequalizer von ψ_1 und ψ_2 ist, gilt $\varphi \circ \psi_2 = \varphi \circ \psi_1$. Folglich gilt: $\varphi(\psi_2(q)) = \varphi(\psi_1(q)) = \varphi(x)$. Wähle dann $y := \psi_2(q)$. \square

In der Diplomarbeit [Zar12] wurde für den Beweis der Rückrichtung die Annahme verwendet, dass der Funktor gesund ist, d.h. dass er endliche Schnitte enthält. Diese Voraussetzung ist unnötig.

Theorem 6.4.2 ([Zar12]). *F erhält genau dann schwache Kernpaare, wenn jeder Epi regulär epi ist.*

Beweis. " \rightarrow ": ist aus [GS05].

" \leftarrow ": Aufgrund des Satzes 3.6.2 reicht es zu zeigen, dass F Kernpaare von Epimorphismen schwach erhält. Seien $\varphi : A \rightarrow C$ eine surjektive Abbildung, $\tilde{a}, \tilde{b} \in F(A)$ und $\tilde{c} \in F(C)$ mit $(F\varphi)\tilde{a} = \tilde{c} = (F\varphi)\tilde{b}$. Gesucht ist ein $\tilde{p} \in F(\ker\varphi)$ mit $(F\pi_1)\tilde{p} = \tilde{a}$ und $(F\pi_2)\tilde{p} = \tilde{b}$. Falls φ injektiv ist, ist φ iso. Dann wird der Pullback von Isomorphismen offensichtlich erhalten. Falls φ nicht injektiv ist, gibt es zwei Elemente $x \neq y \in A$ mit $\varphi(x) = \varphi(y)$. Wir definieren die Strukturen $\alpha_A : A \rightarrow FA$ und $\alpha_C : C \rightarrow FC$ folgendermaßen:

$$\alpha_A(z) := \begin{cases} \tilde{a} & \text{falls } z = x \\ \tilde{b} & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\alpha_C(z) := \tilde{c}.$$

Es ist klar, dass φ ein Epimorphismus ist, weil

$$(\alpha_C \circ \varphi)(z) = \alpha_C(\varphi(z)) = \tilde{c} = (F\varphi)(\alpha_A(z)) = ((F\varphi) \circ \alpha_A)(z)$$

für jedes $z \in A$ gilt. Aus der Voraussetzung folgt, dass φ regulär epi ist, d.h. φ ist der Coequalizer zweier Homomorphismen ψ_1 und $\psi_2 : Q \rightarrow A$. Laut dem Lemma 6.4.1 gibt es dann ein $q \in Q$ mit $(\psi_1(q) = x$ und $\psi_2(q) \neq x)$ oder $(\psi_1(q) \neq x$ und $\psi_2(q) = x)$. Da φ ein Coequalizer von ψ_1 und ψ_2 ist, gilt $\varphi \circ \psi_1 = \varphi \circ \psi_2$. Folglich ist (Q, ψ_1, ψ_2) ein Konkurrent vom Pullback $(\ker\varphi, \pi_1, \pi_2)$ in *Set*. Wir erhalten dann eine Abbildung m mit $\pi_1 \circ m = \psi_1$ und $\pi_2 \circ m = \psi_2$.

$$\begin{array}{ccccc} & & \psi_1 & & \\ & & \curvearrowright & & \\ Q & \xrightarrow{m} & \ker\varphi & \xrightarrow[\pi_2]{\pi_1} & A & \xrightarrow{\varphi} & C \\ & & \psi_2 & & \downarrow \alpha_A & & \downarrow \alpha_C \\ \alpha_Q \downarrow & & & & & & \\ FQ & \xrightarrow{Fm} & F\ker\varphi & \xrightarrow[F\pi_2]{F\pi_1} & FA & \xrightarrow{F\varphi} & FC \\ & & \curvearrowleft & & \downarrow F\psi_1 & & \\ & & F\psi_2 & & & & \end{array}$$

Aus $\psi_1(q) = x$ und $\psi_2(q) \neq x$ folgt $\alpha_A(\psi_1(q)) = \tilde{a}$ und $\alpha_A(\psi_2(q)) = \tilde{b}$. Also gilt $F\psi_1 \circ \alpha_Q(q) = \tilde{a}$ und $F\psi_2 \circ \alpha_Q(q) = \tilde{b}$, weil ψ_1 und ψ_2 Homomorphismen sind. Aus der Funktoreigenschaft haben wir dann $F\pi_1 \circ Fm \circ \alpha_Q(q) = \tilde{a}$ und $F\pi_2 \circ Fm \circ \alpha_Q(q) = \tilde{b}$. Somit gelten $F\pi_1(Fm \circ \alpha_Q(q)) = \tilde{a}$ und $F\pi_2(Fm \circ \alpha_Q(q)) = \tilde{b}$. Das zeigt die Existenz eines $\tilde{p} \in F\ker\varphi$ mit $(F\pi_1)\tilde{p} = \tilde{a}$ und $(F\pi_2)\tilde{p} = \tilde{b}$. \square

Lemma 6.4.3. *Hat ein Epimorphismus φ eine (regulär Mono, streng regulär Epi)-Faktorisierung, dann ist φ streng regulär epi.*

Beweis. Gegeben seien $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{B}$ ein Epimorphismus, $e : \mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{A}$ ein regulärer Mono und $\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein streng regulärer Epi mit $\varphi = \psi \circ e$. Wir zeigen, dass $\ker\varphi$ eine Bisimulation ist.

Ist $U = \emptyset$, so ist $\ker \varphi = \emptyset$ eine Bisimulation. Also können wir $U \neq \emptyset$ annehmen. φ ist surjektiv, weil φ epi ist. Aufgrund des Auswahlaxioms gibt es ein Rechtsinverses r von φ in Set . Daraus definieren wir eine Abbildung $l : A \rightarrow U$ mit

$$l(x) := \begin{cases} u & \text{wenn } e(u) = x \\ r(\psi(x)) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist einfach zu prüfen, dass $\varphi \circ l = \psi$.

$$\begin{array}{ccc} \ker \varphi & \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_1} \\ \xrightarrow{\pi_2} \end{array} & U & \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi} \\ \xrightarrow{\psi} \end{array} & B \\ & & \downarrow e & \nearrow l & \\ \ker \psi & \begin{array}{c} \xrightarrow{\bar{\pi}_1} \\ \xrightarrow{\bar{\pi}_2} \end{array} & A & & \end{array}$$

$(\ker \varphi, e \circ \pi_1, e \circ \pi_2)$ ist ein Konkurrent des Pullbacks $\ker \psi$. Es gibt dann eine Abbildung $m : \ker \varphi \rightarrow \ker \psi$ mit $\bar{\pi}_i \circ m = e \circ \pi_i$ für $i = 1, 2$. Analog ist $(\ker \psi, l \circ \bar{\pi}_1, l \circ \bar{\pi}_2)$ ein Konkurrent des Pullbacks $\ker \varphi$. Also gibt es eine andere Abbildung $\bar{m} : \ker \psi \rightarrow \ker \varphi$ mit $l \circ \bar{\pi}_i = \pi_i \circ \bar{m}$. Wir nehmen nun an, dass $\ker \psi$ eine Bisimulation ist, also gibt es eine Struktur $\rho : \ker \psi \rightarrow F \ker \psi$, so dass $\alpha_{\mathcal{A}} \circ \bar{\pi}_i = F\bar{\pi}_i \circ \rho$ für $i = 1, 2$.

$$\begin{array}{ccc} \ker \varphi & \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_1} \\ \xrightarrow{\pi_2} \end{array} & U \\ m \downarrow & \begin{array}{c} \nearrow \bar{m} \\ \searrow \bar{\pi}_1 \end{array} & \downarrow e \\ \ker \psi & \begin{array}{c} \xrightarrow{\bar{\pi}_1} \\ \xrightarrow{\bar{\pi}_2} \end{array} & A \end{array} \quad l$$

Wir definieren die Struktur $\rho' := F\bar{m} \circ \rho \circ m$. Es bleibt nur zu zeigen, dass $\ker \varphi$ eine Bisimulation ist.

$$\begin{aligned} F\pi_i \circ \rho' &= F\pi_i \circ F\bar{m} \circ \rho \circ m \\ &= Fl \circ F\bar{\pi}_i \circ \rho \circ m \\ &= Fl \circ \alpha_{\mathcal{A}} \circ \bar{\pi}_i \circ m \\ &= Fl \circ \alpha_{\mathcal{A}} \circ e \circ \pi_i \\ &= Fl \circ Fe \circ \alpha_{\mathcal{U}} \circ \pi_i \\ &= \alpha_{\mathcal{U}} \circ \pi_i \end{aligned}$$

□

Lemma 6.4.4. *Sei $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein Epimorphismus. φ ist genau dann streng regulär,*

wenn $[\varphi, id_B]$ auch streng regulär ist.

$$\begin{array}{ccc}
 \ker \varphi & \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_1} \\ \xrightarrow{\pi_2} \end{array} & A & \xrightarrow{\varphi} & B \\
 & & \downarrow e_A & \nearrow [\varphi, id_B] & \\
 \ker [\varphi, id_B] & \begin{array}{c} \xrightarrow{\bar{\pi}_1} \\ \xrightarrow{\bar{\pi}_2} \end{array} & A + B & &
 \end{array}$$

Beweis. " \rightarrow ": $\ker [\varphi, id_B] = \ker \varphi \cup \text{graph } \varphi \cup (\text{graph } \varphi)^- \cup \Delta_{A+B}$. Da $\ker \varphi$ eine Bisimulation ist, ist $\ker [\varphi, id_B]$ auch eine Bisimulation.

" \leftarrow ": Die Einbettung e_A ist regulär mono, weil sie injektiv ist. Laut der Voraussetzung ist $[\varphi, id_B]$ streng regulär. Aus dem Lemma 6.4.3 folgt, dass φ streng regulär epi. \square

Theorem 6.4.5. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- (i) F erhält schwache Kernpaare.
- (ii) Ist R eine Bisimulation, dann auch R^d .
- (iii) $[\theta]$ ist difunktional für jede 2-Kongruenz θ .
- (iv) $[\theta]$ ist transitiv für jede Kongruenz θ .
- (v) $[\theta]^* = \theta$ für jede Kongruenz θ .

Beweis. (i) \rightarrow (ii): Sei R eine Bisimulation zwischen zwei Coalgebren \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 . Wir zerlegen beide Projektionen $\pi_i^R : R \rightarrow \mathcal{A}_i$ in eine (Epi, regulär Mono)-Faktorisierung $\iota_i \circ \bar{\pi}_i^R$. Dann bilden wir den Pushout (p_1, p_2) von $(\bar{\pi}_1^R, \bar{\pi}_2^R)$. Folglich sind p_1 und p_2 epi, und es gilt: $R^d = \ker(p_1, p_2)$. Laut dem Theorem 3.6.2 erhält F Epi-Pullbacks. Somit ist R^d eine Bisimulation.

(ii) \rightarrow (iii) ist klar.

(iii) \rightarrow (iv): Gegeben sei eine Kongruenz θ . Die Bisimulation $[\theta]$ soll reflexiv und symmetrisch sein. Betrachte θ als 2-Kongruenz zwischen \mathcal{A} und sich selbst. Aus der Voraussetzung folgt dann die Difunktionalität von $[\theta]$. Diese ist transitiv, weil sie difunktional, reflexiv und symmetrisch ist.

(iv) \rightarrow (v): Sei θ eine Kongruenz in einer Coalgebra \mathcal{A} . Dann gibt es einen Epimorphismus $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ mit $\theta = \ker \varphi$. Nach dem Lemma 1.2.10 ist die Kongruenz $\ker[\varphi, id_{\mathcal{B}}]$ regulär. Somit gilt $\ker[\varphi, id_{\mathcal{B}}] = [\ker[\varphi, id_{\mathcal{B}}]]^*$. Laut der Voraussetzung ist $[\ker[\varphi, id_{\mathcal{B}}]]$ transitiv. Also gilt $\ker[\varphi, id_{\mathcal{B}}] = [\ker[\varphi, id_{\mathcal{B}}]]$. Daraus folgt, dass $\ker[\varphi, id_{\mathcal{B}}]$ eine Bisimulation ist. Laut dem Lemma 6.4.4 ist $\ker \varphi = \theta$ eine Bisimulation. Folglich gilt $\theta = [\theta] = [\theta]^*$.

(v) \rightarrow (i): Die regulären Kongruenzen sind in [GS05] charakterisiert (siehe Lemma 2.5.1). Die Voraussetzung bedeutet, dass jeder Epi regulär ist. Die Konklusion folgt direkt aus dem Theorem 6.4.2. \square

Bei bild-endlichen Kripke-Strukturen stimmen die Bisimilarität und die Beobachtungsäquivalenz miteinander überein. Für $k \geq 3$ präsentieren die $\mathbb{P}_{\leq k}$ -Coalgebren die gleichen Kripke-Strukturen, aber die Gleichung $\sim_{\mathcal{A}} = \nabla_{\mathcal{A}}$ wird nicht länger erfüllt. Ein Grund dafür ist, dass der Funktor $\mathbb{P}_{\leq k}$ für $k \geq 3$ schwache Kernpaare nicht erhält [GS05].

6.5 Summe der regulären (Epi/Mono)-Morphismen in Set_F

Da in Set_F reguläre Monos genau die injektiven Homomorphismen sind, und da die Epis genau die surjektiven Homomorphismen sind, erhält man die folgenden Aussagen für je zwei Homomorphismen $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ und $\psi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$:

- (i) φ und ψ sind genau dann epi, wenn auch ihre Summe $\varphi + \psi$ epi ist.
- (ii) φ und ψ sind genau dann regulär mono, wenn auch ihre Summe $\varphi + \psi$ regulär mono ist.

Die Richtungen von links nach rechts gelten bereits kategorientheoretisch [AHS90]. Für die Rückrichtungen werden die Injektivität und die Surjektivität benötigt. Wir werden jetzt sehen, ob sich die Monos und die regulären Epis in beide Richtungen übertragen lassen.

Satz 6.5.1. *φ und ψ sind genau dann regulär epi, wenn $\varphi + \psi$ auch regulär epi ist.*

Beweis. " \rightarrow ": Diese Richtung gilt in jeder Kategorie ([AHS90]).

" \leftarrow ": Nach dem Korollar 6.3.5 gilt: $[\ker(\varphi + \psi)]_{\mathcal{A}+\mathcal{C}} = [\ker \varphi]_{\mathcal{A}} \cup [\ker \psi]_{\mathcal{C}}$. Laut dem Lemma 2.5.1 erhalten wir die Gleichung:

$$\ker \varphi \cup \ker \psi = \ker(\varphi + \psi) = [\ker(\varphi + \psi)]_{\mathcal{A}+\mathcal{C}}^* = [\ker \varphi]_{\mathcal{A}}^* \cup [\ker \psi]_{\mathcal{C}}^*.$$

Somit gelten $\ker \varphi = [\ker \varphi]_{\mathcal{A}}^*$ und $\ker \psi = [\ker \psi]_{\mathcal{C}}^*$. Aus dem Lemma 2.5.1 folgt, dass φ und ψ regulär epi sind.

$$\begin{array}{ccccc}
 [\ker \varphi] & \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_1} \\ \xrightarrow{\pi_2} \end{array} & \mathcal{A} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{B} \\
 & & \downarrow e_{\mathcal{A}} & & \downarrow e_{\mathcal{B}} \\
 [\ker(\varphi + \psi)] & \begin{array}{c} \xrightarrow{\bar{\pi}_1} \\ \xrightarrow{\bar{\pi}_2} \end{array} & \mathcal{A} + \mathcal{C} & \xrightarrow{\varphi + \psi} & \mathcal{B} + \mathcal{D} \\
 & & \uparrow e_{\mathcal{C}} & & \uparrow e_{\mathcal{D}} \\
 [\ker \psi] & \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_1} \\ \xrightarrow{\pi_2} \end{array} & \mathcal{C} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{D}
 \end{array}$$

□

Satz 6.5.2. *φ und ψ sind genau dann mono, wenn auch $\varphi + \psi$ mono ist.*

Beweis. " \leftarrow ": Diese Richtung ist offensichtlich, weil die Einbettungen mono sind.

" \rightarrow ": Nach dem Korollar 6.3.5 gilt: $[\ker(\varphi + \psi)]_{\mathcal{A}+\mathcal{C}} = [\ker \varphi]_{\mathcal{A}} \cup [\ker \psi]_{\mathcal{C}}$. Nach dem Lemma 2.5.1 erhalten wir die Gleichung: $\ker \varphi \cup \ker \psi = \Delta_{\mathcal{A}} \cup \Delta_{\mathcal{C}} = \Delta_{\mathcal{A}+\mathcal{C}}$, da φ und ψ mono sind. Laut dem Lemma 2.5.1 ist $\varphi + \psi$ mono. □

Satz 6.5.3. *φ und ψ sind genau dann stark epi, wenn auch $\varphi + \psi$ stark epi ist.*

Beweis. " \rightarrow ": Diese Richtung gilt in jeder Kategorie [AHS90].

" \leftarrow ": Da $\varphi + \psi$ epi ist, ist φ auch epi. Wir wollen jetzt zeigen, dass φ stark epi ist. Gegeben sei das folgende Diagramm in Set_F :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{B} \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ \mathcal{Z} & \xrightarrow{m} & \mathcal{E} \end{array}$$

Gesucht ist eine Diagonale für das vorherige Quadrat, d.h. eine Abbildung $\bar{d} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{Z}$ mit $\bar{d} \circ \varphi = f$. Wir bilden das folgende Quadrat:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} + \mathcal{C} & \xrightarrow{\varphi + \psi} & \mathcal{B} + \mathcal{D} \\ f + \psi \downarrow & \swarrow d & \downarrow g + id_{\mathcal{D}} \\ \mathcal{Z} + \mathcal{D} & \xrightarrow{m + id_{\mathcal{D}}} & \mathcal{E} + \mathcal{D} \end{array}$$

Aus dem Lemma 6.5.2 folgt, dass $m + id_{\mathcal{D}}$ mono ist. Da $\varphi + \psi$ stark epi ist, besitzt das obige Diagramm eine Diagonale d . Das duale Diagrammlemma in Set_F liefert eine Abbildung $\bar{d} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{Z}$. Wir zeigen zuerst, dass $d \circ e_{\mathcal{B}} \circ \varphi = e_{\mathcal{Z}} \circ f$ gilt.

$$\begin{aligned} d \circ e_{\mathcal{B}} \circ \varphi &= d \circ (\varphi + \psi) \circ e_{\mathcal{A}} \\ &= (f + \psi) \circ e_{\mathcal{A}} \\ &= e_{\mathcal{Z}} \circ f \end{aligned}$$

Da $e_{\mathcal{Z}}$ regulär mono ist, gibt es eine Diagonale $\bar{d} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{Z}$ für das folgende Quadrat.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{B} \\ f \downarrow & \swarrow \bar{d} & \downarrow d \circ e_{\mathcal{B}} \\ \mathcal{Z} & \xrightarrow{e_{\mathcal{Z}}} & \mathcal{Z} + \mathcal{D} \end{array}$$

Folglich gilt $\bar{d} \circ \varphi = f$. □

6.6 Kongruenz-Verbände

Analog zur Inklusion zwischen Kongruenzen definieren wir eine Ordnung über alle Epimorphismen mit derselben Domain: $\varphi \leq \psi \iff \ker \varphi \subseteq \ker \psi$.

Lemma 6.6.1. *Sei $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein Epimorphismus. Das Infimum von $id_{\mathcal{B}} + [\varphi, id_{\mathcal{B}}]$ und $[id_{\mathcal{B}}, \varphi] + id_{\mathcal{B}}$ ist $id_{\mathcal{B}} + \varphi + id_{\mathcal{B}}$.*

Beweis. Seien \mathcal{B}_1 und \mathcal{B}_2 zwei isomorphe Kopien der Coalgebra \mathcal{B} . Seien

$$\begin{aligned} \psi_1 &:= id_{\mathcal{B}_1} + [\varphi, id_{\mathcal{B}_2}] \\ \psi_2 &:= [id_{\mathcal{B}_1}, \varphi] + id_{\mathcal{B}_2} \\ \psi &:= id_{\mathcal{B}_1} + \varphi + id_{\mathcal{B}_2}. \end{aligned}$$

Wir zeigen zuerst, dass $\ker \psi = \ker \psi_1 \cap \ker \psi_2$ gilt. Für je zwei verschiedene Elemente

$x \neq y \in A + B_1 + B_2$ gilt:

$$\begin{aligned} (x, y) \in \ker \psi_1 \cap \ker \psi_2 &\iff \exists(a, a') \in \ker \varphi. x = e_A(a) \wedge y = e_A(a') \\ &\iff (x, y) \in \ker \psi. \end{aligned}$$

□

Satz 6.6.2. *Es ist genau dann jeder Epimorphismus regulär, wenn für jede Coalgebra \mathcal{A} der Verband der regulären Kongruenzen $\text{RegCon}(\mathcal{A})$ Unterverband von $\text{Con}(\mathcal{A})$ ist.*

Beweis. " \rightarrow ": Diese Richtung ist offensichtlich, weil alle Kongruenzen regulär sind.

" \leftarrow ": Gegeben sei ein Epimorphismus $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$. Seien

$$\begin{aligned} \psi_1 &:= id_{\mathcal{B}} + [\varphi, id_{\mathcal{B}}] \\ \psi_2 &:= [id_{\mathcal{B}}, \varphi] + id_{\mathcal{B}} \\ \psi &:= id_{\mathcal{B}} + \varphi + id_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Aus dem Lemma 1.2.10 und dem Satz 6.5.1 folgt, dass ψ_1 und ψ_2 regulär epi sind. Laut der Voraussetzung ist das Infimum von ψ_1 und ψ_2 regulär epi. Nach dem Lemma 6.6.1 ist ψ regulär epi. Nach dem Lemma 6.5.1 ist auch φ regulär epi. □

Satz 6.6.3. *Es ist genau dann jeder Monomorphismus regulär, wenn für jede Coalgebra \mathcal{A} der Verband der starken Kongruenzen $\text{StrongCon}(\mathcal{A})$ Unterverband von $\text{Con}(\mathcal{A})$ ist.*

Beweis. " \rightarrow ": Aus der Voraussetzung folgt, dass jeder Epi stark ist.

" \leftarrow ": Sei $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein Epimorphismus. Wir legen drei Homomorphismen ψ_1 , ψ_2 und ψ wie im vorherigen Satz fest. Aus dem Lemma 1.2.10 und dem Satz 6.5.1 folgt, dass ψ_1 und ψ_2 regulär epi sind. Folglich sind ψ_1 und ψ_2 auch stark, da jeder reguläre Epi auch stark ist [AHS90]. Laut der Voraussetzung ist das Infimum von ψ_1 und ψ_2 stark epi. Nach dem Lemma 6.6.1 ist ψ stark epi, und nach dem Lemma 6.5.3 ist φ stark epi. □

6.7 Transitivität der Bisimilarität

Das nächste Theorem verdeutlicht die Eigenschaften, die für die Transitivität der Bisimilarität bei F -Coalgebren notwendig sind. Die Äquivalenz (i) \Leftrightarrow (iii) erschien in [GS05] unter der Voraussetzung, dass der Funktor F Urbilder erhält.

Theorem 6.7.1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- (i) $\sim_{\mathcal{A}} = \nabla_{\mathcal{A}}$ für jede Coalgebra \mathcal{A} .
- (ii) $\sim_{\mathcal{A}}^* = \nabla_{\mathcal{A}}$ für jede Coalgebra \mathcal{A} .
- (iii) $\sim_{\mathcal{A}}$ ist transitiv für jede Coalgebra \mathcal{A} .

Beweis. (i) \rightarrow (ii) und (i) \rightarrow (iii) sind offensichtlich, weil $\nabla_{\mathcal{A}}$ transitiv ist.

(ii) \rightarrow (i): Gegeben sei $\mathcal{A} = (A, \alpha)$. Es ist zu zeigen, dass $\nabla_{\mathcal{A}}$ eine Bisimulation ist. Sei $(x_0, y_0) \in \nabla_{\mathcal{A}}$. Es bleibt ein Element $p \in F\nabla_{\mathcal{A}}$ zu finden, mit $F\pi_1(p) = \alpha(x_0)$ und $F\pi_2(p) = \alpha(y_0)$. Der Beweis lässt sich in zwei Fälle zerlegen:

Fall 1. $x_0 = y_0$: Da $\Delta_{\mathcal{A}}$ eine Bisimulation ist, ist das Paar (x_0, y_0) in einer Bisimulation $S := \Delta_{\mathcal{A}} \subseteq \nabla_{\mathcal{A}}$ enthalten. Für jede Bisimulation $S \subseteq \nabla_{\mathcal{A}}$ mit $(x_0, y_0) \in S$ gibt es ein $q \in F(S)$ mit $F\pi_1^S(q) = \alpha(x_0)$ und $F\pi_2^S(q) = \alpha(y_0)$. Die Inklusion $\iota_S^\nabla : S \hookrightarrow \nabla_{\mathcal{A}}$ liefert dann ein Element $p := F\iota_S^\nabla(q) \in F(\nabla_{\mathcal{A}})$ mit

$$F\pi_1(p) = F\pi_1(F\iota_S^\nabla(q)) = F(\pi_1 \circ \iota_S^\nabla)(q) = F(\pi_1^S)(q) = \alpha(x_0)$$

und

$$F\pi_2(p) = \alpha(y_0).$$

Fall 2. $x_0 \neq y_0$: Betrachte die modifizierte Coalgebra $\bar{\mathcal{A}} := \mathcal{A}_{x_0}^U$ der Definition 6.2.5. Wir wählen die Teilmenge $U := \{x \mid x_0 \nabla_{\mathcal{A}} x \neq y_0\}$. Instanzieren wir φ im Lemma 6.2.6 mit dem Homomorphismus $\pi_{\nabla_{\mathcal{A}}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\nabla_{\mathcal{A}}$, so erhalten wir $\nabla_{\bar{\mathcal{A}}} = \nabla_{\mathcal{A}} =: \nabla$. Nach der Voraussetzung gibt es eine Bisimulation S in $\bar{\mathcal{A}}$ mit $S^* = \nabla$, insbesondere $x_0 S^* y_0$. Da x_0 und y_0 verschieden sind, gibt es ein Zwischenelement $z \neq y_0$ mit $x_0 S^* z S y_0$. Insbesondere gilt $x_0 \nabla z S y_0$. Da S eine Bisimulation in $\bar{\mathcal{A}}$ ist, gibt es ein $p \in F(S)$ mit

$$F\pi_1(p) = \bar{\alpha}(z) = \alpha(x_0)$$

und

$$F\pi_2(p) = \bar{\alpha}(y_0) = \alpha(y_0).$$

(iii) \rightarrow (i):

$$\begin{array}{ccc} \nabla & \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_1} \\ \xrightarrow{\pi_2} \end{array} & \begin{array}{c} \mathcal{A} \\ \downarrow e_{\mathcal{A}} \end{array} & \xrightarrow{\pi_{\nabla}} & \mathcal{A}/\nabla \\ & & \downarrow [\pi_{\nabla}, id_{\mathcal{A}/\nabla}] & & \\ \ker [\pi_{\nabla}, id_{\mathcal{A}/\nabla}] & \begin{array}{c} \xrightarrow{\bar{\pi}_1} \\ \xrightarrow{\bar{\pi}_2} \end{array} & \mathcal{A} + \mathcal{A}/\nabla & & \end{array}$$

Laut dem Lemma 1.2.10 ist $[\pi_{\nabla}, id_{\mathcal{A}/\nabla}]$ regulär epi. Aus dem Theorem 2.5.1 erhalten wir $\sim_{\mathcal{A} + \mathcal{A}/\nabla}^* = \nabla_{\mathcal{A} + \mathcal{A}/\nabla}$. Folglich gilt:

$$\begin{aligned} [\ker [\pi_{\nabla}, id_{\mathcal{A}/\nabla}]] &= [\nabla_{\mathcal{A} + \mathcal{A}/\nabla}] && \text{nach dem Lemma 6.2.3} \\ &= \sim_{\mathcal{A} + \mathcal{A}/\nabla} && \\ &= \sim_{\mathcal{A} + \mathcal{A}/\nabla}^* && \text{laut der Voraussetzung} \\ &= \ker [\pi_{\nabla}, id_{\mathcal{A}/\nabla}]. \end{aligned}$$

Somit ist $\ker [\pi_{\nabla}, id_{\mathcal{A}/\nabla}]$ eine Bisimulation. Laut dem Lemma 6.4.4 ist ∇ eine Bisimulation. \square

6.8 Difunktionalität der Bisimilarität

R. Goldblatt hat die Transitivität verallgemeinert, indem er die Komposition der Bisimilaritäten zwischen verschiedenen Coalgebren betrachtet:

Definition 6.8.1 ([Gol]). Ein *Set*-Funktork F besitzt *transitive Bisimilarität*, wenn für alle Coalgebren $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \text{Set}_F$ die folgende Regel gilt:

$$\frac{x \sim_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} y, y \sim_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} z}{x \sim_{\mathcal{A}, \mathcal{C}} z}.$$

Unter Voraussetzung, dass die terminale Coalgebra existiert, hat R. Goldblatt Folgendes in [Gol] gezeigt: Besitzt ein Funktor F transitive Bisimilarität, dann gilt für jede Coalgebra \mathcal{A} : $\sim_{\mathcal{A}} = \nabla_{\mathcal{A}}$.

Theorem 6.8.2. *Ein Funktor F besitzt genau dann transitive Bisimilarität, wenn für je zwei Coalgebren \mathcal{A} und \mathcal{B} gilt: $\sim_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} = \nabla_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$.*

Beweis. " \leftarrow ": Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ drei Coalgebren und $(x, y, z) \in A \times B \times C$ mit $(x, y) \in \sim_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$ und $(y, z) \in \sim_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$. Laut der Voraussetzung reicht es zu zeigen, dass x und z beobachtungäquivalent sind. Durch die Pushoutbildung der Projektionen gewinnt man zwei Homomorphismen φ und ψ mit $\varphi(x) = \psi(y)$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \sim_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} & \xrightarrow{\pi_{\mathcal{C}}} & \mathcal{C} \\
 & & \downarrow \pi_{\mathcal{B}} & & \downarrow \\
 \sim_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} & \xrightarrow{\pi_{\mathcal{B}}} & \mathcal{B} & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\
 \downarrow \pi_{\mathcal{A}} & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{A} & \xrightarrow{\quad} & \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\
 & \searrow \varphi & & \nearrow \psi & \\
 & & & &
 \end{array}$$

" \rightarrow ": Sei $(x, y) \in \nabla_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$. Es genügt zu zeigen, dass x und y bisimilar sind. Seien $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}$ und $\psi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{P}$ zwei Homomorphismen mit $\nabla_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} = \ker(\varphi, \psi)$. Da Graphen von Homomorphismen Bisimulationen sind, erhalten wir:

$$x \sim_{\mathcal{A}, \text{Im}\varphi} \varphi(x) = \psi(y) \sim_{\text{Im}\psi, \mathcal{B}} y.$$

Aus der Voraussetzung folgt: $x \sim_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} y$. □

Wir wollen die Resultate des vorherigen Abschnitts auf Bisimulationen zwischen verschiedenen Coalgebren verallgemeinern, indem wir die Transitivität im Theorem 6.7.1 durch die Difunktionalität ersetzen. Wir legen einen Funktor F fest und betrachten die folgenden Aussagen:

- (i) Für alle Coalgebren \mathcal{A}, \mathcal{B} : $\sim_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} = \nabla_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$.
- (ii) Für alle Coalgebren \mathcal{A}, \mathcal{B} : $\sim_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}^d = \nabla_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$.

(iii) Für alle Coalgebren \mathcal{A}, \mathcal{B} : $\sim_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$ ist difunktional.

Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, dass die Richtung (ii) \rightarrow (i) allgemeiner gilt. Wir werden für die Richtung (iii) \rightarrow (i) ein Gegenbeispiel 6.9.1 im nächsten Abschnitt zeigen. Unter der Voraussetzung, dass der Funktor F Urbilder erhält, sind die Transitivität und die Difunktionalität der Bisimilarität äquivalent.

Theorem 6.8.3. *Wenn F Urbilder erhält, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) Für alle Coalgebren \mathcal{A}, \mathcal{B} : $\sim_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} = \nabla_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$.

(ii) Für alle Coalgebren \mathcal{A}, \mathcal{B} : $\sim_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$ ist difunktional.

(iii) Für jede Coalgebra \mathcal{A} : $\sim_{\mathcal{A}} = \nabla_{\mathcal{A}}$.

Beweis. (i) \rightarrow (ii) ist offensichtlich, weil $\nabla_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$ difunktional ist.

(ii) \rightarrow (iii): Laut der Voraussetzung ist die Bisimilarität $\sim_{\mathcal{A}}$ für jede Coalgebra \mathcal{A} transitiv, weil $\sim_{\mathcal{A}}$ reflexiv und symmetrisch ist. Aus dem Theorem 6.7.1 folgt, dass die Gleichung $\sim_{\mathcal{A}} = \nabla_{\mathcal{A}}$ für jede Coalgebra \mathcal{A} gilt.

(iii) \rightarrow (i): Gegeben seien zwei Coalgebren $\mathcal{A} = (A, \alpha)$ und $\mathcal{B} = (B, \beta)$. Wir zeigen nun $\sim_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} = \nabla_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$.

$$\begin{aligned} (a, b) \in \nabla_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} &\iff (e_A(a), e_B(b)) \in \nabla_{\mathcal{A}+\mathcal{B}} && \text{nach dem Lemma 2.4.2} \\ &\iff (e_A(a), e_B(b)) \in \sim_{\mathcal{A}+\mathcal{B}} && \text{laut der Voraussetzung} \\ &\iff (a, b) \in \sim_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} && \text{nach dem Theorem 3.4.1} \end{aligned}$$

□

6.9 Difunktionale Hülle der L -Similarität

In [MV12] wurde gezeigt, dass kein Relation Lifting L für Nachbarschaftsfunktor mit der Eigenschaft $\approx_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}^L = \nabla_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$ für alle Coalgebren \mathcal{A}, \mathcal{B} existiert. Insbesondere gibt es für den Nachbarschaftsfunktor Coalgebren \mathcal{A} und \mathcal{B} mit $\sim_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} \neq \nabla_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$.

Beispiel 6.9.1. Betrachte den Nachbarschaftsfunktor 2^{2^-} . Laut dem Theorem 6.4.5 ist die Bisimilarität $\sim_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$ immer difunktional, weil 2^{2^-} schwache Kernpaare erhält [HKP07]. Aber $\sim_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} = \nabla_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$ gilt im Allgemeinen nicht.

Theorem 6.9.2. *Gegeben sei ein monotonen Relation Lifting L . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) Für alle Coalgebren \mathcal{A}, \mathcal{B} : $\approx_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} = \nabla_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$.

(ii) Für alle Coalgebren \mathcal{A}, \mathcal{B} : $\approx_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}^d = \nabla_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}$.

Beweis. (i) \rightarrow (ii): Diese Richtung ist offensichtlich, weil $\nabla_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ difunktional ist.
 (ii) \rightarrow (i): Seien $\mathcal{A} = (A, \alpha)$ und $\mathcal{B} = (B, \beta)$ zwei Coalgebren. Wir zeigen jetzt, dass $\nabla_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ eine L -Simulation ist. Wir legen ein Paar $(x_0, y_0) \in \nabla_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ fest. Seien $U := [x_0]\nabla_{\mathcal{A}}$ und $V := [y_0]\nabla_{\mathcal{B}}$ zwei Teilmengen der Coalgebren \mathcal{A} und \mathcal{B} . Seien $\varphi := \pi_{\nabla_{\mathcal{A}+\mathcal{B}}} \circ e_{\mathcal{A}}$ und $\psi := \pi_{\nabla_{\mathcal{A}+\mathcal{B}}} \circ e_{\mathcal{B}}$ zwei Homomorphismen. Da $\mathcal{A} + \mathcal{B}/\nabla_{\mathcal{A}+\mathcal{B}}$ einfach ist, folgt aus dem Lemma 6.2.4, dass $\ker \varphi = \nabla_{\mathcal{A}}$ und $\ker \psi = \nabla_{\mathcal{B}}$ gelten. Wir benutzen die Definition 6.2.5 um zwei Coalgebren $\bar{\mathcal{A}} := \mathcal{A}_{x_0}^U$ und $\bar{\mathcal{B}} := \mathcal{B}_{y_0}^V$ zu definieren. Da $U \subseteq [x_0]\ker \varphi$ und $V \subseteq [y_0]\ker \psi$, folgt aus dem Lemma 6.2.6, dass $\varphi : \bar{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A} + \mathcal{B}/\nabla_{\mathcal{A}+\mathcal{B}}$ und $\psi : \bar{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{A} + \mathcal{B}/\nabla_{\mathcal{A}+\mathcal{B}}$ wieder Homomorphismen sind. Laut dem Lemma 6.2.4 gilt $\nabla_{\bar{\mathcal{A}},\bar{\mathcal{B}}} = \ker(\varphi, \psi) = \nabla_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$. Nach der Voraussetzung gilt $(x_0, y_0) \in \approx_{\bar{\mathcal{A}},\bar{\mathcal{B}}}^d$. Also gibt es ein Element $x_1 \in A$ mit $x_1 \approx_{\bar{\mathcal{A}},\bar{\mathcal{B}}} y_0$. Wegen $\approx_{\bar{\mathcal{A}},\bar{\mathcal{B}}}^d = \nabla_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ gilt die Inklusion $\approx_{\bar{\mathcal{A}},\bar{\mathcal{B}}} \subseteq \nabla_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$. Somit gilt $(x_1, y_0) \in \nabla_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$. Aus $\varphi(x_1) = \psi(y_0) = \varphi(x_0)$ folgt $(x_0, x_1) \in \ker \varphi = \nabla_{\mathcal{A}}$. Die Konstruktion der Coalgebra $\bar{\mathcal{A}}$ liefert $\bar{\alpha}(x_1) = \alpha(x_0) = \bar{\alpha}(x_0)$. Laut der Erweiterbarkeit aus Satz 5.2.9 erhalten wir $x_0 \approx_{\bar{\mathcal{A}},\bar{\mathcal{B}}} y_0$. Folglich gilt $(\bar{\alpha}(x_0), \bar{\beta}(y_0)) \in L \approx_{\bar{\mathcal{A}},\bar{\mathcal{B}}}$. Zum Schluss erhalten wir $(\alpha(x_0), \beta(y_0)) \in L\nabla_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, weil L monoton ist und $\approx_{\bar{\mathcal{A}},\bar{\mathcal{B}}} \subseteq \nabla_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$. \square

Die Barr-Extension \bar{F} ist ein monotonen Relation Lifting:

Korollar 6.9.3. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- (i) Für alle Coalgebren \mathcal{A}, \mathcal{B} : $\sim_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \nabla_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$.
- (ii) Für alle Coalgebren \mathcal{A}, \mathcal{B} : $\sim_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^d = \nabla_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$.

6.10 Fazit

Wir haben in diesem Kapitel eine ausreichende Voraussetzung gegeben, in der sich Bisimulationen auf Untercoalgebren beschränken. Dabei verzichtet man auf die Urbilderhaltung. Folglich zeigten wir: Wenn die transitive und die difunktionale Hülle der Bisimilarität die Beobachtungsäquivalenz für alle Coalgebren überdeckt, dann stimmen die Bisimilarität und die Beobachtungsäquivalenz miteinander überein.

Ist die Bisimilarität für alle Coalgebren transitiv, dann stimmt sie mit der Beobachtungsäquivalenz überein. Wir erhielten ein unerwünschtes Resultat, und zwar, dass die Difunktionalität für die Gleichheit der Bisimilarität und der Beobachtungsäquivalenz nicht ausreichend ist, wie bereits im Gegenbeispiel 6.9.1 gezeigt wurde. Unter Annahme, dass der Funktor Urbilder erhält, erzielt man die gewünschte Äquivalenz, d.h. die Transitivität und die Difunktionalität der Bisimilarität sind äquivalent.

7 Erweiterte Bisimilarität

7.1 Einleitung und Literatur

Trennbare Funktoren sind genau die Unterfunktoren der verallgemeinerten Nachbarschaftsfunktoren [Sch05]. Wir erweitern den Begriff der Bisimulation auf up-to-Bisimulationen. Dieses „up-to“-Konzept wurde bereits in vielen Arbeiten verwendet [Len99, Bar04, Luo06, RBR13, BPPR15]. In einigen Arbeiten (wie in [ZLL⁺10]) wurde die up-to-Bisimulation bezüglich der polynomialen Funktoren eingeführt. Auch hat D. Sprunger sie in [Spr16] verwendet, um ein Beweiskalkül für die Beobachtungsäquivalenz bei finitären Funktoren zu erzeugen. Wir ziehen zuerst die Bisimulation bezüglich des allgemeinen Nachbarschaftsfunktors hoch. Hierzu zeigen wir zuerst, dass der A, B -Nachbarschaftsfunktor schwache Kernpaare erhält. Den allgemeinen monotonen Nachbarschaftsfunktor \mathcal{M} gewinnt man durch monotone trennbare Boxen. Anschließend zeigen wir, dass dieser Funktor auch schwache Kernpaare erhält, d.h. dass die up-to-Bisimilarität die Beobachtungsäquivalenz überdeckt. Für Letzteres zeigen wir außerdem, dass trennbare Urbilder erhaltende Funktoren Unterfunktoren eines Funktors \mathcal{S} sind, der schwache Pullbacks erhält. Diesen Funktor gewinnt man, indem man den allgemeinen A, B -Nachbarschaftsfunktor „urbildbereinigt“. Eine Anwendung des allgemeinen Nachbarschaftsfunktors ist die Fuzzifizierung der Systeme L^{L^X} [Gog67], wobei L ein vollständiger Verband ist. Jedes Element aus L^X ist eine L -Fuzzy-Menge in X . Man erhält dann die L -Fuzzy Topologie [Zha02]. Analog zur Standardtopologie kann man die L -Fuzzy-topologische Räume durch $\mathcal{F}^{L,L}$ -Coalgebren modellieren.

Wir versuchen in diesem Kapitel eine äquivalente Aussage für die erweiterte Bisimilarität (up-to-Bisimilarität) bezüglich des A, B -Nachbarschaftsfunktors zu liefern. Dadurch kann man die erweiterte Bisimilarität deutlicher beschreiben. Zusätzlich ist es interessant, ob die Urbild-Bereinigung des allgemeinen Nachbarschaftsfunktors einen Funktor liefert, der schwache Pullbacks erhält. Anhand dessen probieren wir aus Coalgebren mit endlichen Mustern monotone trennbare Boxen $(\square_i)_{i \in I}$ zu gewinnen.

7.2 A, B -Nachbarschaftsfunktor A^{B^-}

Lemma 7.2.1. *F ist genau dann trennbar, wenn zwei Mengen A und B existieren, so dass F Unterfunktor des A, B -Nachbarschaftsfunktors ist.*

Lemma 7.2.2. *Sei F ein kontravarianter Funktor einer Kategorie \mathbb{C} zu einer Kategorie \mathbb{D} . Transformiert F schwache Pushouts in schwache Pullbacks, dann transformiert F Epis in Monos.*

Beweis. Sei $f : A \rightarrow B$ ein Epi in \mathbb{C} . Dann ist das Diagramm (f, f, id_B, id_B) ein Pushout. Aus der Voraussetzung folgt, dass $(id_{FB}, id_{FB}, Ff, Ff)$ ein schwacher Pullback ist. Folglich ist Ff mono. \square

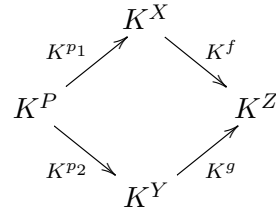
Lemma 7.2.3. *Seien $F : \mathbb{C} \rightsquigarrow \mathbb{D}$ und $G : \mathbb{D} \rightsquigarrow \mathbb{E}$ zwei kontravariante Funktoren. $G \circ F$ erhält schwache Kernpaare, wenn die folgenden Aussagen erfüllt sind:*

- (i) *In \mathbb{C} sind Epi-Pullbacks schwache Pushouts.*
- (ii) *In \mathbb{D} sind Mono-Pullbacks schwache Pushouts.*
- (iii) *F und G transformieren schwache Pushouts in schwache Pullbacks.*

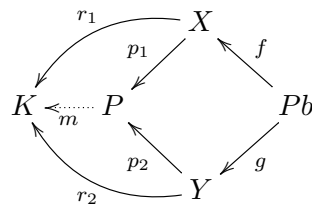
Beweis. Laut dem Theorem 3.6.2 reicht es zu zeigen, dass $G \circ F$ Epi-Pullbacks schwach erhält. Sei $\mathcal{D} := (p_1, p_2, f, g)$ ein Epi-Pullback. Aus (i) folgt, dass \mathcal{D} ein schwacher Pushout ist. Aus (iii) folgt, dass $F\mathcal{D}$ ein schwacher Pullback ist. Da die Morphismen von \mathcal{D} epi sind, folgt aus dem Lemma 7.2.2, dass die Morphismen von $F\mathcal{D}$ mono sind. Also ist $F\mathcal{D}$ ein Mono-Pullback. Aus (ii) folgt, dass $F\mathcal{D}$ ein schwacher Pushout ist. Laut (iii) ist $G F\mathcal{D}$ ein schwacher Pullback. \square

Satz 7.2.4. *Der kontravariante Funktor K^- transformiert schwache Pushouts in schwache Pullbacks.*

Beweis. Sei $\mathcal{D} := (f, g, p_1, p_2)$ ein schwacher Pushout. Wir wollen zeigen, dass das folgende Diagramm ein schwacher Pullback ist.



Seien $r_1 : X \rightarrow K$ und $r_2 : Y \rightarrow K$ mit $K^f(r_1) = K^g(r_2)$, d.h. $r_1 \circ f = r_2 \circ g$ gegeben. Somit ist (r_1, r_2) ein Konkurrent des schwachen Pushouts (p_1, p_2) . Dann gibt es eine Abbildung $m : P \rightarrow K$ mit $m \circ p_1 = r_1$ und $m \circ p_2 = r_2$.



Somit gilt $K^{p_1}(m) = r_1$ und $K^{p_2}(m) = r_2$. \square

Korollar 7.2.5. *Der A, B -Nachbarschaftsfunktor A^{B^-} erhält schwache Kernpaare.*

Beweis. $A^- \circ B^-$ betrachtet, ist es ausreichend nur die drei Voraussetzungen vom Lemma 7.2.3 zu prüfen. (i) und (ii) ergeben sich aus den Lemmata 1.2.15 und 1.2.14 über die Schnitte und die Epi-Pullbacks in *Set*. Die dritte Voraussetzung erhält man aus dem obigen Satz. \square

Es genügt also, dass das Diagramm ein Pushout von Epis ist, damit das Bild-Diagramm ein schwacher Pullback ist.

Korollar 7.2.6. *Der Nachbarschaftsfunktor A^{B^-} transformiert Pushouts von Epis in schwache Pullbacks.*

Satz 7.2.7. *Sei $\mathcal{D} := (p_1, p_2, f, g)$ ein Pullbackdiagramm. A^{B^-} erhält genau den Pullback \mathcal{D} schwach, wenn \mathcal{D} ein Schnitt ist, oder wenn $\text{Im}(f) = \text{Im}(g)$ gilt.*

Beweis. " \leftarrow ": Der Nachbarschaftsfunktor A^{B^-} erhält endliche Schnitte. Falls die Gleichung $\text{Im}(f) = \text{Im}(g)$ gilt, so kann man in einer Sink zwei Epis gefolgt von einem Mono faktorisieren. Aus der schwachen Kernpaarerhaltung im obigen Korollar folgt die schwache Erhaltung von \mathcal{D} .

" \rightarrow ": Wir setzen voraus, dass \mathcal{D} kein Schnitt ist, und es gilt: $\text{Im}(f) \neq \text{Im}(g)$. Also ist mindestens eine der beiden Abbildungen nicht leer. Wir faktorisieren die nicht leere Abbildung, beispielsweise g in (Epi, regulär Mono). Ist das folgende Diagramm für einen beliebigen Mengenfunktor F ein schwacher Pullback, dann ist der rechte Teil Urbild. Wir wissen bereits, dass der Nachbarschaftsfunktor Urbilder, die keine Schnitte sind, nicht erhält. Folglich ist das gesamte Diagramm kein schwacher Pullback.

$$\begin{array}{ccccc}
 F\ker(f, g) & \twoheadrightarrow & F(f^{-1}[\text{Im}(g)]) & \longrightarrow & FX \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow Ff \\
 FY & \twoheadrightarrow & F\text{Im}(g) & \hookrightarrow & FZ \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & & Fg
 \end{array}$$

\square

7.3 Monotoner Nachbarschaftsfunktor $\mathcal{M}^{A,B}(-)$

Definition 7.3.1. Sei (H, \leq_H) eine Halbordnung und $U \subseteq H$. Wir bezeichnen mit $\langle U \rangle$ die Unterhalbordnung (U, \leq_U) von H mit

$$\leq_U := \leq_H \cap (U \times U).$$

Eine Abbildung $f: (H_1, \leq_{H_1}) \rightarrow (H_2, \leq_{H_2})$ heißt *Ordnungseinbettung*, wenn für alle $a, b \in H_1$ gilt:

$$a \leq b \Leftrightarrow f(a) \leq f(b).$$

Lemma 7.3.2. *Sei (H, \leq_H) eine Halbordnung und $U \subseteq H$. Dann ist die Inklusion*

$$\subseteq: \langle U \rangle \hookrightarrow (H, \leq_H)$$

eine Ordnungseinbettung.

Beweis. Beide Richtungen folgen offensichtlich aus der Definition von $\langle U \rangle$. \square

Lemma 7.3.3. Seien $\iota : (H, \leq_H) \hookrightarrow (Q, \leq_Q)$ eine Ordnungseinbettung und

$$m : (H, \leq_H) \rightarrow (M, \leq_M, \bigvee)$$

eine monotone Abbildung zu einem vollständigen Verband M . Dann gibt es eine monotone Abbildung $\bar{m} : (Q, \leq_Q) \rightarrow (M, \leq_M, \bigvee)$, so dass $\bar{m} \circ \iota = m$ gilt.

$$\begin{array}{ccc} & Q & \\ & \swarrow \bar{m} & \\ \iota \uparrow & & \searrow \\ H & \xrightarrow{m} & M \end{array}$$

Beweis. Sei $\bar{m} : Q \rightarrow M$ mit $\bar{m}(x) = \bigvee \{m(a) \mid \iota(a) \leq x\}$. Zuerst zeigen wir, dass \bar{m} monoton ist. Seien $x, y \in Q$ mit $x \leq y$. Also gilt

$$\begin{aligned} & \bar{m}(x) \\ &= \bigvee \{m(a) \mid \iota(a) \leq x\} \\ &\leq \bigvee \{m(a) \mid \iota(a) \leq y\} && x \leq y \\ &= \bar{m}(y). \end{aligned}$$

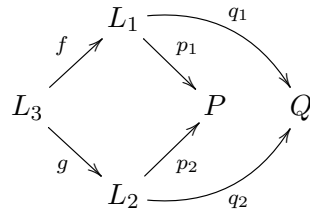
Wir zeigen jetzt, dass das Diagramm kommutiert. Seien $a \in H$.

$$\begin{aligned} & \bar{m}(\iota(a)) \\ &= \bigvee \{m(c) \mid \iota(c) \leq \iota(a)\} && \text{Def. } \bar{m} \\ &= m(a) && \iota \text{ ist eine Ordnungseinbettung.} \end{aligned}$$

\square

Wir betrachten eine Unterkategorie von *Poset*, in der die Objekte vollständige Verbände sind. Wir nennen diese Kategorie *MLat*.

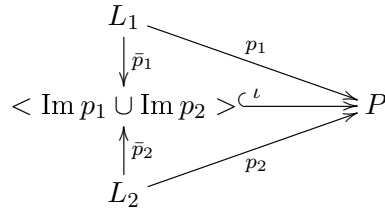
Lemma 7.3.4. Sei $\mathcal{D} := (f, g, p_1, p_2)$ ein Diagramm in *MLat*.



\mathcal{D} ist ein schwacher Pushout in *MLat*, wenn die folgenden Aussagen gelten:

- (i) \mathcal{D} ist ein nicht-leerer Schnitt in Set .
- (ii) p_1 und p_2 sind Ordnungseinbettungen.
- (iii) Für je zwei Elemente $a \in \text{Im } p_1 \setminus \text{Im } p_2$ und $b \in \text{Im } p_2 \setminus \text{Im } p_1$: Aus $a \leq b$ folgt die Existenz eines Zwischenelements $c \in \text{Im } p_1 \cap \text{Im } p_2$ mit $a \leq c \leq b$. Für $b \leq a$ ist es analog.

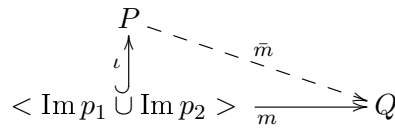
Beweis. Da die Vereinigung von Unterhalbordnungen einer gegebenen Halbordnung wieder eine Halbordnung ist, beschränken wir p_1 und p_2 auf ihre Bilder.



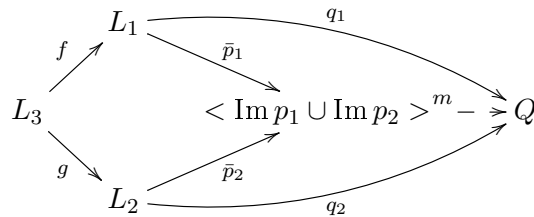
Unter Verwendung der Lemmas 7.3.2 und 7.3.3 reicht es eine monotone Abbildung

$$m: \langle \text{Im } p_1 \cup \text{Im } p_2 \rangle \rightarrow Q$$

mit $m \circ \bar{p}_1 = q_1$ und $m \circ \bar{p}_2 = q_2$ zu finden.



Da ι mono ist, ist $(f, g, \bar{p}_1, \bar{p}_2)$ auch ein nicht-leerer Schnitt. Laut Lemma 1.2.15 ist der Schnitt $(f, g, \bar{p}_1, \bar{p}_2)$ auch ein schwacher Pushout in Set . Dann gibt es eine Abbildung m mit $m \circ \bar{p}_1 = q_1$ und $m \circ \bar{p}_2 = q_2$.



Es bleibt noch zu zeigen, dass m monoton ist. Seien $a, b \in \text{Im } p_1 \cup \text{Im } p_2$ mit $a \leq b$.

- Fall 1.* $a, b \in \text{Im } p_1$ „ a und b im gleichen Bild“: Da p_1 eine Ordnungseinbettung ist, haben wir in diesem Fall zwei Elemente $\tilde{a} \leq \tilde{b} \in L_1$ mit $\bar{p}_1(\tilde{a}) = a$ und $\bar{p}_1(\tilde{b}) = b$.

Folglich gilt:

$$\begin{aligned}
 & m(a) \\
 &= m(\bar{p}_1(\tilde{a})) \\
 &= q_1(\tilde{a}) \\
 &\leq q_1(\tilde{b}) && \tilde{a} \leq \tilde{b} \wedge q_1 \text{ ist monoton} \\
 &= m(b).
 \end{aligned}$$

Fall 2. $a \in \text{Im } p_1 \setminus \text{Im } p_2$ und $b \in \text{Im } p_2 \setminus \text{Im } p_1$: Aus der Voraussetzung folgt die Existenz eines Zwischenelements $c \in \text{Im } p_1 \cap \text{Im } p_2$ mit $a \leq c \leq b$. Aus dem ersten Fall folgt $m(a) \leq m(c)$ und $m(c) \leq m(b)$.

□

Wir definieren jetzt einen kontravarianten Funktor F von Set zu $MLat$:

$$\begin{aligned}
 F(X) &:= (B^X, \leq, \bigwedge, \bigvee) \\
 Ff(r) &:= r \circ f,
 \end{aligned}$$

wobei B ein vollständiger Verband ist. Die Ordnung ist auf B^X elementweise definiert:

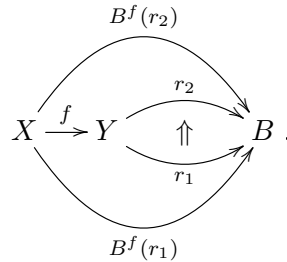
$$r_1 \leq r_2 \Leftrightarrow \forall x \in X. r_1(x) \leq r_2(x)$$

und

$$\bigwedge_i r_i := \lambda x : X. \bigwedge_i r_i(x).$$

Für die Wohldefiniertheit des Funktors zeigen wir die Monotonie von Ff .

Seien $r_1 \leq r_2 \in B^Y$. Wir zeigen $B^f(r_1) \leq B^f(r_2)$. Dies ist leicht im folgenden Diagramm zu sehen.



Wir definieren einen zweiten kontravarianten Funktor G von $MLat$ zu Set :

$$\begin{aligned}
 G(L) &:= \{r \in A^L \mid r \text{ ist monoton}\} \\
 G(f)(\sigma) &:= r \circ f,
 \end{aligned}$$

wobei A ein vollständiger Verband ist. Für die Wohldefiniertheit des Funktors zeigen wir

für eine monotone Abbildung $m : L_1 \rightarrow L_2$ und $r \in GL_2$, dass $Gm(r) \in GL_2$ gilt, d. h. $r \circ m$ ist monoton. Dies gilt offensichtlich.

Definition 7.3.5. Seien A und B zwei Halbordnungen. Wir definieren den *monotonen Nachbarschaftsfunktor* $\mathcal{M}^{A,B}$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{A,B}X &:= \{\sigma \in A^{B^X} \mid \sigma \text{ ist monoton}\} \\ \mathcal{M}^{A,B}X &:= A^{B^f}.\end{aligned}$$

Wenn A und B vollständige Verbände sind, lässt sich der monotone Nachbarschaftsfunktor als Komposition der obigen kontravarianten Funktoren gewinnen:

Lemma 7.3.6. $\mathcal{M}^{A,B} \triangleq G \circ F$.

Beweis. Beide Funktoren sind auf Abbildungen genau wie Nachbarschaftsfunktor definiert. Sei X eine Menge.

$$\begin{aligned}(G \circ F)X &= \{\sigma \in A^{F^X} \mid \sigma \text{ ist monoton}\} \text{Def. } G \\ &= \{\sigma \in A^{B^X} \mid \sigma \text{ ist monoton}\} \text{Def. } F \\ &= \mathcal{M}^{A,B}\end{aligned}$$

□

Wir werden die Erhaltungseigenschaften der Funktoren F und G prüfen, um zu zeigen, dass der monotone Nachbarschaftsfunktor Kernpaare schwach erhält.

Lemma 7.3.7. F transformiert Epi-Pullbacks in schwache Pushouts.

Beweis. Laut Lemma 1.2.14 ist jeder Epi-Pullback in Set ein schwacher Pushout. Aus Satz 7.2.4 und Lemma 7.2.2 folgt, dass das resultierende Diagramm ein nicht-leerer Schnitt in Set ist.

$$\begin{array}{ccc} & B^X & \\ B^f \nearrow & & \searrow B^{\pi_1} \\ B^P & & B^{\ker(f,g)} \\ B^g \searrow & & \nearrow B^{\pi_2} \\ & B^Y & \end{array}$$

Nach dem Auswahlaxiom sind die Projektionen split epis. Somit sind die Abbildungen B^{π_1} und B^{π_2} split monos. Folglich sind sie Ordnungseinbettungen. Wegen des Lemmas 7.3.4 bleibt nur noch die dritte Bedingung des Lemmas zu zeigen. Seien $r_1 \in \text{Im } B^{\pi_1} \setminus \text{Im } B^{\pi_2}$ und $r_2 \in \text{Im } B^{\pi_2} \setminus \text{Im } B^{\pi_1}$ zwei Abbildungen mit $r_1 \leq r_2$. Gesucht ist eine Abbildung $r \in \text{Im } B^{\pi_1} \cap \text{Im } B^{\pi_2}$, die zwischen r_1 und r_2 liegt, d. h. $r_1 \leq r \leq r_2$.

Als Hilfe notieren wir zuerst die Äquivalenz: Eine Abbildung $s : \ker(f,g) \rightarrow B$ ist genau dann aus $\text{Im } B^{\pi_1}$, wenn $s(x, y_1) = s(x, y_2)$ für alle $y_1, y_2 \in Y$ gilt, d. h. s ist nur von der

ersten Komponente abhängig. Die Aussage gilt analog für $\text{Im } B^{\pi_2}$.
Wir definieren $r : \ker(f, g) \rightarrow B$ mit

$$r(x, y) := \bigvee \{r_1(\tilde{x}, y) \mid (\tilde{x}, y) \in \ker(f, g)\}.$$

Wir zeigen zuerst, dass r zwischen r_1 und r_2 liegt, d. h. $r_1 \leq r \leq r_2$. Sei $(x, y) \in \ker(f, g)$.
Aus der Definition von r folgt automatisch $r(x, y) \geq r_1(x, y)$.

$$\begin{aligned} & r(x, y) \\ &= \bigvee \{r_1(\tilde{x}, y) \mid (\tilde{x}, y) \in \ker(f, g)\} \\ &\leq \bigvee \{r_2(\tilde{x}, y) \mid (\tilde{x}, y) \in \ker(f, g)\} && r_1 \leq r_2 \\ &= r_2(x, y) && r_2 \text{ ist von } y \text{ abhängig.} \end{aligned}$$

Folgendes bleibt nur noch zu zeigen: $r \in \text{Im } B^{\pi_1} \cap \text{Im } B^{\pi_2}$.

Aus der Definition ist leicht ersichtlich, dass r nur von y abhängig ist. Somit gilt

$$r \in \text{Im } B^{\pi_2}.$$

Wir zeigen nun, dass r nur von x abhängig ist.

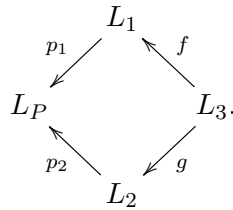
Seien $(x, y_1), (x, y_2) \in \ker(f, g)$.

$$\begin{aligned} & r(x, y_1) \\ &= \bigvee \{r_1(\tilde{x}, y_1) \mid (\tilde{x}, y_1) \in \ker(f, g)\} \\ &= \bigvee \{r_1(\tilde{x}, y_2) \mid (\tilde{x}, y_2) \in \ker(f, g)\} && r_1 \text{ ist nur von der 1. Komponente abhängig} \\ & && (\tilde{x}, y_1) \in \ker(f, g) \Leftrightarrow (\tilde{x}, y_2) \in \ker(f, g) \\ &= r(x, y_2). \end{aligned}$$

□

Lemma 7.3.8. *G transformiert schwache Pushouts in schwache Pullbacks.*

Beweis. Gegeben sei der folgende schwache Pushout



Wir wollen jetzt zeigen, dass das resultierende Diagramm ein schwacher Pullback ist.

$$\begin{array}{ccc}
 & A^{L_1} & \\
 A^{p_1} \nearrow & & \searrow A^f \\
 A^{L_p} & & A^{L_3} \\
 A^{p_2} \searrow & & \nearrow A^g \\
 & A^{L_2} &
 \end{array}$$

Seien $r_1 \in GL_1, r_2 \in GL_2$ zwei Abbildungen mit $G(f)(r_1) = G(f)(r_2)$, d.h. $r_1 \circ f = r_2 \circ g$. Gesucht ist eine Abbildung $r \in GL_p$ mit $A^{p_1}(r) = r_1$ und $A^{p_2}(r) = r_2$.

Da (p_1, p_2) ein schwacher Pushout von f und g in $M\text{Lat}$ ist, gibt es eine monotone Abbildung m mit $m \circ p_1 = r_1$ und $m \circ p_2 = r_2$. Wir wählen $r := m$. \square

Korollar 7.3.9. *Wenn A und B vollständige Verbände sind, dann erhält der monotone Nachbarschaftsfunktor $\mathcal{M}^{A,B}$ schwache Kernpaare.*

7.4 Urbilder erhaltender Nachbarschaftsfunktor $\mathcal{S}^{A,B}(-)$

Wir definieren die charakteristische Funktion $\chi_U^{b_1, b_2} : X \rightarrow B$ für beliebige $b_1, b_2 \in B$:

$$\chi_U^{b_1, b_2}(x) := \begin{cases} b_1 & \text{falls } x \in U \\ b_2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definition 7.4.1. Seien $U \subseteq X$ und $\sigma \in A^{B^X}$. Die Abbildung σ ist *von U charakteristisch bestimmt*, wenn für alle $b_1, b_2, b_3 \in B$ gilt:

$$\sigma(\chi_U^{b_1, b_2}) = \sigma(\chi_U^{b_1, b_3}).$$

σ ist *von U bestimmt*, wenn für je zwei Abbildungen $r, s : X \rightarrow B$ mit $r|_U = s|_U$ gilt:

$$\sigma(r) = \sigma(s).$$

Aus der Definition folgt offensichtlich: wenn σ von U bestimmt ist, dann ist σ von U charakteristisch bestimmt. Man merkt auch, dass jede Abbildung $\sigma \in A^{B^X}$ von der gesamten Menge X (charakteristisch) bestimmt ist. Das folgende Lemma liefert eine Charakterisierung der Bestimmtheit durch den A, B -Nachbarschaftsfunktor.

Lemma 7.4.2. *Eine Abbildung $\sigma \in A^{B^X}$ ist genau dann von U bestimmt, wenn*

$$\sigma \in A^{B^{\subseteq U}} [A^{B^U}]$$

gilt.

Beweis. " \leftarrow ": Aus der Voraussetzung folgt die Existenz einer Abbildung $\bar{\sigma} \in A^{B^U}$ mit $A^{B^{\subseteq U}}(\bar{\sigma}) = \sigma$.

Seien $r, s : U \rightarrow B$ mit $r \upharpoonright_U = s \upharpoonright_U$.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & \sigma & \\
 & \curvearrowright & \\
 A & \xleftarrow{\bar{\sigma}} & B^U \xleftarrow{B^{\subseteq X}} B^X
 \end{array} \\
 r \circ \subseteq_U^X \longleftarrow r
 \end{array}$$

Dann gilt $\sigma(r) = \bar{\sigma}(r \circ \subseteq_U^X) \stackrel{r \upharpoonright_U = s \upharpoonright_U}{=} \bar{\sigma}(s \circ \subseteq_U^X) = \sigma(s)$.

" \rightarrow ": Wir setzen jetzt voraus, dass für je zwei Abbildungen $r, s : X \rightarrow B$ mit $r \upharpoonright_U = s \upharpoonright_U$ gilt: $\sigma(r) = \sigma(s)$. Gesucht ist eine Abbildung $\bar{\sigma} \in A^{B^{\subseteq X}}$ mit $A^{B^{\subseteq X}}(\bar{\sigma}) = \sigma$. Sei ein Element $b \in B$. Wähle

$$\bar{\sigma}(r) := \sigma(\lambda x : X. \text{if}(x \in U) r(x) \text{ else } b).$$

Also

$$\begin{aligned}
 & A^{B^{\subseteq X}}(\bar{\sigma})(r) \\
 &= \bar{\sigma}(r \circ \subseteq_U^X) \\
 &= \sigma(\lambda x : X. \text{if}(x \in U) (r \circ \subseteq_U^X)(x) \text{ else } b) && \text{Def. } \bar{\sigma} \\
 &= \sigma(\lambda x : X. \text{if}(x \in U) r(x) \text{ else } b) \\
 &= \sigma(r) && (\lambda x : X. \text{if}(x \in U) r(x) \text{ else } b) \upharpoonright_U = r \upharpoonright_U.
 \end{aligned}$$

□

Die Beschränkung des A, B -Nachbarschaftsfunktors nach einer Kardinalität κ liefert alle Abbildungen, die von κ vielen Elementen bestimmt sind.

Korollar 7.4.3. Gegeben sei $\sigma \in A^{B^2}$. Die Enthaltung $\sigma \in A^{B^{\subseteq 1}}[A^{B^1}]$ gilt genau dann, wenn für je zwei Abbildungen $r, s : 2 \rightarrow B$ mit $r(1) = s(1)$ gilt: $\sigma(r) = \sigma(s)$.

Lemma 7.4.4. Eine Abbildung $\sigma \in A^{B^X}$ ist genau dann von U charakteristisch bestimmt, wenn $A^{B^{XU}}(\sigma) \in A^{B^{\subseteq 1}}[A^{B^1}]$ gilt.

Beweis.

$$\begin{aligned}
 & A^{B^{XU}}(\sigma) \in A^{B^{\subseteq 1}}[A^{B^1}] \\
 \Leftrightarrow & \forall r, s : 2 \rightarrow B \text{ mit } r(1) = s(1) \text{ gilt:} \\
 & A^{B^{XU}}(\sigma)(r) = A^{B^{XU}}(\sigma)(s) && \text{Korollar 7.4.3} \\
 \Leftrightarrow & \forall r, s : 2 \rightarrow B \text{ mit } r(1) = s(1) \text{ gilt:} \\
 & \sigma(r \circ \chi_U) = \sigma(s \circ \chi_U) && A^{B^{XU}}(\sigma)(r) = \sigma(r \circ \chi_U) \\
 \Leftrightarrow & \forall b_1, b_2, b_3 \in B. \sigma(\chi_U^{b_1, b_2}) = \sigma(\chi_U^{b_1, b_3}) \\
 \Leftrightarrow & \sigma \text{ ist von } U \text{ charakteristisch bestimmt.}
 \end{aligned}$$

□

Lemma 7.4.5. Seien $f : X \rightarrow Y$ und $\sigma \in A^{B^X}$ zwei Abbildungen. Seien $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$. Die folgenden Aussagen gelten:

- (i) Ist σ von U bestimmt, dann ist $A^{B^f}(\sigma)$ von $f[U]$ bestimmt.
- (ii) $A^{B^f}(\sigma)$ ist von V genau dann charakteristisch bestimmt, wenn σ von $f^{-}[V]$ charakteristisch bestimmt ist.
- (iii) Unter Voraussetzung der Surjektivität von f gilt: Ist σ von $f^{-}[V]$ bestimmt, dann ist $A^{B^f}(\sigma)$ von V bestimmt.

Beweis. (i): Aufgrund vom Lemma 7.4.2, reicht es für einen beliebigen Funktor F und ein Element a in FX zu zeigen:

$$a \in F \subseteq_U^X [FU] \Rightarrow Ff(a) \in F \subseteq_{f[U]}^X [F(f[U])].$$

Man sieht es im folgenden Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{a} FX & \xrightarrow{Ff} & FY \xleftarrow{Ff(a)} \\ \uparrow & & \uparrow \\ FU & \xrightarrow{F\bar{f}} & F(f[U]) \end{array}$$

(ii): Aufgrund vom Lemma 7.4.4 reicht es für einen beliebigen Funktor F und ein Element a in FX zu zeigen:

$$F\chi_{f^{-}[V]}(a) \in F \subseteq_1^2 [F1] \Leftrightarrow F\chi_V(Ff(a)) \in F \subseteq_1^2 [F1].$$

Dies ist wegen $\chi_{f^{-}[V]} = \chi_V \circ f$ offensichtlich.

(iii): Die Aussage folgt aus (i), weil $f[f^{-}[V]] = V$. □

Lemma 7.4.6. Seien $f : X \rightarrow Y$ und $\sigma \in A^{B^X}$ zwei Abbildungen. Ist σ von endlich viele Teilmengen $(U_i)_{i \in I}$ bestimmt, dann ist es von $\bigcap_{i \in I} U_i$ bestimmt.

Beweis. Da A^{B^-} endliche Schnitte erhält, reicht es aufgrund vom Lemma 7.4.4 für einen beliebigen gesunden Funktor F zu zeigen:

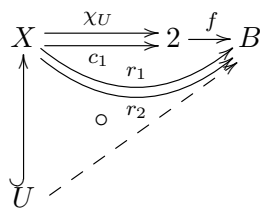
$$(\forall i \in I. a \in F \subseteq_{U_i}^X [FU_i]) \Rightarrow a \in F \subseteq_{\bigcap_{i \in I} U_i}^X [F(\bigcap_{i \in I} U_i)].$$

Dies ist offensichtlich, da F endliche Schnitte erhält. □

Definition 7.4.7. Wir definieren den Funktor $\mathcal{S}^{A,B}(-)$ als Unterfunktor von A^{B^-} . Jede Abbildung $\sigma \in \mathcal{S}^{A,B}X$ erfüllt auf jeder Teilmenge $U \subseteq X$ die Bedingung: Wenn σ von U charakteristisch bestimmt ist, dann ist sie von U bestimmt.

Die obige Bedingung bedeutet für jede Teilmenge $U \subseteq X$ ([Gum]):

$$(\forall f : 2 \rightarrow B. \sigma(f \circ \chi_U) = \sigma(f \circ c_1)) \implies (\forall r, s : X \rightarrow B. r_{1U} = s_{1U} \implies \sigma(r) = \sigma(s)).$$



Satz 7.4.8. Die Urbild-Bereinigung von A^{B^-} liefert den Funktor $\mathcal{S}^{A,B}$.

Beweis. Unter Verwendung der Definition der Urbild-Bereinigung ist der Beweis einfach aus dem vorherigen Lemma 7.4.4 und dem Korollar 7.4.3 zu folgern. \square

Kombiniert man den obigen Satz mit dem Satz 3.5.9, so erhält man eine notwendige Bedingung für trennbare Funktoren:

Korollar 7.4.9. Ein Unterfunktork F von A^{B^-} erhält genau dann Urbilder, wenn F Unterfunktork des Funktors \mathcal{S} ist.

Für $A := B := 2$ gilt:

Korollar 7.4.10. Ein Unterfunktork F des Nachbarschaftsfunktors erhält genau dann Urbilder, wenn für alle $\sigma \in FX$ die folgenden Aussagen gelten:

- Wenn $\emptyset \notin \sigma$ und $X \in \sigma$, dann gilt für alle $U \in \sigma$ mit $U^C \notin \sigma$: für alle $V \subseteq X$:

$$V \in \sigma \Leftrightarrow U \cap V \in \sigma.$$

- Wenn $\emptyset \in \sigma$ und $X \notin \sigma$, dann gilt für alle $U \in \sigma$ mit $U^C \notin \sigma$: für alle $V \subseteq X$:

$$V \in \sigma \Leftrightarrow U^C \cap V \in \sigma.$$

- Wenn $\emptyset \in \sigma$ und $X \in \sigma$, dann gilt für alle $U \in \sigma$ mit $U^C \in \sigma$: für alle $V \subseteq X$:

$$V \in \sigma \Leftrightarrow U \cap V \in \sigma.$$

- Wenn $\emptyset \notin \sigma$ und $X \notin \sigma$, dann gilt für alle $U \notin \sigma$ mit $U^C \notin \sigma$: für alle $V \subseteq X$:

$$V \in \sigma \Leftrightarrow U \cap V \in \sigma.$$

Filterfunktork $\mathcal{F}^{A,B}(-)$

Definition 7.4.11. Seien A und B vollständige Verbände. Wir definieren den Filterfunktork $\mathcal{F}^{A,B}(-)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{A,B}X &:= \{\sigma \in A^{B^X} \mid \sigma \text{ ist ein Homomorphismus in } \mathit{Lat}\} \\ \mathcal{F}^{A,B}f &:= A^{B^f}.\end{aligned}$$

Analog zu dem monotonen Nachbarschaftsfunktork gewinnt man den Filterfunktork als Komposition zweier kontravarianter Funktoren. Statt $M\mathit{Lat}$ betrachten wir die Kategorie der vollständigen Verbände. Wir definieren jetzt einen kontravarianten Funktork F von Set zu Lat :

$$\begin{aligned}F(X) &:= (B^X, \leq, \bigwedge, \bigvee) \\ Ff(\sigma) &:= \sigma \circ f.\end{aligned}$$

Diesmal zeigen wir für die Wohldefiniertheit des Funktorks die Homomorphie von Ff in Lat . Sei $(\sigma_i)_{i \in I} \in B^Y$. Wir zeigen $B^f(\bigwedge_i \sigma_i) = \bigwedge_i B^f(\sigma_i)$, d.h. $(\bigwedge_i \sigma_i) \circ f = \bigwedge_i (\sigma_i \circ f)$. Sei nun ein Element $x \in X$.

$$\begin{aligned}(\bigwedge_i \sigma_i)f(x) & \\ &= \bigwedge_i \sigma_i(f(x)) \quad \text{Def. } \bigwedge \\ &= (\bigwedge_i \sigma_i \circ f)(x).\end{aligned}$$

Wir definieren einen zweiten kontravarianten Funktork G von Lat zu Set :

$$\begin{aligned}G(L) &:= \{\sigma \in A^L \mid \sigma \text{ ist ein Homomorphismus in } \mathit{Lat}\} \\ G(f)(\sigma) &:= \sigma \circ f,\end{aligned}$$

wobei A ein vollständiger Verband ist. Für die Wohldefiniertheit des Funktorks G zeigen wir für einen Verbandshomomorphismus $h : L_1 \rightarrow L_2$ und $\sigma \in GL_2$, dass $Gh(\sigma) \in GL_2$ gilt, d. h. $\sigma \circ h$ ist ein Homomorphismus in Lat . Dies gilt offensichtlich.

Satz 7.4.12. *Der Filterfunktork $\mathcal{F}^{A,B}(-)$ erhält Urbilder.*

Beweis. Laut dem Korollar 7.4.9 reicht es zu zeigen, dass $\mathcal{F}^{A,B}$ ein Unterfunktork von \mathcal{S} ist. Da \mathcal{F} auf Abbildungen genau wie \mathcal{S} definiert ist, bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{F}^{A,B}$ ein Teilfunktork von \mathcal{S} ist, d.h. für jede Menge X gilt: $\mathcal{F}^{A,B}X \subseteq \mathcal{S}^{A,B}X$. Sei $\sigma \in \mathcal{F}^{A,B}X$ und U eine Teilmenge von X , wobei σ von U charakteristisch bestimmt ist. Wir wollen nun zeigen, dass σ von U bestimmt ist. Seien $r_1, r_2 : X \rightarrow B$ zwei Abbildungen mit $r_1|_U = r_2|_U$. Wir zeigen $\sigma(r_1) = \sigma(r_2)$. Seien s und o das Supremum und das Infimum in

B .

$$\begin{array}{ll}
\sigma(r_1) & \\
= \sigma(r_1 \wedge \lambda x : B.s) & r_1 \wedge \lambda x : B.s = r_1 \text{ und Def. } \wedge \\
= \sigma(r_1) \wedge \sigma(\lambda x : B.s) & \sigma \text{ ist ein Homo.} \\
= \sigma(r_1) \wedge \sigma(\lambda x.\text{if}(x \in U) s \text{ else } o) & \sigma \text{ ist von } U \text{ charakt. best.} \\
= \sigma(r_1 \wedge \lambda x.\text{if}(x \in U) s \text{ else } o) & \sigma \text{ ist ein Homo.} \\
= \sigma(\lambda x.\text{if}(x \in U) r_1(x) \text{ else } o) & \text{Def. } \wedge \\
= \sigma(\lambda x.\text{if}(x \in U) r_2(x) \text{ else } o) & r_{1|U} = r_{2|U} \\
= \sigma(r_2) & \sigma \text{ ist von } U \text{ charakt. best. .}
\end{array}$$

□

7.5 Bisimilarität bei trennbaren Funktoren

Seien $\iota : F \xrightarrow{\bullet} G$ eine injektive natürliche Transformation und $R \subseteq A \times B$ eine Relation zwischen zwei F -Coalgebren (A, α) und (B, β) . R heißt *up-to- ι -Bisimulation* zwischen (A, α) und (B, β) , wenn R eine G -Bisimulation zwischen $(A, \iota_A \circ \alpha)$ und $(B, \iota_B \circ \beta)$ ist. Bei einer festen natürlichen Transformation ι nennen wir R auch *up-to- G -Bisimulation*. Untercoalgebren und 2-Präkongruenzen lassen sich in beide Richtungen übertragen:

Lemma 7.5.1 ([Sch01]). *Seien (A, α) und (B, β) zwei F -Coalgebren. Dann gelten folgende Aussagen:*

- (i) *Eine Teilmenge U ist genau dann eine Untercoalgebra von (A, α) , wenn U Untercoalgebra von $(A, \iota_A \circ \alpha)$ ist.*
- (ii) *Eine Relation R ist genau dann eine Präkongruenz zwischen (A, α) und (B, β) , wenn R eine 2-Präkongruenz zwischen $(A, \iota_A \circ \alpha)$ und $(B, \iota_B \circ \beta)$ ist.*

Da trennbare Funktoren genau die Unterfunktoren der Nachbarschaftsfunktoren sind, sind die exakten Präkongruenzen genau die up-to- A^{B^-} -Bisimulationen. Wir wollen in diesem Abschnitt die A^{B^-} -Bisimulationen genauer identifizieren. In [HKP07] wurde dieser Begriff nur für $A = B = 2$ untersucht.

Satz 7.5.2. *Sei F ein Funktor, der Pushouts von Epis in schwache Pullbacks transformiert. Eine Relation R zwischen zwei Coalgebren \mathcal{A} und \mathcal{B} ist genau dann eine Bisimulation, wenn R eine exakte Präkongruenz ist.*

Beweis. " \rightarrow ": Diese Richtung folgt offensichtlich durch die Pushoutbildung in der Kategorie der F -Coalgebren.

" \leftarrow ": Gegeben sei eine exakte Präkongruenz R zwischen zwei Coalgebren \mathcal{A} und \mathcal{B} . Wir

bilden den Pushout von R wie im Diagramm.

$$\begin{array}{ccccc}
 R & \xrightarrow{\bar{\pi}_1} & \pi_1[R] & \hookrightarrow & B \\
 \bar{\pi}_2 \downarrow & & \downarrow p_1 & & \downarrow \\
 \pi_2[R] & \xrightarrow{p_2} & P & \hookrightarrow & \bullet \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 A & \xrightarrow{\quad} & \bullet & \hookrightarrow & \bullet
 \end{array}$$

Aus der Exaktheit von R sind $\pi_1[R]$ und $\pi_2[R]$ Untercoalgebren von \mathcal{A} und \mathcal{B} . Seien nun γ_1 und γ_2 die Strukturen von $\pi_1[R]$ und $\pi_2[R]$.

Es ist lediglich $Fp_1 \circ \gamma_1 \circ \bar{\pi}_1 = Fp_2 \circ \gamma_2 \circ \bar{\pi}_2$ zu prüfen. Aus der Voraussetzung von F folgt, dass $(F\bar{\pi}_1, F\bar{\pi}_2)$ ein Pullback ist. Dessen Konkurrent ist $(R, \gamma_1 \circ \bar{\pi}_1, \gamma_2 \circ \bar{\pi}_2)$. Somit ist R eine Bisimulation.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \pi_1[R] & \xrightarrow{\gamma_1} & F(\pi_1[R]) & & \\
 & \nearrow \bar{\pi}_1 & & & \nearrow F\bar{\pi}_1 & & \\
 R & \xrightarrow{\quad} & FR & \xrightarrow{\quad} & \circ & \xrightarrow{\quad} & P \\
 & \searrow \bar{\pi}_2 & & & \searrow F\bar{\pi}_2 & & \\
 & & \pi_2[R] & \xrightarrow{\gamma_2} & F(\pi_2[R]) & & \\
 & & & & \nearrow Fp_2 & &
 \end{array}$$

□

Korollar 7.5.3. *Jede Relation R zwischen zwei A^{B^-} -Coalgebren ist genau dann eine Bisimulation, wenn R^d auch eine Bisimulation ist.*

Beweis. " \rightarrow " folgt aus der schwachen Kernpaarerhaltung von A^{B^-} und dem Theorem 6.4.5.

" \leftarrow " folgt aus dem obigen Satz und dem Korollar 7.2.6. □

Wir werden jetzt die exakten 2-Präkongruenzen zwischen A^{B^-} -Coalgebren untersuchen. Wir betrachten zuerst die Exaktheit.

Satz 7.5.4. *Eine Teilmenge U einer A^{B^-} -Coalgebra (X, α) ist genau dann eine Untercoalgebra, wenn für alle $u \in U$ gilt: $\alpha(u)$ ist von U bestimmt.*

Beweis. Der Beweis folgt offensichtlich aus dem Lemma 7.4.2. □

Satz 7.5.5. *Eine Relation R zwischen zwei A^{B^-} -Coalgebren (X, α) und (Y, β) ist genau dann eine 2-Präkongruenz, wenn für jedes Paar $(x, y) \in R$ und je zwei Abbildungen $f : X \rightarrow B$ und $g : Y \rightarrow B$ mit $R \subseteq \ker(f, g)$ gilt:*

$$\alpha(x)(f) = \beta(y)(g).$$

Beweis. " \rightarrow ": Seien $f : X \rightarrow B$ und $g : Y \rightarrow B$ zwei Abbildungen mit

$$R \subseteq \ker(f, g).$$

Wir bilden den Pushout (p_1, p_2) von (R, π_1, π_2) . Also ist (f, g) ein Konkurrent von (p_1, p_2) . Da R eine 2-Präkongruenz ist, erhalten wir: $A^{B^f}(\alpha(x)) = A^{B^g}(\beta(y))$. Somit gilt

$$\alpha(x) \circ B^f = \beta(y) \circ B^g.$$

Wenden wir die Abbildungen auf id_B an, erhalten wir: $\alpha(x)(f) = \beta(y)(g)$.

$$\begin{array}{ccc} & B^X & \\ \alpha(x) \swarrow & & \nwarrow B^f \\ A & & B^B \\ \beta(y) \swarrow & & \nwarrow B^g \\ & B^Y & \end{array}$$

" \leftarrow ": Wir bilden zuerst den Pushout (p_1, p_2) von (R, π_1, π_2) . Es reicht jetzt zu zeigen:

$$\alpha(x) \circ B^{p_1} = \beta(y) \circ B^{p_2}.$$

Sei nun eine Abbildung $h : P \rightarrow B$ gegeben. Wir wollen Folgendes zeigen

$$\alpha(x)(h \circ p_1) = \beta(y)(h \circ p_2).$$

Aufgrund der Voraussetzung ist es ausreichend zu zeigen, dass $R \subseteq \ker(h \circ p_1, h \circ p_2)$ gilt. Diese Inklusion gilt, weil (p_1, p_2) ein Pushout von (R, π_1, π_2) ist.

$$\begin{array}{ccc} & B^X & \\ \alpha(x) \swarrow & & \nwarrow B^{p_1} \\ A & & B^P \\ \beta(y) \swarrow & & \nwarrow B^{p_2} \\ & B^Y & \end{array}$$

□

Korollar 7.5.6. *Eine Relation R zwischen zwei A^{B^-} -Coalgebren (X, α) und (Y, β) ist genau dann eine Bisimulation, wenn für jedes Paar $(x, y) \in R$ die folgenden Aussagen gelten:*

- (i) $\alpha(x)$ ist von $\pi_1[R]$ bestimmt.
- (ii) $\beta(y)$ ist von $\pi_2[R]$ bestimmt.
- (iii) Für je zwei Abbildungen $f : X \rightarrow B$ und $g : Y \rightarrow B$ mit $R \subseteq \ker(f, g)$ gilt: $\alpha(x)(f) = \beta(y)(g)$.

Für $A = B = 2$ liefert die dritte Voraussetzung (wie in [HKP07]), dass für je zwei Teilmengen $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ gilt: aus $R[U] \subseteq V$ und $R^{-}[V] \subseteq U$ folgt:

$$U \in \alpha(x) \Leftrightarrow V \in \beta(y).$$

7.6 Schwache Pullbackerhaltung von $\mathcal{S}^{A,B}$

Satz 7.6.1. \mathcal{S} erhält schwache Pullbacks.

Aus den vorherigen Abschnitten wissen wir, dass \mathcal{S} Urbilder erhält. Es bleibt nur die schwache Kernerhaltung zu beweisen. Der Fall $|A| = 1$ oder $|B| = 1$ ist trivial. Gegeben seien $f : X \rightarrow Y$ und $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{S}X$ mit $\mathcal{S}f(\sigma_1) = \mathcal{S}f(\sigma_2)$. Da A^{B^-} schwache Kernpaare erhält, gibt es eine Abbildung $\sigma_P : B^{\ker f} \rightarrow A$ mit $A^{B^{\pi_i}}(\sigma_P) = \sigma_i$. Wir suchen eine Abbildung $\tilde{\sigma}_P \in \mathcal{S} \ker f$ mit $\mathcal{S}\pi_i(\tilde{\sigma}_P) = \sigma_i$.

Wir verwenden die Funktorzerlegung des Abschnitts 1.3.3. Also beschränken wir den Beweis auf einen Unterfunctor $\mathcal{S}_{\sigma^!}$ von \mathcal{S} für ein Element $\sigma^! \in \mathcal{S}1$.

Wir definieren ein System $M := M_1 \cup M_2$, wobei

$$M_i := \{ \pi_i^- [U] \mid U \subseteq X \wedge \sigma_P \text{ ist von } \pi_i^- [U] \text{ charakteristisch bestimmt} \}$$

und eine Abbildung N definiert durch:

$$\begin{aligned} N : B^{\ker f} &\longrightarrow 2^{B^{\pi_1}[B^X] \cup B^{\pi_2}[B^X]} \\ r &\mapsto \{ s \in B^{\pi_1}[B^X] \cup B^{\pi_2}[B^X] \mid \exists n \in \mathbb{N}. \exists (W_i)_{i < n} \\ &\quad \forall i < n. W_i \in M \text{ und } r_{1 \cap_{i < n}} W_i = s_{1 \cap_{i < n}} W_i \}. \end{aligned}$$

Wenn $\sigma^!$ konstant ist, wähle $o \in A$ mit $o \neq \sigma^!$. Ansonsten wird o beliebig gewählt. Instanziiere jetzt die Abbildung $\tilde{\sigma}_P$ mit

$$\tilde{\sigma}_P(r) := \begin{cases} \sigma_P(s) & \text{für ein } s \in N(r) \text{ falls } N(r) \neq \emptyset \\ o & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir beweisen jetzt die schwache Kernpaarerhaltung von \mathcal{S} . Der Beweis wird dabei in drei Schritte unterteilt:

- Wohldefiniertheit von $\tilde{\sigma}_P$.
- Typkorrektheit: $\tilde{\sigma}_P \in \mathcal{S} \ker f$.
- Urbildeigenschaft: $\mathcal{S}\pi_i(\tilde{\sigma}_P) = \sigma_i$ für alle $i \in \{1, 2\}$.

Wohldefiniertheit von $\tilde{\sigma}_P$

Lemma 7.6.2. Seien $f : X \rightarrow Y$, $U, V \subseteq X$. Seien $W_1 := \pi_1^- [U]$ und $W_2 := \pi_2^- [V]$. Dann gilt: $\pi_1[W_1 \cap W_2] = \pi_1[W_1] \cap (\pi_2[W_2] \ker f)$.

Beweis. " \supseteq ": Sei $x \in \pi_1[W_1] \cap [\pi_2[W_2]]\ker f$. Dann haben wir $\exists \tilde{y}_1.(x, \tilde{y}_1) \in W_1$ und $\exists \tilde{x}_2, \tilde{y}_2.(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2) \in W_2 \wedge f(\tilde{y}_2) = f(x)$.

Aus $(x, \tilde{y}_1) \in W_1$ und $f(x) = f(\tilde{y}_2)$ folgt $(x, \tilde{y}_2) \in W_1$, und aus $(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2) \in W_2$ und $f(x) = f(\tilde{y}_2)$ folgt $(x, \tilde{y}_2) \in W_2$. Also gilt $(x, \tilde{y}_2) \in W_1 \cap W_2$.

$$\begin{array}{ccc} x & & \tilde{x}_2 \\ & \searrow & \downarrow \\ W_1 \downarrow W_1 & & W_2 \downarrow W_2 \\ \tilde{y}_1 & & \tilde{y}_2 \end{array}$$

" \subseteq ": Sei $x \in \pi_1[W_1 \cap W_2]$. Dann haben wir $\exists \tilde{y}_1.(x, \tilde{y}_1) \in W_1 \cap W_2$.

Gesucht sind \tilde{x}_2, \tilde{y}_2 mit $(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2) \in W_2$ und $f(\tilde{y}_2) = f(x)$.

Wähle $\tilde{x}_2 := x$ und $\tilde{y}_2 := \tilde{y}_1$. □

Lemma 7.6.3. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $(W_i)_{i < n}$ mit $W_i \in M$ für jedes $i < n$ gilt: für je zwei Abbildungen $r, s \in B^{\pi_1}[B^X] \cup B^{\pi_2}[B^X]$: aus $r \upharpoonright_{i < n} W_i = s \upharpoonright_{i < n} W_i$ folgt*

$$\sigma_P(r) = \sigma_P(s).$$

Beweis. Wir zerlegen den Beweis in die folgenden Fälle:

Fall 1. $r, s \in B^{\pi_1}[B^X]$: Hier haben wir zwei Abbildungen $\hat{r}, \hat{s} : X \rightarrow B$ mit $\hat{r} \circ \pi_1 = r$ und $\hat{s} \circ \pi_1 = s$. Wir splitten die Menge $\{0..n-1\}$ auf zwei Teilmengen I und J auf, mit

$$I := \{i < n \mid W_i \in M_1\}.$$

Die Teilmenge J ist analog definiert.

Seien nun $\bar{W}_1 := \bigcap_{i \in I} W_i$ und $\bar{W}_2 := \bigcap_{j \in J} W_j$. Also gilt $\bigcap_{i < n} W_i = \bar{W}_1 \cap \bar{W}_2$. Aus der Definition von M folgen die Aussagen:

- Für alle $i \in I$ gibt es eine Teilmenge $U_i \subseteq X$ mit $\pi_1^-[U_i] = W_i$, und σ_P ist von W_i charakteristisch bestimmt.

- Für alle $j \in J$ gibt es eine Teilmenge $V_j \subseteq X$ mit $\pi_2^-[V_j] = W_j$, und σ_P ist von W_j charakteristisch bestimmt.

\bar{W}_1 und \bar{W}_2 erfüllen die Voraussetzung des obigen Lemmas:

$$\begin{aligned} \bar{W}_1 &= \bigcap_{i \in I} W_i \\ &= \bigcap_{i \in I} \pi_1^-[U_i] \\ &= \pi_1^-\left[\bigcap_{i \in I} U_i\right] \end{aligned}$$

Analog gilt $\bar{W}_2 = \pi_2^-\left[\bigcap_{j \in J} V_j\right]$.

Wir erhalten die folgenden Implikationen:

$$\begin{aligned}
 & \sigma_P \text{ ist von } \pi_1^- [U_i] = W_i \text{ charakt. bestimmt} \\
 \Rightarrow & \sigma_1 \text{ ist von } U_i \text{ charakt. bestimmt} && \text{Lem. 7.4.5} \\
 \Rightarrow & \sigma_1 \text{ ist von } U_i \text{ bestimmt} && \sigma_1 \in \mathcal{S}X \\
 \Rightarrow & \sigma_1 \text{ ist von } \bigcap_{i \in I} U_i \text{ bestimmt} && \text{Lem. 7.4.6}
 \end{aligned}$$

Analog ist σ_2 von $\bigcap_{j \in J} V_j$ bestimmt. Daraus erhält man:

$$\begin{aligned}
 & \sigma_2 \text{ ist von } \bigcap_{j \in J} V_j \text{ best.} \\
 \Rightarrow & \sigma_2 \text{ ist von } [(\bigcap_{j \in J} V_j)] \ker f \text{ best.} \\
 \Rightarrow & A^{B^f}(\sigma_2) = A^{B^f}(\sigma_1) \text{ ist von } f[[(\bigcap_{j \in J} V_j)] \ker f] \text{ best.} && \text{Lem. 7.4.5} \\
 \Rightarrow & A^{B^f}(\sigma_1) \text{ ist von } f[[(\bigcap_{j \in J} V_j)] \ker f] \text{ charakt. best.} \\
 \Rightarrow & \sigma_1 \text{ ist von } f^- [f[[(\bigcap_{j \in J} V_j)] \ker f]] = [(\bigcap_{j \in J} V_j)] \ker f \text{ charakt. best.} && \text{Lem. 7.4.5} \\
 \Rightarrow & \sigma_1 \text{ ist von } [(\bigcap_{j \in J} V_j)] \ker f \text{ best.} && \sigma_1 \in \mathcal{S}X
 \end{aligned}$$

Folglich ist σ_1 von $\bigcap_{i \in I} U_i$ und $[(\bigcap_{j \in J} V_j)] \ker f$ bestimmt. Wir wollen jetzt die beiden Mengen durch \bar{W}_1 und \bar{W}_2 identifizieren.

$$\begin{aligned}
 \bigcap_{i \in I} U_i & \stackrel{\pi_1^{\text{surj.}}}{=} \pi_1[\pi_1^- [\bigcap_{i \in I} U_i]] \\
 & = \pi_1[\bigcap_{i \in I} \pi_1^- [U_i]] \\
 & = \pi_1[\bigcap_{i \in I} W_i] \\
 & = \pi_1[\bar{W}_1]
 \end{aligned}$$

Analog gilt $\pi_2[\bar{W}_2] = \bigcap_{j \in J} V_j$. Somit ist σ_1 von $\pi_1[\bar{W}_1]$ und $[\pi_2[\bar{W}_2]] \ker f$ bestimmt. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 & \sigma_1 \text{ ist von } \pi_1[\bar{W}_1] \text{ und } [\pi_2[\bar{W}_2]] \ker f \text{ bestimmt} \\
 \Rightarrow & \sigma_1 \text{ ist von } \pi_1[\bar{W}_1] \cap ([\pi_2[\bar{W}_2]] \ker f) \text{ bestimmt} && \text{Lem. 7.4.6} \\
 \Rightarrow & \sigma_1 \text{ ist von } \pi_1[\bar{W}_1 \cap \bar{W}_2] = \pi_1[\bigcap_{i < n} W_i] \text{ bestimmt} && \text{Lem. 7.6.2}
 \end{aligned}$$

Aus der Voraussetzung folgt

$$(\hat{r} \circ \pi_1)_{\bigcap_{i < n} W_i} = r_{\bigcap_{i < n} W_i} = s_{\bigcap_{i < n} W_i} = (\hat{s} \circ \pi_1)_{\bigcap_{i < n} W_i}. \text{ Folglich gilt}$$

$\hat{r}|_{\pi_1[\bigcap_{i<n} W_i]} = \hat{s}|_{\pi_1[\bigcap_{i<n} W_i]}$. Zum Schluss erhalten wir:

$$\begin{aligned} \sigma_P(r) &= \sigma_P(\hat{r} \circ \pi_1) & A^{B^{\pi_1}}(\sigma_P) &= \sigma_1 \\ &= \sigma_1(\hat{r}) \\ &= \sigma_1(\hat{s}) & \sigma_1 \text{ ist von } \pi_1[\bigcap_{i<n} W_i] &\text{ bestimmt} \\ &= \sigma_P(\hat{s} \circ \pi_1) \\ &= \sigma_P(s) \end{aligned}$$

Fall 2. $r \in B^{\pi_1}[B^X]$ und $s \in B^{\pi_2}[B^X]$: Es ergeben sich zwei Abbildungen

$$\hat{r}, \hat{s} : X \rightarrow B$$

mit $\hat{r} \circ \pi_1 = r$ und $\hat{s} \circ \pi_2 = s$. Aus der Voraussetzung folgt

$$(\hat{r} \circ \pi_1)|_{\bigcap_{i<n} W_i} = r|_{\bigcap_{i<n} W_i} = s|_{\bigcap_{i<n} W_i} = (\hat{s} \circ \pi_2)|_{\bigcap_{i<n} W_i}.$$

Gegeben seien ein Element $b \in B$, eine Abbildung $\hat{t}_1 : X \rightarrow B$ mit

$$\hat{t}_1(x) := \begin{cases} \hat{r}(\bar{x}) & \text{falls } \exists \bar{x}, \bar{y}. (\bar{x}, \bar{y}) \in \bigcap_{i<n} W_i \wedge f(x) = f(\bar{x}) \\ b & \text{sonst.} \end{cases}$$

und eine Abbildung $\hat{t}_2 : X \rightarrow B$ mit

$$\hat{t}_2(y) := \begin{cases} \hat{s}(\bar{y}) & \text{falls } \exists \bar{x}, \bar{y}. (\bar{x}, \bar{y}) \in \bigcap_{i<n} W_i \wedge f(y) = f(\bar{y}) \\ b & \text{sonst.} \end{cases}$$

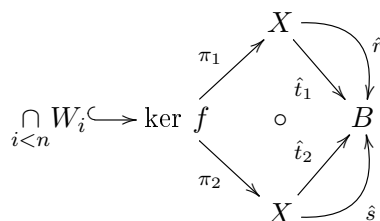
Wir zeigen zuerst, dass \hat{t}_1 wohldefiniert ist. Seien $x, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2 \in X$ mit $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \in \bigcap_{i<n} W_i \wedge (\bar{x}_2, \bar{y}_2) \in \bigcap_{i<n} W_i \wedge f(x) = f(\bar{x}_1) = f(\bar{x}_2)$. Wie im ersten Fall splitten wir die Mengen $\{0..n-1\}$ in zwei Teilmengen auf, so dass $\bigcap_{i<n} W_i = \bar{W}_1 \cap \bar{W}_2$ gilt. Aus $(\bar{x}_2, \bar{y}_2) \in \bar{W}_2$ und $f(\bar{x}_1) = f(\bar{x}_2)$ folgt $(\bar{x}_1, \bar{y}_2) \in \bar{W}_2$, und aus $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \in \bar{W}_1$ folgt $(\bar{x}_1, \bar{y}_2) \in \bar{W}_1$. Also gilt $(\bar{x}_1, \bar{y}_2) \in \bar{W}_1 \cap \bar{W}_2 = \bigcap_{i<n} W_i$.

$$\begin{array}{ccc} & \bar{x}_2 & \bar{x}_1 \\ & \downarrow \bar{W}_2 & \swarrow \bar{W}_1 \\ \bar{y}_2 & & \bar{y}_1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \hat{r}(\bar{x}_2) &= \hat{s}(\bar{y}_2) & (\hat{r} \circ \pi_1)|_{\bigcap_{i<n} W_i} &= (\hat{s} \circ \pi_2)|_{\bigcap_{i<n} W_i} \wedge (\bar{x}_2, \bar{y}_2) \in \bigcap_{i<n} W_i \\ &= \hat{r}(\bar{x}_1) & & (\bar{x}_1, \bar{y}_2) \in \bigcap_{i<n} W_i \end{aligned}$$

Somit ist sowohl \hat{t}_1 als auch analog \hat{t}_2 wohldefiniert.

Im ersten Schritt zeigen wir die Gleichungen: $\hat{t}_1 \circ \pi_{1|_{\bigcap_{i < n} W_i}} = \hat{r} \circ \pi_{1|_{\bigcap_{i < n} W_i}}$ und $\hat{t}_2 \circ \pi_{2|_{\bigcap_{i < n} W_i}} = \hat{s} \circ \pi_{2|_{\bigcap_{i < n} W_i}}$.



Sei $(x, y) \in \bigcap_{i < n} W_i$. Aus der Definition von \hat{t}_1 und \hat{t}_2 gilt automatisch

$$\hat{t}_1(x) = \hat{r}(x) \text{ und } \hat{t}_2(y) = \hat{s}(y).$$

Im zweiten Schritt zeigen wir $\hat{t}_1 \circ \pi_1 = \hat{t}_2 \circ \pi_2$. Sei $(x, y) \in \ker f$. Wir unterscheiden zwei Unterfälle:

- Es gibt ein Paar $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bigcap_{i < n} W_i$ mit $f(x) = f(\bar{x})$: Also

$$\begin{aligned} & \hat{t}_1(x) \\ &= \hat{r}(\bar{x}) && (\bar{x}, \bar{y}) \in \bigcap_{i < n} W_i \text{ und } f(x) = f(\bar{x}) \\ &= \hat{s}(\bar{y}) && (\hat{r} \circ \pi_1)|_{\bigcap_{i < n} W_i} = (\hat{s} \circ \pi_2)|_{\bigcap_{i < n} W_i} \text{ und } (\bar{x}, \bar{y}) \in \bigcap_{i < n} W_i \\ &= \hat{t}_2(y) && (\bar{x}, \bar{y}) \in \bigcap_{i < n} W_i \text{ und } f(y) = f(\bar{y}). \end{aligned}$$

- Für alle $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bigcap_{i < n} W_i$ gilt $f(x) \neq f(\bar{x})$: Es gilt dann auch $f(y) \neq f(\bar{y})$ für alle $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bigcap_{i < n} W_i$. Somit gilt

$$\hat{t}_1(x) = b = \hat{t}_2(y).$$

Bei den beiden Fällen gilt: $\hat{t}_1 \circ \pi_1 = \hat{t}_2 \circ \pi_2$.

Zum Schluss zeigen wir $\sigma_P(r) = \sigma_P(s)$:

$$\begin{aligned}
 \sigma_P(r) &= \sigma_P(\hat{r} \circ \pi_1) \\
 &= \sigma_P(\hat{t}_1 \circ \pi_1) && \text{1.ter Fall} \wedge (\hat{t}_1 \circ \pi_1)|_{i < n} W_i = (\hat{r} \circ \pi_1)|_{i < n} W_i \\
 &= \sigma_P(\hat{t}_2 \circ \pi_2) && \hat{t}_1 \circ \pi_1 = \hat{t}_2 \circ \pi_2 \\
 &= \sigma_P(\hat{s} \circ \pi_2) && \text{1.ter Fall} \wedge (\hat{t}_2 \circ \pi_2)|_{i < n} W_i = (\hat{s} \circ \pi_2)|_{i < n} W_i \\
 &= \sigma_P(s)
 \end{aligned}$$

Die andere Fälle sind analog. □

Nun zeigen wir die Wohldefiniertheit von $\tilde{\sigma}_P$:

Beweis. Für die Wohldefiniertheit von $\tilde{\sigma}_P$ reicht es zu zeigen, dass für alle $s, t \in N(r)$ gilt: $\sigma_P(s) = \sigma_P(t)$.

Seien $s, t \in N(r)$. Aus der Definition von $N(r)$ erhalten wir $(W_i)_{i < n}$ und $(R_j)_{j < m}$, wobei für alle $i < n$ und $j < m$ gilt:

$$W_i, R_j \in M, s|_{i < n} W_i = r|_{i < n} W_i \text{ und } t|_{j < m} R_j = r|_{j < m} R_j.$$

Folglich gilt: $s|_{(i < n) W_i \cap (j < m) R_j} = r|_{(i < n) W_i \cap (j < m) R_j} = t|_{(i < n) W_i \cap (j < m) R_j}$. Laut dem Lemma 7.6.3 gilt: $\sigma_P(s) = \sigma_P(t)$. □

Typkorrektheit: $\tilde{\sigma}_P \in \text{Sk} f$.

Lemma 7.6.4. *Für alle $b \in B$ gilt: $\tilde{\sigma}_P(c_b) = \sigma^!(b)$.*

Beweis. Sei $b \in B$. Aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 & \sigma^! & \\
 & \curvearrowright & \\
 A & \xleftarrow{\sigma_P} B^{\ker f} \xleftarrow{B^{\ker f}} B^1 & \\
 & & \\
 c_b & \longleftarrow & b
 \end{array}$$

erhält man folgendes:

$$\begin{aligned}
 \sigma^!(b) &= A^{B^{\ker f}}(\sigma_P)(b) \\
 &= \sigma_P(c_b)
 \end{aligned}$$

Es genügt zu zeigen, dass $\tilde{\sigma}_P(c_b) = \sigma_P(c_b)$. Da $c_b \in B^{\pi_1}[B^X]$ und σ_P von $\ker f = \pi_1^{-1}[X]$ charakteristisch bestimmt ist, gilt $\tilde{\sigma}_P(c_b) = \sigma_P(c_b)$. □

Lemma 7.6.5. *Sei $W \subseteq \ker f$. Wenn $\tilde{\sigma}_P$ von W charakteristisch bestimmt ist, dann gibt es zwei Elemente $b_1 \neq b_2 \in B$ mit $\tilde{\sigma}_P(\chi_W^{b_1, b_2}) \neq o$.*

Beweis.

Fall 1. $\sigma^!$ ist nicht konstant: Dann gibt es $b_1 \neq b_2 \in B$ mit $\sigma^!(b_1) \neq \sigma^!(b_2)$. Dann ist $\sigma^!(b_1) \neq o$ oder $\sigma^!(b_2) \neq o$.
Wenn $\sigma^!(b_1) \neq o$ dann

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_P(\chi_W^{b_1, b_2}) &= \tilde{\sigma}_P(c_{b_1}) && \tilde{\sigma}_P \text{ ist von } W \text{ charakteristisch bestimmt} \\ &= \sigma^!(b_1) && \text{Lem. 7.6.4} \\ &\neq o \end{aligned}$$

Für $\sigma^!(b_2) \neq o$ läuft es analog.

Fall 2. $\sigma^!$ ist konstant: Seien b_1, b_2 zwei verschiedene Elemente aus B . Also gilt

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_P(\chi_W^{b_1, b_2}) &= \sigma^!(b_1) && \text{(analog wie im 1.ten Fall)} \\ &\neq o && \text{Auswahl von } o, \text{ wenn } \sigma^! \text{ konstant ist} \end{aligned}$$

□

Das folgende Lemma ist der Schlüssel des Hauptbeweises.

Lemma 7.6.6. *Sei $W \subseteq \ker f$. Wenn $\tilde{\sigma}_P$ von W charakteristisch bestimmt ist, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und $(W_i)_{i < n}$ mit $\forall i < n. W_i \in M$ und $\bigcap_{i < n} W_i \subseteq W$.*

Beweis. Laut dem Lemma 7.6.5 gibt es $b_1 \neq b_2 \in B$ mit $\tilde{\sigma}_P(\chi_W^{b_1, b_2}) \neq o$.
Aus der Definition von $\tilde{\sigma}_P$ folgt die Existenz von

$$s \in B^{\pi_1}[B^X] \cup B^{\pi_2}[B^X]$$

und $(W_i)_{i < n} \subseteq M$ für ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$s_{1_{i < n}} W_i = \chi_W^{b_1, b_2} 1_{i < n} W_i.$$

Sei $W_s := \{(x, y) \in \ker f \mid s(x, y) = b_1\} = s^-[\{b_1\}]$.

$$\begin{aligned} W_s \cap \bigcap_{i < n} W_i &= \{(x, y) \in \bigcap_{i < n} W_i \mid s(x, y) = b_1\} \\ &= \{(x, y) \in \bigcap_{i < n} W_i \mid \chi_W^{b_1, b_2}(x, y) = b_1\} && s_{1_{i < n}} W_i = \chi_W^{b_1, b_2} 1_{i < n} W_i \\ &= W \cap \bigcap_{i < n} W_i \\ &\subseteq W. \end{aligned}$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass $W_s \in M$ gilt.
 Da $s \in B^{\pi_i}[B^X]$, gibt es $\hat{s} : X \rightarrow B$ mit $\hat{s} \circ \pi_i = s$. Folglich gilt:

$$W_s = s^{-}[\{b_1\}] = \pi_i^{-}[\hat{s}^{-}[\{b_1\}]].$$

Es gibt dann eine Teilmenge $U := \hat{s}^{-}[\{b_1\}] \subseteq X$ mit $\pi_i^{-}[U] = W_s$.
 Es bleibt nur noch zu zeigen, dass σ_P von W_s charakteristisch bestimmt ist.
 Seien $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3 \in B$ und $t_1 := \chi_{W_s}^{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2}, t_2 := \chi_{W_s}^{\tilde{b}_1, \tilde{b}_3}$.
 Im ersten Schritt wollen wir zeigen: $t_1, t_2 \in B^{\pi_1}[B^X] \cup B^{\pi_2}[B^X]$.
 Es genügt eine Abbildung $\hat{t}_1 : X \rightarrow B$ mit $\hat{t}_1 \circ \pi_i = \chi_{W_s}^{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2}$ zu finden.

$$\begin{array}{ccc} & t_1 & \\ & \curvearrowright & \\ \ker f & \xrightarrow{\pi_i} & X \cdots \rightarrow B \end{array}$$

Nach dem Diagrammlemma reicht es zu zeigen:

$$\ker \pi_i \subseteq \ker t_1.$$

Sei $(p_0, p_1) \in \ker \pi_i$.

$$\begin{array}{ll} \pi_i(p_0) = \pi_i(p_1) & \\ \Rightarrow s(p_0) = s(p_1) & s = \hat{s} \circ \pi_i \\ \Rightarrow p_0, p_1 \in W_s \vee p_0, p_1 \notin W_s & s^{-}[\{b_1\}] = W_s \\ \Rightarrow t_1(p_0) = t_1(p_1). & \end{array}$$

Für t_2 läuft der Beweis analog.

Im nächsten Schritt zeigen wir: $\chi_{W}^{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2} \upharpoonright_{\bigcap_{i < n} W_i} = t_1 \upharpoonright_{\bigcap_{i < n} W_i}$ und $\chi_{W}^{\tilde{b}_1, \tilde{b}_3} \upharpoonright_{\bigcap_{i < n} W_i} = t_2 \upharpoonright_{\bigcap_{i < n} W_i}$.
 Sei $x \in \bigcap_{i < n} W_i$. Aus $W_s \cap \bigcap_{i < n} W_i = W \cap \bigcap_{i < n} W_i$ folgt die Äquivalenz:

$$x \in W \Leftrightarrow x \in W_s.$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} \chi_{W}^{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2}(x) &= \text{if}(x \in W) \tilde{b}_1 \text{ else } \tilde{b}_2 \\ &= \text{if}(x \in W_s) \tilde{b}_1 \text{ else } \tilde{b}_2 \\ &= t_1(x) \end{aligned}$$

Analog gilt: $\chi_{W}^{\tilde{b}_1, \tilde{b}_3}(x) = t_2(x)$.

Zum Schluss erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 \sigma_P(t_1) &= \tilde{\sigma}_P(\chi_W^{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2}) & \chi_W^{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2}|_{\bigcap_{i < n} W_i} &= t_{1| \bigcap_{i < n} W_i} \wedge t_1 \in B^{\pi_1}[B^X] \cup B^{\pi_2}[B^X] \\
 &= \tilde{\sigma}_P(\chi_W^{\tilde{b}_1, \tilde{b}_3}) & \tilde{\sigma}_P &\text{ ist von } W \text{ charakteristisch bestimmt} \\
 &= \sigma_P(t_2) & \chi_W^{\tilde{b}_1, \tilde{b}_3}|_{\bigcap_{i < n} W_i} &= t_{2| \bigcap_{i < n} W_i} \wedge t_2 \in B^{\pi_1}[B^X] \cup B^{\pi_2}[B^X].
 \end{aligned}$$

□

Wir zeigen nun $\tilde{\sigma}_P \in \text{Sk} f$:

Beweis. Sei $W \subseteq \ker f$, wobei $\tilde{\sigma}_P$ von W charakteristisch bestimmt ist. Wir zeigen, dass $\tilde{\sigma}_P$ von W bestimmt ist.

Seien $r_1, r_2 : \ker f \rightarrow B$ mit $r_{1|W} = r_{2|W}$. Um $\tilde{\sigma}_P(r_1) = \tilde{\sigma}_P(r_2)$ zu zeigen, reicht es $N(r_1) = N(r_2)$ zu zeigen. Sei $s \in N(r_1)$.

Da $\tilde{\sigma}_P$ von W charakteristisch bestimmt ist, folgt aus dem Lemma 7.6.6 die Existenz von $n \in \mathbb{N}$ und $(W_i)_{i < n}$ mit $\forall i < n. W_i \in M$ und $\bigcap_{i < n} W_i \subseteq W$.

Laut der Definition von $N(r_1)$ gibt es $m \in \mathbb{N}$ und $(R_j)_{j < m}$ mit $R_j \in M$ für alle $j < m$ und $s|_{\bigcap_{j < m} R_j} = r_{1| \bigcap_{j < m} R_j}$.

Wir verkleinern die Restriktion: $s|_{(\bigcap_{i < n} W_i) \cap (\bigcap_{j < m} R_j)} = r_{1|(\bigcap_{i < n} W_i) \cap (\bigcap_{j < m} R_j)}$. Aus

$$(\bigcap_{i < n} W_i \cap \bigcap_{j < m} R_j) \subseteq \bigcap_{i < n} W_i \subseteq W$$

und $r_{1|W} = r_{2|W}$ folgt

$$r_{1|(\bigcap_{i < n} W_i) \cap (\bigcap_{j < m} R_j)} = r_{2|(\bigcap_{i < n} W_i) \cap (\bigcap_{j < m} R_j)}.$$

Somit gilt $s|_{(\bigcap_{i < n} W_i) \cap (\bigcap_{j < m} R_j)} = r_{2|(\bigcap_{i < n} W_i) \cap (\bigcap_{j < m} R_j)}$. Folglich ist s aus $N(r_2)$. Die andere

Inklusionsrichtung läuft analog dazu. □

Urbildeigenschaft: $\mathcal{S}\pi_i(\tilde{\sigma}_P) = \sigma_i$ für alle $i \in \{1, 2\}$

Beweis. Wir zeigen: $A^{B^{\pi_1}}(\tilde{\sigma}_P) = \sigma_1$:

$$\begin{array}{ccc}
 & A^{B^{\pi_1}}(\sigma_P) & \\
 & \curvearrowright & \\
 A & \begin{array}{c} \xleftarrow{\sigma_P} \\ \xleftarrow{\tilde{\sigma}_P} \end{array} & B^{\ker f} \xleftarrow{B^{\pi_1}} B^X \\
 & & \\
 & t \circ \pi_1 \longleftarrow t &
 \end{array}$$

Da $A^{B^{\pi_1}}(\sigma_P) = \sigma_1$ gilt, reicht es zu zeigen, dass für alle $t : X \rightarrow B$ gilt:

$$\tilde{\sigma}_P(t \circ \pi_1) = \sigma_P(t \circ \pi_1).$$

Wir zeigen $t \circ \pi_1 \in N(t \circ \pi_1)$. Dies gilt offensichtlich, da $t \circ \pi_1 \in B^{\pi_1}[B^X] \cup B^{\pi_2}[B^X]$ und $\ker f \in M$ gelten. \square

Im Vergleich zur up-to- A^{B^-} -Bisimilarität hat die up-to- S -Bisimilarität den Vorteil, dass sie mit der Beobachtungsäquivalenz übereinstimmt. Die Übertragung der Barr-Extension \bar{S} zu dem Funktor F liefert eine Lax-Extension bezüglich F . In [MV12] wurde eine Übersetzung von Lax-Extension zu Predicate Liftings gezeigt, wenn F finitär ist. Wir führen die folgenden Schritte aus:

- Beschränke den Funktor F zu einem finitären Funktor: $F_{<\omega}$.
- Bereinige $F_{<\omega}$ zu $\tilde{F}_{<\omega}$.
- Übertrage die Barr-Extension \bar{S} zu einer Lax-Extension L in $\tilde{F}_{<\omega}$.
- Übersetze L zu einer Familie I von $\square_i : F(2^k) \rightarrow 2$ über endlich stellige Prädikate.

Die Familie $(\square_i)_{i \in I}$ ist monoton und trennbar bezüglich $\tilde{F}_{<\omega}$. Also liefert die Coerzeugung der größten Simulation bezüglich der Boxen $(\square_i)_{i \in I}$ auf jeder $\tilde{F}_{<\omega}$ -Coalgebra \mathcal{A} die größte Kongruenz in \mathcal{A} .

Ausblick

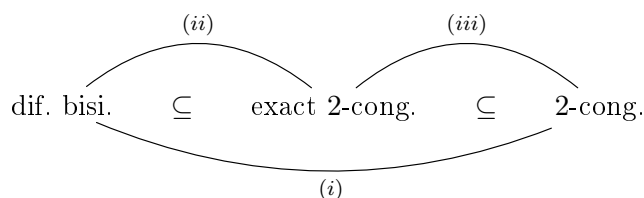
Es bleiben in der vorliegenden Arbeit eine Reihe von offenen Fragen:

- Es bleibt ungeklärt, ob jeder Epi regulär epi in Set_F ist, wenn jeder Mono regulär mono ist.
- Gesucht wird eine kategorientheoretische Definition des Funktors \mathcal{S} , womit die schwache Kernpaarerhaltung deutlicher wird.
- Erhält der urbildbereinigte Funktor \tilde{F} die schwachen Limites, die der Funktor F bereits erhält?
- Ein finitärer Funktor kann durch Co-Gleichungen dargestellt werden, womit sich die schwache Pullbackerhaltung einfacher überprüfen lässt ([AGT10]). Ebenso ist eine Charakterisierung der trennbaren Funktoren gesucht, durch die man die schwache Pullbackerhaltung einfacher überprüfen kann.
- Bei den finitären Funktoren, die schwache Pullbacks erhalten, lässt sich die Bisimilarität durch ein Beweiskalkül wie in [Spr16] bestimmen. Allgemeiner ist ein Beweiskalkül für beliebige Similaritäten gesucht.

Summary

This thesis deals with the study of several notions of similarity between coalgebras. We discuss derived coalgebraic structures, especially simulations congruences. Therefore, we make use of certain functor properties such as weak pullback preservation, weak kernel preservation and preimage preservation. After preparing the mathematical notions and preliminaries (**chapter 1**) we give a brief introduction to coalgebras in **chapter 2**. We focus on those definitions and notions relevant to this thesis.

A set functor is known to preserve weak pullbacks if every 2-congruence is a difunctional bisimulation (*i*). In **chapter 3** we found equivalent statements for weak kernel preservation (*ii*) and the preimage preservation (*iii*).



We show that every set functor contains a largest subfunctor preserving preimages. We define a functor modification, which we call preimage correction (Bereinigung). The resulting functor preserves preimages. The idea was inspired by the transformation given by [Trn69, Bar93], whose result is a sound functor. The resulting functor has the advantage, that its subfunctors are precisely the subfunctors which preserve preimages. In chapter 7 we present the correction of the general neighborhoodfunctor as a relevant example.

In **chapter 4** we examine the subsets of $F2$, which we call boxes, give rise to modal operators for the Pattinson/Schröder logic of coalgebras. We show that the monotonic separable boxes provide a correct and complete modal logic. In order to lift the concept of λ -similarity categorically, we replace λ -simulations by strong \square -simulations that have the advantages that proofs are diagrammatical and monotonicity does not need to be assumed.

We first examine the role of monotonicity by showing equivalent statements for monotonicity (theorems 4.4.5, 4.5.7 and 4.6.1). Next we examine the role of separability (theorems 4.6.3 and 4.6.4). Consequently, observational equivalence and similarity coincide, when the family $(\square_i)_{i \in I}$ is monotonic and separable.

According to the example 2.4.3 the 2-congruences between two coalgebras contrary to congruences do not in general form a lattice. Assuming that the functor preserves preimages, or that a family of monotonic separable boxes $(\square_i)_{i \in I}$ exists, the 2-congruences form a complete lattice. The supremum is defined as the difunctional closure of their

union.

Chapter 5 starts with summarizing the equivalences between the properties of relation liftings L and L -simulations:

relation lifting L		L -simulations
E0 symmetrical	\Leftrightarrow	closed under inverse
E1 compositional	\Leftrightarrow	closed under composition
E2 homomorphic	\Leftrightarrow	graphs of homo. are L -simulations
E3 monotonic	\Leftrightarrow	extensible
E4 diagonals preservation	\Leftrightarrow	endo-reflexive

Provided that L is symmetrical and compositional, we have the following equivalence:

$$L \text{ is homomorphic} \Leftrightarrow \text{each 2-bisimulation is a } L\text{-simulation.}$$

If we additionally assume that L is monotonic and homomorphic, then L is exactly the lax-extension. Thus, the following statements are equivalent:

$$L \text{ preserves diagonals} \Leftrightarrow \text{each dif. } L\text{-simulation is a 2-congruence.}$$

Between the results of \square - and L -simulations in chapters 4 and 5 appeared certain analogies. We introduce a canonical translation of boxes $(\square_i)_{i \in I}$ to relation liftings $L_{(\square_i)_{i \in I}}$, thereby the following correspondence:

boxes $(\square_i)_{i \in I}$		relation lifting $L_{(\square_i)_{i \in I}}$
monotonicity	\Leftrightarrow	lax extensions
separability	\Leftrightarrow	diagonals preservation

Consequently, we obtain a canonical characterization of the lax extensions, preserving diagonals. The similarity of such relations is precisely the observation equivalence, as it is already known from [MV12]. A negative result is shown by the example 5.4.2 that the lax extensions, which preserve diagonals, are not unique. They agree on difunctional relations.

Since the difunctionality of L -Simulations in chapters 4 and 5 have played a role in completeness, we examine this concept in **chapter 6**. We first exhibit conditions under which bisimulations restrict to subcoalgebras without requiring the type functor to preserve preimages. From this we derive a series of equivalent formulations to weak kernel pair preservation. We cite some of them in the following. Some implications are already known.

- (i) R^d is a bisimulation, whenever R is.
- (ii) $[\theta]$ is difunctional for each 2-congruence θ .
- (iii) $[\theta]$ is transitive for each congruence θ .

SUMMARY

Further, we show that if the transitive, resp. difunctional hull of bisimilarity covers observational equivalence then bisimilarity and observational equivalence agree. If bisimilarity is transitive for all F -coalgebras, then it agrees with observational equivalence. Regarding difunctionality, we receive an undesirable result, namely that difunctionality is not enough for equality between bisimilarity and observational equivalence, as it has been shown in the counterexample 6.9.1. Assuming preimage preservation for the type functor, we prove that transitivity and difunctionality of bisimilarity are equivalent.

Category-theoretically, the regular congruences or strong congruences form complete lattices $RegCon(_)$ and $StrongCon(_)$. Suprema are obtained via pushouts. The examination of the lattices provide the following equivalences:

each epi is regular	\Leftrightarrow	for each coalg. \mathcal{A} : $RegCon(\mathcal{A}) \leq Con(\mathcal{A})$
each mono is regular	\Leftrightarrow	for each coalg. \mathcal{A} : $StrongCon(\mathcal{A}) \leq Con(\mathcal{A})$

In **chapter 7**, we examine up-to-bisimilarity. We first show the weak kernel pairs preservation of the (monotonic) A, B -neighborhoodfunctor. We provide an equivalent statement for up-to-bisimilarity by the A, B -neighborhoodfunctor. A relation R between coalgebras (X, α) and (Y, β) is an up-to- A^{B^-} -bisimulation, if for each pair $(x, y) \in R$ the following statements hold:

- (i) $\alpha(x)$ is determined of $\pi_1[R]$,
- (ii) $\beta(y)$ is determined of $\pi_2[R]$,
- (iii) for every two maps $f : X \rightarrow B$ and $g : Y \rightarrow B$ with $R \subseteq \ker(f, g)$ holds:
 $\alpha(x)(f) = \beta(y)(g)$.

Quite surprisingly the preimage correction of the general neighborhoodfunctor provides a functor, that preserves weak pullbacks. The proof of this fact requires 7 lemmas taking up most of chapter 7. Finally, we show how we receive monotonic separable boxes $(\square_i)_{i \in I}$ from coalgebras with finite patterns. The similarity via the boxes $(\square_i)_{i \in I}$ is cogenerated. The similarity and the observational equivalence coincide in this case.

Literaturverzeichnis

- [Adá76] J. Adámek. Limits and colimits in generalized algebraic categories. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 26(1):55–64, 1976. 27
- [AGT10] J. Adámek, H.P. Gumm, and V. Trnková. Presentation of set functors: A coalgebraic perspective. *J. of Logic and Computation*, (24):991–1015, 2010. 38, 115
- [AHS90] J. Adámek, H. Herrlich, and G.E. Strecker. *Abstract and Concrete Categories*. John Wiley & Sons, 1990. 10, 14, 16, 33, 82, 84
- [AK72] J. Adámek and V. Koubek. Coequalizers in the generalized algebraic categories. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 013(2):311–324, 1972. 27
- [AKP72] J. Adámek, V. Koubek, and V. Pohlová. The colimits in the generalized algebraic categories. *Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica*, 013(2):29–40, 1972. 27
- [AM89] P. Aczel and N. Mendler. A final coalgebra theorem. In D.H. Pitt et al., editors, *Proceedings category theory and computer science*, Lecture Notes in Computer Science, pages 357–365. Springer, 1989. 8, 25, 28, 31, 32, 73
- [AT90] J. Adámek and V. Trnková. *Automata and Algebras in Categories*. Kluwer Academic Publishers, 1990. 9, 37, 62
- [Awo06] S. Awodey. *Category Theory*. Oxford University Press, 2006. 10
- [Bal00] A. Baltag. A logic for coalgebraic simulation. In Horst Reichel, editor, *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, volume 33, pages 41–59. Elsevier Science Publishers, 2000. 9, 61
- [Bar93] M. Barr. Terminal coalgebras in well-founded set theory. *Theoretical Computer Science*, (144(2)):299–315, 1993. 6, 8, 38, 46, 116
- [Bar04] F. Bartels. *On Generalised Coinduction and Probabilistic Specification Formats: Distributive Laws in Coalgebraic Modelling*. PhD thesis, CWI, Amsterdam, 2004. 9, 89
- [BD16] M. Bílková and M. Dostál. *Expressivity of Many-Valued Modal Logics, Coalgebraically*, pages 109–124. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2016. 33

- [Bor94a] F. Borceux. *Handbook of categorical algebra 1. basic category theory*. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 1994. 10
- [Bor94b] F. Borceux. *Handbook of categorical algebra 2. categories and structures*. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 1994. 10
- [BPPR15] F. Bonchi, D. Petrisan, D. Pous, and J. Rot. Lax bialgebras and up-to techniques for weak bisimulations. In *26th International Conference on Concurrency Theory, CONCUR 2015, Madrid, Spain, September 1-4, 2015*, pages 240–253, 2015. 9, 89
- [C04] C. Cirstea. On logics for coalgebraic simulation. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 106:63 – 90, 2004. 61
- [Chu07] K.O. Chung. *Weak homomorphisms of coalgebras*. PhD thesis, Iowa State University, 2007. 56
- [CKP93] A. Carboni, G.M. Kelly, and M.C. Pedicchio. Some remarks on maltsev and goursat categories. *Applied Categorical Structures*, 1(4):385–421, 1993. 15
- [CKP+08] C. Cirstea, A. Kurz, D. Pattinson, L. Schröder, and Y. Venema. Modal logics are coalgebraic. In *BCS Int. Acad. Conf.*, pages 128–140, 2008. 47
- [CKW90] A. Carboni, G.M. Kelly, and R.J. Wood. A 2-categorical approach to change of base and geometric morphisms I. Technical report, Department of Pure Mathematics, University of Sydney, 1990. ISSN 1033-2359. 9, 62
- [dVR99] E.P. de Vink and J.J.M.M. Rutten. Bisimulation for probabilistic transition systems: a coalgebraic approach. *Theoretical Computer Science*, (211):271–293, 1999. 8, 25
- [Enq] S. Enqvist. persönliche Kommunikation. 61
- [Enq13] S. Enqvist. Homomorphisms of coalgebras from predicate liftings. In Reiko Heckel and Stefan Milius, editors, *Lecture Notes in Computer Science*, volume 8089, 2013. 9, 55, 56, 61
- [ES14] S. Enqvist and J. Sack. A coalgebraic view of characteristic formulas in equational modal fixed point logic. In M. Bonsangue, editor, *Coalgebraic Methods in Computer Science : 12th IFIP WG 1.3 International Workshop, CMCS 2014, Colocated with ETAPS 2014, Grenoble, France, April 5-6, 2014, Revised Selected Papers / Lecture notes in computer science (LNCS)*, volume LNCS 8446. Springer, 2014. 61
- [ESV15] S. Enqvist, F. Seifan, and Y. Venema. Monadic second-order logic and bisimulation invariance for coalgebras. In Randall Bilof, editor, *Logic in Computer*

- Science (LICS 2015)*, pages 353–365. Institute for Electrical and Electronics Engineers, 2015. 69
- [Gog67] J.A. Goguen. L-fuzzy sets. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, (18):145–174, 1967. 89
- [Gol] R. Goldblatt. Final coalgebras and the hennessy-milner property. *Annals of Pure and Applied Logic*, 138:2005. 86
- [GS00] H.P. Gumm and T. Schröder. Coalgebraic structure from weak limit preserving functors. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, (33):113–133, 2000. 37, 39, 46, 73, 76
- [GS01a] H.P. Gumm and T. Schröder. Monoid-labeled transition systems. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 44(1):184–203, 2001. 19
- [GS01b] H.P. Gumm and T. Schröder. Products of coalgebras. *Algebra Universalis*, 46:163–185, 2001. 74
- [GS05] H.P. Gumm and T. Schröder. Types and coalgebraic structure. *Algebra Universalis*, 53:229–252, 2005. 8, 25, 29, 33, 37, 39, 45, 73, 76, 78, 79, 81, 84
- [GS13] D. Gorín and L. Schröder. Simulations and bisimulations for coalgebraic modal logics. In R. Heckel and S. Milius, editors, *CALCO '13*, Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2013. 8, 47, 49, 51, 55, 59, 65
- [Gum] H.P. Gumm. persönliche Kommunikation. 41, 100
- [Gum99] H.P. Gumm. Elements of the general theory of coalgebras. LUATCS 99, Rand Afrikaans University, Johannesburg, South Africa, 1999. 9, 26, 73, 74, 75
- [Gum01] H.P. Gumm. Functors for coalgebras. *Algebra Universalis*, 45:135–147, 2001. 9, 25, 27, 37, 73
- [Gum05] H.P. Gumm. From T-coalgebras to filter structures and transition systems. In D.H. Fiadeiro et al., editors, *Algebra and Coalgebra in Computer Science*, volume 3629 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 194–212. Springer, 2005. 43
- [Gum09] H.P. Gumm. Universal coalgebras and their logics. *AJSE-Mathematics*, 25:105–130, 2009. 33, 36
- [GZ14] H.P. Gumm and M. Zarrad. Coalgebraic simulations and congruences. *Coalgebraic Methods in Computer Science*, 16:118–134, 2014. 8, 47
- [GZ16] H.P. Gumm and M. Zarrad. Transitivity and difunctionality of bisimulations. *Coalgebraic Methods in Computer Science*, 19:33–52, 2016. 9, 74
- [Hen10] C. Henkel. Klassifikation coalgebraischer Typfunktoren. Diplomarbeit, Universität Marburg, 2010. 45

- [HJ97] U. Hensel and B. Jacobs. Proof principles for datatypes with iterated recursion. In *Lecture Notes in Computer Science*, pages 220–241, 1997. 8, 25
- [HJ98] C. Hermida and B. Jacobs. Structural induction and coinduction in a fibrational setting. *Inform. and Comput.*, 145(2):107–152, 1998. 9, 61, 73
- [HJ03] J. Hughes and B. Jacobs. Simulations in coalgebra. *Theoretical Computer Science (CMCS)*, pages 71–108, 2003. 9, 61
- [HK04] H.H. Hansen and C. Kupke. A coalgebraic perspective on monotone modal logic. *Electron. Notes Theor. Comput. Sci.*, 106:121–143, December 2004. 35, 69
- [HKP07] H.H. Hansen, C. Kupke, and E. Pacuit. Bisimulations for neighbourhood structures. algebra and coalgebra in computer science. *Lecture Notes in Computer Science*, pages 279–293, 2007. 9, 32, 40, 63, 87, 102, 105
- [HKP09] H.H. Hansen, C. Kupke, and E. Pacuit. Neighbourhood structures: Bisimilarity and basic model theory. *Logical Methods in Computer Science*, 5(2), 2009. 32
- [HM85] M. Hennessy and R. Milner. Algebraic laws for nondeterminism and concurrency. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 32:137–161, 1985. 33, 36
- [IH03] Th. Ihringer and H.P. Gumm. *Allgemeine Algebra*. Heldermann Verlag, 2003. 9, 14, 29, 73
- [Jac96] B. Jacobs. Objects and classes, co-algebraically. In B. Freitag et al., editors, *Object-Orientation with Parallelism and Persistence*. Kluwer Academic Publishers, 1996. 8, 25
- [Jac98] B. Jacobs. Coalgebraic reasoning about classes in object-oriented languages. *Electr. Notes Theor. Comput. Sci.*, 11:231–242, 1998. 8, 25
- [Kou71] V. Koubek. Set functors. *Comm. Math. Univ. Carolinae*, 12(1):175–195, 1971. 10, 20
- [KP77] V. Koubek and P. Pták. Limits in generalized algebraic categories - contravariant case. *Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica*, 018(2):43–53, 1977. 27
- [Kup09] C. Kupke. *Terminal Sequence Induction via Games*, pages 257–271. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2009. 65
- [Kur00] A. Kurz. *Logics for Coalgebras and Applications to Computer Science*. PhD thesis, LMU München, 2000. 29, 73
- [Lan71] S. Mac Lane. *Categories for the working mathematician*. Springer, 1971. 10

- [Len99] M. Lenisa. From set-theoretic coinduction to coalgebraic coinduction: some results, some problems. In B. Jacobs and J. Rutten, editors, *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, volume 19. Elsevier Science Publishers, 1999. 9, 89
- [Lev11] P.B. Levy. Similarity quotients as final coalgebras. In *Foundations of Software Science and Computational Structures - 14th International Conference, FOSSACS 2011, Held as Part of the Joint European Conferences on Theory and Practice of Software, ETAPS 2011, Saarbrücken, Germany, March 26-April 3, 2011. Proceedings*, pages 27–41, 2011. 9, 61
- [Luo06] L. Luo. An effective coalgebraic bisimulation proof method. *Electr. Notes Theor. Comput. Sci.*, 164(1):105–119, 2006. 9, 89
- [Mar] J. Marti. Relation Liftings in Coalgebraic Modal Logic, school = Universiteit van Amsterdam, address = the Netherlands, year = 2011,. Master’s thesis. 9, 61
- [Mar85] M. Marvan. On covarieties of coalgebras. *Archivum Mathematicum (Brno)*, 21(1):51–64, 1985. 8
- [Mil89] R. Milner. *Communication and concurrency*. Prentice-Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ, USA, 1989. 25
- [Mos99] L.S. Moss. Coalgebraic logic. *Annals of Pure and Applied Logic*, 96:277–317, 1999. 8, 25
- [MPS09] R.S.R. Myers, D. Pattinson, and L. Schröder. Coalgebraic hybrid logic. In *FOSSACS*, pages 137–151, 2009. 47
- [MV12] J. Marti and Y. Venema. Lax extensions of coalgebra functors. *Coalgebraic Methods in Computer Science*, (LNCS 73):150–169, 2012. 6, 9, 61, 63, 66, 69, 87, 114, 117
- [Par81] D. Park. Concurrency and automata on infinite sequences. In *Proceedings of the 5th GI-Conference on Theoretical Computer Science*, pages 167–183, London, UK, UK, 1981. Springer-Verlag. 25
- [Pat03] D. Pattinson. Coalgebraic modal logic: soundness, completeness and decidability of local consequence. *Theoretical Computer Science*, 309(2-3):177–193, 2003. 8, 33, 34, 47
- [Poh73] V. Pohlová. On sums in generalized algebraic categories. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 23(2):235–251, 1973. 27
- [Ptá72] P. Pták. On equalizers in generalized algebraic categories. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 013(2):351–357, 1972. 27

- [RBR13] J. Rot, M. Bonsangue, and J.J.M.M. Rutten. Coalgebraic bisimulation-up-to. In *SOFSEM 2013: Theory and Practice of Computer Science, 39th International Conference on Current Trends in Theory and Practice of Computer Science, Špindlerův Mlýn, Czech Republic, January 26-31, 2013. Proceedings*, pages 369–381, 2013. 9, 89
- [Rig48] J. Riguet. Relations binaires, fermetures, correspondances de galois. *Bulletin de la Societe Mathematique de France*, 76:114–155, 1948. 9, 23, 73
- [RT93] J.J.M.M. Rutten and D. Turi. Initial algebra and final coalgebra semantics for concurrency. In *REX School/Symposium, 1993*. 37
- [Rut95] J.J.M.M. Rutten. A calculus of transition systems (towards universal coalgebra). Technical report, Centrum voor Wiskunde en Informatica, 1995. 25
- [Rut00] J.J.M.M. Rutten. Universal coalgebra: a theory of systems. *Theoretical Computer Science*, 249(1):3–80, 2000. 8, 25, 26, 28, 32, 37, 57, 73
- [Sch01] T. Schröder. *Coalgebren und Funktoren*. PhD thesis, FB Mathematik und Informatik, Philipps-Universität Marburg, 2001. 28, 38, 65, 78, 102
- [Sch05] L. Schröder. Expressivity of coalgebraic modal logic: The limits and beyond. In V. Sassone, editor, *Foundations of Software Science and Computation Structures (FOSSACS)*, Lecture Notes in Computer Science, pages 440–454. Springer, 2005. 8, 9, 21, 33, 34, 47, 51, 89
- [Sch08] L. Schröder. Expressivity of coalgebraic modal logic: The limits and beyond. *Theoretical Computer Science*, 390:230–247, 2008. Extends (Schröder 2005). 51
- [SP10] L. Schröder and D. Pattinson. Coalgebraic correspondence theory. In *FOSSACS*, pages 328–342, 2010. 47
- [Spr16] D. Sprunger. A complete logic for behavioural equivalence in coalgebras of finitary set functors. In *Coalgebraic Methods in Computer Science - 13th IFIP WG 1.3 International Workshop, CMCS 2016, Colocated with ETAPS 2016, Eindhoven, The Netherlands, April 2-3, 2016, Revised Selected Papers*, pages 156–173, 2016. 89, 115
- [Sta11] S. Staton. Relating coalgebraic notions of bisimulations. *Logical Methods in Computer Science*, 7(1), 2011. 40, 73
- [TG69] V. Trnková and P. Goralčík. On products in generalized algebraic categories. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 010(1):49–89, 1969. 27
- [Thi96] A. Thijs. *Simulation and Fixpoint Semantics*. PhD thesis, University of Groningen, 1996. 9, 61, 62

- [TR98] D. Turi and J.M.M.M. Rutten. On the foundations of final coalgebra semantics: Non-well-founded sets, partial orders, metric spaces. *Mathematical Structures in Comp. Sci.*, 8(5):481–540, October 1998. 37
- [Trn69] V. Trnková. Some properties of set functors. *Comm. Math. Univ. Carolinae*, (10,2):323–352, 1969. 6, 8, 10, 20, 38, 46, 116
- [Trn71a] V. Trnková. On descriptive classification of set-functors I. *Comm. Math. Univ. Carolinae*, 12(1):143–174, 1971. 10, 21
- [Trn71b] V. Trnková. On descriptive classification of set-functors II. *Comm. Math. Univ. Carolinae*, 12(2):345–357, 1971. 10
- [Trn77] V. Trnková. *Relational automata in a category and their languages*, pages 340–355. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1977. 9, 62, 64
- [Tur96] D. Turi. *Functorial Operational Semantics and its Denotational Dual*. PhD thesis, Free University, Amsterdam, June 1996. 37
- [Yon54] N. Yoneda. On the homology theory of modules. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. I.*, 7:193–227, 1954. 33
- [Zar12] M. Zarrad. Verträgliche Relationen auf Coalgebren. Diplomarbeit, Universität Marburg, 2012. 33, 78
- [Zha02] D. Zhang. L-fuzzifying topologies as l-topologies. *Fuzzy Sets and Systems*, 125(2):135–144, 2002. 89
- [ZLL⁺10] X. Zhou, Y. Li, W. Li, H. Qiao, and Z. Shu. Bisimulation proof methods in a path-based specification language for polynomial coalgebras. In *Programming Languages and Systems - 8th Asian Symposium, APLAS 2010, Shanghai, China, November 28 - December 1, 2010. Proceedings*, pages 239–254, 2010. 89
- [Zmr01] A. Zmrzlina. *Too Many Functors*, pages 47–62. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2001. 19

Symbolverzeichnis

MengenLehre

$ M $	Kardinalität von M
Δ_A	Diagonale auf A , d.h. $\Delta_A := \{(a, a) \mid a \in A\}$
R^-	Umkehrrelation von R , d.h. $R^- := \{(a, b) \mid (b, a) \in R\}$
R^*	die transitive Hülle von R
$\text{Eq}(R)$	die kleinste Äquivalenzrelation, die R enthält.
R^d	die difunktionale Hülle von R
$R \bowtie S$	Verbundoperation "join"
$R \circ S$	Relationsprodukt von R und S , $R \circ S := \{(a, b) \mid \exists c (a, c) \in R \text{ und } (c, b) \in S\}$
$[a]_R$	Äquivalenzklasse von a modulo R , $[a]_R := \{x \mid (a, x) \in R\}$
$[U]_R$	$[U]_R := \{x \mid \exists a \in U. (a, x) \in R\}$
A/R	Menge aller Äquivalenzklassen über A modulo R , $A/R := \{[x]_R \mid x \in A\}$
π_R	Faktorprojektion $A \rightarrow A/R$ mit $x \mapsto [x]_R$
$f _U$	Die Restriktion einer Abbildung
$\text{Gr}(f)$	Graph von f , d.h. $\text{Gr } f := \{(a, f(a)) \mid a \in \text{dom}(f)\}$
$\text{Im } f$	Bild von f , d.h. $\text{Im } f := \{f(a) \mid a \in \text{dom}(f)\}$
$\ker f$	Kern von f , d.h. $\ker f := \{(a, b) \mid f(a) = f(b), a, b \in \text{dom}(f)\}$
ι_U^A	Einbettung von U in A mit $x \mapsto x$
$R \upharpoonright U$	die Restriktion von R auf U , d.h. $R \cap U$
dif.	difunktional

Kategorientheorie

Set	Kategorie der Mengen
Poset	Kategorie der Halbordnungen
Rel	Kategorie der Mengen mit Relationen
Lat	Kategorie der vollständigen Verbänden
MLat	Kategorie der vollst. Verbänden mit monotonen Abb.
Top	Kategorie der topologischen Räume
Set_F	Kategorie der F -Coalgebren
$\text{dom}(f)$	Domain von f
$\text{codom}(f)$	Codomain von f
id_A	Identitätsmorphismus auf A

$f \circ g$	Kompositon von Morphismen
$f + g$	Summe von Morphismen
$\text{Pb}(f, g)$	Pullback von f und g
$\prod_{i \in I} A_i$	Produkt von Objekten
$\sum_{i \in I} A_i$	Summe von Objekten
$[(q_i)_{i \in I}]$	induzierte Summe von Morphismen

Universelle Coalgebra

$\mathbb{P}(-)$	PotenzmengenFunktork
$(-)^2 - (-) + 1$	Funktork (Bsp. 1.3.3)
\mathcal{B}	Funktork (Bsp. 1.3.4)
$\mathcal{M}^{A,B}$	Monotoner Nachbarschaftsfunktork (Def. 7.3.5)
\mathcal{F}	Filter-Funktork (Def. 7.4.11)
\mathcal{S}	Urbilder erhaltender Nachbarschaftsfunktork (Def. 7.4.7)
$F \times G$	Produkt von Funktoren
$F + G$	Summe von Funktoren
$F_{<\kappa}$	die κ -Beschränkung eines Funktors F
F_a	die a -Komponente eines Funktors F mit $a \in F1$
\tilde{F}	Urbilder erhaltender Funktork von F
$\mathcal{A}_{x_0}^U$	modifizierte Coalgebra auf U
\square	Box, Prädikate auf $F2$
$\approx_{\mathcal{A}}^{\square}$	die größte \square -Simulation auf \mathcal{A} , \square -Similarität
$\approx_{\mathcal{A}}^L$	die größte L -Simulation auf \mathcal{A} , L -Similarität
$\sim_{\mathcal{A}}$	die größte Bisimulation auf \mathcal{A} , Bisimilarität
$[R]$	die größte Bisimulation, die in R enthalten ist
$\nabla_{\mathcal{A}}$	die größte Kongruenz auf \mathcal{A}
$\bigvee_{i \in I} \theta_i, \bigwedge_{i \in I} \theta_i$	Supremum, Infimum von θ_i 's
$\text{Con}(\mathcal{A})$	Verband aller Kongruenzen über \mathcal{A}
$\text{RegCon}(\mathcal{A})$	Verband aller regulären Kongruenzen über \mathcal{A}
$\text{StrongCon}(\mathcal{A})$	Verband aller starken Kongruenzen über \mathcal{A}

Index

(co)vollständig, 12
(E,M)-Faktorisierung, 14
(E,M)-Quadrat, 14
(E,M)-Zerlegung, 14
(strikt) beschränkt, 20
(sub)kartesische Transformation, 18

A

A,B- Nachbarschaftsfunktor, 17, 90
Äquivalenzrelation, 22

B

Barr-Extension, 61
beobachtungsäquivalent, 29
Beobachtungsäquivalenz, 74
Beschränkter Potenzmengenfunktor, 20
Beschränkung eines Funktors, 20
bestimmt, 97
bidirektionale Simulation, 50
Bisimulation, 28
Box, 33

C

charakteristisch bestimmt, 97
Coalgebra, 25
Coalgebraische Modallogik, 33
codom, 10
Coequalizer, 12
Cokegel, 11
Colimes, 11
Coproduct, 12

D

Diagonale, 14
Diagonale-Erhaltung, 66
Diagramm, 11

difunktional, 22
Difunktionale Hülle, 87
Difunktionalität, 86
dom, 10
duale Aussage, 11
duale Kategorie, 11
Dualitätsprinzip, 11

E

Einbettung, 12
einfache Coalgebra, 74
Endofunktor, 17
endo-reflexiv, 66
epi, 13
Epi-Pullback, 14
Episink, 13
Equalizer, 12
erhält, 37
erweiterbar, 65
exakt, 32
extensionale Coalgebra, 74

F

Faktorprojektion, 13, 22
Filter, 19
Filter Funktor, 19
finitär, 20
Funktor, 16, 19
Funktor-Zerlegung, 21

G

gerichtete Diagramme, 47
Gesunder Funktor, 38
Grundmenge, 25

H

Hoare Triple, 48

homomorph, 64

Homomorphismus, 26, 55

I

Implikation, 47

iso, 13

isomorph, 18

K

kartesisch, 18

Kategorie, 10

Kegel, 11

Kern, 14

klassifizierende Urbilder, 39

Komponente, 21

kompositional, 64

Kongruenz, 29

Kongruenz-Verbände, 83

Korrektheit, 35

Kripke-Struktur, 27

L

Lax-Extension, 66

Limes, 11

Linksinverses, 13

logisch äquivalent, 34

M

Mengenfunktor, 18

modifizierte Coalgebra auf U , 75

mono, 13

Monosource, 13

monotone Nachbarschaftsfunktor, 19

Monotoner Nachbarschaftsfunktor, 91

monotones Predicate Lifting, 49

Monotonie, 65

N

nach oben kommutiert, 47

Nachbarschaftsfunktor, 17

natürliche Transformation, 17

O

Ordnungseinbettung, 91

P

Poset, 11

Potenzfunktor, 19

Potenzmengen-Funktor, 18

Prädikat, 33

Präkongruenz, 31

Predicate Lifting, 33

Produkt, 11

Projektion, 12

Pullback, 12

Pushout, 12

Q

Quelle, 11

R

regulär epi, 13

regulär mono, 13

reguläre Kongruenz, 32

Rel, 10

Relation Lifting, 62

Restriktion, 19

Restriktion der Bisimulationen, 76

rückwärts gerichteter Homomorphismus,
56

S

Schnitt, 14

Schwache Kernpaarerhaltung, 45, 78

Schwache Pullbackerhaltung, 37

Set, 10

Simulation, 49, 62

Sink, 11

Source, 11

split epi, 13

split mono, 13

Stabilität, 16

starke Kongruenz, 33

Starke Simulationen via Boxen, 49

streng regulär, 33

Struktur, 25

subkartesische natürliche Transformati-
on, 43

Summe, 12

Summe der regulären Morphismen, 82

Symmetrie, 63

T

Teilfunktor, 20

Top, 11

Topologische Räume, 27

total, 21

transitiv, 21

transitive Hülle, 22

Transitivität, 84

trennbar, 21, 89

trennbare Funktoren, 102

U

Umkehrrelation, 21

Unterfunktor, 18, 20

up-to -Bisimulation, 102

Urbild, 14

Urbild-Bereinigung, 40, 42

Urbilder erhaltender Nachbarschaftsfunktor, 97

Urbilderhaltung, 39

V

Vergißfunktor, 27

Vollständigkeit, 35, 36

X

X- Muster, 18

Z

z-abgeschlossen, 22

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. H. Peter Gumm für die professionelle Begleitung während der vorliegenden Arbeit und Prof. Dr. Jiří Adámek für die Übernahme des Zweitgutachtens danken. Dr. Sebastian Enqvist danke ich Ihnen für das Gespräch über „Relation Liftings“ und „Predicate Liftings“. Ich möchte mich bei allen im Fachbereich ganz herzlich für die Unterstützung bedanken, insbesondere bei Damian Wlochowitz, Jens Kosiol und Marius Kinski.

Erklärung

Ich versichere, dass ich meine Dissertation **Coalgebraische Similarität** selbstständig und ohne unerlaubte Hilfe angefertigt und mich dabei keiner anderen als der von mir ausdrücklich bezeichneten Quellen und Hilfen bedient habe.

Diese Dissertation wurde bislang weder in der vorliegenden noch in einer ähnlichen Form bei einer in- oder ausländischen Hochschule anlässlich eines Promotionsgesuchs oder zu anderen Prüfungszwecken eingereicht. Ich erkläre, dass dies mein erster Versuch einer Promotion ist.

Marburg, den 22.05.2017