Philipps Universität Marburg

Über Borelunteralgebren von Quantengruppen

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

vorgelegt dem
Fachbereich Mathematik & Informatik
der Philipps-Universität Marburg

eingereicht von: Karolina Vocke

Betreuer: Prof. Dr. István Heckenberger

Zweitgutachter: Prof. Dr. Hans-Jürgen Schneider

Abgabetermin: Juni 2016

Inhaltsverzeichnis

I. Einleitung **9**

II. Grundlagen **21**

1. Notation und Definitionen **23**
1.1. Grundlagen aus der Liealgebrentheorie 23
1.1.1. Wurzelsysteme 23
1.1.2. Ordnungen 27
1.1.3. Liealgebren 27
1.2. Quantengruppen 29
1.2.1. Lusztigautomorphismus und Wurzelvektoren 33
1.2.2. Darstellungstheorie 36
1.2.3. Rechtscoidealunteralgebren und Borelunteralgebren 38

2. Bisherige Klassifikation **41**
2.1. Homogene Rechtscoidealunteralgebren von $U^{\geq 0}$ bzw. $U^{\leq 0}$ 41
2.2. Homogene Rechtscoidealunteralgebren von U 42
2.3. Rechtscoidealunteralgebren von $U^{\geq 0}$ 42

3. Technische Aussagen **45**
3.1. Allgemeine Aussagen 45
3.1.1. Allgemeine Aussagen zur Darstellungstheorie 45
3.1.2. Aussagen zu Wurzelvektoren in U und ihren Darstellungen 46
3.1.3. Satz zum Ergänzen von Weylgruppenelementen 50
3.2. Spezifische Aussagen in A_n 57
3.2.1. Kommutatorrelationen und Komultiplikation 58
3.2.2. Weylgruppenelemente sog. Typ „Palme“ 63
3.2.3. Aussagen zu Wurzelvektoren in $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ und ihren Darstellungen 66

III. Allgemeine Rechtscoidealunteralgebren **69**

4. Basistheorem **71**

IV. Struktursätze zu triangulären Borelunteralgebren **79**

5. Struktursätze zur Graduierten von triangulären Rechtscoidealunteralgebren **81**
5.1. Die Graduierte von triangulären Rechtscoidealunteralgebren in U^- 81
5.2. Die Graduierte von triangulären Rechtscoidealunteralgebren in U 92

V. Trianguläre Borelunteralgebren **95**

6. Typ 1: Homogene Borelalgebren **97**

7. Typ 2: Trianguläre Borelunteralgebren mit $\Phi^+(w^+) \cap \Phi^+(w^-) = \mathrm{supp}(\phi^+) \cap \mathrm{supp}(\phi^-) \neq \emptyset$ **101**
7.1. Konstruktion der Borelunteralgebren von Typ 2 101
7.2. Klassifikation der Borelunteralgebren von Typ 2 111

8. Typ 3: Trianguläre Borelunteralgebren mit $\Phi(w^+) \cap \Phi(w^-) \supsetneq \mathrm{supp}(\phi^+) \cap \mathrm{supp}(\phi^-)$ im Fall A_n **115**
8.1. Klassifikation der Borelunteralgebren von Typ 3 115
8.2. Konstruktion der Borelunteralgebren von Typ 3 118

VI. Beispiele **121**

9. Borelunteralgebren der $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ **123**

10. Borelunteralgebren der $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ **127**
10.1. Relationen und Eigenschaften der $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ 127
10.2. Rechtscoidealunteralgebren der $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ 129
10.3. Konstruktion der Borelunteralgebren der $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ 131
10.4. Klassifikation der triangulären Borelunteralgebren der $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ 133
10.5. Klassifikation der allgemeinen Borelunteralgebren der $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ 136

11. Trianguläre Borelunteralgebren der $U_q(\mathfrak{sl}_4)$ **143**

Literaturverzeichnis **151**

Index **153**

Hiermit erkläre ich, dass ich die Dissertation selbstständig angefertigt und nur die angegebenen Quellen verwendet habe.

Marburg, den 2. Juni 2016 Karolina Vocke

Abstract

This thesis contains steps towards the classification of all right coideal subalgebras $C \subset U_q(\mathfrak{g})$ of a quantum group with generic q, where C has the additional property that all irreducible representations are 1-dimensional and C is maximal with this property. We call such a right coideal subalgebra a *Borel subalgebra*. First we construct for an arbitrary right coideal subalgebra a special choice of generators. Then we classify under some restrictions triangular Borelsubalgebras (i.e. with $C = C^{\geq 0}C^{\leq 0}$) for $U_q(sl_n)$. We give a conjectural description of all Borel subalgebras in the general case, using the description of the graded algebra $\mathrm{gr}(C)$. Finally we work out explicitly all Borel subalgebras for $U_q(\mathfrak{sl}_2)$, $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ without restrictions and all triangular Borel subalgebras for $U_q(\mathfrak{sl}_4)$.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Klassifikation aller Rechtscoidealunteralgebren $C \subset U_q(\mathfrak{g})$ der Quantengruppen bei generischem q, mit der folgenden Eigenschaft: Alle endlichdimensionalen irreduziblen Darstellungen von C sind eindimensional und C ist maximal mit dieser Eigenschaft. Solche Rechtscoidealunteralgebren nennen wir *Borelunteralgebren*. Zunächst konstruieren wir eine spezielle Wahl von Erzeugern von einer beliebigen Rechtscoidealunteralgebra. Dann klassifizieren wir unter gewissen Einschränkungen die triangulären Borelalgebren (d.h. mit $C = C^{\geq 0}C^{\leq 0}$) unter Verwendung der graduierten Algebra $\mathrm{gr}(C)$. Wir formulieren eine Vermutung über die Gestalt beliebiger Borelalgebren. Zuletzt arbeiten wir explizit alle Borelalgebren der $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ und $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ ohne Einschränkungen sowie alle triangulären Borelunteralgebren der $U_q(\mathfrak{sl}_4)$ aus.

Dank

Ich danke meinem Doktorvater István Heckenberger für viele Gespräche, inhaltliche Unterstützung und die freundliche Betreuung. Außerdem danke ich Simon Lentner für fachliche Hilfe, Zeit und Engagement.

Ich danke der Studienstiftung des deutschen Volkes und der Hanns-Seidel-Stiftung für die Förderung meines Promotionsstudiums, sowie der Mara-Stiftung für die Finanzierung eines Auslandsaufenthaltes am Lebedev-Institut in Moskau.

Teil I.

Einleitung

Die Quantengruppe $U_q(\mathfrak{g})$ [Drin86][Jim86] für eine endlich-dimensionale halbeinfache Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist eine Deformation der universellen Einhüllenden $U(\mathfrak{g})$. Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Definition und Klassifikation von *Borelunteralgebren* von Quantengruppen. Dabei handelt es sich um *Rechtscoidealunterlagebren*, die maximal sind mit der Eigenschaft *ede*: Jede endlichdimensionale irreduzible Darstellung ist eindimensional. Der Name ist angelehnt an ein Theorem von Sophus Lie, das besagt, dass alle Borelunteralgebren einer endlichdimensionalen halbeinfachen Liealgebra nur eindimensionale irreduzible Darstellungen haben und maximal mit dieser Eigenschaft sind.

Motivation

Borel-Unteralgebren und -Untergruppen sind in der Theorie der algebraischen Gruppen, der halbeinfachen Lie-Algebren und der Darstellungstheorie ein Grundbaustein der Klassifikation und vieler Standardkonstruktionen (Fahnenvarietäten, sphärische Varietäten, Verma-Moduln und ihre irreduziblen Quotienten, usw.). In der Theorie der Liealgebren sind Borelunteralgebren von endlichdimensionalen komplexen halbeinfachen Liealgebren definiert als maximal auflösbare Unterliealgebren. Es ist bekannt, dass die Menge der Borel-Unteralgebren von Lie-Algebren eine Varietät bilden, und je zwei solche Unteralgebren sind zueinander konjugiert. Eine Borelunteralgebra B einer Quantengruppe U definieren wir ähnlich wie in der Lietheorie. Anstatt aber eine Unterhopfalgebra zu betrachten, fordern wir im Quantengruppenfall, dass sie eine Rechtscoidealunteralgebra ist, (das heißt die Komultiplikation bildet B nach $B \otimes U$ ab) mit der obigen Eigenschaft, dass also jede endlichdimensionale irreduzible Darstellung eindimensional ist.

Neben den Standardborelunteralgebren $U^{\geq 0}$ und $U^{\leq 0}$ taucht bereits in $U = U_q(\mathfrak{sl}_2)$ eine weitere Familie von Borelunteralgberen auf, die erzeugt werden von Elemente $EK^{-1} + \lambda K^{-1}$ und $F + \lambda' K^{-1}$. Diese sind nicht isomorph zur Standardborelalgebra, sondern isomorph zur quantisierten Weylalgebra, von der man zeigen kann, dass sie ebenfalls die Eigenschaft erfüllt, dass jede endlichdimensionale irreduzible Darstellung eindimensional ist. Es stellt sich also die Frage, welche anderen Typen von Borelunteralgebren in U auftauchen.

Die Theorie der Rechtscoidealunteralgebren ist in den letzten Jahren sehr stark gewachsen. Erste Ergebnisse für bestimmte Liealgebren finden sich in [KS08] und [KSR11]. Die Grundlage für eine allgemeinere Theorie wurde in [HS09] durch die Bestimmung der homogenen Rechtscoidealunteralgebren einer großen Klasse von Nichols-Algebren gelegt. Dort wurde gezeigt, dass alle homogenen Rechtscoidealunteralgebren des positiven Borelteils $U^{\geq 0} \subset U$ in Bijektion zur Weylgruppe stehen: Jede solche Rechtscoidealunteralgebra $U^+[w]U^0$ ist eindeutig durch ein Element $w \in W$ der Weylgruppe bestimmt. Die graduierten Rechtscoidealunteralgebren konnten in der Klassifikation in [HK11a] auf Zopfgruppen-Translate (Weyl-Spiegelungen) der Standardborelalgebren zurückgeführt werden, also auf die Algebren, die aus den Standardborelalgebren durch Anwendung von Lusztigs Algebren-Automorphismen entstehen. In [HK11b] konnten auch beliebige (nicht

graduierte) Rechtscoidealunteralgebren der Standardborelalgebren bestimmt werden. Als technische Voraussetzung musste noch verlangt werden, dass die gruppenartigen Elemente der Rechtscoidealunteralgebra eine Hopfalgebra bilden, d.h. ihre Inversen liegen auch in der Rechtscoidealunteralgebra. Diese nichtgraduierten Rechtscoidealunteralgebren im positiven Borelpart sind isomorph zu den graduierten und ergeben sich aus letzteren mittels einer sogenannten Charakterverschiebung. Das heißt sie sind für einen Charakter $\phi : U^+[w] \to k$ von der Form $U^+[w]_\phi := (\phi \otimes id)\Delta(U^+[w])$.

In der folgenden Abbildung sind die bisher bekannten Ergebnisse über Rechtscoidealunteralgebren tabellarisch verdeutlicht:

	$C \subset U_q(\mathfrak{g})^{\geq 0}$	$C \subset U_q(\mathfrak{g})$
$U^0 \subset C$	$C = U^+[x]U^0$	$C = U^+[x]U^0U^+[y]$
$U^0 \cap C =: T_L$	$(U^+[x]T_L)_\chi$	allgemeiner Fall?

In dieser Tabelle liegen in der linken Spalte die Rechtscoidealunteralgebren des Borelteils $U^{\geq 0}$ und in der rechten Spalte Rechtscoidealunteralgebren von ganz U. Die obere Zeile enthält homogene Rechtscoidealunteralgebren, also solche die ganz U^0 enthalten; die untere Zeile enthält allgemeine Rechtscoidealunteralgebren mit der einzigen Einschränkung, dass die gruppenartigen Elemente der Rechtscoidealunteralgebra eine Hopfalgebra bilden, also dass $U^0 \cap C =: T_L$ eine Hopfalgebra ist. Diese Einschränkung ist für Borelunteralgebren immer erfüllt, also liegen alle Borelunteralgebren in obiger Tabelle. In den drei bekannten Fällen, liegen die folgenden Borelunteralgebren vor: In der linken Spalte liegt genau die positive Standardborelalgebra. Das folgt aus der Maximalitätseigenschaft, und weil $U^{\geq 0}$ eine Borelunteralgebra ist. In der rechten Spalte oben kann man mit Hilfe der Klassifikation von [HK11a] leicht folgern, dass ebenfalls nur Borelunteralgebren liegen, die vermöge Spiegelungen isomorph zur Standardborelalgebra sind. Besonders interessant in der Klassifikation der Borelunteralgebren ist also der allgemeinere Fall unten rechts.

Zusammenfassung und Ergebnisse

In Kapitel 1 werden die notwendigen Grundlagen aus der Lietheorie und der Theorie der Quantengruppen $U = U_q(\mathfrak{g})$ eingeführt und die Notation fixiert. Danach werden Rechtscoidealunteralgebren und Borelunteralgebren definiert. Wir schränken uns in der Arbeit auf q keine Einheitswurzel ein.

In Kapitel 2 wird der bisherige Stand der Klassifikation zusammengefasst, wie oben beschrieben:

Alle homogenen Rechtscoidealunteralgebren der $U^{\geq 0}$ resp. $U^{\leq 0}$ sind von der Form $U^+[w^+]U^0$ bzw. $U^-[w^-]U^0$ für Weylgruppenelemente w^+, w^- in W. Die Kombination dieser Rechtscoidealunteralgebren $C = U^+[w^+]U^0U^-[w^-]$ ist eine homogene

Rechtscoidalunteralgebra von ganz U, welche ede ist falls $w = (w^-)^{-1}w^+$ Länge $\ell(w^+) + \ell(w^-)$ hat und welche eine Borelunteralgebra ist, falls $w = w_0$ das längste Element der Weylgruppe ist. Dies liefert die einfachsten Borelunteralgebren, welche Spiegelungen von $U^{\geq 0}$ sind.

Sämtliche (auch nicht homogene) Rechtscoidealunteralgebren der $U^{\geq 0}$ sind von der Form $\psi(U^+[w])_\phi T_L$ für einen Charakter $\phi : \psi(U^+[w]) \to k$ und einen Torus $T_L = k[L]$, welche charakterverschobene Wurzelvektoren $\bar{E}_\mu$ für alle entsprechenden Wurzeln $\mu \in \Phi^+(w)$ enthalten.

In Kapitel 3 werden technische Aussagen für später gesammelt:

In Abschnitt 3.1 werden Kriterien gesammelt welche die ede Eigenschaft ausschließen: Vor allem die gleichzeitige Existenz von trivial-charakterverschobenen Wurzelvektoren E_μ, F_μ, sowie die Existenz von Elementen x mit trivialen q-Kommutatoren $[x, -]$. Außerdem beweisen wir in Satz 3.24 eine neue allgemeine Aussage zur Ergänzung von Weylgruppenelementen welche uns später die vollständige Behandlung bestimmter Borelaluntergebren erlaubt.

Satz (3.24):
Gegeben zwei Weylgruppenelemente $w_1, w_2 \in W$, sodass $\Phi^+(w_1) \cap \Phi^+(w_2) =: \mathtt{B} \neq \emptyset$ nur aus paarweise orthogonalen Wurzeln besteht. Dann gilt:

1. *Es gibt Elemente $w_1', w_2' \in W$ mit $\Phi^+(w_1) \subseteq \Phi^+(w_1')$, $\Phi^+(w_2) \subseteq \Phi^+(w_2')$, sodass folgende Relationen erfüllt sind:*

$$\Phi^+(w_1') \cap \Phi^+(w_2') = \mathtt{B} \text{ und } \Phi^+(w_1') \cup \Phi^+(w_2') = \Phi^+$$

2. *Es gibt ein Element $w_1'' \in W$ sodass $\Phi^+(w_1) \subseteq \Phi^+(w_1'')$ und w_1'' eine reduzierte Darstellung $w_1'' = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_{\ell(w_1'')}}$ hat mit $\mathtt{B} = \{\beta_{\ell(w_1'')-|B|+1}, \dots, \beta_{\ell(w_1'')}\}$.*

In Abschnitt 3.2 werden schärfere technische Aussagen für den Typ $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1} = A_n$ gesammelt. Insbesondere wird in Definition 3.39 ein Typ von Weylgruppenelementen in A_n eingeführt, der später nichttriviale Charakterverschiebungen in allgemeineren Borelunteralgebren erlaubt. Wir nennen diese Elemente nach der Form von $\phi^+(w)$ *Palmen*. Dies sind genau die Elemente $w \in W$ für die $|\Phi^+(w) \cap \Pi| = 1$.

In Kapitel 4 wird ein Ergebnis über allgemeine Rechtscoidealunteralgebren erzielt: Durch recht technische Argumente, insbesondere Induktionen über verschiedene Ordnungen auf $\Phi^+(w)$ und $\mathbb{N}\Phi^+(w)$ können wir schrittweise für eine beliebige Rechtscoidealunteralgebra ein besonderes Erzeugendensystem konstruieren: Es besteht aus Elementen, deren *Leitterme*, d.h. die Menge aller PBW-Basiselemente mit maximalem Q-Grad bzgl. der partiellen Ordnung auf Q (Definition 4.6), aus je einem einzelnen Wurzelvektor bestehen:

Satz (4.11):
Sei C eine Rechtscoidealunteralgebra mit der Eigenschaft $C^0 := C \cap U^0$ ist eine Unterhopfalgebra. Dann können wir ein Erzeugendensystem von C konstruieren, für das jeder

Erzeuger höchstens je einen E- und F-Leitterm besitzt, der zudem je ein Wurzelvektor von $\psi(U^+[w^+]), U^-[w^-]$ *(multipliziert mit geeignetem* U^0*) für je ein einziges geeignet gewähltes* $w^+, w^- \in W$ *ist.*

Dieser Satz dient dazu mit allgemeinen (insbesondere in der Tabelle unten rechts) Rechtscoidealunteralgebren arbeiten zu können und Darstellungen zu berechnen. Wir verwenden ihn insbesondere in Kapitel 7, sowie in den Beispielkapiteln 9 und 10.

In Kapitel 5 werden Strukturaussagen über nicht homogene Rechtscoidealunteralgebren getroffen, welche sich aus der Betrachtung der zugehörigen graduierten Rechtscoidealunteralgebra ergeben:

In Abschnitt 5.1 stellen wir eine Vermutung von Istvan Heckenberger vor, die wir für A_n beweisen können.

Vermutung (5.10):
Die Abbildung $f : \mathrm{gr}(U^-[w]_\phi) \to U^{\leq 0}$ *aus Lemma 5.5, die Elemente auf ihre Leitterme schickt ist ein injektiver Homomorphismus von* $\mathbb{Z}$*-graduierten Rechtscoidealunteralgebren. Das Bild D von* f *ist von folgender Form:*

- $D_0 = M$ *ist die Halbgruppe* $M := \langle K_\mu^{-1} \mid \mu \in \mathrm{supp}(\phi)\rangle$
- *Für die zu M gehörige Gruppe L gilt* DT_L *ist von der Form* $U^-[w']T_L$ *für ein* w' *von folgender Form: Zu dem gewählten* $w = s_{\alpha_{k_1}} s_{\alpha_{k_2}} \dots s_{\alpha_{k_m}} \in W$ *sei*

$$w' := (\prod_{\beta \in \mathrm{supp}(\phi)} s_\beta) w$$

  Weil in $\mathrm{supp}(\phi)$ *alle Elemente paarweise orthogonal sind, ist* w' *das Element, welches entsteht wenn in w alle Faktoren* s_{α_i}*, für alle i mit* $\beta_i \in \mathrm{supp}(\phi)$*, gestrichen werden.*

$$w' = s_{\alpha_{k_1}} s_{\alpha_{k_2}} \dots \not{s}_{\alpha_{k_i}} \dots s_{\alpha_{k_m}}$$

Ein Resultat dieser Arbeit ist einerseits in Lemma 5.11 ein allgemeiner Beweis dieser Vermutung, außer für Elemente $w \in W$ einer speziellen Form. Der Beweis geht induktiv über die Länge von w und benutzt die Klassifikation der homogenen Rechtscoidealunteralgebren sowie die Hilbertreihe (alternativ die Gelfand-Kirillov-Dimension) um das Bild von f zu bestimmen. Andererseits können wir für die speziellen Elemente $w \in W$ im Fall der A_n durch explizite Rechnung (z.B. mittels Young-Tableaux) die Vermutung verifizieren.

Satz (5.13):
Vermutung 5.10 trifft im Fall A_n *zu.*

In Abschnitt 5.2 wird ein entsprechendes Resultat für die Kombination von U^+ und U^- daraus abgeleitet, sowie ein Kriterium für alle Borelunteralgebren als Vermutung formuliert:

Vermutung (5.16):
Jede trianguläre Rechtscoidealunteralgebra von der Form $C = \psi(U^+[w^+])_{\phi^+} T_L U^-[w]_{\phi^-}$ *mit* $\mathrm{supp}(\phi^+) = \mathrm{supp}(\phi^-)$ *und* $L = \mathrm{supp}(\phi^+)^\perp$ *ist genau dann eine Borelunteralgebra, wenn* $w^+ w'^{-1} = w_0$. *Wir vermuten sogar, dass die Forderungen* $\mathrm{supp}(\phi^+) = \mathrm{supp}(\phi^-)$ *und* $L = \mathrm{supp}(\phi^+)^\perp$ *schon aus der Triangularität folgen.*

Insbesondere vermuten wir, dass jede Borelalgebra triangulär ist.

Immerhin können wir beweisen:

Lemma (5.17):
Im Fall A_n *können wir zeigen: Gegeben ein* w *und* w' *wie in Vermutung 5.10 (die nach Satz 5.13 für* A_n *erfüllt ist). Gegeben außerdem ein* w^+, *sodass* $C = \psi(U^+[w^+])_{\phi^+} T_L U^-[w]_{\phi^-}$ *mit* $L \subset (\mathrm{supp}(\phi^+) \cap \mathrm{supp}(\phi^-))^\perp$ *eine trianguläre Rechtscoidealunteralgebra ist. Gilt nun* $\ell(w'^{-1}w^+) < \ell(w') + \ell(w^+)$, *so ist* C *nicht ede.*

In Kapitel 6, 7, 8 untersuchen wir alle *triangulären Borelunteralgebren*, das heißt nach obigen Ergebnissen Borelunteralgebren von der Form:

$$C = C^{\geq 0} C^{\leq 0} = \psi(U^+[w^+])_{\phi^+} T_L U^-[w^-]_{\phi^-}$$

Nach zunehmendem Schwierigkeitsgrad unterscheiden wir Typen 1, 2 und 3. Eine Schwierigkeit ist, dass der Begriff der Borelunteralgebra wegen der Maximalität immer eine Kenntnis von allen auch nicht triangulären Rechtscoidealunteralgebren voraussetzt.

In Kapitel 6 besprechen wir noch einmal exemplarisch homogene Borelunteralgebren (Typ 1).

In Kapitel 7 klassifizieren wir vollständig alle Borelunteralgebren mit der zusätzlichen Eigenschaft $\mathrm{supp}(\phi^+) \cap \mathrm{supp}(\phi^-) = \Phi^+(w^+) \cap \Phi^+(w^-)$, also dass alle gemeinsam auftretenden Wurzelvektoren $\bar{E}_\mu$, $\bar{F}_\mu$ auch nichttrivial charakterverschoben sind (Typ 2). Dies liefert neue Beispiele von Borelunteralgebren, die mehrere kommutierende quantiserte Weylalgebren enthalten, und zeigt, dass alle triangulären Borelunteralgebren vom Typ 2 von dieser Form sind.

Satz (7.12):
Sei $x \in W$ *sodass* $\Phi^+(x)$ *aus paarweise orthogonalen einfachen Wurzeln besteht. Seien* ϕ^+ *und* ϕ^- *Charaktere mit* $\mathrm{supp}(\phi^+) = \mathrm{supp}(\phi^-) = \Phi^+(x)$, *und* $\phi^+(E_\alpha K_\alpha^{-1})\phi^-(F_\alpha) = \frac{q_\alpha^2}{(1-q_\alpha^{-2})(q_\alpha - q_\alpha^{-1})}$. *Dann ist* $C = \psi(U^+[w_0])_{\phi^+} T_L U^-[x]_{\phi^-}$ *eine Borelunteralgebra von* U.

Satz (7.15):
Jede trianguläre Borelunteralgebra $B = \psi(U^+[w^+])_{\phi^+} T_L U^-[w^-]_{\phi^-}$ *von* U *mit der zusätzlichen Eigenschaft* $\Phi^+(w^+) \cap \Phi^+(w^-) = \mathrm{supp}(\phi^+) = \mathrm{supp}(\phi^-)$ *(Typ 2) ist als Algebra isomorph zu einer Borelunteralgebra von der Form* $\psi(U^+[w_0])_{\phi+} T_L U^-[\prod_{\alpha \in c} s_\alpha]_{\phi^-}$ *mit* $L = c^\perp$, *wobei* c *eine Menge von paarweise orthogonalen einfachen Wurzeln ist und* ϕ^+, ϕ^- *Charaktere auf* $\psi(U^+[\prod_{\alpha \in c} s_\alpha])$ *bzw.* $U^-[\prod_{\alpha \in c} s_\alpha]$ *sind, was gleichbedeutend ist zu einer beliebigen Wahl der Werte* $\lambda_\alpha = \phi^+(E_\alpha K_\alpha^{-1})$, $\lambda'_\alpha = \phi^-(F_\alpha)$ *für* $\alpha \in c$ *mit* $\lambda'_\alpha \lambda_\alpha = \frac{q_\alpha^2}{(1-q_\alpha^{-2})(q_\alpha - q_\alpha^{-1})}$. *Hierbei kann* ϕ^+

auf $\psi(U^+[\prod_{\alpha\in c} s_\alpha])$ trivial erweitert werden zu einem Charakter ϕ^+ auf $\psi(U^+[w_0])$, weil die Elemente in c paarweise orthogonal sind.

Umgekehrt ist für jede solche Wahl von c, ϕ^+ und ϕ^- schon $\psi(U^+[w_0])_{\phi+}T_L U^-[\prod_{\alpha\in c} s_\alpha]_{\phi^-}$ mit $L = c^\perp$ eine Borelunteralgebra.

Man beachte, dass verschiedene Wahlen von $\lambda_\alpha, \lambda'_\alpha$ durch den Hopf-Automorphismus $E_\alpha \mapsto tE_\alpha,\ F_\alpha \mapsto t^{-1}F_\alpha$ ineinander übergeführt werden können.

In Kapitel 8 geben wir teilweise Resultate für allgemeine trianguläre Borelunteralgebren im Fall A_n an. Wir erwarten, dass die Ergebnisse aus Kapitel 5 auch diesen Fall allgemein lösen können, dafür ist jedoch unsere konkrete Herangehensweise, welche die Kenntnis expliziter Kommutatoren vorraussetzt, nicht geeignet.

Eine überraschende Wendung in der vorliegenden Arbeit war, dass in spezifischen Fällen eine Borelalgebra durchaus trivial-charakterverschobene (das heißt $\mu \notin \operatorname{supp}(\phi^+) \cap \operatorname{supp}(\phi^-)$) Wurzelvektoren $\bar{E}_\mu, \bar{F}_\mu$ enthalten kann, wenn μ nicht einfach ist und eine (charakterverschobene) quantisierte Weylalgebra $\bar{E}_\nu, \bar{F}_\nu$ mit $\nu \prec \mu$ in C liegt. Diese Borelunteralgebren sind Erweiterungen von quantisierten Weylalgebren, siehe die Beispiele in der $U_q(\mathfrak{sl}_3)$.

In Abschnitt 8.1 grenzen wir mögliche trianguläre Borelunteralgebren ein. Zunächst vermuten wir in Bemerkung 8.1 allgemein, dass wir zwei technische Eigenschaften annehmen können: $\operatorname{supp}(\phi^+) = \operatorname{supp}(\phi^-)$ und $\Phi^+(w^-) \subset \Phi^+(w^+)$. Unter dieser Annahme können wir in Satz 8.2 zeigen, dass w^- zwingend von der Form Palme sein muss, wobei die untere Spitze jeder enthaltenen kleineren Palme genau eine charakterverschobene quantisierte Weylalgebra ist.

In Abschnitt 8.2 konstruieren wir exemplarisch Palmen der Höhe 1, das heißt Borelunteralgebren mit $\operatorname{supp}(\phi) \subset \Pi$, und beweisen, dass die zugehörigen triangulären Rechtscoidealunteralgebren tatsächlich Borelunteralgebren sind.

In Kapitel 9, 10 und 11 stellen wir ausführlich Beispiele vor und prüfen unsere weitergehenden Vermutungen.

In Kapitel 9 und 10 klassifizieren wir händisch (unter Verwendung der allgemeinen Ergebnisse aus Kapitel 4) sämtliche Borelunteralgebren für $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ und $\mathfrak{sl}_3$.

Beispiel (10.3):
Jede Borelunteralgebra der $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ ist triangulär. Es gibt nach Satz 10.2 bis auf Algebrenisomorphie und Spiegelungen die folgenden:

- *Die Standardborelalgebra $U^{\geq 0}$ von Typ 1 mit PBW-Erzeugern*

$$E_\alpha,\ E_\beta,\ E_{\alpha\beta},\ K_\alpha,\ K_\beta,\ K_\alpha^{-1},\ K_\beta^{-1}$$

- *Eine Borelunteralgebra* $\psi(U^+[w_0])_{\phi^+}\langle K_{2\beta+\alpha}, K_{2\beta+\alpha}^{-1}\rangle U^-[s_\alpha]_{\phi^-}$ *vom Typ 2 mit Charakteren* $\phi^+(E_\alpha K_\alpha^{-1}) = \lambda_\alpha^+$ *sowie* $\phi^-(F_\alpha) = \lambda_\alpha^-$ *und* 0 *sonst, sodass* $\lambda_\alpha^+\lambda_\alpha^- = \frac{q^2}{(1-q^2)(q-q^{-1})}$.
  Sie hat PBW-Erzeuger

$$E_\beta K_\beta^{-1},\ E_{\beta\alpha}K_{\alpha+\beta}^{-1},\ E_\alpha K_\alpha^{-1} + \lambda_\alpha^+ K_\alpha^{-1},\ F_\alpha + \lambda_\alpha^- K_\alpha^{-1},\ K_{2\beta+\alpha},\ K_{2\beta+\alpha}^{-1}$$

- *Eine Borelunteralgebra* $\psi(U^+[s_\alpha s_\beta])_{\phi^+}\langle K_{2\beta+\alpha}, K_{2\beta+\alpha}^{-1}\rangle U^-[s_\alpha s_\beta]_{\phi^-}$ *vom Typ 3.*
  Sie hat PBW-Erzeuger

$$\begin{aligned}&E_\alpha K_\alpha^{-1} + \lambda_\alpha^+ K_\alpha^{-1},\ E_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1} + \lambda_\alpha^+(1-q^{-2})E_\beta K_{\alpha+\beta}^{-1},\\ &F_\alpha + \lambda_\alpha^- K_\alpha^{-1},\ F_{\alpha\beta} + \lambda_\alpha^-(q^{-1}-q)F_\beta K_\alpha^{-1}\ K_{2\beta+\alpha},\ K_{2\beta+\alpha}^{-1}\end{aligned}$$

In Kapitel 11 klassifizieren wir händisch alle triangulären Borelunteralgebren der $U_q(\mathfrak{sl}_4)$. Neben den obigen Typen von Beispielen taucht hier auch erstmals eine Palme von größerer Höhe auf:

Beispiel (11.1):
Jede trianguläre Borelunteralgebra der $U_q(\mathfrak{sl}_4)$ *ist bis auf Spiegelungen und Algebrenisomorphie von der folgenden Form:*

- *Die Standardborelalgebra* $U^{\geq 0}$ *von Typ 1*
- *Die folgenden Borelunteralgebren vom Typ 2:*
  - $\psi(U^+[w_0])_{\phi^+}\langle K_{2\alpha_2+\alpha_1}, K_{2\alpha_2+\alpha_1}^{-1}, K_{\alpha_3}, K_{\alpha_3}^{-1}\rangle U^-[s_{\alpha_1}]_{\phi^-}$
    mit $\mathrm{supp}(\phi^+) = \mathrm{supp}(\phi^-) = \{\alpha_1\}$
  - $\psi(U^+[w_0])_{\phi^+}\langle K_{2\alpha_2+\alpha_1}, K_{2\alpha_2+\alpha_1}^{-1}\rangle U^-[s_{\alpha_1}s_{\alpha_3}]_{\phi^-}$
    mit $\mathrm{supp}(\phi^+) = \mathrm{supp}(\phi^-) = \{\alpha_1, \alpha_3\}$
- *Die folgenden Borelunteralgebren vom Typ 3:*
  - $\psi(U^+[s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_3}s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}])_{\phi^+}\langle K_{\alpha_3}, K_{\alpha_2}^2K_{\alpha_1}, K_{\alpha_3}^{-1}, K_{\alpha_2}^{-2}K_{\alpha_1}^{-1}\rangle U^-[s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}]_{\phi^-}$
    mit $\mathrm{supp}(\phi^+) = \mathrm{supp}(\phi^-) = \{\alpha_1\}$
  - $\psi(U^+[s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_3}s_{\alpha_1}])_{\phi^+}\langle K_{\alpha_3}, K_{\alpha_2}^2K_{\alpha_1}, K_{\alpha_3}^{-1}, K_{\alpha_2}^{-2}K_{\alpha_1}^{-1}\rangle U^-[s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_3}]_{\phi^-}$
    mit $\mathrm{supp}(\phi^+) = \mathrm{supp}(\phi^-) = \{\alpha_1\}$
  - $\psi(U^+[s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_3}s_{\alpha_1}])_{\phi^+}\langle K_{\alpha_3}K_{\alpha_2}^2K_{\alpha_1}, K_{\alpha_3}^{-1}K_{\alpha_2}^{-2}K_{\alpha_1}^{-1}\rangle U^-[s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_3}s_{\alpha_1}]_{\phi^-}$
    mit $\mathrm{supp}(\phi^+) = \mathrm{supp}(\phi^-) = \{\alpha_1, \alpha_3\}$
  - $\psi(U^+[s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}s_{\alpha_3}s_{\alpha_2}])_{\phi^+}\langle K_{\alpha_1}^{-1}K_{\alpha_3}, K_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}, K_{\alpha_1}K_{\alpha_3}^{-1}, K_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}^{-1}\rangle U^-[s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}s_{\alpha_3}]_{\phi^-}$
    mit $\mathrm{supp}(\phi^+) = \mathrm{supp}(\phi^-) = \{\alpha_2\}$
  - $\psi(U^+[s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}s_{\alpha_3}s_{\alpha_2}])_{\phi^+}\langle K_{\alpha_1}^{-1}K_{\alpha_3}, K_{\alpha_1}K_{\alpha_3}^{-1}\rangle U^-[s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}s_{\alpha_3}s_{\alpha_2}]_{\phi^-}$
    mit $\mathrm{supp}(\phi^+) = \mathrm{supp}(\phi^-) = \{\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\}$

Ausblick auf Anwendungen

Eine mögliche Anwendung von nicht-standard Borelunteralgebren ist die Konstruktion von induzierten Moduln für $U_q(\mathfrak{g})$: Sei $B \subset U_q(\mathfrak{g})$ eine Borelunteralgebra und $\chi : B \to U$ eine eindimensionale Darstellung, dann betrachten wir die unendlich-dimensionsionale $U_q(\mathfrak{g})$-Darstellung

$$V_{B,\chi} := U_q(\mathfrak{g}) \otimes_B \chi$$

und interessieren uns für die Kompositionsreihe von V.

Beispiel:
Für $B = U_q(\mathfrak{g})^{\geq 0}$ die Standardborelalgebra ist $U_q(\mathfrak{g}) \otimes_B \chi$ ein Verma-Modul. Alle diese Moduln haben eine diagonalisierbare Wirkung von U^0.

Für spezielle χ (Gewichte) mit Ganzzahligkeitsbedingungen hat V einen irreduziblen endlich-dimensionalen Quotienten $L(\lambda)$, in allen anderen Fällen ist V unendlich-dimensional und irreduzibel.

Beispiel:
Für die quantisierte Weylalgebra $B = \langle EK^{-1} + \lambda K^{-1}, F + \lambda' K^{-1} \rangle \subseteq U_q(\mathfrak{sl}_2)$ ist

$$U_q(\mathfrak{g}) \otimes_B \chi \cong \mathbb{C}[K, K^{-1}]$$

mit Wirkung

$$K = \begin{pmatrix} \cdots & & & & \\ & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & \cdots \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} \cdots & & & & \\ & fq^{2(n-1)} & \lambda'(1-q^{2(n-1)}) & & \\ & & fq^{2n} & \lambda'(1-q^{2n}) & \\ & & & fq^{2(n+1)} & \\ & & & & \cdots \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} \cdots & & & & \\ & eq^{-2(n-1)} & \lambda(1-q^{-2(n-1)}) & & \\ & & eq^{-2n} & \lambda(1-q^{-2n}) & \\ & & & eq^{-2(n+1)} & \\ & & & & \cdots \end{pmatrix}$$

wobei $e, f \in k$ beliebige Skalare sind mit $ef = \frac{q^2}{(q-q^{-1})(1-q^2)}$, welche die 1-dimensionale irreduzible Darstellung χ definieren. Diese neuen nicht-standard induzierten Moduln zerfallen nicht in Gewichtsräume.

Weitere interessante Anwendungen der hier begonnenen Techniken (insb. Kapitel 4) könnten sich für allgemeinere Rechtscoidealunteralgebren ergeben, siehe z.B. [Let02].

Teil II.

Grundlagen

1. Notation und Definitionen

In diesem Kapitel werden die nötigen Grundlagen und Notationen vorgestellt. Im ersten Teil wird dazu die Theorie der Wurzelsysteme und Liealgebren eingeführt. Dabei halten wir uns inhaltlich an [Hum70] und in der Notation an [Jan96]. Im zweiten Abschnitt werden die Quantengruppen mit Hopfalgebrenstruktur nach [Jan96] definiert sowie die Grundzüge der Theorie der Wurzelvektoren und Lusztigautomorphismen dargestellt. Zuletzt werden noch die Grundbegriffe der Rechtscoideal- und Borelunteralgebren eingeführt.

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $char k = 0$.

1.1. Grundlagen aus der Liealgebrentheorie

1.1.1. Wurzelsysteme

Sei E ein euklidischer Raum, d.h. ein endlichdimensionaler Vektorraum R mit einer positiv definiten symmetrischen Bilinearform $(_\,,_)$. Für $\alpha, \beta \in E$ definieren wir eine *Spiegelung* wie folgt:

$$s_\alpha(\beta) = \beta - a_{\alpha\beta}\alpha \qquad \text{mit} \qquad a_{\alpha\beta} := \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$$

Definition 1.1:
Eine Teilmenge Φ eines euklidischen Raums E heißt *Wurzelsystem* in E, wenn die folgenden Axiome gelten:

Φ ist endlich, erzeugt E und enthält nicht die 0

Wenn $\alpha \in \Phi$, so liegen als Vielfache von α nur $\pm\alpha$ in Φ

Für $\alpha \in \Phi$, ist Φ invariant unter den Spiegelungen s_α

Für $\alpha, \beta \in \Phi$, gilt $a_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z}$

Die Elemente in Φ heißen dann *Wurzeln* und wir nennen (α,α) die *Länge* von $\alpha \in \Phi$. Eine Wurzel $\alpha \in \Phi$ ist *kürzer* als $\beta \in \Phi$, wenn $(\alpha,\alpha) < (\beta,\beta)$.

Definition 1.2:
Sei Φ ein Wurzelsystem in E. Die *Weylgruppe* von Φ ist die Untergruppe W von $GL(E)$, die erzeugt wird von den Spiegelungen $s_\alpha (\alpha \in \Pi)$. Das Wurzelsystem Φ ist also insbesondere unter der Wirkung der Weylgruppe W invariant.

Definition 1.3:
Eine Teilmenge Π von Φ heißt *Basis* wenn gilt:

Π ist eine Basis von E,

Jede Wurzel β kann geschrieben werden als $\beta = \sum_{\alpha \in \Pi} k_\alpha \alpha$

für Koeffizienten k_α ganzzahlig und alle positiv, oder alle negativ

Die Wurzeln in Π heißen *einfache Wurzeln* und wir schreiben im Folgenden meist $\Pi := \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ oder $\{\alpha_1, \alpha_2 \ldots\}$ für Teilmengen von Π. Der Rang des Wurzelsystems ist die Dimension von E also insbesondere $Rank(\Phi) = |\Pi|$. Für eine Wurzel $\mu \in \Phi$ von der Form $\mu = \sum_{\alpha \in \Pi} k_\alpha \alpha$ definieren wir die *Höhe* als $ht(\mu) = \sum_{\alpha \in \Pi} k_\alpha$. Sind alle $k_\alpha \geq 0$ (bzw. alle $k_\alpha \leq 0$) nennen wir μ *positiv* (bzw. *negativ*) und schreiben $\mu > 0$ (bzw. $\mu < 0$). Die Menge aller *positiven Wurzeln* bezüglich Π nennen wir Φ^+ und die Menge aller *negativen Wurzeln* Φ^-. Das *Wurzelgitter* ist definiert als: $Q := \mathbb{Z}\Pi (\cong \mathbb{Z}^\Pi)$, d.h. $a \in Q$ ist von der Form $a := a_1\alpha_1 + \ldots + a_{|\Pi|}\alpha_{|\Pi|}$ mit $\alpha_i \in \Pi, a_i \in \mathbb{Z}$. Außerdem definieren wir das *positive Wurzelgitter* als $Q_+ := \mathbb{N}\Pi$.

Die Matrix mit den Einträgen $a_{\alpha\beta}$ für $\alpha, \beta \in \Pi$ nennen wir *Cartanmatrix*.

Definition 1.4:
Es gibt eine partielle Ordnung $\prec$ auf Q_+. Für $a := a_1\alpha_1 + \ldots + a_{|\Pi|}\alpha_{|\Pi|}$, und $b := b_1\alpha_1 + \ldots + b_{|\Pi|}\alpha_{|\Pi|} \in Q$ mit $a_i, b_i \in \mathbb{N}$ sei $a \prec b$ genau dann, wenn $a_i < b_i$ für alle $i \leq n$.

Definition 1.5:
Für ein Wurzelsystem Φ ist das *Dynkin-Diagramm* ein Graph in dem die $|\Pi|$ Ecken den Wurzeln $\alpha \in \Pi$ entsprechen und die Kanten durch die Cartanmatrix bestimmt werden: Für $(a_{\alpha\beta}, a_{\beta\alpha}) = (0, 0)$ malen wir keine Kante, für $(1, 1)$ malen wir eine einfache Kante, für $(1, 2)$ bzw. $(1, 3)$ eine doppelte bzw. dreifache Kante mit einem Pfeil der zu α zeigt. Andere Fälle kommen in endlichen Wurzelsystemen nicht vor, wie der folgende Satz 1.6 besagt.

Ein Wurzelsystem Φ heißt irreduzibel, wenn es nicht die Vereinigung von zwei echten Teilmengen ist, für die gilt, dass jede Wurzel der einen Menge orthogonal ist zu allen Wurzeln der anderen Menge. Im Allgemeinen hat Φ eine eindeutige Zerlegung in irreduzible Komponenten: $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2 \cup \ldots \cup \Phi_r$. Alle möglichen Dynkindiagramme sind nach [Hum70] Theorem 11.4 in der folgenden Weise klassifiziert:

Satz 1.6:
Ist Φ ein irreduzibles Wurzelsystem von Rang n, so sind die Dynkindiagramme von dem Typ $A_l, B_l, C_l, D_l, E_6, E_7, E_8, F_9$ oder G_2, siehe Abbildung:

A_l
$$\underset{\alpha_1}{\circ} - \underset{\alpha_2}{\circ} - \cdots - \underset{\alpha_{l-1}}{\circ} - \underset{\alpha_l}{\circ}$$

B_l
$$\underset{\alpha_1}{\circ} - \underset{\alpha_2}{\circ} - \cdots - \underset{\alpha_{l-1}}{\circ} \Rightarrow \underset{\alpha_l}{\circ}$$

C_l
$$\underset{\alpha_1}{\circ} - \underset{\alpha_2}{\circ} - \cdots - \underset{\alpha_{l-1}}{\circ} \Leftarrow \underset{\alpha_l}{\circ}$$

D_l
$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \circ & & \\ & & & & | & & \\ & & & & \alpha_l & & \\ \underset{\alpha_1}{\circ} & - & \underset{\alpha_2}{\circ} & - \cdots - & \underset{\alpha_{l-2}}{\circ} & - & \underset{\alpha_{l-1}}{\circ} \end{array}$$

E_6
$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \circ & & & & \\ & & & & | & & & & \\ & & & & \alpha_6 & & & & \\ \underset{\alpha_1}{\circ} & - & \underset{\alpha_2}{\circ} & - & \underset{\alpha_3}{\circ} & - & \underset{\alpha_4}{\circ} & - & \underset{\alpha_5}{\circ} \end{array}$$

E_7
$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & \circ & & & & & & \\ & & & & | & & & & & & \\ & & & & \alpha_7 & & & & & & \\ \underset{\alpha_1}{\circ} & - & \underset{\alpha_2}{\circ} & - & \underset{\alpha_3}{\circ} & - & \underset{\alpha_4}{\circ} & - & \underset{\alpha_5}{\circ} & - & \underset{\alpha_6}{\circ} \end{array}$$

E_8
$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & & & & & & & \circ & & & & \\ & & & & & & & & | & & & & \\ & & & & & & & & \alpha_8 & & & & \\ \underset{\alpha_1}{\circ} & - & \underset{\alpha_2}{\circ} & - & \underset{\alpha_3}{\circ} & - & \underset{\alpha_4}{\circ} & - & \underset{\alpha_5}{\circ} & - & \underset{\alpha_6}{\circ} & - & \underset{\alpha_7}{\circ} \end{array}$$

F_4
$$\underset{\alpha_1}{\circ} - \underset{\alpha_2}{\circ} \Rightarrow \underset{\alpha_3}{\circ} - \underset{\alpha_4}{\circ}$$

G_2
$$\underset{\alpha_1}{\circ} \Rrightarrow \underset{\alpha_2}{\circ}$$

Lemma 1.7:
Je k Wurzeln in Φ können wir in ein Rang k Wurzelsystem spiegeln, das heißt für jede Menge von Wurzeln $\mathtt{B} = \{\mu_1, \ldots, \mu_{|\mathtt{B}|}\} \subset \Phi$ gibt es ein $x \in W$ und ein Rang $|\mathtt{B}|$ Wurzelsystem $\Phi_{|\mathtt{B}|}$ mit $x(\mu_i) \in \Phi_{|\mathtt{B}|}$ für alle i.

Einen Beweis hierfür findet man unter Anderem in [Len14] Theorem 6.3 a).

Definition 1.8:
Die *reduzierte Darstellung* eines Weylgruppenelements $w \in W$ ist eine Darstellung $w = s_{\alpha_1} \ldots s_{\alpha_n}$, mit $\alpha_i \in \Pi$ für die n minimal ist. Die *Länge* von w ist dann definiert als $\ell(w) = n$. Es gibt eine partielle Ordnung $<$ auf den Elementen der Weylgruppe, genannt die *schwache Ordnung*, gegeben auf $w, v \in W$ durch „w ist kleiner als v“ ($w < v$) genau dann, wenn es ein $w' \in W$ mit $ww' = v$ und $\ell(v) = \ell(w) + \ell(w')$ gibt. Insbesondere können wir für alle Elemente v mit $w < v$ immer eine reduzierte Darstellung von v finden die mit w beginnt. Ebenso gibt es

auch die analoge partielle Ordnung nach links, gegeben durch $w <_l v$ genau dann, wenn es ein $w' \in W$ mit $v = w'w$ und $\ell(v) = \ell(w) + \ell(w')$ gibt.

Satz 1.9 (strong exchange property [BB05] Theorem 1.4.3):
Sei $w = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_{\ell(w)}}$ für $\alpha_i \in \Pi$, $s_{\alpha_i} \in W$ und sei $s_\mu := w s_\alpha w^{-1} \in W$ für ein $\mu \in \Phi$ mit $w(\alpha) = \mu$. Angenommen es gilt $\ell(s_\mu w) < \ell(w)$, dann ist $s_\mu w = s_{\alpha_1} \dots \hat{s}_{\alpha_j} \dots s_{\alpha_{\ell(w)}}$ für ein $j \leq \ell(w)$.

Sei w ein Element in W und eine reduzierte Darstellung $w = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \dots s_{\alpha_{\ell(w)}}$ gegeben, dann definieren wir für alle $i \in \{1, 2, \dots, \ell(w)\}$:

$$\beta_i = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \dots s_{\alpha_{i-1}}(\alpha_i)$$

Wir schreiben für diese zu gegebenem w mit gegebener reduzierter Darstellung eindeutig bestimmten Wurzeln im Folgenden immer β_i.

Lemma 1.10:
Es sind alle β_i verschieden und es gilt für die Menge $\Phi^+(w)$ aller β_i:

$$\Phi^+(w) = \{\alpha \in \Phi^+ \mid w^{-1}\alpha \prec 0\} = \{\beta_i \mid i \in \{1, \dots, \ell(w)\}\}$$

Insbesondere gilt also $|\Phi^+(w)| = l(w)$ und für $w_0 \in W$ maximal gilt $\Phi^+(w_0) = \Phi^+$.

Folgerung 1.11:
Sei $w \in W$ und $\alpha \in \Phi^+(w) \cap \Pi$, dann gibt es eine reduzierte Darstellung von w von der Form $w = s_\alpha x$ für ein $x \in W$ mit $\ell(x) = \ell(w) - 1$.

Diese Folgerung bekommt man direkt aus der „strong exchange property“, siehe dazu [BB05] Cor.1.4.4 c).

Bemerkung 1.12:
Seien $w, v \in W$. Es gilt $\Phi^+(v) \subseteq \Phi^+(w)$ genau dann, wenn $v \leq w$.

Beweis: Die Behauptung ist für das neutrale Element v trivial. Mit Induktion über $\ell(v)$ erhält man die Aussage allgemein. □

Definition 1.13:
Integrale Gewichte sind Elemente $\lambda \in E$ mit der Eigenschaft $\langle \lambda, \alpha \rangle := \frac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$ für alle $\alpha \in \Phi$. Für die Menge aller integralen Gewichte λ schreiben wir Λ. Weil $\frac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$ linear von λ abhängt bildet Λ eine Untergruppe von E und es gilt $\Phi \subset \Lambda$. Ein integrales Gewicht λ heißt *dominant*, wenn $\langle \lambda, \alpha \rangle$ nichtnegativ ist für alle $\alpha \in \Pi$; λ heißt stark dominant, wenn $\langle \lambda, \alpha \rangle$ positiv ist für alle $\alpha \in \Pi$. Die *fundamentalen dominanten Gewichte* sind die λ_i mit $\langle \lambda_i, \alpha_j \rangle = \delta_{ij}$, sie bilden eine Basis des Gitters Λ.

1.1.2. Ordnungen

Sei $w \in W$ gegeben mit einer fixierten reduzierten Darstellung. Wir betrachten häufig $\mathbb{N}^{\Phi^+(w)}$ und schreiben $b \in \mathbb{N}^{\Phi^+(w)}$ als $b = (b_1, \ldots, b_{|\Phi^+(w)|})$ für $b_i \in \mathbb{N}$

Es gibt eine kanonische Projektion $pr : \mathbb{Z}|\Phi^+(w)| \to \mathbb{Z}\Pi$ gegeben durch die Addition in Φ^+, d.h. $pr(b) := b_1\beta_1 + \ldots + b_{|\Phi^+(w)|}\beta_{|\Phi^+(w)|}$ und wir identifizieren $\Phi^+(w)$ mit der Menge der Einheitsvektoren von $\mathbb{N}\Phi^+(w)$, d.h. $\beta_i \in \Phi^+(w)$ sei der i-te Einheitsvektor in $\mathbb{N}\Phi^+(w)$

- Wir definieren, abhängig von der Wahl der reduzierten Darstellung von w, eine Totalordnung $<$ auf $\Phi^+(w)$ durch

  $$\beta_i < \beta_j \in \Phi^+(w) \Leftrightarrow i < j$$

  Diese Ordnung ist konvex, d.h.für $\mu < \nu \in \Phi^+(w)$ gilt $\mu < \mu + \nu < \nu$, sofern $\mu + \nu \in \Phi^+(w)$ siehe dazu [PA] s.662.

- In Abhängigkeit von einer solchen Totalordnung gibt es außerdem eine partielle Ordnung auf $\mathbb{N}\Phi^+(w)$, nämlich die lexikographische Ordnung $<_{lex}$ auf $\Phi^+(w)$. Diese erlaubt es insbesondere Elemente $a, b \in \mathbb{N}^{\Phi^+(w)}$ mit $pr(a) = pr(b)$ zu ordnen.

- Sei nun w_0 das maximale Element in W mit einer fixierten reduzierten Darstellung, dann kann man in Anlehnung an die Ordnung $\prec$ auf Q_+ aus Definition 1.4 eine andere (im Allgemeinen verschiedene) partielle Ordnung $\prec_\Phi$ auf $\mathbb{N}\Phi^+(w_0)$ definieren. Seien dazu $a := a_1\beta_1 + \ldots + a_{|\Phi^+|}\beta_{|\Phi^+|}$, und $b := b_1\beta_1 + \ldots + b_{|\Phi^+|}\beta_{|\Phi^+|} \in \mathbb{N}\Phi^+(w_0)$. Dann ist $\prec_\Phi$ gegeben durch: $a \prec_\Phi b$ genau dann, wenn $a_i < b_i$ für alle $1 \leq i \leq |\Phi^+|$. (Solch eine Ordnung kann man auch allgemein ohne reduzierte Darstellung von w_0 definieren, für die Notation eignet sich aber die Ordnung $<$ auf Φ^+ gegeben durch die reduzierte Darstellung von w_0).

1.1.3. Liealgebren

Definition 1.14:
Eine *Liealgebra* L über k ist ein k-Vektorraum L zusammen mit einer *Kommutator*- oder *Klammer*-Operation $L \times L \to L$, $(x, y) \mapsto [x, y]$, wenn folgendes gilt:

$$x, y \mapsto [x, y] \text{ ist bilinear} \tag{1.1}$$

$$[x, x] = 0 \quad \forall x \in L \tag{1.2}$$

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \ (x, y, z \in L) \tag{1.3}$$

Dabei heißt (1.3) die *Jacobi-Identität*.

Für ein $x \in L$ definieren wir die adjungierte Abbildung $\mathrm{ad}(x) \in Der(L)$ durch $\mathrm{ad}(x)(y) = [x, y]$. Wir definieren eine Folge von Idealen von L, die *abgeleitete Reihe* durch $L^{(0)} = L$ und $L^{(i)} = [L^{(i-1)}, L^{(i-1)}]$. Wir nennen die Liealgebra L *auflösbar*, wenn es ein k gibt mit $L^{(k)} = 0$. Für jede Liealgebra L gibt es ein maximales auflösbares Ideal $RadL$. Man nennt $RadL$ das

Radikal von L. Eine Liealgebra L heißt *halbeinfach*, wenn gilt $RadL = 0$. Elemente $x \in L$ heißen halbeinfach, wenn die Wurzeln des Minimalpolynom von $\mathrm{ad}(x)$ in $End(L)$ alle verschieden sind.

Eine Unteralgebra die aus halbeinfachen Elementen besteht heißt *toral*. Eine nilpotente Unteralgebra C von L, die selbstnormalisierend ist heißt *Cartanunteralgebra*, im Fall L ist halbeinfach sind das genau die maximalen toralen Unteralgebren. Sei nun H eine maximale torale Unteralgebra von L. Für L halbeinfach ist jede torale Unteralgebra abelsch, also können wir die Operation $\mathrm{ad}h : L \to L$ simultan für alle $h \in H$ diagonalisieren und erhalten die Eigenraumzerlegung

$$L = L_0 + \bigoplus_{\alpha} L_\alpha \text{ mit } L_\alpha = \{x \in L \mid [h, x] = \alpha(h)x \forall x \in H, \alpha \in H^*\}$$

Insbesondere ist $L_0 = H$. Die Elemente $\alpha \in H^*$ mit $L_\alpha \neq 0$ nennen wir Wurzeln und schreiben für die Menge der Wurzeln Φ, die Mengen L_α nennen wir *Wurzelräume*. Φ ist dann ein Wurzelsystem im Sinne der Definition 1.1.

Satz 1.15 ([Hum70] Theorem 14.2):
Eine Liealgebra L mit Cartanunteralgebra H ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt durch das zugrunde liegende Wurzelsystem Φ. Insbesondere sind mit der Klassifikation der endlichdimensionalen irreduziblen Wurzelsysteme aus Satz 1.6 auch alle endlichdimensionalen halbeinfachen Liealgebren klassifiziert und vom Typ $A_n - G_2$.

Proposition 1.16:
Ist Π eine Basis des Wurzelsystems Φ zu einer halbeinfache Liealgebra L mit $|\Pi| = l$, so wird L von den Elementen $\{x_i, y_i, h_i \mid 1 \leq i \leq l\}$ erzeugt, mit den folgenden Relationen für $1 \leq i, j \leq l$:

1. $[h_i, h_j] = 0$
2. $[x_i, y_i] = h_i, \quad [x_i, y_j] = 0$ *für* $i \neq j$
3. $[h_i, x_j] = \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle x_j, \quad [h_i, y_j] = -\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle y_j$
4. $(ad(x_i))^{-\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle + 1}(x_j) = 0$
5. $(ad(y_i))^{-\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle + 1}(y_j) = 0$

Satz 1.17 (Serre Theorem [Hum70] Theorem 18.3):
Gegeben ein Wurzelsystem Φ mit fixierter Basis Π. Die Liealgebra erzeugt von den $\{x_i, y_i, h_i \mid 1 \leq i \leq |\Pi|\}$ mit obigen Relationen ist eine halbeinfache Liealgebra dessen Cartanunteralgebra von den Elementen h_i aufgespannt wird und das zugehörige Wurzelsystem ist genau Φ.

Sei U eine assoziative k-Algebra, dann ist U zusammen mit der Operation $[x, y] = xy - yx$ eine Liealgebra.

Definition 1.18:
Die *universelle Einhüllende* einer Liealgebra L ist ein Paar (U, ι), wobei U eine assoziative k-Algebra ist und $\iota : L \to U$ eine lineare Abbildung mit:

$$\iota([x, y]) = \iota(x)\iota(y) - \iota(y)\iota(x)$$

für alle $x, y \in L$ zusammen mir der folgenden universellen Eigenschaft: Für alle assoziativen k-Algebren A und jede lineare Abbildung $j : L \to A$ mit obiger Eigenschaft gibt es einen eindeutigen Algebrenhomomorphismus $\phi : U \to A$, sodass $\phi \circ i = j$.

Definition 1.19:
Eine *Borelunteralgebra* B einer Lielagebra L ist eine maximale auflösbare Unteralgebra von L.

Gegeben eine Wahl einer Cartanunteralgebra H definieren wir $B(\Pi) = H + \bigoplus_{\alpha>0} L_\alpha$.

Lemma 1.20:
Sei L eine halbeinfache Liealgebra mit Cartanunteralgebra H und Wurzelsystem Φ. Für jede Basis $\Pi \subset \Phi$ ist $B(\Pi)$ eine Borelunteralgebra von L, genannt die Standardborelalgebra bezüglich H. Jede Borelunteralgebra ist von der Form $B(\Pi)$ für eine Wahl von Π.

Satz 1.21 (PBW-Basis [Hum70] 17.3 Corollar C):
Ist $(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ eine geordnete Basis von L. Dann bilden die Elemente $x_{i(1)} \ldots x_{i(m)}$ mit $m \in \mathbb{Z}^+$, $i(1) \leq i(2) \ldots \leq i(m)$ mit 1 eine Basis von $U(L)$.

1.2. Quantengruppen

Sei Φ ein irreduzibles Wurzelsystem mit Basis Π. Dann ist das Skalarprodukt von E bis auf Vielfachheit durch die Cartanmatrix $a_{\alpha\beta}$ für $\alpha, \beta \in \Pi$ eindeutig definiert. Während für A_n, D_n und E_n alle Wurzeln gleiche Länge haben, gibt es in B_n, C_n und G_2, F_4 kürzere und längere Wurzeln. Wir können die Länge der kurzen Wurzeln $\alpha \in \Pi$ dann auf $(\alpha, \alpha) = 2$ normieren. In A_n, D_n und E_n haben dann alle Wurzeln Länge 2. Ist Φ vom Typ B_n, C_n oder F_4, so gilt $(\alpha, \alpha) = 2$ für die kurzen Wurzeln und $(\alpha, \alpha) = 4$ für die langen. Ist Φ vom Typ G_2 so gilt für die langen Wurzeln $(\alpha, \alpha) = 6$. Für alle $\alpha \in \Pi$ sei

$$d_\alpha = \frac{(\alpha, \alpha)}{2} \in \{1, 2, 3\}$$

Fixieren wir nun ein Element $q \in k$, $q \neq 0$ mit $q^{2d_\alpha} \neq 1$ für alle $\alpha \in \Phi$, also insbesondere $q^2 \neq 1$. Wir definieren:

$$q_\alpha = q^{d_\alpha} = q^{(\alpha,\alpha)/2}$$

und für alle $a \in \mathbb{Z}$:

$$[a]_\alpha = \frac{q_\alpha^a - q_\alpha^{-a}}{q_\alpha - q_\alpha^{-1}} = \frac{q^{a \cdot d_\alpha} - q^{-a \cdot d_\alpha}}{q^{d_\alpha} - q^{-d_\alpha}}$$

ebenso definieren wir $[n]_\alpha! := [n][n-1] \ldots [1]$ und $\begin{bmatrix} n \\ a \end{bmatrix}_\alpha = \frac{[n]}{[a][n-a]}$. Diese Symbole finden sich bereits bei Gauß.

Definition 1.22:
Sei $\mathfrak{g}$ eine endlichdimensionale halbeinfache Liealgebra. Die *universelle quantisierte einhüllende Algebra*, kurz *Quantengruppe* $U_q(\mathfrak{g})$ ist definiert als die k-Algebra mit den Erzeugern $E_\alpha, F_\alpha, K_\alpha$ und K_α^{-1} (für alle $\alpha \in \Pi$) mit den folgenden Relationen für alle $\alpha, \beta \in \Pi$:

$$\begin{aligned} K_\alpha K_\alpha^{-1} &= 1 = K_\alpha^{-1} K_\alpha \quad K_\alpha K_\beta = K_\beta K_\alpha \\ K_\alpha E_\beta K_\alpha^{-1} &= q^{(\alpha,\beta)} E_\beta \\ K_\alpha F_\beta K_\alpha^{-1} &= q^{-(\alpha,\beta)} F_\beta \end{aligned}$$

mit $\delta_{\alpha\beta}$ dem Kronecker delta

$$E_\alpha F_\beta - F_\beta E_\alpha = \delta_{\alpha\beta} \frac{K_\alpha - K_\alpha^{-1}}{q_\alpha - q_\alpha^{-1}}$$

und für $\alpha \neq \beta$:

$$u_{\alpha\beta}^+ := \sum_{s=0}^{1-a_{\alpha\beta}} (-1)^s \begin{bmatrix} 1 - a_{\alpha\beta} \\ s \end{bmatrix}_\alpha E_\alpha^{1-a_{\alpha\beta}-s} E_\beta E_\alpha^s = 0 \tag{1.4}$$

$$u_{\alpha\beta}^- := \sum_{s=0}^{1-a_{\alpha\beta}} (-1)^s \begin{bmatrix} 1 - a_{\alpha\beta} \\ s \end{bmatrix}_\alpha F_\alpha^{1-a_{\alpha\beta}-s} F_\beta F_\alpha^s = 0 \tag{1.5}$$

Wir definieren $U_q^0(\mathfrak{g})$ als die Unteralgebra von U die erzeugt wird von allen K_α und K_α^{-1} für $\alpha \in \Pi$. Außerdem sei $U_q^+(\mathfrak{g})$ (bzw. $U_q^-(\mathfrak{g})$) die Unteralgebra von $U_q(\mathfrak{g})$ die von allen E_α (bzw.F_α) erzeugt wird für $\alpha \in \Pi$. Der positive bzw. negative Borelteil der Quantengruppe $U_q^{\geq 0}(\mathfrak{g})$ bzw. $U_q^{\leq 0}(\mathfrak{g})$ ist definiert als $U_q^+(\mathfrak{g}) U_q(\mathfrak{g})^0$ bzw. $U_q^-(\mathfrak{g}) U_q(\mathfrak{g})^0$.

Im weiteren schreiben wir der Einfachheit halber U für $U_q(\mathfrak{g})$, U^+ für $U_q^+(\mathfrak{g})$ und U^- für $U_q(\mathfrak{g})^-$, U^0 für $U^0(\mathfrak{g})$, sowie $U^{\geq 0}$ für $U^+ U^0$ und $U^{\leq 0}$ für $U^- U^0$. Für eine Wurzel $\mu = \sum_{\beta \in \Pi} m_\beta \beta \in \Phi$ sei K_μ definiert als

$$K_\mu = \prod_{\beta \in \Pi} K_\beta^{m_\beta}$$

Damit gilt allgemein für alle $\mu \in \mathbb{Z}\Phi$ und $\beta \in \Pi$:

$$K_\mu E_\beta K_\mu^{-1} = q^{(\mu,\beta)} E_\beta \text{ und } K_\mu F_\beta K_\mu^{-1} = q^{-(\mu,\beta)} F_\beta$$

Lemma 1.23:
a) Es gibt eindeutige Automorphismen ω auf U mit $\omega(E_\alpha) = F_\alpha, \omega(F_\alpha) = E_\alpha$ und $\omega(K_\alpha) = K_\alpha^{-1}$. Für dieses ω gilt $\omega^2 = 1$.
b) Es gibt eindeutige Automorphismen τ auf U mit $\tau(E_\alpha) = E_\alpha, \tau(F_\alpha) = F_\alpha$ und $\tau(K_\alpha) = K_\alpha^{-1}$. Für dieses τ gilt $\tau^2 = 1$. Dabei handelt es sich um einen $\mathbb{R}$-Algebrenautomorphismus der auf $\mathbb{C}$ komplex konjugiert, d.h. $q \mapsto q^{-1}$.

Auf U gibt es eine $\mathbb{Z}\Pi$-Graduierung die auf den Erzeugern definiert ist durch $deg(E_\alpha) = \alpha, deg(F_\alpha) = -\alpha$ und $deg(K_\alpha) = 0 = deg(K_\alpha^{-1})$. Damit ist insbesondere eine Graduierung durch Q definiert. Wir definieren für alle $\mu \in \Phi$:

$$U_\mu := \{u \in U \mid K_\nu u K_\nu^{-1} = q^{(\nu,\mu)} u \text{ für alle } \nu \in \Pi\} \tag{1.6}$$

Es gilt also $U = \bigoplus_{\mu \in Q} U_\mu$ und die Unteralgebren U^+, U^- und U^0 sind ebenso graduierte Unteralgebren von U, für die gilt $U_\mu^+ = 0$ für $\mu \in Q \backslash Q_+$ und $U_\mu^- = 0$ für $\mu \in Q_+$, sowie $U_\mu^0 = 0$ für $\mu \neq 0$.

Wir definieren allgemeiner den Gewichtsraum M_μ zu einem beliebigen Unterraum $M \subset U$ und integralem Gewicht $\mu \in Q$ als den Eigenraum der Konjugation mit K_α für alle $\alpha \in \Pi$:

$$M_\mu = \{m \in M \mid K_\alpha m K_\alpha^{-1} = q^{(\alpha,\mu)} m \text{ für alle } \alpha \in \Pi\}$$

Lemma 1.24:
Es gibt eine eindeutige Hopfalgebrenstruktur (Δ, ϵ, S) auf U mit $\Delta : U \to U \otimes U$, $\epsilon : U \to k$ und $S : U \to S$ sodass für alle $\alpha \in \Pi$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\Delta(E_\alpha) = E_\alpha \otimes 1 + K_\alpha \otimes E_\alpha && \epsilon(E_\alpha) = 0 \quad S(E_\alpha) = -K_\alpha^{-1} E_\alpha,\\
&\Delta(F_\alpha) = F_\alpha \otimes K_\alpha^{-1} + 1 \otimes F_\alpha && \epsilon(F_\alpha) = 0 \quad S(F_\alpha) = -F_\alpha K_\alpha,\\
&\Delta(K_\alpha) = K_\alpha \otimes K_\alpha && \epsilon(K_\alpha) = 1 \quad S(K_\alpha) = K_\alpha^{-1}
\end{aligned}$$

Es gilt insbesondere für $\mu \in \mathbb{Z}\Phi$: $\Delta(K_\mu) = K_\mu \otimes K_\mu$ und für alle $\alpha \in \Pi$ und $r \geq 0$:

$$\Delta(E_\alpha^r) = \sum_{i=0}^{r} q_\alpha^{i(r-i)} \begin{bmatrix} r \\ i \end{bmatrix}_\alpha E_\alpha^{r-i} K_\alpha^i \otimes E_\alpha^i$$

$$\Delta(F_\alpha^r) = \sum_{i=0}^{r} q_\alpha^{i(r-i)} \begin{bmatrix} r \\ i \end{bmatrix}_\alpha F_\alpha^i \otimes F_\alpha^{r-i} K_\alpha^{-i}$$

wie man leicht durch Induktion sieht.

Definition 1.25:
Für eine Hopfalgebren (A, Δ, ϵ, S) ist die adjungierte Darstellung ad von A auf sich selbst definiert wie folgt. Es gilt für $a, b \in A$:

$$\mathrm{ad}(a)(b) = \sum a_{(1)} b S(a_{(2)}) \text{ für } \Delta(a) = \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}$$

Im Falle von U ist die adjungierte Darstellung für alle $\alpha \in \Pi$ und alle $u \in U$ gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}(E_\alpha)u &= E_\alpha u - K_\alpha u K_\alpha^{-1} E_\alpha\\
\mathrm{ad}(F_\alpha)u &= (F_\alpha u - u F_\alpha) K_\alpha\\
\mathrm{ad}(K_\alpha)u &= K_\alpha u K_\alpha^{-1}
\end{aligned}$$

Damit folgt für alle $\mu \in Q$: $\mathrm{ad}(K_\mu)u = K_\mu u K_\mu^{-1}$

Definition 1.26:
Wir definieren den *q-Kommutator* $[_\,,_]$ auf homogenen Elementen $X_\mu \in U_\mu$, $Y_\nu \in U_\nu$ für $0 \neq \mu, \nu \in Q$ wie folgt:

$$[X_\mu, Y_\nu] = X_\mu Y_\nu - q^{(\mu,\nu)} Y_\nu X_\mu$$

Das entspricht auf den Basiselementen der adjungierten Darstellung. Die Kommutatorklammer $[,]$ steht im Folgenden immer für den q-Kommutator. Wir sagen zwei Elemente *q-kommutieren*, wenn der q-Kommutator 0 ist. Wenn dezidiert ein anderer Kommutator gebraucht wird oder wir den Kommutator von nichthomogenen Elementen betrachten, definieren wir für $c \in k$ den Ausdruck $[,]_c$ als $[X, Y]_c = XY - cYX$ für beliebige $X, Y \in U$, wir sagen dann X und Y c-kommutieren, wenn $[X, Y]_c = 0$, bzw. X und Y kommutieren, wenn sie 1-kommutieren.

Satz 1.27 (Trianguläre Zerlegung):
Die Multiplikation in U induziert einen Isomorphismus von $\mathbb{Z}\Phi$-graduierten Vektorräumen:

$$U^- \otimes U^0 \otimes U^+ \mapsto U, u_1 \otimes u_2 \otimes u_3 \mapsto u_1 u_2 u_3$$

Wir definieren jetzt für eine Folge $I = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ von einfachen Wurzeln:

$$E_I = E_{\alpha_1} E_{\alpha_2} \ldots E_{\alpha_r} \quad \text{und} \quad F_I = F_{\alpha_1} F_{\alpha_2} \ldots F_{\alpha_r}$$

mit $E_\emptyset = F_\emptyset = 1$. Wir definieren das Gewicht solcher Folgen als

$$wt(I) = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r \text{ für } I = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$$

Es gilt dann $E_I \in U^+_{wt(I)}$ und $F_I \in U^-_{wt(I)}$.

Lemma 1.28:
Seien I, A, B Folgen wie oben mit $wt(I) = wt(A) + wt(B)$. Es gibt ein Polynom $c^I_{A,B} \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ sodass in U gilt:

$$\Delta(E_I) = \sum_{A,B} c^I_{A,B}(q) E_A K_{wt(B)} \otimes E_B$$
$$\Delta(F_I) = \sum_{A,B} c^I_{A,B}(q^{-1}) F_A \otimes K^{-1}_{wt(A)} F_B$$

Es gilt $c^I_{A,\emptyset} = \delta_{A,I}$ und $c^I_{\emptyset,B} = \delta_{B,I}$.

Damit folgt insbesondere für alle $\mu \in Q_+$:

$$\Delta(U^+_\mu) \subset \bigoplus_{0 \leq \nu \leq \mu} U^+_{\mu-\nu} K_\nu \otimes U^+_\nu \tag{1.7}$$

$$\Delta(U^-_{-\mu}) \subset \bigoplus_{0 \leq \nu \leq \mu} U^-_{-\nu} \otimes U^-_{\mu-\nu} K^{-1}_\nu \tag{1.8}$$

Das heißt für ein $x \in U^+_\mu K_\nu$ mit $\mu \in Q_+$, $\nu \in Q$ gilt für die Komultiplikation:

$$\Delta(x) - x \otimes K_\nu \in \bigoplus_{\zeta < \mu} U^+_\zeta K_{\mu+\nu-\zeta} \otimes U_{\mu-\zeta} K_\nu$$

Es ist U^+ die direkte Summe der U^+_μ, ebenso für U^-, daher sind die Summen auf den rechten Seiten direkt. Mit dieser Notation der Graduierung können wir ebenfalls die Antipode S für $\mu \in Q_+$ schreiben als:

$$S(U^+_\mu) = U^+_\mu K^{-1}_\mu \text{ und } S(U^-_{-\mu}) = U^-_{-\mu} K_\mu$$

Definition 1.29:
Es gibt zu einem $x \in U^+_\mu$ für alle $\alpha \in \Pi$ Elemente $r_\alpha(x)$ und $r'_\alpha(x)$ in $U^+_{\mu-\alpha}$ sodass:

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + \sum_{\alpha\in\Pi} r_\alpha(x) K_\alpha \otimes E_\alpha + (rest) \tag{1.9}$$

$$\Delta(x) = K_\mu \otimes x + \sum_{\alpha\in\Pi} E_\alpha K_{\mu-\alpha} \otimes r'_\alpha(x) + (rest) \tag{1.10}$$

wobei (rest) Terme in $U_{\mu-\nu}K_\nu \otimes U^+_\nu$ enthält für $\nu \succ 0, \nu \notin \Pi$ in (7.1) bzw. $\mu - \nu \succ 0$, $\mu - \nu \notin \Pi$ in (7.2). Es gilt $r_\alpha(1) = 0 = r'_\alpha(1)$ und $r_\alpha(E_\beta) = r'_\alpha(E_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$ für alle $\beta \in \Pi$.

Lemma 1.30:
Für diese r_α und r'_α gelten folgende Relationen:

a) Für alle $x \in U^+_\mu$ und $x' \in U^+_{\mu'}$ gilt:

$$r_\alpha(xx') = xr_\alpha(x') + q^{(\alpha,\mu')} r_\alpha(x)x' \text{ und } r'_\alpha(xx') = q^{(\alpha,\mu)} xr'_\alpha(x') + r'_\alpha(x)x'$$

b) Für alle $x \in U^+_\mu$ und $y \in U^-$ gilt:

$$(F_\alpha y, x) = (F_\alpha, E_\alpha)(y, r'_\alpha(x)) \text{ und } (yF_\alpha, x) = (F_\alpha, E_\alpha)(y, r_\alpha(x))$$

c) Es gilt $r'_\alpha(x) = \tau r_\alpha \tau(x)$ für alle $x \in U^+_\mu$

Lemma 1.31:
Sei $\alpha \in \Pi$ und $\mu \in Q_+$. Dann gilt für alle $y \in U^-_{-\mu}$ und $x \in U^+_\mu$:

$$E_\alpha y - yE_\alpha = (q_\alpha - q_\alpha^{-1})^{-1}(K_\alpha r_\alpha(y) - r'_\alpha(y)K_\alpha^{-1}),$$
$$xF_\alpha - F_\alpha x = (q_\alpha - q_\alpha^{-1})^{-1}(r_\alpha(x)K_\alpha - K_\alpha^{-1} r'_\alpha(x))$$

Siehe dazu [Jan96] Kapitel 6.

1.2.1. Lusztigautomorphismus und Wurzelvektoren

Sei im Folgenden $q \in k^*$ keine Einheitswurzel. Wir definieren in U für alle einfachen Wurzeln α:

$$E^{(r)}_\alpha = \frac{E^r_\alpha}{[r]!_\alpha} \text{ und } F^{(r)}_\alpha = \frac{F^r_\alpha}{[r]!_\alpha}$$

für alle $r \geq 0$.

Definition 1.32:
Der *Lusztigautomorphismus* ist ein Algebrenautomorphismus T_α für jedes $\alpha \in \Pi$ auf U, definiert auf den Erzeugern wie folgt:

$$T_\alpha(K_\mu) = K_{s_\alpha \mu} = T_\alpha^{-1}(K_\mu) \text{ für alle } \mu \in \mathbb{Z}\Phi$$

$$T_\alpha(E_\alpha) = -F_\alpha K_\alpha T_\alpha^{-1}(E_\alpha) = -K_\alpha^{-1} F_\alpha$$
$$T_\alpha(F_\alpha) = -K_\alpha^{-1} E_\alpha T_\alpha^{-1}(F_\alpha) = -E_\alpha K_\alpha$$

Im allgemeinen Fall für $\beta \in \Pi, \beta \neq \alpha$ mit $r = a_{\alpha\beta}$ gilt:

$$T_\alpha({}^\tau\mathrm{ad}(E_\alpha^{(m)} E_\beta)) = \mathrm{ad}(E_\alpha^{(r-m)}) E_\beta$$

Insbesondere also:

$$T_\alpha(E_\beta) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i q_\alpha^{-i} E_\alpha^{(r-i)} E_\beta E_\alpha^{(i)}$$
$$T_\alpha^{-1}(E_\beta) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i q_\alpha^{-i} E_\alpha^{(i)} E_\beta E_\alpha^{(r-i)}$$
$$T_\alpha(F_\beta) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i q_\alpha^{-i} F_\alpha^{(i)} F_\beta F_\alpha^{(r-i)}$$
$$T_\alpha^{-1}(F_\beta) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i q_\alpha^{-i} F_\alpha^{(r-i)} F_\beta F_\alpha^{(i)}$$

Sei $w \in W$ ein Element der Länge $l(w) = t$ mit reduzierter Darstellung $w = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \dots s_{\alpha_t}$ für $\alpha_i \in \Pi$. Dann definieren wir allgemeiner Automorphismen T_w als Hintereinanderausführung von Lusztigautomorphismen:

$$T_w = T_{\alpha_1} T_{\alpha_2} \dots T_{\alpha_t}$$

Bemerkung 1.33:
Lusztigautomorphismen T_α, T_β zu Wurzeln $\alpha, \beta \in \Pi$ erfüllen folgende Kommutatorrelationen:

- $T_\alpha T_\beta = T_\beta T_\alpha$ wenn $(\alpha, \beta) = 0$
- Die braid relations, d.h. hat $s_\alpha s_\beta \in W$ Ordnung m, so gilt:

  $$T_\alpha T_\beta \dots = T_\beta T_\alpha \dots$$

  mit jeweils m Faktoren auf jeder Seite

Desweiteren gelten für den Lusztigautomorphismus T_w zu einem $w \in W$ folgende Relationen:

1. $T_{ww'} = T_w T_{w'}$ für alle $w, w' \in W$ mit $\ell(ww') = \ell(w) + \ell(w')$
2. $T_w(K_\mu) = K_{w\mu}$ für alle $w \in W$ und $\mu \in \mathbb{Z}\Phi$

3. $T_w(U_\mu) = U_{w\mu}$ für alle $w \in W$ und $\mu \in \mathbb{Z}\Phi$

4. $T_w^{-1} = \tau \cdot T_{w^{-1}} \cdot \tau$

Satz 1.34 ([Jan96] Theorem 8.20):
Sei $w \in W$ und $\alpha \in \Pi$. Ist $w\alpha \succ 0$, dann gilt $T_w(E_\alpha) \in U^+$; ist $w\alpha \in \Pi$, dann gilt $T_w(E_\alpha) = E_{w\alpha}$.

Satz 1.35 (PBW-Basis nach [Jan96] Theorem 8.24):
Für ein längstes Element $w_0 \in W$ mit reduzierter Darstellung $w_0 = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \dots s_{\alpha_t}$ sind die Produkte:

$$T_{\alpha_1} T_{\alpha_2} \dots T_{\alpha_{t-1}}(E_{\alpha_t}^{a_t}) \cdots T_{\alpha_1} T_{\alpha_2}(E_{\alpha_3}^{a_3}) T_{\alpha_1}(E_{\alpha_2}^{a_2}) E_{\alpha_1}^{a_1}$$

mit $a_i \in \mathbb{N}$ eine Basis von U^+.

Definition 1.36:
Sei $w_0 \in W$ das längste Element mit reduzierter Darstellung $w_0 = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \dots s_{\alpha_{\ell(w_0)}}$. Für jede Wurzel $\beta_i = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_{i-1}}(\alpha_i) \in \Phi^+$ definieren wir *Wurzelvektoren* E_{β_i} folgendermaßen:

$$E_{\beta_i} = T_{\alpha_1} T_{\alpha_2} \dots T_{\alpha_{i-1}}(E_{\alpha_i})$$

Lemma 1.37 ([Jan96] s.166):
Für $\alpha \in \Pi$ und w_0 ein maximales Element gilt:

$$\begin{aligned} T_\alpha(U^+[s_\alpha w_0]) &= \{x \in U^+ \mid r_\alpha(x) = 0\} \\ U^+[s_\alpha w_0] &= \{x \in U^+ \mid r'_\alpha(x) = 0\} \end{aligned}$$

Lemma 1.38 ([HK11a] Corollar 2.4):
Zu Weylgruppenelementen $x, y \in W$ mit $\ell(xy) = \ell(x) + \ell(y)$ gilt:

$$U^+[xy] = U^+[x] T_x(U^+[y]) = T_x(U^+[y]) U^+[x]$$

Lemma 1.39:
Für beliebige $w \in W$ gilt:

$$T_w^{-1}(U^+[w]U^0) = S(U^-[w^{-1}]U^0)$$

Lemma 1.40 ([LS91] Prop. 5.5.2):
Sei $w \in W$ ein Weylgruppenelement mit reduzierter Darstellung $w = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_{\ell(w)}}$ und $\Phi^+(w) = \{\beta_1, \dots \beta_{\ell(w)}\}$. Für die zugehörigen Wurzelvektoren gibt es die folgende Kommutatorregel. Seien $\beta_i, \beta_j \in \Phi^+(w)$ mit $i < j$, dann gilt:

$$[E_{\beta_i}, E_{\beta_j}] = \sum_{(a_{i+1}, \dots a_{j-1}) \in \mathbb{N}_0^{j-i-1}} m_{(a_{i+1}, \dots a_{j-1})} E_{\beta_{i+1}}^{a_{i+1}} \dots E_{\beta_{j-1}}^{a_{j-1}}$$

Für Koeffizienten $m_{(a_{i+1}, \dots a_{j-1})} \in k$.

1.2.2. Darstellungstheorie

Lemma 1.41:
Weil wir k immer als algebraisch abgeschlossen und mit Charaktersitik 0 *voraussetzen, wissen wir aus der linearen Algebra: Sei A eine Algebra und V eine endlichdimensionale Darstellung, dann hat jedes Element $X \in A$ einen Eigenvektor in V.*

Definition 1.42:
Der *Höchstgewichtsmodul*, oder *Vermamodul* von Typ 1 $M(\lambda)$ zum integralen Gewicht λ von U ist:

$$M(\lambda) = U/(\sum_{\alpha\in\Pi} UE_\alpha + \sum_{\alpha\in\Pi} U(K_\alpha - q^{(\lambda,\alpha)}))$$

Das ist ein U-Modul erzeugt von der Nebenklasse von 1, die wir v_λ nennen, es gilt:

$$E_\alpha v_\lambda = 0 \text{ und } K_\alpha v_\lambda = q^{(\lambda,\alpha)} v_\lambda \text{ für alle } \alpha \in \Pi$$

$M(\lambda)$ hat einen eindeutigen irreduziblen Faktormodul, den wir $L(\lambda)$ nennen, natürlich gilt $v_\lambda \neq 0$ in $L(\lambda)$.

Außerdem gibt es für alle Gruppenhomomorphismen $\sigma : \mathbb{Z}\Phi \to \{\pm 1\}$ die eindimensionalen Moduln $\mathbb{C}_\sigma$ auf denen U^+ und U^- trivial wirken und U^0 vermöge σ. Wir definieren

$$L(\lambda, \sigma) := L(\lambda) \otimes \mathbb{C}_\sigma$$

Dabei ist $L(\lambda) = L(\lambda, \sigma)$ für $\sigma(\beta) = 1 \forall \beta \in \Phi$.

Satz 1.43 ([Jan96] Theorem 5.10):
Für jedes dominante integrale Gewicht $\lambda \in \Lambda$ hat der irreduzible U-Modul $L(\lambda)$ endliche Dimension. Jeder endlich dimensionale einfache U-Modul ist isomorph zu genau einem $L(\lambda, \sigma)$ mit $\lambda \in \Lambda$ dominant.

Beispiel 1.44:
Weiterhin sei q keine Einheitswurzel. Es gibt für alle $n \geq 0$ einen irreduziblen $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-Modul $L(n, +)$ mit Basis $m_0, m_1, \ldots, m_n$ und $L(n, -)$ mit Basis $m'_0, m'_1, \ldots, m'_n$, sodass für alle $i (0 \leq i \leq n)$:

$$Km_i = q^{n-2i} m_i \qquad Km'_i = -q^{n-2i} m'_i$$

$$Fm_i = \begin{cases} m_{i+1}, & \text{wenn } i < n, \\ 0, & \text{wenn } i = n \end{cases} \qquad Fm'_i = \begin{cases} m'_{i+1}, & \text{wenn } i < n, \\ 0, & \text{wenn } i = n \end{cases}$$

$$Em_i = \begin{cases} [i][n+1-i] m_{i-1}, & \text{wenn } i > 0, \\ 0, & \text{wenn } i = 0 \end{cases} \qquad Em'_i = \begin{cases} -[i][n+1-i] m'_{i-1}, & \text{wenn } i > 0, \\ 0, & \text{wenn } i = 0 \end{cases}$$

Jeder irreduzible $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-Modul hat Dimension $n + 1$ und ist isomorph zu $L(n, +)$ oder $L(n, -)$.

Folgerung 1.45:
Insbesondere gilt für alle eindimensionalen Darstellungen V von $U_q(\mathfrak{sl}_2)$, dass $E(V) = F(V) = 0$ und $K(V) = \pm 1$. Dies sieht man auch direkt aus den Relationen: Wegen $EF - FE = \frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}}$ muss in jeder eindimensionalen Darstellung K als ± 1 wirken. Wegen $EK = q^2KE$ und $FK = q^{-2}KF$ folgt dann sofort, dass E und F trivial wirken müssen.

Satz 1.46 ([Jan96] Theorem 2.9):
Sei M ein endlichdimensionaler Modul von $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ der die direkte Summe seiner K-Eigenräume ist. Dann ist M ein halbeinfacher U-Modul, also direkte Summe der $L(\lambda, \sigma)$.

Der Beweis dieses Satzes erfolgt ähnlich wie in dem Satz von Weyl für Liealgebren.

Eines der kleinsten und einfachsten Beispiele für Vermamoduln ist der Vermamodul zum winzigen Gewicht (Minuscule Fall), den wir in der Arbeit oft brauchen können, da er sich wegen seiner Eigenschaften gut zum konstruieren von konkreten Darstellungen eignet.

Beispiel 1.47:
Der *winzige Vermamodul* $L(\lambda)$ ist der eindeutige irreduzible Faktormodul des Vermamoduls $M(\lambda)$ zum *winzigen dominanten Gewicht*, das ist das dominante Gewicht $\lambda \neq 0$ für das für alle $\alpha \in \Phi$ gilt $\langle \lambda, \alpha \rangle \in \{0, 1, -1\}$. Dann gilt insbesondere auch $\langle \mu, \alpha \rangle \in \{0, 1, -1\}$ für alle $\mu \in W\lambda$ und $\alpha \in \Phi$. Die integralen Gewichte des Höchstgewichtsmoduls zum Höchstgewicht λ sind genau die Konjugierten von λ unter der Weylgruppe, jeweils mit Vielfachheit 1. Konkret sieht dieser Modul aus wie folgt:

Sei $(x_\mu)_{\mu \in W\lambda}$ eine Basis des Vektorraums mit den Weylkonjugierten des winzigen dominanten Gewichts als Indizes, dann ist die Wirkung von U auf den Basisvektoren wie folgt gegeben: Für alle $\alpha \in \Pi$ und $\mu \in W\lambda$:

$$K_\alpha x_\mu = q^{(\mu,\alpha)} x_\mu \quad \text{und} \quad K_\alpha^{-1} x_\mu = q^{-(\mu,\alpha)} x_\mu$$

und

$$\begin{aligned}
E_\alpha x_\mu &= 0, & F_\alpha x_\mu &= 0, \quad \text{wenn} \quad \langle \mu, \alpha \rangle = 0;\\
E_\alpha x_\mu &= 0, & F_\alpha x_\mu &= x_{\mu-\alpha}, \quad \text{wenn} \quad \langle \mu, \alpha \rangle = 1;\\
E_\alpha x_\mu &= x_{\mu+\alpha}, & F_\alpha x_\mu &= 0, \quad \text{wenn} \quad \langle \mu, \alpha \rangle = -1.
\end{aligned}$$

In dieser Definition gilt dann $\mu - \alpha = s_\alpha \mu \in W\lambda$ wenn $\langle \mu, \alpha \rangle = 1$ und $\mu + \alpha = s_\alpha \mu \in W\lambda$ wenn $\langle \mu, \alpha \rangle = -1$, also sind die Elemente $x_{\mu-\alpha}$ wohldefiniert.

Der Minuscule Fall ist als Vermamodul zu dem integralen Gewicht λ ein einfacher U-Modul mit endlicher Dimension. Er hat die Eigenschaft, dass für alle μ die Gewichtsräume $L(\lambda)_{\lambda-\mu}$ maximal Dimension 1 haben. Insbesondere ist für alle μ mit $F_\mu v_\lambda \neq 0$ schon $F_\mu v_\lambda = v_{\lambda-\mu}$.

Bemerkung 1.48:
Das winzige dominante Gewicht ist für die Wurzelsysteme $A_l - D_l$ und E_6, E_7 gegeben wie folgt: Seien λ_i die fundamentalen Gewichte der jeweiligen Darstellung, dann ist das winzige dominante Gewicht:

$$\begin{aligned} A_l: &\quad \lambda_1, \dots \lambda_l \\ B_l: &\quad \lambda_l \\ C_l: &\quad \lambda_1 \\ D_l: &\quad \lambda_1, \lambda_{l-1}, \lambda_l \\ E_6: &\quad \lambda_1, \lambda_6 \\ E_7: &\quad \lambda_7 \end{aligned}$$

1.2.3. Rechtscoidealunteralgebren und Borelunteralgebren

Definition 1.49:
Eine *Rechtscoidealunteralgebra* (RCS) von U ist eine Unteralgebra $C \subset U$ mit der Eigenschaft $\Delta(C) \subset C \otimes U$.

Eine endlichdimensionale k-Algebra heißt *basic*, wenn $A/RadA$ als k-Algebra isomorph zu k^n ist. Wir sagen für eine beliebige Rechtscoidealunteralgebra sie ist *ede*, wenn sie die Eigenschaft hat, dass jede endlichdimensionale irreduzible Darstellung eindimensional ist. Ist C eine Rechtscoidealunteralgebra der Quantengruppe U so sagen wir C ist *schwach ede*, wenn jede endlichdimensionale Darstellung von U eingeschränkt auf C nur eindimensionale Kompositionsfaktoren besitzt.

Definition 1.50:
Eine Borelunteralgebra B von U ist ein maximales Objekt unter den Rechtscoidealunteralgebren von U, die die Eigenschaft ede haben.

Lemma (6.3):
Die Unteralgebren U^+U^0 und U^-U^0 sind Borelunteralgebren, die wir Standardborelalgebren nennen.

Beispiel 1.51:
Jede kommutative Algebra ist ede.

Beispiel 1.52:
Der Quantenpolynomring in endlich vielen Erzeugern für q keine Einheitswurzel ist ede. (aus Satz 3.3 folgt sogar: Alle Erzeuger müssen auf jeder endlichdimensionalen irreduziblen Darstellung trivial wirken.)

Definition 1.53:
Die *Weylalgebra* ist die freie Algebra erzeugt von X und Y modulo dem Ideal erzeugt von

$$XY - YX = 1$$

Für ein fixiertes $q, c \in k^*$ ist die quantisierte Weylalgebra definiert als

$$k\langle X, Y\rangle/(XY - qYX - c)$$

Beispiel 1.54:
Für die *quantisierte Weylalgebra* gilt, dass jede endlichdimensionale irreduzible Darstellung eindimensional ist.

Beweis: Sei W die Algebra mit den Erzeugern X und Y mit der Eigenschaft $XY - qYX = 1c$ für ein $c \in k^*$ und sei V eine endlichdimensionale irreduzible Darstellung von W. Betrachten wir jetzt einen Eigenvektor v zu dem Element $T := YX$ mit Eigenwert t. Man sieht einfach, dass Yv dann auch ein Eigenvektor ist zu dem Eigenwert $qt + c$, wegen:

$$YX(Yv) = Y(qYX + c1)v = (qt + c)Yv$$

Ebenso kann man zeigen, dass auch Xv Eigenvektor von T ist zu dem Eigenwert $\frac{1}{q}(t - c)$:

$$YX(Xv) = \frac{1}{q}(XYX - cX)v = \frac{1}{q}(t - c)Xv$$

Daher bilden die Eigenvektoren von T eine Basis von V, weil V irreduzibel ist. Andererseits ergeben sich aber für jedes i Eigenvektoren $Y^i v$ von T. Weil V endlichdimensional ist, können sie nicht jeweils unterschiedliche Eigenwerte haben. Hätte T den Eigenwert 0, so wäre auch c ein Eigenwert und es gäbe unendlich viele verschiedene Eigenwerte, weil q keine Einheitswurzel ist. Weil es den Eigenwert 0 also nicht geben kann, müssen je zwei Eigenvektoren also auch je zwei Eigenwerte gleich sein. Daraus folgt schnell $t = \frac{c}{1-q}$. Mit diesem t gilt aber:

$$XYv = (qYX + 1c)v = (\frac{c}{1-q}q + c)v = \frac{c(q + 1 - q)}{1 - q}v = tv$$

Weil T nur den Eigenwert t hat, wirkt T auf V als $t \cdot 1$, ebenso XY. Also kommutieren X und Y auf ganz V und damit ist jede irreduzible endlichdimensionale Darstellung eindimensional.

Definition 1.55:
Eine Rechtscoidealunteralgebra C heißt *triangulär erzeugt*, wenn C von Elementen aus $C^{\geq 0}$ und $C^{\leq 0}$ als Algebra erzeugt wird:

$$C = \langle C \cap U^{\geq 0}, C \cap U^{\leq 0} \rangle$$

Wir nennen eine Rechtscoidealunteralgebra *triangulär*, wenn jedes Element in Elemente aus $C^{\geq 0}$ und $C^{\leq 0}$ zerfällt:

$$C = (C \cap U^{\geq 0})(C \cap U^{\leq 0})$$

Wir schreiben $C^{\geq 0} := C \cap U^{\geq 0}$, $C^{\geq 0} := C \cap U^{\leq 0}$ sowie $C^+ := C \cap U^+$ und $C^- := C \cap U^-$.

2. Bisherige Klassifikation

2.1. Homogene Rechtscoidealunteralgebren von $U^{\geq 0}$ bzw. $U^{\leq 0}$

Die homogenen Rechtscoidealunteralgebren von U wurden vollständig klassifiziert in [HS09] von I. Heckenberger und H. Schneider. Sei dazu im Folgenden $U = U_q(\mathfrak{g})$ die Quantengruppe zur Liealgebra $\mathfrak{g}$ aus Definition 1.22 zu einem gegebenen q, keine Einheitswurzel.

Definition 2.1:
Eine Rechtscoidealunteralgebra C von U heißt *homogen* wenn sie U^0 enthält.

Proposition 2.2 ([HK11a] Prop. 2.1):
Ist C eine homogene Rechtscoidealunteralgebra von U. Dann ist die Multiplikation

$$(U^- \cap C) \otimes U^0 \otimes (U^+ \cap C) \mapsto C$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen. Das heißt, wir können C schreiben als $C = C^- C^+$ mit $C^+ = (U^+ \cap C)U^0$ und $C^- = (U^- \cap C)U^0$. Wobei C^+ bzw. C^- eine homogene Rechtscoidelaunteralgebra in U^+ bzw. U^- ist.

Definition 2.3:
Zu einem $w \in W$ mit einer reduzierten Darstellung definieren wir:

$$U^+[w] = \operatorname{span}_k\{E_{\beta_t}^{n_t} \dots E_{\beta_2}^{n_2} E_{\beta_1}^{n_1} \mid n_1, \dots, n_t \in \mathbb{N}_0\}$$

Nach [CKP93] ist dieser Raum von der Wahl der reduzierten Darstellung von w unabhängig; im Gegensatz zu den Wurzelvektoren E_{β_i} aus Definition 1.36, die sehr wohl von der reduzierten Darstellung von w abhängen.

Proposition 2.4:
Die beiden Mengen

$$\{E_{\beta_t}^{n_t} \dots E_{\beta_2}^{n_2} E_{\beta_1}^{n_1} \mid n_1, \dots, n_t \in \mathbb{N}_0\}$$
$$\{E_{\beta_1}^{n_1} E_{\beta_2}^{n_2} \dots E_{\beta_t}^{n_t} \mid n_1, \dots, n_t \in \mathbb{N}_0\}$$

sind jeweils eine Vektorraumbasis von $U^+[w]$ (bestehend aus den Wurzelvektoren). Sie wird in Analogie zum Liealgebrenfall $U(\mathfrak{g})$ als Poincaré-Birkhoff-Witt-Basis *bezeichnet.*

Die Existenz so einer Basis wurde in [AHS10] weitaus allgemeiner für sogenannte Nicholsalgebren gezeigt.

Satz 2.5 ([HS09] Theorem 7.3):
Die Abbildung von W in die Menge aller homogenen Rechtscoidealunteralgebren von $U^{\geq 0}$, gegeben durch $w \mapsto U^+[w]U^0$ ist eine ordnungerhaltende Bijektion.

Korollar 2.6:
Jede homogene Rechtscoidealunteralgebra von $U^{\leq 0}$ ist von der Form $S(U^-[w])U^0$. Die Menge

$$\{T_{\alpha_1}^{-1}T_{\alpha_2}^{-1}\dots T_{\alpha_{t-1}}^{-1}(F_{\alpha_t})^{a_t}\cdots T_{\alpha_1}^{-1}T_{\alpha_2}^{-1}(F_{\alpha_3}^{a_3})T_{\alpha_1}^{-1}(F_{\alpha_2}^{a_2})F_{\alpha_1}^{a_1}K_\mu \mid a_t \in \mathbb{N}_0, \mu \in Q\}$$

ist eine Basis von $S(U^-[w])U^0$.

2.2. Homogene Rechtscoidealunteralgebren von U

Die Klassifikation allgemeiner homogener Rechtscoidealunteralgebren ist von I.Heckenberegr und S.Kolb gegeben worden in [HK11a].

Dort werden die folgenden Mengen definiert:

$$A(W) := \{(v,w) \in W^2 \mid S(U^-[v])U^+[w]U^0 \text{ ist eine Unteralgebra von } U\}$$
$$B(W) := \{(x,u,J) \in W^2 \times \mathfrak{P}(\Pi) \mid J \subseteq \Pi \cap x\Pi \text{ und } u^{-1} \leq_R x\}$$

Weil $S(U^-[v])$, $U^+[w]$ und U^0 Rechtscoidealunteralgebren sind, sind auch alle $S(U^-[v])U^+[w]U^0$ Rechtscoideale.

Satz 2.7 ([HK11a] Theorem 3.8):
Die Abbildung $B(W) \to A(W)$ gegeben durch $(x,u,J) \mapsto (uw_J, uw_Jx)$ ist eine Bijektion.

Für eine Teilmenge $J \subseteq \Pi$ sei $U_q(\mathfrak{g}_J)$ die Unterhopfalgebra von U die erzeugt wird von U^0 und den E_α, F_α mit $\alpha \in J$.

Korollar 2.8 ([HK11a] Cor. 3.9):
Für alle homogenen Rechtscoidealunteralgebren C von U gibt es ein $x \in W$ und $J \subseteq \Pi \cap x\Pi$ sodass C als Algebra isomorph ist zu $U_q(\mathfrak{g}_J)U^+[x]$.

2.3. Rechtscoidealunteralgebren von $U^{\geq 0}$

Die Rechtscoidealunteralgebren von $U^{\geq 0}$ bzw. $U^{\leq 0}$ sind vollständig klassifiziert worden in Paper [HK11b]. Hier soll die Klassifikation der Rechtscoidealunteralgebren von $U^{\geq 0}$ genau vorgestellt werden. Die Klassifikation der Rechtscoidealunteralgebren von $U^{\leq 0}$ geht dann analog. Wir definieren in $U^{\geq 0}$: $pr_{(\alpha,\beta)}$ als die eindeutige Q^2-graduierte Projektion $pr_{(\alpha,\beta)} : U^{\geq 0} \to U_\alpha^+ K_\beta$. Für ein $C \subset U^{\geq 0}$ definieren wir:

$$C_{(\beta)} = U^+K_\beta \cap C$$

Definition 2.9:
Sei C eine Rechtscoidealunteralgebra von $U^{\geq 0}$. C heißt *zusammenhängend*, wenn gilt:

$$C \cap U^0 = k1$$

Eine Teilmenge T von U^0 ist genau dann eine Hopfalgebra, wenn es eine Untergruppe L von Q gibt sodass $T = span_k\{K_\alpha \mid \alpha \in L\}$. Wir schreiben dann T_L für diese Hopfalgebra. $\mathcal{K}$ ist die Menge aller Rechtscoidealunteralgebren $C \subseteq U^{\geq 0}$ sodass $C \cap U^0$ eine Hopfalgebra ist. Für alle $C \in \mathcal{K}$ schreiben wir $L(C)$ für die Untergruppe von Q die zu der Hopfunteralgebra $C \cap U^0$ in U^0 gehört. C ist genau dann zusammenhängend, wenn $L(C) = 0$.
Wir definieren für $C \in \mathcal{K}$:

$$I(C) = \bigoplus_{\beta \in Q_+} \{x \in C_{(-\beta)} \mid (\mathrm{ad}K_\alpha)(x) = q^{(\alpha,\beta)}x \text{ für alle } \alpha \in L(C)\}$$

Definition 2.10:
Wir definieren eine lineare Abbildung $\varphi : U^{\geq 0} \to U^{\geq 0}$, $\varphi(x) = \sum_{\beta \in Q} pr_{(\beta,-\beta)}(x)$ und die Restriktion $\varphi_C : I(C) \mapsto U^{\geq 0}$ von φ auf $I(C)$.

Ein *Charakter* einer assoziativen k-Algebra A ist ein Algebrenhomomorphismus $\phi : A \mapsto k$ mit $\phi(1) = 1$, also eine eindimensionale Darstellung von A. Wir definieren $Char(A)$ als die Menge aller Charaktere auf A.

Definition 2.11 (Charakterverschiebung):
Sei C eine Rechtscoidealunteralgebra in $U^{\geq 0}$ und $\phi \in Char(C)$. Die Menge

$$C_\phi := \{(\phi \otimes id)\Delta(x) \mid x \in C\} = \{\phi(x_{(1)})x_{(2)} \mid x \in C\}$$

ist eine Rechtscoidealunteralgebra von $U^{\geq 0}$, genannt *Charakterverschiebung* von C.

Lemma 2.12:
Die Abbildung

$$C \to C_\phi, \quad x \mapsto \phi(x_{(1)})x_{(2)} \textit{ für alle } x \in U^{\geq 0} \textit{ mit } \Delta(x) = \sum x_{(1)} \otimes x_{(2)}$$

ist ein surjektiver Homomorphismus von Rechtscoidealunteralgebren in $U^{\geq 0}$. Insbesondere ist er, für C zusammenhängend, ein Isomorphismus.

Der *Träger* eines Charakters ϕ sei definiert als $\mathrm{supp}(\phi) = \{\beta \in Q_+ \mid \exists x \in U^+_\beta \cap V \text{ mit } \phi(x) \neq 0\}$.
Wir definieren eine lineare Abbildung $\psi : U^+ \to S(U^+)$ durch:

$$\psi(x_\beta) = q^{-(\beta,\beta)/2} x_\beta K_\beta^{-1} \text{ für alle } x_\beta \in U^+_\beta, \beta \in Q_+$$

Satz 2.13 ([HK11b] Theorem 2.15):
Wir kennen alle Rechtscoidealunteralgebren $C \in \mathcal{K}$, das heißt alle Rechtscoidealunteralgebren C für die T_L eine Hopfalgebra ist, bis auf Isomorphie. Die Klassifikation ist wie folgt gegeben:

1) Sei $C \in \mathcal{K}$. Dann ist $\varphi_C(I(C)) = \psi(U^+[w_C])$ für ein eindeutiges $w_C \in W$, und $\varphi_C^{-1} : U^+[w] \to I(C)$ ist ein Algebrenisomorphismus mit $\varphi_C^{-1}\psi(U^+[w] \cap U^+_\beta) = I(C)_{-\beta}$ für alle $\beta \in Q_+$.

$$\phi_C : U^+[w_C] \to k, \quad \phi_C(x) = \epsilon(\varphi_C^{-1}\psi(x)) \textit{ für alle } x \in U^+[w_C]$$

ist ein Charakter, und $L(C) \subseteq (\mathrm{supp}\phi_C)^\perp$
2) Sei $w \in W$, $\phi \in Char(U^+[w])$, *und sei* $L \subseteq (\mathrm{supp}(\phi))^\perp$ *eine Teilmenge. Definiere:*

$$D(w,\phi) := \psi(U^+[w])_{\phi\psi^{-1}} = \{\phi\psi^{-1}(x_{(1)})x_{(2)} \mid x \in \psi(U^+[w])\}$$

und $C(w,\phi,L) := D(w,\phi)T_L$. *Dann ist* $D(w,\phi)$ *eine zusammenhängende,* $\mathrm{ad}T_L$*- stabile Rechtscoidealunteralgebra von* $U^{\geq 0}$ *und* $C(w,\phi,L) \in \mathcal{K}$.
3) Die Abbildung:

$$\mathcal{K} \longrightarrow \{(w,\phi,L) \mid w \in W, \Phi \in Char(U^+[w]), L \subset (\mathrm{supp}(\Phi))^\perp\}$$
$$C \mapsto (w_C, \phi_C, L(C))$$

die in 1) gegeben ist, ist eine Bijektion mit inverser Abbildung $(w,\phi,L) \mapsto C(w,\phi,L)$ *wie in 2).*

Für ein $w \in W$ und eine Menge $\Theta \subseteq \Phi^+$ paarweise orthogonaler Wurzeln definieren wir: $w_\Theta = (\prod_{\beta\in\Theta} s_\beta)w$. Es sei weiter T^w wie folgt definiert:

$$T^w = \{\Theta \subseteq \Phi^+(w) \mid \Theta \text{ besteht aus paarweise orthogonalen Wurzeln und } l(w_\Theta) = l(w) - \mid \Theta \mid\}$$

Bemerkung 2.14 ([HK11b] s.12):
In expliziten Beispielen kleinen Rangs ist die Menge T^w leicht zu berechnen: Ist $J \subseteq \{1,\dots,\ell(w)\}$ eine Teilmenge, sodass die Elemente in $\Theta := \{\beta_i \mid i \in J\}$ paarweise orthogonal sind. Dann gehört Θ zu T^w genau dann wenn man durch Streichen aller einfachen Spiegelungen s_{α_i} für $i \in J$ im Ausdruck $w = s_{\alpha_1}\dots s_{\alpha_{\ell(w)}}$ wieder eine reduzierte Darstellung eines Elements in W erhält.

Dann definieren wir weiter:

$$W^w = \{w_\Theta \mid \Theta \in T^w\}$$

und eine Abbildung:

$$\chi^w : T^w \mapsto W^w, \chi^w(\Theta) = w_\Theta$$

So können wir die Charaktere wie folgt klassifizieren:

Satz 2.15 ([HK11b] Theorem 3.17):
Es gibt eine Bijektion

$$\Psi : \{(y,f) \mid y \in W^w, f \in Map((\chi^w)^{-1}(y), k^\times)\} \mapsto Char(U^+[w])$$

eindeutig bestimmt durch:

$$\Psi(y,f)(E_\beta) = \begin{cases} f(\beta) & \text{wenn } \beta \in (\chi^w)^{-1}(y) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die inverse Abbildung ist gegeben durch $\Psi^{-1}(\phi) = (w_{\Phi^+_w(\phi)}, f_\phi)$ *für alle* $\phi \in Char(U^+[w])$, *mit* $f_\beta = \phi(E_\beta)$ *für alle* $\beta \in \Phi^+_w(\phi)$.

3. Technische Aussagen

3.1. Allgemeine Aussagen

3.1.1. Allgemeine Aussagen zur Darstellungstheorie

Sei im Folgenden $U = U_q(\mathfrak{g})$ die Quantengruppe zur Liealgebra $\mathfrak{g}$ aus Definition 1.22 zu einem gegebenen q, keine Einheitswurzel. Nach Definition 1.49 heißt eine Unteralgebra $A \subset U$ ede, wenn jede endlichdimensionale irreduzible Darstellung von A eindimensional ist. U^0 sei, wie in Definition 1.22 die Unteralgebra von U erzeugt von den Elementen K_α, K_α^{-1} für alle $\alpha \in \Pi$. Wir treffen in diesem Abschnitt verschiedene allgemeine Aussagen zu Unteralgebren A von U und ihren Darstellungen. Wie in Definition 1.26 sei der c-Kommutator definiert als

$$[X, Y]_c = XY - cYX$$

für beliebige Elemente $X, Y \in U$, $c \in k^*$ und der q-Kommutator ist auf homogenen Elementen X_μ, Y_ν für $0 \neq \mu, \nu \in \Phi$ definiert als:

$$[X_\mu, Y_\nu] = X_\mu Y_\nu - q^{(\mu,\nu)} Y_\nu X_\mu$$

Bemerkung 3.1:
Wenn für eine Algebra A und jede endlichdimensionale Darstellung V von A gilt: $[a, b]_1.V = 0$ für alle $a, b \in A$ dann ist A schon ede.

Beweis: Sei V eine beliebige irreduzible endlichdimensionale Darstellung. Da die Elemente alle in ihrer Wirkung auf V kommutieren und die Darstellung V endlichdimensional ist, haben sie einen gemeinsamen Eigenvektor $v \in V$ und A ist ede.

Lemma 3.2:
Seien A, B Unteralgebren von U. $\langle A, B\rangle$ sei die Algebra erzeugt von A und B. Wenn A und B ede sind und $[A, B]_1 = 0$, so ist $\langle A, B\rangle$ schon ede.

Beweis: Sei V eine irreduzible mehrdimensionale Darstellung von $\langle A, B\rangle$ dann gibt es eine eindimensionale Unterdarstellung $W|_A \subset V|_A$ erzeugt von $w \in W$ mit $A.w \subset w$. Es ist $B.W$ eine B-Unterdarstellung von V und auch eine $\langle A, B\rangle$-Unterdarstellung denn $a.b.w = b.a.w \subset B.W$. Daraus folgt aber wegen V irreduzibel entweder $B.W = 0$ und die Behauptung ist bewiesen oder $B.W = V$. Ebenso gibt es, weil B ede ist eine eindimensionale Unterdarstellung $W' \subset V$ erzeugt von w' mit $A.W' = V$. Dann gibt es ein $b \in B$ mit $b.w = w'$ und ein $a \in A$ sodass $a.b.w = a.w' = b.a.w = b.w = w'$. Also ist W eine eindimensionale $\langle A, B\rangle$-Unterdarstellung von V. Weil V irreduzibel war, ist jetzt V eindimensional, das heißt $\langle A, B\rangle$ ist ede. □

Satz 3.3:
Sei A eine Algebra mit einem Erzeugendensystem Z für welches gilt: Es gibt ein Element $X \in A$ sodass für alle Elemente $Y \in Z$ der Kommutator $[X, Y]_c = 0$ ist für ein $c \in k^*$ und es gibt ein $K \in A$ mit $[K, X]_{c'} = 0$ für ein $c' \in k^*$, das keine Einheitswurzel ist und K hat einen nichttrivialen Eigenvektor. Dann gilt für jede endlichdimensionale irreduzible Darstellung V von A, dass $X.V = 0$ ist.

Beweis: Angenommen es gibt einen Eigenvektor von X zum Eigenwert 0, dann spannen alle Elemente $w \in V$ mit $X(w) = 0$ eine Unterdarstellung von V auf, weil für alle $Y \in C$ gilt:

$$X(Y(w)) = cY(X(w)) = 0$$

Weil V irreduzibel war, folgt, dass $X(v) = 0$ für alle $v \in V$ und die Behauptung ist bewiesen.

Angenommen es gibt keinen Eigenvektor von X zum Eigenwert 0, so betrachten wir für eine irreduzible Darstellung V den Eigenvektor $w \neq 0$ von K, mit zugehörigem Eigenwert λ. Wegen $X(w) \neq 0$ ist auch $X(w)$ ein Eigenvektor von K:

$$K(X(w)) = c'X(K(w)) = c'X(\lambda w) = c'\lambda X(w)$$

Weil c' keine Einheitswurzel ist und weil $X^j(w) \neq 0$ für alle $j > 0$, sind die Elemente $X^j(w)$ Eigenvektoren von K zu unterschiedlichen Eigenwerten. Weil V endlichdimensional ist, kann es nur endlich viele solcher Werte geben, das ist ein Widerspruch.

Folgerung 3.4:
Sei $C \subset U$ eine Rechtscoidealunteralgebra mit einem homogenen Element $X_\nu \in C_\nu$ bzgl. der Graduierung aus Definition (1.6) für welches gilt: Es gibt ein $K_\mu \in U^0 \cap C$ mit $(\mu, \nu) \neq 0$ und für alle Elemente $Y \in C$ sei $[X_\nu, Y]_c = 0$ für ein $c \in k^*$. Dann gilt für jede endlichdimensionale irreduzible Darstellung V von C, dass $X_\nu(V) = 0$.

Das folgt direkt aus dem Satz 3.3.

3.1.2. Aussagen zu Wurzelvektoren in U und ihren Darstellungen

In diesem Abschnitt werden verschiedene Sätze und Interpretationen von Wurzelvektoren bewiesen, sowie einige Aussagen über Darstellungen und die Wirkung von Wurzelvektoren getroffen.Wir beweisen im Folgenden insbesondere die Existenz von mehrdimensionalen irreduziblen Darstellungen auf Unteralgebren $C \subset U$ die zunehmend allgemeinere Konstellationen von Elementen enthalten. Mithilfe dieser Aussagen werden später Negativkriterien für die ede Eigenschaft aufgestellt.

Lemma 3.5:
Sei $B \subset U$ eine Borelunteralgebra. Wenn für ein $\beta \in Q$ das Element K_β in B liegt, so liegt auch K_β^{-1} in B.

Beweis: Angenommen $K_\beta^{-1} \notin B$, betrachte dann $A := \langle K_\beta^{-1}, B\rangle \subset U$: Das ist eine Rechtscoidealunteralgebra, weil Δ ein Algebrenhomomorphismus ist und sowohl B, als auch $k[K_\beta^{-1}]$ Rechtscoideale sind. Wegen der Maximalität von B und $B \subsetneq A$ gibt es eine irreduzible Darstellung V von A mit $dim(V) > 1$. Weil aber B ede ist, hat $V|_B$ eine eindimensionale Unterdarstellung $\langle v\rangle$ und wegen $K_\beta \in B$ gilt $K_\beta v = \lambda v$ für ein $\lambda \in k$. Weil $V|_B$ die Einschränkung einer Darstellung von A ist, und K_β in A invertierbar ist, muss insbesondere $\lambda \neq 0$ gelten. Wegen $K_\beta^{-1}K_\beta v = 1v = \lambda K_\beta^{-1} v$ gilt $K_\beta^{-1} v = \lambda^{-1} v$ und $\langle v\rangle$ ist eine A-Unterdarstellung von V. Das ist ein Widerspruch zu V irreduzibel und mehrdimensional. □

Satz 3.6:
Seien A bzw. A' Unteralgebren von U mit $E_\alpha, F_\alpha, K_\alpha, K_\alpha^{-1} \in A$ bzw. $E_\alpha K_\alpha^{-1}, F_\alpha, K_\alpha^2, K_\alpha^{-2} \in A'$ für ein $\alpha \in \Pi$ so hat A bzw. A' eine mehrdimensionale irreduzible Darstellung.

Beweis: Sei M eine Darstellung von A. Betrachten wir zunächst die Einschränkung von A auf die $U_q(\mathfrak{sl}_2) \subset A$ erzeugt von E_α, F_α und K_α, K_α^{-1}. Wegen Folgerung 1.45 wissen wir, dass in jeder eindimensionalen Darstellung von $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ das Element K_α^2 als 1 wirkt. Wegen Satz 1.46 wissen wir auch, dass eingeschränkt auf diese $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ die Darstellung M in irreduzible Darstellungen zerfällt. Angenommen jede endlichdimensionale irreduzible Darstellung von A ist eindimensional, dann zerfällt $M|_{U_q(\mathfrak{sl}_2)}$ in eindimensionale Darstellungen, also wirkt K_α^2 auf M als 1. Es genügt also zu zeigen, dass es eine endlichdimensionale Darstellung auf U gibt, für die K_α^2 nicht als 1 wirkt. Wir wissen aber von Satz 1.43, dass für alle dominanten Gewichte $\lambda \in \Lambda$ der U-Modul $L(\lambda, \sigma)$ endlichdimensional ist. Mit den fundamentalen dominanten Gewichten können wir aber für alle α ein λ finden mit $(\lambda, \alpha) \neq 0$, und für dieses λ wirkt dann in $L(\lambda, \sigma)$ das Element K_α^2 nicht als 1. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Für den zweiten Fall: $E_\alpha K_\alpha^{-1}, F_\alpha, K_\alpha^2, K_\alpha^{-2} \in A'$ läuft der Beweis völlig analog: Wir würden vermuten, dass A'-Moduln die in ihre K_α^2-Eigenräume zerfallen halbeinfach sind mit irreduziblen Moduln $L(\lambda)$. Das ist für den Beweis jedoch nicht nötig: Die Einschränkung eines U-Moduls $M = L(\lambda, \sigma)$ zerfällt in $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ halbeinfach in $L_{\mathfrak{sl}_2}(\lambda_i, \sigma_i)$. Offenbar ist aber die Einschränkung jedes irreduziblen $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-Moduls $L_{\mathfrak{sl}_2}(\lambda_i, \sigma_i)$ auf A' immernoch irreduzibel. $M|_{A'}$ zerfällt also immernoch in irreduzible Darstellungen und da nach Wahl von λ das Element K_α^2 nicht als 1 wirkt, finden wir wieder eine mehrdimensionale Darstellung. □

Bemerkung 3.7:
Ist $A \subset U$ eine Rechtscoidealunteralgebra mit $E_\alpha K_\alpha^{-1}, F_\alpha \in A$ für ein $\alpha \in \Pi$, so ist A keine Borelunteralgebra.

Beweis: Angenommen A wäre eine Borelunteralgebra. Betrachten wir den q-Kommutator von $E_\alpha K_\alpha^{-1}$ und F_α. Es gilt:

$$[E_\alpha K_\alpha^{-1}, F_\alpha]_{q_\alpha^2} = (1 - K_\alpha^{-2}) \frac{q_\alpha^2}{q_\alpha - q_\alpha^{-1}}$$

Es liegt also K_α^{-2} und wegen Lemma 3.5 auch K_α^2 in A. Wir können dann mit $E_\alpha K_\alpha^{-1}, F_\alpha, K_\alpha^{-2}, K_\alpha^2 \in A$ Satz 3.6 anwenden und sehen, dass A nicht ede ist, das liefert einen Widerspruch.

Folgerung 3.8:
Sei $C = \psi(U^+[w^+])_{\phi^+} T_L U^-[w^-]_{\phi^-}$ eine triangulär erzeugte Rechtscoidealunteralgebra im Sinne der Definitionen aus Kapitel 2. Gibt es ein $\alpha \in \Pi \cap \Phi^+(w^+) \cap \Phi^+(w^-)$ mit $\alpha \notin supp(\phi^+) \cap supp(\phi^-)$, so ist C keine Borelunteralgebra.

Beweis: Sei $\alpha \in \Pi \cap \Phi^+(w^+) \cap \Phi^+(w^-)$ mit $\alpha \notin supp(\phi^+) \cap supp(\phi^-)$. Nach Voraussetzung ist dann $E_\alpha \in U^+[w^+]$ und $F_\alpha \in U^-[w^-]$. Wenn $\alpha \notin supp(\phi^+)$ und $\alpha \notin supp(\phi^-)$ so folgt schon $E_\alpha K_\alpha^{-1}, F_\alpha \in C$ und die Behauptung gilt wegen Bemerkung 3.7. Sei jetzt o.B.d.A. $\alpha \notin supp(\phi^-)$ und $\alpha \in supp(\phi^+)$, dann liegen die Elemente F_α und $E_\alpha K_\alpha^{-1} + \phi^+(E_\alpha K_\alpha^{-1})K_\alpha^{-1}$ in C mit $\phi^+(E_\alpha K_\alpha^{-1}) \neq 0$. Betrachten wir dann wieder den q-Kommutator, so erhalten wir:

$$[E_\alpha K_\alpha^{-1} + \phi^+(E_\alpha)K_\alpha^{-1}, F_\alpha]_{q_\alpha^2} = (1 - K_\alpha^{-2})\frac{q_\alpha^2}{q_\alpha - q_\alpha^{-1}}$$

und es folgt $K_\alpha^{-2} \in C$. Dann kann man $E_\alpha K_\alpha^{-1} + \phi^+(E_\alpha K_\alpha^{-1})K_\alpha^{-1}$ mit K_α^{-2} konjugieren und bekommt eine andere Linearkombination der beiden Summanden. Es folgt, dass $E_\alpha K_\alpha^{-1}$ und F_α in C liegen und man bekommt einen Widerspruch zu Bemerkung 3.7. □

Lemma 3.9:
Liegen die Elemente $E_\alpha K_\alpha^{-1} + \lambda_\alpha K_\alpha^{-1}, F_\alpha + \lambda'_\alpha K_\alpha^{-1}$ für ein $\alpha \in \Pi$ mit $\lambda_\alpha \lambda'_\alpha \neq \frac{q_\alpha^2}{(1-q_\alpha^2)(q_\alpha - q_\alpha^{-1})}$ in einer Unteralgebra $A \subset U$, so ist A keine Borelunteralgebra.

Wenn hingegen für zwei Elemente $E_\alpha K_\alpha^{-1} + \lambda_\alpha K_\alpha^{-1}, F_\alpha + \lambda'_\alpha K_\alpha^{-1} \in A$ gilt $\lambda_\alpha \lambda'_\alpha = \frac{q_\alpha^2}{(1-q_\alpha^2)(q_\alpha - q_\alpha^{-1})}$, so bilden sie eine Weylalgebra, die nach Beispiel 1.54 durchaus ede ist, also kann in diesem Fall A ede sein.

Beweis: Betrachten wir den q_α^2-Kommutator der beiden Elemente, so erhalten wir:

$$[E_\alpha K_\alpha^{-1} + \lambda_\alpha K_\alpha^{-1}, F_\alpha + \lambda'_\alpha K_\alpha^{-1}]_{q_\alpha^2} = \frac{q_\alpha^2}{q_\alpha - q_\alpha^{-1}}(1 - K_\alpha^{-2}) + (1 - q_\alpha^2)\lambda_\alpha \lambda'_\alpha K_\alpha^{-2}$$

Wir sehen, dass für $\lambda_\alpha \lambda'_\alpha \neq \frac{q_\alpha^2}{(1-q_\alpha^2)(q_\alpha - q_\alpha^{-1})}$ schon K_α^{-2} in A liegt.

Angenommen A wäre eine Borelunteralgebra, so könnten wir mit Lemma 3.5 auch folgern $K_\alpha^2 \in A$. Dann könnten wir wieder wie in Folgerung 3.8 schon folgern $E_\alpha, F_\alpha, K_\alpha, K_\alpha^{-1} \in A$, also einen Widerspruch mit Satz 3.6 erzeugen. □

Satz 3.10:
Sei C eine Rechtscoidealunteralgebra von U und seien $E_\mu K_\mu^{-1} + \lambda K_\mu^{-1}$ und $F_\mu + \lambda' K_\mu^{-1}$ Elemente in C für Wurzelvektoren $T_w(E_\alpha) = E_\mu$ und $T_{w'}(F_\beta) = F_\mu$ zu beliebigen Weylgruppenelementen w, w' mit beliebiger reduzierter Darstellung, sodass $w(\alpha) = w'(\beta) = \mu$ für eine Wurzel $\mu \in \Phi^+$ und Konstanten $\lambda, \lambda' \in k$ mit $\lambda\lambda' \neq \frac{q_\mu^2}{(1-q_\mu^2)(q_\mu - q_\mu^{-1})}$, dann ist C keine Borelunteralgebra.

Beweis: Wir beweisen die Aussage mit Induktion über die Länge $\ell(w)$. Für $\ell(w) = 1$ gilt $\mu \in \Pi$ und die Aussage folgt direkt aus Lemma 3.9. Wir wollen zunächst zeigen, dass wir für ein

beliebiges $w \in W$ mit $T_w(E_\alpha) = E_\mu$ eine reduzierte Darstellung $w = s_{\alpha_{i_1}} \dots s_{\alpha_{i_n}} \in W$ so wählen können, dass für α_{i_1} gilt $E_{\alpha_{i_1}} K_{\alpha_{i_1}}^{-1} \in C$:

Dafür stellen wir zuerst fest, dass die Komponenten von $\Delta(E_\mu)$ in mindestens einen Q^2-Grad $C_\nu \otimes U_{\mu-\nu}$ für mindestens ein $\nu \neq 0$, $\nu \neq \mu$ ungleich 0 ist; andernfalls wäre E_μ schiefprimitiv, also weil q keine Einheitswurzel nach [AS] s.17 schon $\mu \in \Pi$. Nach mehrfacher Anwendung des Koproduktes auf $\bar{E}_\mu$ finden wir also ein homogenes Element $E_{\alpha_i} K_{\alpha_i}^{-1} \in C$.

Sei also $w = s_{\alpha_{i_1}} \dots s_{\alpha_{i_n}}$ eine reduzierte Darstellung, sodass $E_{\alpha_{i_1}} K_{\alpha_{i_1}}^{-1} \in C$. Weil C ede ist folgt mit 3.6, dass $F_{\alpha_{i_1}} \notin C$ also insbesondere $s_{\alpha_{i_1}} w' > w'$. Dann ist $T_{s_{\alpha_{i_1}}}^{-1} T_{w'}^{-1} = T_{s_{\alpha_{i_1}} w'}^{-1}$ also sind $T_{s_{\alpha_{i_1}}}^{-1}(E_\mu)$ und $T_{s_{\alpha_{i_1}}}^{-1}(F_\mu)$ wieder Wurzelvektoren zu einer Wurzel $s_{\alpha_{i_1}} w(\alpha)$ mit $\ell(s_{\alpha_{i_1}} w) < \ell(w)$. Jetzt folgt die Behauptung aus der Induktionsvoraussetzung. □

Folgerung 3.11:
In einer triangulären Borelunteralgebra $C = \psi(U^+[w_1])_{\phi^+} T_L U^-[w_2]_{\phi^-}$ gilt für die zu allen Wurzeln $\mu \in \Phi^+(w_1) \cap \Phi^+(w_2)$ gehörigen Elemente:

$$(\phi^+ \otimes id)\Delta(E_\mu K_\mu^{-1}) \neq E_\mu K_\mu^{-1} \quad (\phi^- \otimes id)\Delta(F_\mu) \neq F_\mu$$

Beweis: Das folgt direkt aus Satz 3.10. □

Lemma 3.12:
In einer triangulären Rechtscoidealunteralgebra $C = \psi(U^+[w_1])_{\phi^+} T_L U^-[w_2]_{\phi^-}$ mit $L \subset (supp(\phi^+) \cap supp(\phi^-))^\perp$ gilt für alle $\alpha \in supp(\phi^+) \cap supp(\phi^-) \cap \Pi$ schon $\phi^+(E_\alpha)\phi^-(F_\alpha) = \frac{q_\alpha^2}{(1-q_\alpha^2)(q_\alpha - q_\alpha^{-1})}$.

Hier müssen wir nicht zwingend C als ede voraussetzen im Gegensatz zu Satz 3.10.

Beweis: Wie in Lemma 3.9 wäre sonst $K_\alpha^{-2} \in C$ was ein Widerspruch ist zu $L \subset (supp(\phi^+) \cap supp(\phi^-))^\perp$. □

Lemma 3.13:
Gegeben eine triangulär erzeugte Borelunteralgebra $C = \psi(U^+[w_1])_{\phi^+} T_L U^-[w_2]_{\phi^-}$ und eine Wurzel $\mu \in supp(\phi^+) \cap supp(\phi^-)$ sodass die Elemente $E_\mu K_\mu^{-1} + \lambda K_\mu^{-1}$ und $F_\mu + \lambda' K_\mu^{-1}$ in C liegen. Dann gilt für alle $\beta \in L$ schon $\beta \perp \mu$.

Beweis: Angenommen es gäbe ein $\beta \in L$ mit $\beta \not\perp \mu$. Dann ist $K_\beta \in C$ und es gilt für den Kommutator mit $\bar{E}_\mu$:

$$[K_\beta, E_\mu K_\mu^{-1} + \lambda K_\mu^{-1}]_{q^{(\beta,\mu)}} = (1 - q^{(\mu,\beta)}) K_\beta K_\mu^{-1}$$

Dann ist aber $K_\beta K_\mu^{-1}$ schon in C, also auch $K_\mu^{-1} \in C$ wegen Lemma 3.5 und damit $E_\mu, K_\mu, F_\mu, K_\mu^{-1} \in C$. Das ist aber ein Widerspruch zur ede Eigenschaft, nach Folgerung 3.11. □

3.1.3. Satz zum Ergänzen von Weylgruppenelementen

In diesem Abschnitt werden wir einige nützliche Eigenschaften von Wurzeln und Weylgruppenelementen beweisen. Sei dazu Φ ein Wurzelsystem wie in Definition 1.1 mit Basis Π, positiven Wurzeln Φ^+ und zugehöriger Weylgruppe W. Wie in Lemma 1.10 sei $\Phi^+(w) \subset \Phi^+$ für ein $w \in W$ die Menge der Wurzeln $\mu \in \Phi^+$ für die gilt $w^{-1}(\mu) \prec 0$. Wir verwenden auf Q_+ die partielle Ordnung $\prec$ aus Definition 1.4. Auf W verwenden wir die schwache Ordnung aus Definition 1.8. Außerdem gibt es für jedes $w \in W$ abhängig von der Wahl der reduzierten Darstellung von w die Totalordnung $<$ auf $\Phi^+(w)$ aus 1.1.2 gegeben auf Elementen $\beta_i, \beta_j \in \Phi^+(w)$ durch:

$$\beta_i < \beta_j \Leftrightarrow i < j$$

Diese Ordnung ist konvex nach [PA]. Ziel dieses Abschnitts ist es zu beweisen, wie man zwei Weylgruppenelemente $w_1, w_2 \in W$ auf eine bestimmte Weise zu w_1', w_2' erweitern kann, sodass $\Phi^+(w_1') \cup \Phi^+(w_2') = \Phi^+$.

Lemma 3.14:
Ist $\mu \in \Phi^+$ nicht einfach, so gibt es ein $\beta \in \Pi$ mit $\mu - \beta \in \Phi^+$.

Den Beweis hierzu findet man in [Hum70] Lemma 10.2 A.

Folgerung 3.15:
Gegeben ein $w \in W$. Für alle $\mu \in \Phi^+(w)$ gibt es ein $\beta \in \Pi \cap \Phi^+(w)$ mit $\beta \prec \mu$.

Beweis: Wir machen eine Induktion über die Höhe $ht(\mu)$:

Für $ht(\mu) = 1$ ist $\mu \in \Pi$ und die Behauptung ist trivial. Sei nun $ht(\mu) > 1$. Mit Lemma 3.14 gibt es ein $\beta \in \Pi$ sodass $\mu - \beta \in \Phi^+$. Wegen der Konvexität der Ordnung $<$ auf $\Phi^+(w)$ gilt entweder $\beta \in \Pi \cap \Phi^+(w)$ oder $\mu - \beta \in \Phi^+(w)$. Im ersten Fall ist die Behauptung bewiesen. Im zweiten Fall gibt es nach der Induktionsvoraussetzung schon ein $\alpha \in \Pi \cap \Phi^+(w)$ mit $\alpha \prec \mu - \beta \prec \mu$, damit ist die Behauptung bewiesen. □

Definition 3.16:
Seien $\mu, \nu \in \Phi$ orthogonal ($\mu \perp \nu$), das heißt $(\mu, \nu) = 0$. Wir sagen μ und ν sind *stark orthogonal*, wenn es ein $x \in W$ gibt mit $x(\mu), x(\nu) \in \Pi$.

Bemerkung 3.17:
Zwei orthogonale Wurzeln $\mu, \nu \in \Phi$ sind genau dann stark orthogonal, wenn für alle $m, n \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ gilt $m\mu + n\nu \notin \Phi$.

Beweis: „$\Rightarrow$“ Seien zunächst $\mu, \nu \in \Phi$ stark orthogonal mit $x \in W$ sodass $\alpha := x(\mu), \beta := x(\nu) \in \Pi$ gilt und immernoch $\alpha \perp \beta$. Das Wurzelsystem Φ ist stabil unter Wirkung der Weylgruppe. Angenommen es gäbe $m, n \in \mathbb{Q}$, mit $m\mu + n\nu = \zeta \in \Phi$, dann wäre aber auch $x(m\mu + n\nu) = x(\zeta) \in \Phi$ also insbesondere $m\alpha + n\beta \in \Phi$, das ist ein Widerspruch zu $\alpha \perp \beta$.

„$\Leftarrow$“ Gilt jetzt für alle $m, n \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, dass $m\mu + n\nu \notin \Phi$ sei. Nach Lemma 1.7 gibt es ein $y \in W$, sodass $y(\mu), y(\nu)$ in einem Rang 2 Wurzelsystem liegen. Das einzige Rang 2 Wurzelsystem welches Wurzeln $y(\mu) \perp y(\nu)$ mit der Eigenschaft $my(\mu)+ny(\nu) \notin \Phi$ für alle $0 \neq m, n \in \mathbb{Q}$ enthält ist $A_1 \times A_1$. Also sind μ und ν stark orthogonal. □

Im Folgenden betrachten wir für zwei Weylgruppenelemente $w_1, w_2 \in W$ den Schnitt $\mathtt{B} := \Phi^+(w_1) \cap \Phi^+(w_2)$ genauer. Wir wollen insbesondere für ein $\mathtt{B}$ mit paarweise orthogonalen Elementen Aussagen über mögliche Erweiterungen von w_1 und w_2 treffen.

Lemma 3.18:
Angenommen alle Elemente in $\mathtt{B}$ *sind paarweise orthogonal. Dann sind die Elemente in* $\mathtt{B}$ *paarweise stark orthogonal.*

Beweis: Gegeben zwei beliebige Elemente $\mu, \nu \in \mathtt{B}$. Angenommen $\mu + \nu \in \Phi$, so gilt wegen der Konvexität von $<$ auf $\Phi^+(w_1)$ bzw. $\Phi^+(w_2)$ schon $\mu + \nu \in \Phi^+(w_1) \cap \Phi^+(w_2)$, also insbesondere $(\mu + \nu, \mu) = 0$, das ist ein Widerspruch, weil die Elemente in $\mathtt{B}$ paarweise orthogonal sind. Wieder betrachten wir jetzt eine Projektion $x \in W$ von μ und ν in ein Rang 2 Wurzelsystem. Wegen $\mu + \nu \notin \Phi^+$, also auch $x(\mu) + x(\nu) \notin \Phi$ kommt hierfür nur $A_1 \times A_1$ oder G_2 in Frage, im ersten Fall ist die Behauptung bewiesen. Im Fall $\mathfrak{g} = G_2$ mit einer langen Wurzel μ und einer kurzen Wurzel ν die aufeinander senkrecht stehen, liegen auch die Wurzeln zwischen μ und ν bzgl. der Totalordnung für eine beliebige reduzierte Darstellung von w_0 in $\Phi^+(w_1) \cap \Phi^+(w_2)$ wie man leicht nachprüft, diese sind aber nicht auf μ senkrecht, was zum Widerspruch führt. □

Der obige Beweis könnte systematischer gefasst werden durch folgende Beobachtung: Die Menge $\Phi^+(w)$ ist nicht vollständig durch die Konvexität der Ordnung charakterisiert. Eine genauere Charakterisierung findet sich in [PA].

Vermutung 3.19:
Angenommen alle Elemente in $\mathtt{B}$ sind paarweise orthogonal. Dann gibt es entweder ein Element $\alpha \in \Pi \cap \Phi^+(w_1)$ mit $\alpha \notin \mathtt{B}$ oder es gilt $|\Pi \cap \Phi^+(w_1)| = |\mathtt{B}|$.

Beispiel 3.20:
Im Fall Rang 2 gilt die Vermutung 3.19, da wir von Lemma 3.18 wissen, dass die Elemente in $\mathtt{B}$ sogar paarweise stark orthogonal sind. Das heißt im Fall Rang 2 kommt nur $|B| = 1$ in Frage und die Behauptung folgt direkt.

Im Folgenden schränken wir uns auf A_n ein, wir vermuten aber, dass die Sätze auch im Allgmeinen gültig sind.

Notation 3.21:
Wir verwenden für Wurzeln μ in A_n die Notation $\mu = [\mu_1, \mu_2]$ für $1 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq n$ wenn $\mu = \sum_{m=\mu_1}^{\mu_2} \alpha_i$. Alle Wurzeln in A_n sind von dieser Form.

Lemma 3.22:
Die Vermutung 3.19 gilt in A_n.

Beweis: Angenommen es gibt kein solches Element $\alpha \in \Pi \cap \Phi^+(w)$ mit $\alpha \notin \mathtt{B}$, das heißt:

$$\Phi^+(w_1) \cap \Pi \subset \mathtt{B} \tag{3.1}$$

Wir wollen zeigen $\mathtt{B} \subset \Pi$:

A) Für alle $\mu \in \Phi^+(w_1)$ gibt es wegen Lemma 3.15 ein $\beta \in \Phi^+(w_1) \cap \Pi$ mit $\beta \prec \mu$. Wegen (3.1) gilt jetzt sogar $\beta \in \mathtt{B}$.

B) Angenommen es gibt ein $\mu \in \mathtt{B}$ mit $\mu \notin \Pi$. Wir betrachten das minimale solche $\mu = [\mu_1, \mu_2]$ bzgl. der Ordnung $\prec$. Seien $\alpha_{b_1}, \ldots \alpha_{b_l} \in \mathtt{B} \cap \Pi$ mit $\mu_1 \leq b_1 \leq \ldots \leq b_l \leq \mu_2$ die Elemente $\prec \mu$ in $\mathtt{B}$. Wegen A) gibt es mindestens ein solches Element und wegen der paarweisen Orthogonalität der Elemente in $\mathtt{B}$ gilt sogar $\mu_1 < b_1 < \ldots < b_l < \mu_2$. Wir definieren die folgenden Typen von Wurzeln für $0 \leq j \leq l-1$:

$$X_j = [\mu_1, b_{l-j}]$$

$$Y_j = [\mu_1, b_{l-j} - 1]$$

Dabei gilt für alle $0 \leq j \leq l-1$ stets $X_j, Y_j, \mu - X_j, \mu - Y_j \notin \mathtt{B}$ weil $(X_j, \alpha_{b_{l-j}}) = 1$ und $(Y_j, \alpha_{b_{l-j}}) = -1$ und die Elemente in $\mathtt{B}$ paarweise orthogonal sind.

Wir wollen nun zeigen, dass für alle $0 \leq j \leq l-1$ gilt: $Y_j \in \Phi^+(w_1)$. Dazu verwenden wir die folgenden Überlegungen:

1. $Y_j \in \Phi^+(w_1) \Rightarrow X_j \in \Phi^+(w_1)$, weil $\alpha_{b_{j-l}} \in \Phi^+(w_1)$. Ebenso für w_2.
   $\mu - X_j \in \Phi^+(w_1) \Rightarrow \mu - Y_j \in \Phi^+(w_1)$, weil $\alpha_{b_{j-l}} \in \Phi^+(w_1)$. Ebenso für w_2.

2. $X_j \notin \Phi^+(w_1) \Rightarrow \mu - X_j \in \Phi^+(w_1)$, das folgt aus der Konvexität von $<$. Ebenso für w_2 und Y_j.
   $\mu - X_j \notin \Phi^+(w_1) \Rightarrow X_j \in \Phi^+(w_1)$, das folgt aus der Konvexität von $<$. Ebenso für w_2 und Y_j.

3. $X_j \in \Phi^+(w_1) \Rightarrow X_j \notin \Phi^+(w_2)$, weil $X_j, Y_j \notin \mathtt{B}$. Ebenso für Y_j.
   $\mu - X_j \in \Phi^+(w_1) \Rightarrow \mu - X_j \notin \Phi^+(w_2)$, weil $\mu - X_j, \mu - Y_j \notin \mathtt{B}$. Ebenso für Y_j.

Mit diesen Überlegungen können wir die Behauptung jetzt induktiv über $0 \leq j \leq l-1$ zeigen:

Y_0 liegt in $\Phi^+(w_1)$, weil:

$$\begin{aligned} &\overset{A}{\Rightarrow} \mu - X_0 \notin \Phi^+(w_1) \overset{2}{\Rightarrow} X_0 \in \Phi^+(w_1) \overset{3}{\Rightarrow} X_0 \notin \Phi^+(w_2) \overset{2}{\Rightarrow} \mu - X_0 \in \Phi^+(w_2) \\ &\overset{1}{\Rightarrow} \mu - Y_0 \in \Phi^+(w_2) \overset{3}{\Rightarrow} \mu - Y_0 \notin \Phi^+(w_1) \overset{2}{\Rightarrow} Y_0 \in \Phi^+(w_1) \end{aligned}$$

Gelte jetzt $Y_j \in \Phi^+(w_1)$. Angenommen $Y_{j+1} \notin \Phi^+(w_1)$:

$$\begin{aligned} Y_{j+1} \notin \Phi^+(w_1) &\overset{2}{\Rightarrow} \mu - Y_{j+1} \in \Phi^+(w_1) \overset{3}{\Rightarrow} \mu - Y_{j+1} \notin \Phi^+(w_2) \\ &\overset{1}{\Rightarrow} \mu - X_{j+1} \notin \Phi^+(w_2) \overset{2}{\Rightarrow} X_{j+1} \in \Phi^+(w_2) \overset{3}{\Rightarrow} X_{j+1} \notin \Phi^+(w_1) \\ &\overset{2}{\Rightarrow} \mu - X_{j+1} \in \Phi^+(w_1) \overset{A}{\Rightarrow} \mu - Y_j \in \Phi^+(w_1) \overset{3}{\Rightarrow} \mu - Y_j \notin \Phi^+(w_2) \\ &\overset{2}{\Rightarrow} Y_j \in \Phi^+(w_2) \lightning \text{ zu } Y_j \in \Phi^+(w_1) \text{ und } Y_j \notin \mathtt{B} \end{aligned}$$

□

Die Induktion liefert $Y_j \in \Phi^+(w_1)$ für alle $0 \leq j \leq l-1$. Das ergibt aber einen Widerspruch zu A) für $j = l-1$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Folgerung 3.23:
Besteht $\mathtt{B}$ aus paarweise orthogonalen Wurzeln und sei $\mathtt{B} \neq \emptyset$. Dann gibt es für w_1 eine reduzierte Darstellung von der Form: $w_1 = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_{\ell(w_1)}}$ und $1 \leq i \leq i + |B| - 1 \leq \ell(w_1)$ mit $\mathtt{B} = \{\beta_i, \dots \beta_{i+|B|-1}\}$. Ebenso für w_2.

Beweis: Wir zeigen die Behauptung mit einer Induktion über die Länge $\ell(w_1)$:

Für $\ell(w_1) = |\mathtt{B}|$ ist $\Phi^+(w_1) \subset \Pi$ und die Behauptung ist trivial. Sei nun w gegeben mit $\ell(w_1) > |\mathtt{B}|$. Angenommen $\mathtt{B} \subset \Pi$ dann können wir wegen Lemma 1.11 und weil die Elemente in $\mathtt{B}$ paarweise aufeinander senkrecht stehen, alle Elemente aus $\mathtt{B}$ am Anfang von w schreiben. Die Behauptung ist dann für $i = 1$ und $j = |\mathtt{B}|$ erfüllt. Gibt es ein Element $\mu \in \mathtt{B}$ mit $\mu \notin \Pi$, dann gibt es wegen Lemma 3.22 ein $\beta \in \Phi^+(w_1) \cap \Pi$ mit $\beta \prec \mu$ und $\beta \notin \mathtt{B}$. Es gibt also eine reduzierte Darstellung von w_1 mit s_β am Anfang, wegen Lemma 1.11. Wir betrachten dann die zwei Weylgruppenelemente $w_2' = s_\beta w_2$ und $w_1' = s_\beta w_1$. Wegen $\ell(s_\beta w_1) < \ell(w_1)$ ist die Behauptung hier schon bewiesen und wir können für $\mathtt{B}' := s_\beta(\mathtt{B})$ das Element w_1' in die richtige Form bringen. Mit dieser reduzierten Darstellung von w_1' ist auch $w_1 = s_\beta w_1'$ in der richtigen Form, da $\beta \notin \mathtt{B}$. □

Wir wollen als nächstes den wichtigsten Satz beweisen, der uns erlaubt w_1, w_2 zu w_1', w_2' zu erweitern. Wir werden das in mehreren Schritten tun.

Satz 3.24:
Besteht $\mathtt{B} \neq \emptyset$ aus paarweise orthogonalen Wurzeln. Dann gilt:

1. *Es gibt Elemente $w_1', w_2' \in W$ mit $\Phi^+(w_1) \subseteq \Phi^+(w_1')$, $\Phi^+(w_2) \subseteq \Phi^+(w_2')$, sodass folgende Relationen erfüllt sind:*

$$\Phi^+(w_1') \cap \Phi^+(w_2') = \mathtt{B} \textit{ und } \Phi^+(w_1') \cup \Phi^+(w_2') = \Phi^+$$

2. *Es gibt ein Element $w_1'' \in W$ sodass $\Phi^+(w_1) \subseteq \Phi^+(w_1'')$ und w_1'' eine reduzierte Darstellung $w_1'' = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_{\ell(w_1'')}}$ hat mit $\mathtt{B} = \{\beta_{\ell(w_1'')-|B|+1}, \dots, \beta_{\ell(w_1'')}\}$.*

Lemma 3.25:
Seien die Voraussetzungen aus Satz 3.24 gegeben. Dann sind 1) und 2) äquivalent.

Beweis: „⇒“ Seien w_2', w_1' gegeben, die 1) erfüllen, das heißt: $\Phi^+(w_2') \cap \Phi^+(w_1') = \mathtt{B}$ und $\Phi^+(w_2') \cup \Phi^+(w_1') = \Phi^+$. Wir konstruieren jetzt zu $w_1'' := w_1'$ eine reduzierte Darstellung von der geforderten Form.

Betrachten wir dazu $\bar{w} := w_2' w_0$. Es gilt für dieses $\bar{w}$:

$$\Phi^+(\bar{w}) \subset \Phi^+(w_1')$$

denn für $\mu \in \Phi^+(\bar{w})$ gilt ja $\bar{w}^{-1}(\mu) \prec 0 \Rightarrow w_0^{-1} w_2'^{-1}(\mu) \prec 0 \Rightarrow w_2'^{-1}(\mu) \succ 0$ also ist $\mu \notin \Phi^+(w_2')$ und wegen $\Phi^+(w_2') \cup \Phi^+(w_1') = \Phi^+$ folgt $\mu \in \Phi^+(w_1')$. Wir können jetzt wegen Bemerkung 1.12 folgende reduzierte Darstellung von w_1' wählen: $w_1' = \bar{w}x$ für ein $x \in W$ mit $\ell(x) = \ell(w_1') - \ell(\bar{w})$. Wir müssen jetzt nur noch zeigen:

$$\bar{w}(\Phi^+(x)) = \mathtt{B}$$

”$\subset$”: Das gilt, weil die Elemente in $\mathtt{B}$ genau die Elemente sind, die sowohl in $\Phi^+(w_2')$ als auch in $\Phi^+(w_1')$ liegen. Die Elemente auf der linken Seite liegen in $\Phi^+(w_1')$ nach Konstruktion und es gilt für ein $\nu \in \Phi^+(x)$ schon: $w_2'^{-1}\bar{w}(\nu) = w_0(\nu) \prec 0$, also liegen sie auch in $\Phi^+(w_2')$. Damit haben wir eine geeignete reduzierte Darstellung gefunden und 2) gilt.

”$\supset$”: Das gilt, weil $\Phi^+(\bar{w}x) = \Phi^+(w_1') \supset \mathtt{B}$, aber für alle Elemente $\mu \in \Phi^+(w_2')$ also insbesondere für alle Elemente $\mu \in \mathtt{B}$ gilt $\mu \notin \Phi^+(\bar{w})$, das heißt $\mathtt{B} \cap \Phi^+(\bar{w}) = \emptyset$. Insgesamt ergibt sich $\Phi^+(\bar{w}x) \supset \mathtt{B}$, aber $\mathtt{B} \cap \Phi^+(\bar{w}) = \emptyset$, also $\bar{w}(\Phi^+(x)) \supset \mathtt{B}$.

„⇐“ Angenommen es gibt $w_1'' = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_k}$ mit $\mathtt{B} = \{\beta_i, \dots, \beta_k\}$ für ein i.

Wir wählen $w_1' := w_1''$ und $w_2' := s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_{i-1}} w_0$ und zeigen, dass diese Elemente 1) erfüllen: Es gilt

$$\Phi^+(w_1') \cup \Phi^+(w_2') = \Phi^+$$

denn für $\mu \notin \Phi^+(w_2')$ gilt $w_0^{-1} s_{\alpha_{i-1}} \dots s_{\alpha_1}(\mu) \succ 0 \Rightarrow s_{\alpha_{i-1}} \dots s_{\alpha_1}(\mu) \prec 0$, also $\mu \in \Phi^+(w_1')$. Außerdem gilt

$$\Phi^+(w_1') \cap \Phi^+(w_2') = \mathtt{B}$$

denn für alle $\beta_j \in \Phi^+(w_1')$ ist $\beta_j \in \Phi^+(w_2') \Leftrightarrow j > i \Leftrightarrow \beta_j \in \mathtt{B}$. □

Nun wollen wir den Satz 3.24 beweisen. Dazu betrachten wir zunächst Spezialfälle für $\mathtt{B}$ und werden dann die Beweismethoden zusammenführen.

Korollar 3.26 ($\mathtt{B} = \{\alpha\} \subset \Pi$):
Für $\mathtt{B} = \{\alpha\} \subset \Pi$ *gilt der Satz 3.24.*

Beweis: Entweder gilt $\Phi^+(w_1) \cup \Phi^+(w_2) = \Phi^+$ dann sind wir direkt fertig. Angenommen $\Phi^+(w_1) \cup \Phi^+(w_2) \neq \Phi^+$. Wir konstruieren die Elemente w_1' und w_2' mit $\Phi^+(w_1) \subseteq \Phi^+(w_1')$, $\Phi^+(w_2) \subseteq \Phi^+(w_2')$ induktiv wie folgt: Wir erweitern w_1 so lange bis für w_1^{neu} und w_2 entweder 1) oder 2) in 3.24 erfüllt sind. Sei dazu w_1^i eine Folge von Elementen in W mit zugehörigen

reduzierten Darstellungen, sodass gilt $w_1 =: w_1^1 < w_1^2 < \dots w_1^i$ für alle i, also $\Phi^+(w_1) \subset \Phi^+(w_1^i)$ für alle i.

$$w_1^i = s_\alpha x_i \quad w_2 = s_\alpha y$$

für Elemente $x_i, y \in W$ mit $\ell(w_1^i) = \ell(x_i) + 1$ und $\ell(w_2) = \ell(y) + 1$. Solche reduzierten Darstellungen gibt es nach Lemma 1.11. Dann ist insbesondere $w_2^{-1} w_1^i = y^{-1} x_i$ mit $\ell(y^{-1}x_i) = \ell(y) + \ell(x_i)$. Weil $\Phi^+(w_1) \cup \Phi^+(w_2) \neq \Phi^+$ gibt es mindestens ein $\gamma \in \Pi$ mit $y^{-1}x_i(\gamma) \succ 0$, also wegen $\ell(y^{-1}x_i) = \ell(y) + \ell(x_i)$ auch $x_i(\gamma) \succ 0$. Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle für $w_1^i(\gamma)$:

1. Fall $w_1^i(\gamma) \succ 0$: Dann definieren wir $w_1^{i+1} := w_1^i s_\gamma$ und es gilt $\Phi^+(w_1^{i+1}) \cap \Phi^+(w_2) = \alpha$. Mit Induktion können wir w_1 solange erweitern, bis entweder $\Phi^+(w_1^n) \cup \Phi^+(w_2) = \Phi^+$, also 1) erfüllt ist, oder für ein i der 2. Fall eintritt.

2. Fall $w_1^i(\gamma) \prec 0$: Dann gilt aber wegen $x_i(\gamma) \succ 0$ schon $x_i(\gamma) = \alpha$. In diesem Fall gilt:
Es gibt eine reduzierte Darstellung von w_1^i der Form:

$$w_1^i = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_{\ell(w_1^i)}} \text{ mit } \beta_{\ell(w_1^i)} = \alpha$$

und 2) ist erfüllt für $w_2' := w_2$ und $w_1' := w_1^i$, weil: $w_1^i(\gamma) = s_\alpha x_i(\gamma) = s_\alpha(\alpha) \prec 0$, das heißt wir wissen von Lemma 1.11 angewandt auf $(w_1^i)^{-1}$, dass es eine reduzierte Darstellung von w_1^i gibt von der Form $w_1^i = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_{\ell(w_1^i)-1}} s_\gamma$, In dieser reduzierten Darstellung sehen wir, dass insbesondere gilt: $w_1^i(\gamma) = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_{\ell(w_1^i)-1}} s_\gamma(\gamma) = -\beta_{\ell(w_1^i)} = -\alpha$, das heißt $\beta_{\ell(w_1^i)} = \alpha$. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Korollar 3.27 ($\mathtt{B} \subset \Pi$):
Für $\mathtt{B} \subset \Pi$ *gilt der Satz 3.24.*

Beweis: Wir wollen dieses Korollar analog zu dem Beweis von Korollar 3.26 beweisen. Wegen $\mathtt{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{|\mathtt{B}|}\}$ und Lemma 1.11 wissen wir, dass es reduzierte Darstellungen von w_1 gibt von der Form: $w_1 = \prod_{j=1}^{|\mathtt{B}|} s_{\alpha_j} x$ für ein $x \in W$ mit $\ell(x) = \ell(w_1) - |\mathtt{B}|$, für w_2 ebenso. Wie oben konstruieren wir jetzt wieder Elemente w_1', w_2' induktiv: Sei dazu w_1^i wieder eine Folge von Elementen in W mit zugehöriger reduzierter Darstellung, sodass gilt $w_1 =: w_1^1 < w_1^2 < \dots w_1^i$ für alle i, also $\Phi^+(w_1) \subset \Phi^+(w_1^i)$ für alle i:

$$w_1^i = \prod_{j=1}^{|\mathtt{B}|} s_{\alpha_j} x_i \quad w_2 = \prod_{j=1}^{|\mathtt{B}|} s_{\alpha_j} y \quad w_{\mathtt{B}} = \prod_{j=1}^{|\mathtt{B}|} s_{\alpha_j}$$

für Elemente $x_i, y \in W$ mit $\ell(x_i) = \ell(w_1^i) - |\mathtt{B}|$ und mit $\ell(y) = \ell(w_2) - |\mathtt{B}|$. Wieder gilt $w_2^{-1} w_1^i = y^{-1} x_i$ mit $\ell(y^{-1}x_i) = \ell(y) + \ell(x_i)$. Wie in dem obigen Beweis suchen wir jetzt nach Elementen $\gamma_i \in \Pi$ mit $0 \prec w_1^i(\gamma_i) \notin \Phi^+(w_2)$. Also mit $y^{-1}x_i(\gamma_i) \succ 0$. Für solche Elemente folgt dann schon $x_i(\gamma_i) \succ 0$, weil $\ell(y^{-1}x_i) = \ell(y) + \ell(x_i)$. Finden wir solche Elemente, so definieren

wir $w_1^{i+1} := w_1^i s_{\gamma_i}$ solange bis $\Phi^+(w_1^i) \cup \Phi^+(w_2) = \mathtt{B}$ oder es ein i gibt, für das w_1^i die Eigenschaft 2) aus dem Satz 3.24 erfüllt. Das geht wie folgt:

1. Fall: Es gibt ein γ_i mit $w_1^i(\gamma_i) \succ 0$ und $y^{-1}x_i(\gamma_i) \succ 0$. Dann sind die Voraussetzungen für die Induktion erfüllt, denn aus $y^{-1}x_i(\gamma_i) \succ 0$ folgt $w_2^{-1}w_1^i(\gamma_i) \succ 0$ und damit $w_1^i(\gamma_i) \notin \Phi^+(w_2)$. Wir definieren dann wieder $w_1^{i+1} := w_1^i s_{\gamma_i}$. Es gilt $\Phi^+(w_1^{i+1}) \cap \Phi^+(w_2) = \mathtt{B}$. Also können wir mit diesem γ_i die Induktion fortsetzen bis entweder 3.24 1) erfüllt ist oder der 2. Fall eintritt.

2. Fall: Für alle γ_j mit $y^{-1}x_i(\gamma_j) \prec 0$ gilt $w_1^i(\gamma_j) \prec 0$.

Hierzu betrachten wir folgende Elemente genauer:

$$\bar{w}_i := x_i^{-1} y w_0 \quad \text{und} \quad x_i^{-1} w_B$$

Für diese Elemente sind die Vorraussetzungen von Lemma 3.22 erfüllt, denn:

- $\mathtt{B}' := \Phi^+(\bar{w}_i) \cap \Phi^+(x_i^{-1}w_{\mathtt{B}}) = x_i^{-1}(\mathtt{B})$. Das sieht man wie folgt:
  - $x_i^{-1}(\mathtt{B}) \subset \Phi^+(\bar{w}_i)$, denn:
    Für alle $x_i^{-1}(b) \in x_i^{-1}(\mathtt{B})$ gilt, $\bar{w}_i^{-1}(x_i^{-1}(b)) = w_0^{-1}y^{-1}x_i x_i^{-1}(b) = w_0^{-1}\underbrace{y^{-1}(b)}_{\succ 0} \prec 0$.
  - Für alle $\mu \in \Phi^+(x_i^{-1})$ gilt $\mu \notin \Phi^+(\bar{w}_i)$, denn:
    Angenommen $\mu \in \Phi^+(\bar{w}_i) \Rightarrow \bar{w}_i^{-1}(\mu) \prec 0 \Rightarrow w_0^{-1}y^{-1}x_i(\mu) \prec 0 \Rightarrow y^{-1}x_i(\mu) \succ 0 \Rightarrow x_i(\mu) \succ 0 \Rightarrow \mu \notin \Phi^+(x_i^{-1})$
- $\mathtt{B}' = x_i^{-1}(\mathtt{B})$ besteht aus paarweise stark orthogonalen Wurzeln, weil $\mathtt{B}$ aus paarweise stark orthogonalen Wurzeln besteht
- Für alle $\gamma_j \in \Phi^+(\bar{w}_i) \cap \Pi$ liegt γ_j in $\mathtt{x_i^{-1}(B)}$, denn:
  Es gilt $w_1^i(\gamma_j) \prec 0$ und $x_i(\gamma_i) \succ 0$, also $\gamma_j \in \Phi^+(x_i^{-1}w_{\mathtt{B}})$ und $\gamma_j \notin \Phi^+(x_i^{-1})$.

Wir können also das Lemma 3.22 anwenden, dieses liefert: Es gibt genau $|\mathtt{B}|$ Elemente in $\Phi^+(\bar{w}_i) \cap \Pi$. Wir nennen diese Elemente $\alpha'_1, \dots \alpha'_{|\mathtt{B}|}$, sie sind paarweise stark orthogonal und wir definieren:

$$w_{\mathtt{B}'} := \prod_{i=1}^{|\mathtt{B}|} \alpha'_i$$

Für alle $1 \leq j \leq |\mathtt{B}|$ gilt: $w_1^i(\alpha'_j) \in -\mathtt{B}$, weil $w_1^i(\alpha'_j) = w_{\mathtt{B}}x_i(x_i^{-1}(b)$ für ein $b \in \mathtt{B}$ mit $\alpha'_j = x_i^{-1}(b)$, dann ist $w_{\mathtt{B}}x_i(x_i^{-1}(b)) = w_{\mathtt{B}}(b) = -b \in -\mathtt{B}$.

Wegen $\alpha'_j \in \Phi^+((w_1^i)^{-1})$ und weil die α'_j paarweise orthogonal sind gibt es nach Lemma 1.11 eine reduzierte Darstellung von $(w_1^i)^{-1}$ die mit $w_{\mathtt{B}'|}$ beginnt. Die zugehörige reduzierte Darstellung von w_1^i erfüllt die Bedingungen aus Satz 3.24. Das folgt analog zu Korollar 3.26 und die Behauptung ist bewiesen. □

Beweis (Beweis zu Satz 3.24): Den allgemeinen Fall $\mathtt{B} \subset \Phi^+$ beliebig können wir mit der Folgerung 3.23 auf den Spezialfall Korollar 3.27 zurückführen. Sei dazu eine reduzierte Darstellung von w_1 gegeben wie in der Folgerung 3.23: $w_1 = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_m}$ und $i \leq j \leq m$ mit $\mathtt{B} : \{\beta_i, \dots \beta_j\}$. Wir betrachten dann die Elemente $v_1 = s_{\alpha_{i-1}} \dots s_{\alpha_1} w_1$ und $v_2 = s_{\alpha_{i-1}} \dots s_{\alpha_1} w_2$. Für diese Elemente gilt $\mathtt{B}' := \Phi^+(v_1) \cap \Phi^+(v_2) \subset \Pi$, das heißt die Bedingungen aus Korollar 3.27 sind erfüllt und wir können den Satz 3.24 anwenden. Seien jetzt v_1' und v_2' so gewählt, dass sie die Bedingungen des Satzes 3.24 erfüllen. Wir wählen jetzt für w_1 und w_2 die folgenden Elemente: $w_1' = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_{i-1}} v_1'$ und $w_2' = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_{i-1}} v_2'$, dann gilt für den Schnitt:

$$\Phi^+(w_1') \cap \Phi^+(w_2') = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_{i-1}}(\mathtt{B}')$$

weil $\Phi^+(v_1') \cup \Phi^+(v_2') = \Phi^+$ und weiter gilt:

$$\Phi^+(w_1') \cap \Phi^+(w_2') = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_{i-1}}(s_{\alpha_{i-1}} \dots s_{\alpha_1}\mathtt{B}) = \mathtt{B}$$

Außerdem folgt induktiv über die Länge i, dass für die Vereinigung von $\Phi^+(w_1')$ und $\Phi^+(w_2')$ gilt:

$$\Phi^+(w_1') \cup \Phi^+(w_2') = \Phi^+$$

Damit ist der Satz 3.24 für ein allgemeines $\mathtt{B}$ bewiesen.

3.2. Spezifische Aussagen in A_n

Für Wurzelvektoren der $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ können bestimmte Relationen explizit beschrieben werden. Insbesondere kann man zeigen wie sie als iterierte Kommutatoren entstehen, vergleiche dazu [Kh15]. Außerdem lässt sich ihr Koprodukt gut berechnen.

Data der $U_q(\mathfrak{sl}_n)$

Die $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ ist die quantisiert universell Einhüllende der Liealgebra $\mathfrak{sl}_n$ mit dem Wurzelsystem $\Phi^+ = \{\mu = [\mu_1, \mu_2] := \sum_{i=\mu_1}^{\mu_2} \alpha_i \mid 1 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq n\}$ zur Basis $\Pi = \{\alpha_1, \dots \alpha_n\}$ mit Bilinearform $(\alpha_i, \alpha_j) = 2$ wenn $i = j$ und $-\delta_{i(j+1)} - \delta_{i(j-1)}$ sonst . Es gilt $|\Phi^+| = \frac{1}{2}(n+1)n$. Das Gewichtgitter Λ wird von den Fundamentalgewichten

$$\lambda_i = \frac{1}{n+1}[(n-i+1)\alpha_1 + 2(n-i+1)\alpha_2 \dots (i-1)(n-i+1)\alpha_{i-1} + i(n-i+1)\alpha_i + i(n-i)\alpha_{i+1} + \dots i\alpha_n]$$

aufgespannt. Die Algebra $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ wird also erzeugt von den Elementen $\{E_{\alpha_i}, F_{\alpha_i}, K_{\alpha_i}, K_{\alpha_i}^{-1}\}$ für $1 \leq i \leq n$. Ihre Weylgruppe W wird erzeugt von den einfachen Spiegelungen s_{α_i} mit den Relationen $s_{\alpha_i}^2 = 1$ und $s_{\alpha_j} s_{\alpha_i} s_{\alpha_j} = s_{\alpha_i} s_{\alpha_j} s_{\alpha_i}$ für $i = j \pm 1$ und $s_{\alpha_i} s_{\alpha_j} = s_{\alpha_j} s_{\alpha_i}$ sonst. Ein längstes Element in W ist $w_0 = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \dots s_{\alpha_n} s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_{n-1}} \dots s_{\alpha_1}$.

3.2.1. Kommutatorrelationen und Komultiplikation

Wie in Definition 1.26 ist der c-Kommutator für beliebige Elemente $X, Y \in U$, $c \in k^*$ gegeben durch:

$$[X, Y]_c = XY - cYX$$

und der q-Kommutator ist auf homogenen Elementen X_μ, Y_ν für $0 \neq \mu, \nu \in \Phi$ definiert als:

$$[X_\mu, Y_\nu] = X_\mu Y_\nu - q^{(\mu,\nu)} Y_\nu X_\mu$$

Bemerkung 3.28:
Wir können Hintereinanderausführungen verschiedener c-Kommutatoren wie folgt umformen: Seien $a, b, c \in U$ und $q_1, q_2, q_3 \in k^*$, dann gilt:

$$[[a, b]_{q_1}, c]_{q_2} = [a, [b, c]_{q_3}]_{\frac{q_1 q_2}{q_3}} - q_3 [[a, c]_{\frac{q_2}{q_3}}, b]_{\frac{q_1}{q_3}}$$

Das folgt leicht durch Umformung.

Lemma 3.29:
Der q-Kommutator in der A_n ist auf einfachen Wurzeln „assoziativ", d.h. für $i \in 1, \ldots n$ und $\alpha_i \in \Pi$ gilt

$$[E_{\alpha_i}, [E_{\alpha_{i+1}}, E_{\alpha_{i+2}}]] = [[E_{\alpha_i}, E_{\alpha_{i+1}}], E_{\alpha_{i+2}}]$$

Beweis: Die Gleichung lässt sich leicht ausrechnen. Es ist

$$\begin{aligned}
&[E_{\alpha_i}, [E_{\alpha_{i+1}}, E_{\alpha_{i+2}}]] \\
&= E_{\alpha_i} E_{\alpha_{i+1}} E_{\alpha_{i+2}} - q^{-1} E_{\alpha_i} E_{\alpha_{i+2}} E_{\alpha_{i+1}} - q^{-1} E_{\alpha_{i+1}} E_{\alpha_{i+2}} E_{\alpha_i} + q^{-2} E_{\alpha_{i+2}} E_{\alpha_{i+1}} E_{\alpha_i} \\
&[[E_{\alpha_i}, E_{\alpha_{i+1}}], E_{\alpha_{i+2}}] \\
&= E_{\alpha_i} E_{\alpha_{i+1}} E_{\alpha_{i+2}} - q^{-1} E_{\alpha_{i+1}} E_{\alpha_i} E_{\alpha_{i+2}} - q^{-1} E_{\alpha_{i+2}} E_{\alpha_i} E_{\alpha_{i+1}} + q^{-2} E_{\alpha_{i+2}} E_{\alpha_{i+1}} E_{\alpha_i}
\end{aligned}$$

□

Diese Aussage können wir noch verallgemeinern.

Lemma 3.30:
Gegeben ein beliebiges $w \in W$ mit einer beliebigen reduzierten Darstellung. Seien E_μ, E_ν und E_ζ Wurzelvektoren zu den Wurzeln $\mu, \nu, \zeta \in \Phi^+(w)$ mit $(\mu, \zeta) = 0$ und $E_\mu E_\zeta = E_\zeta E_\mu$ so gilt für die q-Kommutatoren:

$$[E_\mu, [E_\nu, E_\zeta]] = [[E_\mu, E_\nu], E_\zeta]$$

Beweis: Auch hier lassen sich die Kommutatoren leicht berechnen und es gilt:

$$\begin{aligned}
&[E_\mu, [E_\nu, E_\zeta]] \\
&= E_\mu E_\nu E_\zeta - q^{(\nu,\zeta)} E_\mu E_\zeta E_\nu - q^{(\mu,\nu+\zeta)} E_\nu E_\zeta E_\mu + q^{(\mu,\nu+\zeta)} q^{(\nu,\zeta)} E_\zeta E_\nu E_\mu \\
&[[E_\mu, E_\nu], E_\zeta] \\
&= E_\mu E_\nu E_\zeta - q^{(\mu,\nu)} E_\nu E_\mu E_\zeta - q^{(\zeta,\mu+\nu)} E_\zeta E_\mu E_\nu + q^{(\zeta,\mu+\nu)} q^{(\mu,\nu)} E_\zeta E_\nu E_\mu
\end{aligned}$$

□

Folgerung 3.31:
Die Wurzelvektoren in $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ sind iterierte Kommutatoren ([Kh15]).

Explizit gilt für eine reduzierte Darstellung eines Elements $w \in W$ der Länge $\ell(w) = k$ von der Form $w = s_{\alpha_{i_1}} \dots s_{\alpha_{i_k}}$ mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass β_k die Höhe $ht(\beta_k) = k$ hat, für den Wurzelvektor:

$$E_{\beta_k} = [E_{\alpha_{\tau(i_1)}}, [E_{\alpha_{\tau(i_2)}}, [E_{\alpha_{\tau(i_3)}}, [\dots E_{\alpha_{\tau(i_k)}}]] \dots]$$

für eine bestimmte Permutation τ von $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$.

Beweis: Gegeben eine reduzierte Darstellung eines Elements $w \in W$ der Form $w = s_{\alpha_{i_1}} \dots s_{\alpha_{i_k}}$ mit der Eigenschaft, dass β_k die Höhe $ht(\beta_k) = k$ hat, so wissen wir, dass die α_{i_j} paarweise verschieden sind. Außerdem gilt für alle $1 \leq m \leq k$, dass $(\sum_{j=m+1}^{k} \alpha_{i_j}, \alpha_{i_m}) = -1$. Wir zeigen jetzt die Behauptung durch Induktion über die Höhe $ht(\beta_k)$:

Für $k = 1$ ist die Aussage trivial, für $k = 2$ folgt sie aus der Definition des Lusztigautomorphismus: $T_{\alpha_{i_1}}(E_{\alpha_{i_2}}) = [E_{\alpha_{i_1}}, E_{\alpha_{i_2}}]$.

Sei $k > 2$, es gilt $E_{\beta_k} = T_{\alpha_{i_1}}(E_{\beta'_{k-1}})$ für ein β'_{k-1} zu dem Weylgruppenelement $w' = s_{\alpha_{i_2}} \dots s_{\alpha_{i_k}}$ mit $ht(\beta'_k) = k - 1$. Wegen der Induktionsvoraussetzung gilt also $E_{\beta_{k-1}} = T_{\alpha_{i_1}}([E_{\alpha_{\tau'(i_2)}}, [E_{\alpha_{\tau'(i_3)}}, \dots E_{\alpha_{\tau'(i_k)}}]] \dots])$ für eine Permutation τ' auf $i_2, i_3, \dots i_k$. Wir wissen schon, dass $(\alpha_{i_1}, \sum_{j=2}^{k} \alpha_{i_j}) = -1$. Weil alle α_{i_j} paarweise verschieden sind, gibt es genau ein $2 \leq m \leq k$ mit $\alpha_{\tau'(i_m)}$ sodass $(\alpha_{i_1}, \alpha_{\tau'(i_m)}) = -1$ und es gilt $(\alpha_{i_1}, \alpha_{\tau'(i_j)}) = 0$ sonst. Sei jetzt also o.B.d.A $i_1 = \tau'(i_m) - 1$, dann gilt:

$$T_{\alpha_{i_1}}([E_{\alpha_{\tau'(i_2)}}, [E_{\alpha_{\tau'(i_3)}}, [E_{\alpha_{\tau'(i_4)}}, [\dots E_{\alpha_{\tau'(i_k)}}]] \dots]) = [E_{\alpha_{\tau'(i_2)}}, [E_{\alpha_{\tau'(i_3)}}, \dots [[E_{\alpha_{i_1}}, E_{\alpha_{\tau'(i_m)}}], \dots E_{\alpha_{\tau'(i_k)}}]] \dots]$$

Wegen Lemma 3.30 können wir den Term umschreiben in:

$$[E_{\alpha_{\tau'(i_2)}}, [E_{\alpha_{\tau'(i_3)}}, \dots [E_{\alpha_{i_1}}, [E_{\alpha_{\tau'(i_m)}}, [\dots E_{\alpha_{\tau'(i_k)}}]] \dots]$$

Damit gilt:

$$E_{\beta_k} = [E_{\alpha_{\tau(i_1)}}, [E_{\alpha_{\tau(i_2)}}, [E_{\alpha_{\tau(i_3)}}, [\dots E_{\alpha_{\tau(i_k)}}]] \dots]$$

für die Permutation τ definiert durch $\tau(i_j) = \tau'(i_{j+1})$ für $j < m - 1$, $\tau(i_{m-1}) = i_1$ und $\tau(i_j) = \tau'(i_j)$ für $j \geq m$. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Bemerkung 3.32:
Ein Spezialfall von Folgerung 3.31 ist $w = s_{\alpha_i} s_{\alpha_{i+1}} \dots s_{\alpha_{i+m}}$ für ein $1 \leq i \leq i + m \leq n$. In diesem Fall gilt die Behauptung sogar für $\tau = id$, das heißt für $0 \leq k \leq m$ gilt:

$$E_{\beta_k} = [E_{\alpha_i}, [E_{\alpha_{i+1}}, [E_{\alpha_{i+2}}, [\dots E_{\alpha_{i+k}}]] \dots]$$

Weylgruppenelemente von dieser Form betrachten wir im Folgenden genauer. Wir definieren die Notation:

$$w(i, i+m) := s_{\alpha_i} s_{\alpha_{i+1}} \dots s_{\alpha_{i+m}} \text{ für } 1 \leq i \leq i + m \leq n$$

und schreiben für die Wurzeln $\beta_k \in \Phi^+(w(i,i+m))$ die zu $w(i,i+m)$ gehören $\beta_k(i,i+m)$. Es gilt hier:

$$\beta_k(i,i+m) = [i,i+k] = \sum_{j=i}^{i+k} \alpha_j$$

Wir beweisen nun einige Kommutatorrelationen in $\Phi^+(w(i,i+m))$.

Lemma 3.33:
Sei $w = w(i,i+m)$ für $1 \leq i \leq i+m \leq n$, dann gelten für die zu β_k gehörigen Wurzelvektoren E_{β_k}: die folgenden Kommutatorrelationen in U^+:

$$[E_{\alpha_i}, E_{\beta_{m+1}}] = 0 \tag{3.2}$$
$$[E_{\beta_j}, E_{\beta_{m+1}}] = 0 \textit{ für alle } \beta_j \in \Phi^+(w) \tag{3.3}$$
$$[E_{\alpha_l}, E_{\beta_{m+1}}] = 0 \textit{ für alle } \alpha_l \in \Pi \textit{ mit } i \leq l \leq i+m \tag{3.4}$$

Beweis: Wegen Folgerung 3.31 können wir für alle $k \leq m$ den Wurzelvektor E_{β_k} schreiben als :

$$E_{\beta_k} = [E_{\alpha_i}, [E_{\alpha_{i+1}}, [\ldots, E_{\alpha_{i+k-1}}]]]$$

Natürlich gilt $[E_{\alpha_i}, E_{\beta_{k-2}(i+2,i+k-1)}] = [E_{\alpha_i}, [E_{\alpha_{i+2}}, [E_{\alpha_{i+3}}, [\ldots, E_{\alpha_{i+k-1}}]]] = 0$. Also folgt mit Lemma 3.30 schon:

$$E_{\beta_k} = [[E_{\alpha_i}, E_{\alpha_{i+1}}], [E_{\alpha_{i+2}}, \ldots, E_{\alpha_{i+k-1}}]]]$$

Wir können mit der Formel (1.4) aus der Definition 1.22 leicht folgern:

$$[E_{\alpha_i}, [E_{\alpha_i}, E_{\alpha_{i+1}}]_{q^{-1}}]_q = 0$$

Betrachten wir jetzt den Kommutator in U^+ aus Lemma 3.33 (3.2). Mit der Formel in Bemerkung 3.28 folgt:

$$\begin{aligned}
[E_{\alpha_i}, E_{\beta_{m+1}}] =& [E_{\alpha_i}, [E_{\alpha_i}, [E_{\alpha_{i+1}}, [\ldots, E_{\alpha_{i+m}}]]]\\
=& [E_{\alpha_i}, [[E_{\alpha_i}, E_{\alpha_{i+1}}], [\ldots, E_{\alpha_{i+m}}]]]\\
=& [E_{\alpha_i}, [[E_{\alpha_i}, E_{\alpha_{i+1}}]_{q^{-1}}, [\ldots, E_{\alpha_{i+m}}]]_{q^{-1}}]_q\\
=& [[E_{\alpha_i}, [E_{\alpha_i}, E_{\alpha_{i+1}}]_{q^{-1}}]_q, [E_{\alpha_{i+2}}, [E_{\alpha_{i+3}}, [\ldots, E_{\alpha_{i+m}}]]_{q^{-1}}]_{q^{-1}}\\
&+ q^{-1}[[E_{\alpha_i}, [E_{\alpha_{i+2}}, [E_{\alpha_{i+3}}, [\ldots, E_{\alpha_{i+m}}]]_{q^{-1}}]_1, [E_{\alpha_i}, E_{\alpha_{i+1}}]_{q^{-1}}]_{q^2}\\
=& 0
\end{aligned}$$

Damit ist die erste Behauptung bewiesen.

Die zweite Behauptung folgt aus der ersten durch Anwenden des Lusztigautomorphismus. Es gilt:

$$\begin{aligned}
[E_{\beta_j}, E_{\beta_m}]_q =& [T_{w(i,i+j-2)}(E_{\alpha_{j+i-1}}), T_{w(i,i+j-2)}(E_{\beta_{m-j}(i+j-1,i+m)})]_q\\
=& T_{w(i,i+j-2)}([E_{\alpha_{j+i-1}}, E_{\beta_{m-j}(i+j-1,i+m)}]_q) = 0
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt dabei aus der Behauptung (3.33).

Für die dritte Behauptung schauen wir uns zunächst für ein $1 < l \leq n-1$ den Kommutator von E_{α_l} mit $E_{\beta_3(l-1,l+1)} = [E_{\alpha_{l-1}}, [E_{\alpha_l}, E_{\alpha_{l+1}}]_{q^{-1}}]_{q^{-1}}$ an. Es gilt hier:

$$\begin{aligned}
&[E_{\alpha_l}, [E_{\alpha_{l-1}}, [E_{\alpha_l}, E_{\alpha_{l+1}}]_{q^{-1}}]_{q^{-1}}]_1 \\
=&E_{\alpha_l}E_{\alpha_{l-1}}E_{\alpha_l}E_{\alpha_{l+1}} - q^{-1}E_{\alpha_l}E_{\alpha_{l-1}}E_{\alpha_{l+1}}E_{\alpha_l} - q^{-1}E_{\alpha_l}^2E_{\alpha_{l+1}}E_{\alpha_{l-1}} + q^{-2}E_{\alpha_l}E_{\alpha_{l+1}}E_{\alpha_l}E_{\alpha_{l-1}} \\
&- E_{\alpha_{l-1}}E_{\alpha_l}E_{\alpha_{l+1}}E_{\alpha_l} + q^{-1}E_{\alpha_{l-1}}E_{\alpha_{l+1}}E_{\alpha_l}^2 + q^{-1}E_{\alpha_l}E_{\alpha_{l+1}}E_{\alpha_{l-1}}E_{\alpha_l} - q^{-2}E_{\alpha_{l+1}}E_{\alpha_l}E_{\alpha_{l-1}}E_{\alpha_l} \\
=&(E_{\alpha_l}E_{\alpha_{l-1}}E_{\alpha_l} - q^{-1}E_{\alpha_l}^2E_{\alpha_{l-1}} + \frac{q^{-2}}{(q+q^{-1})}E_{\alpha_l}^2E_{\alpha_{l-1}} - \frac{1}{(q+q^{-1})}E_{\alpha_{l-1}}E_{\alpha_l}^2)E_{\alpha_{l+1}} \\
&+ E_{\alpha_{l+1}}(q^{-1}E_{\alpha_{l-1}}E_{\alpha_l}^2 - q^{-2}E_{\alpha_l}E_{\alpha_{l-1}}E_{\alpha_l} + \frac{q^{-2}}{(q+q^{-1})}E_{\alpha_l}^2E_{\alpha_{l-1}} - \frac{1}{(q+q^{-1})}E_{\alpha_{l-1}}E_{\alpha_l}^2) \\
=&0
\end{aligned}$$

□

Wegen Folgerung 3.31 und Lemma 3.30 können wir für alle $i \leq l \leq i+m-1$ den Wurzelvektor $E_{\beta_{m+1}}$ schreiben als:

$$E_{\beta_{m+1}} = [E_{\alpha_i}, [E_{\alpha_{i+1}}, [E_{\alpha_{l-1}}, [E_{\alpha_l}, E_{\alpha_{l+1}}]] \ldots, E_{\alpha_{i+m}}]]]$$

Also gilt für den Kommutator:

$$[E_{\alpha_l}, E_{\beta_{m+1}}] = [E_{\alpha_i}, [E_{\alpha_{i+1}}, [E_{\alpha_l}, [E_{\alpha_{l-1}}, [E_{\alpha_l}, E_{\alpha_{l+1}}]] \ldots, E_{\alpha_{i+m}}]]] = 0$$

Damit ist die dritte Behauptung bewiesen.

Folgerung 3.34:
In A_n q-kommutiert der Wurzelvektor $E_{\beta_n(1,n)}$ zur Wurzel $\beta_n(1,n)$ in $\Phi^+(w(1,n))$ mit allen homogenen Elementen aus U^+.

Die Folgerung folgt direkt aus Lemma 3.33 (3.4).

Vermutung 3.35:
Sei $\beta_{\max}$ die längste positive Wurzel in einem beliebigen Wurzelsystem Φ. Dann gibt es einen Wurzelvektor $E_{\beta_{max}}$ zu einer bestimmten reduzierten Darstellung vom maximalen Element w_0 der mit allen Wurzelvektoren in $U^+[w_0]$ q-kommutiert.

Lemma 3.36:
In A_n gilt die Vermutung 3.35.

Beweis: Das folgt direkt aus Folgerung 3.34. □

Wir betrachten jetzt die Komultiplikation von bestimmten Wurzelvektoren genauer.

Lemma 3.37:
Für ein Element $E_\mu = [E_{\alpha_{i_1}}, [E_{\alpha_{i_2}}, [E_{\alpha_{i_3}}, [\ldots E_{\alpha_{i_k}}]]$ zu einer Wurzel $\mu \in \Phi^+$ gilt:

$$\Delta(E_\mu) \subset \sum_{\nu \in \Phi^+ \text{ mit } \nu \prec \mu} U_{\mu-\nu}K_{\mu-\nu} \otimes U_\nu \tag{3.5}$$

So ein Element E_μ kann Beispielsweise Wurzelvektor zu einem Weylgruppenelement wie in Folgerung 3.31 sein.

Beweis: Wir zeigen die Behauptung induktiv über die Höhe von μ. Für $\mu \in \Pi$ ist die Aussage trivial. Sei jetzt $E_\mu = [E_\alpha, E'_\nu]$ für eine einfache Wurzel $\alpha \in \Pi$ und ein Element E'_ν zur Wurzel $\nu = \mu - \alpha$ von der Form $E'_\nu = [E_{\alpha_{i_2}}, [E_{\alpha_{i_2}}, [E_{\alpha_{i_3}}, [\dots E_{\alpha_{i_k}}]]$. Dieses E'_ν könnte auch ein Wurzelvektor wie in Folgerung 3.31 sein, aber nicht notwendig zu derselben reduzierten Darstellung des Weylgruppenelements zu welcher E_μ gehört. Nach Induktion gilt $\Delta(E'_\nu) = \sum_{\zeta \leq \nu} c_{\nu-\zeta} X_{\nu-\zeta} K_\zeta \otimes X_\zeta$ für Elemente $X_\zeta \in U_\zeta$, $X_{\nu-\zeta} \in U_{\nu-\zeta}$ sowie $c_{\nu-\zeta} \in k$ mit $\zeta \in \Phi^+$. Wir berechnen dann die Komultiplikation vom q-Kommutator:

$$\begin{aligned}
&\Delta([E_\alpha, E'_\nu]) = \Delta(E_\alpha E'_\nu - q^{-1} E'_\nu E_\alpha) \\
&= (E_\alpha \otimes 1 + K_\alpha \otimes E_\alpha)(\sum_{\zeta < \nu} c_{\nu-\zeta} X_{\nu-\zeta} K_\zeta \otimes X_\zeta) - q^{-1}(\sum_{\zeta < \nu} c_{\nu-\zeta} X_{\nu-\zeta} K_\zeta \otimes X_\zeta)(E_\alpha \otimes 1 + K_\alpha \otimes E_\alpha) \\
&= \sum_{\zeta < \nu} c_{\nu-\zeta}(E_\alpha X_{\nu-\zeta} K_\zeta - q^{-1} X_{\nu-\zeta} K_\zeta E_\alpha) \otimes X_\zeta + \sum_{\zeta < \nu} c_{\nu-\zeta} X_{\nu-\zeta} K_\zeta K_\alpha \otimes E_\alpha X_\zeta q^{(\alpha, \nu-\zeta)} - q^{-1} X_\zeta E_\alpha
\end{aligned}$$

Der erste Term erfüllt die Bedingung nach Induktionsvoraussetzung. Der zweite Term $\sum_{\zeta < \nu} c_{\nu-\zeta} X_{\nu-\zeta} K_\zeta K_\alpha \otimes E_\alpha X_\zeta q^{(\alpha, \nu-\zeta)} - q^{-1} X_\zeta E_\alpha$ ist entweder 0 für $(\alpha, \zeta) = 0$ oder ein Element $X_{\zeta+\alpha} \in U_{\zeta+\alpha}$ für eine Wurzel $\zeta + \alpha \in \Phi^+$. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Bemerkung 3.38:
In dem Spezialfall von Folgerung Lemma 3.37 $w = s_{\alpha_i} s_{\alpha_{i+1}} \dots s_{\alpha_{i+m}}$ und $\mu = [i, k]$ für ein $1 \leq k \leq m - 1 \leq n$ gilt sogar

$$\Delta(E_{\beta_k(i,i+m)}) = \sum_{j=i}^{k-1} E_{\beta_j(i,i+j-1)} K_{\beta_{k-j}(i+j,i+m)} \otimes E_{\beta_{k-j}(i+j,i+m)}$$

Beweis: Das folgt induktiv über k:

Für $k = 1$ ist $\beta_k(i, i+m) \in \Pi$ und die Behauptung ist trivial. Sei $k > 1$, dann gilt: $E_{\beta_k(i,i+m)} = [E_{\beta_1(i,i+m)}, E_{\beta_{k-1}(i+1,i+m)}] = [E_{\alpha_i}, E_{\beta_{k-1}(i+1,i+m)}]$. Nach Induktionsvoraussetzung ist die Behauptung für $E_{\beta_{k-1}(i+1,i+m)}$ schon bewiesen, wir betrachten dann die Komultiplikation vom

q-Kommutator:

$$\begin{aligned}
&\Delta([E_{\beta_1(i,i+m)}, E_{\beta_{k-1}(i+1,i+m)}]) \\
=&\Delta(E_{\beta_1(i,i+m)}, E_{\beta_{k-1}(i+1,i+m)} - q^{-1}E_{\beta_{k-1}(i+1,i+m)}E_{\beta_1(i,i+m)}) \\
=&(E_{\beta_1(i,i+m)} \otimes 1 + K_\alpha \otimes E_{\beta_1(i,i+m)})(\sum_{j=1}^{k-1} E_{\beta_j(i+1,i+j)}K_{\beta_{k-j}(i+j+1,i+m)} \otimes E_{\beta_{k-j}(i+j+1,i+m)}) \\
&- q^{-1}(\sum_{j=1}^{k-1} E_{\beta_j(i+1,i+j)}K_{\beta_{k-j}(i+j+1,i+m)} \otimes E_{\beta_{k-j}(i+j+1,i+m)})(E_{\beta_1(i,i+m)} \otimes 1 + K_\alpha \otimes E_{\beta_1(i,i+m)}) \\
=&\sum_{j=0}^{k-1} E_{\beta_j(i,i+j-1)}K_{\beta_{k-j}(i+j,i+m)} \otimes E_{\beta_{k-j}(i+j,i+m)}
\end{aligned}$$

□

3.2.2. Weylgruppenelemente sog. Typ „Palme“

Mit diesen allgemeinen Kriterien wollen wir die Kommutatoren von bestimmten Wurzelvektoren berechnen, die später eine wichtige Rolle spielen werden. Insbesondere schauen wir uns die Kommutatoren von Wurzelvektoren zu bestimmten Weylgruppenelementen mit spezifischen reduzierten Darstellungen genauer an. Wir definieren zunächst verschiedene Typen von Weylgruppenelementen in A_n, die zur Beschreibung der Rechtscoidealunteralgebren von Typ 3 hilfreich sind.

Definition 3.39:

- Eine *Leiter* $w(i, j)$ für $1 \leq i \leq j \leq n$ ist das folgende Weylgruppenelement zusammen mit einer reduzierten Darstellung:

  $$w(i, j) := s_{\alpha_i} s_{\alpha_{i+1}} \dots s_{\alpha_j}$$

  Für die zugehörigen Wurzeln in $\Phi^+(w(i, j))$ schreiben wir $\beta_k(i, j) := s_{\alpha_i} s_{\alpha_{i+1}} \dots s_{\alpha_{i+k-2}}(\alpha_{i+k-1}) = [i, i + k]$.

- Ein V_i^{lk} für $1 \leq i \leq n$ und $0 \leq l \leq n-i$, $0 \leq k \leq i-1$ ist das folgende Weylgruppenelement zusammen mit einer reduzierten Darstellung:

  $$V_i^{lk} := s_{\alpha_i} s_{\alpha_{i+1}} s_{\alpha_{i+2}} \dots s_{\alpha_{i+l}} s_{\alpha_{i-1}} s_{\alpha_{i-2}} \dots s_{\alpha_{i-k}}$$

  Es gilt natürlich $\Phi^+(V_i^{lk}) := \{\sum_{j=0}^{r} \alpha_{i+j}, \sum_{j=-s}^{0} \alpha_{i+j} \mid 0 \leq r \leq l, 0 \leq s \leq k\}$.

- Eine *Raute* $\diamond_{i,j}$ für ein $1 \leq i \leq n$ und ein $j \leq \min\{i-1, n-i\}$ ist das folgende Weylgruppenelement zusammen mit einer reduzierten Darstellung:

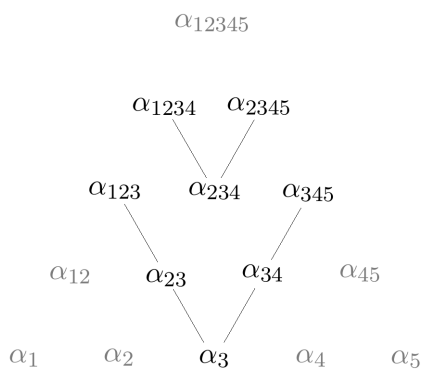
  $$\diamond_{i,j} := V_i^{jj} V_i^{j-1\,j-1} \dots V_i^{00}$$

- Eine*Palme* Ψ_i für ein $1 \leq i \leq n$ ist das folgende Weylgruppenelement zusammen mit einer reduzierten Darstellung:
$$\Psi_i := V_i^{l_1 k_1} V_i^{l_2 k_2} \dots$$
Mit $0 \leq l_j \leq n - i$, $0 \leq k_j \leq i - 1$ sowie der Eigenschaft $l_j > l_{j+1}$ und $k_j > k_{j+1}$.

Beispiel 3.40:
Sei $\mathfrak{g} = A_5$, dann ist ein Beispiel für obigen Satz eine Palme $\Psi_3 = V_3^{22} V_3^{11}$ der Höhe 2:

$$w = \Psi_3 = s_{\alpha_3} s_{\alpha_4} s_{\alpha_5} s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} s_{\alpha_3} s_{\alpha_2} s_{\alpha_4}$$

$$\begin{aligned}\Phi^+(w) = \{&\alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_3 + \alpha_2, \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1,\\ &\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \}\end{aligned}$$



Wir werden jetzt bestimmte Kommutatorrelationen und Komultiplikationen der Wurzelvektoren berechnen, die zu diesen Weylgruppenelementen gehören.

Lemma 3.41:
Gegeben ein $w = w(i, i + p)$ für ein $1 \leq i \leq i + p \leq n$ und Charaktere ϕ^+ auf $\psi(U^+[w])$ und ϕ^- auf $U^-[w]$ mit $\phi^+(\psi(E_{\alpha_i})) = \lambda_{\alpha_i}$ und 0 sonst, und $\phi^-(F_{\alpha_i}) = \lambda'_{\alpha_i}$ und 0 sonst, sodass $\lambda_{\alpha_i}\lambda_{\alpha'_i} = \frac{q^2}{(q-q^{-1})(1-q^2)}$ wie in Beispiel 1.54. Seien $\bar{E}_\mu = (\phi^+ \otimes id)\Delta(\psi(E_\mu))$ und $\bar{F}_\mu = (\phi^- \otimes id)\Delta(F_\mu)$ für $\mu \in \Phi^+(w)$ dann gelten die folgenden Regeln:

$$[\bar{E}_{\alpha_i}, \bar{F}_{\alpha_i}]_{q^2} = \frac{q^2}{q - q^{-1}} \tag{3.6}$$

$$[\bar{E}_{\beta_l}, \bar{F}_{\beta_m}]_q = 0 \textit{ für alle } i \leq l, m \leq p + 1 \textit{ mit } l \neq m \tag{3.7}$$

$$[\bar{E}_{\beta_j}, \bar{F}_{\beta_j}]_{q^2} = q^2 [\bar{E}_{\beta_{j-1}}, \bar{F}_{\beta_{j-1}}]_1 \textit{ für alle } i < j \leq p + 1 \tag{3.8}$$

Beweis: Die erste Behauptung sieht man wie folgt:

$$\begin{aligned}
[\bar{E}_{\alpha_i}, \bar{F}_{\alpha_i}]_{q^2} =& [E_{\alpha_i}K_{\alpha_i}^{-1} + \lambda_{\alpha_i}K_{\alpha_i}^{-1}, F_{\alpha_i} + \lambda'_{\alpha_i}K_{\alpha_i}^{-1}]_{q^2} \\
&= (E_{\alpha_i}K_{\alpha_i}^{-1} + \lambda_{\alpha_i}K_{\alpha_i}^{-1})(F_{\alpha_i} + \lambda'_{\alpha_i}K_{\alpha_i}^{-1}) - q^2(F_{\alpha_i} + \lambda'_{\alpha_i}K_{\alpha_i}^{-1})(E_{\alpha_i}K_{\alpha_i}^{-1} + \lambda_{\alpha_i}K_{\alpha_i}^{-1}) \\
&= E_{\alpha_i}K_{\alpha_i}^{-1}F_{\alpha_i} - q^2F_{\alpha_i}E_{\alpha_i}K_{\alpha_i}^{-1} + (1-q^2)\lambda_{\alpha_i}K_{\alpha_i}^{-1}\lambda'_{\alpha_i}K_{\alpha_i}^{-1} \\
&= q^2(E_{\alpha_i}F_{\alpha_i} - F_{\alpha_i}E_{\alpha_i})K_{\alpha_i}^{-1} + (1-q^2)\lambda_{\alpha_i}\lambda'_{\alpha_i}K_{\alpha_i}^{-2} \\
&= \frac{q^2}{q-q^{-1}}(1-K_{\alpha_i}^{-2}) + (1-q^2)\lambda\lambda' K_{\alpha_i}^{-2} = \frac{q^2}{q-q^{-1}}1
\end{aligned}$$

Für die anderen beiden stellen wir zunächst fest, dass gilt:

$$[\bar{E}_{\alpha_i}, \bar{F}_{\beta_j(i+1,j)}]_{q^{-1}} = [\bar{E}_{\alpha_i}, F_{\beta_j(i+1,j)}]_{q^{-1}} = [E_{\alpha_i}K_{\alpha_i}^{-1} + \lambda_{\alpha_i}K_{\alpha_i}^{-1}, F_{\beta_j(i+1,j)}]_{q^{-1}} = 0$$

Mit der Notation von oben für ein $i \neq j \leq n$. Damit folgt mit der Formel aus 3.28 leicht:

$$[\bar{E}_{\alpha_i}, \bar{F}_{\beta_j}]_q = [\bar{E}_{\alpha_i}, [\bar{F}_{\alpha_i}, \bar{F}_{\beta_j(i+1,j)}]_q]_q = 0$$

Sei jetzt die dritte Behauptung (3.8) schon gezeigt für $j = k$. Wir zeigen dann die zweite Behauptung (3.7) für $l = k$ und o.B.d.A. $m > k$. Wir verwenden dazu wieder die Formel aus 3.28, es gilt:

$$\begin{aligned}
[\bar{E}_{\beta_k}, \bar{F}_{\beta_m}]_q &= [\bar{E}_{\beta_k}, [\bar{F}_{\beta_k}, \bar{F}_{\beta_{m-k}(k+1,m)}]_q]_q \\
&= [[\bar{E}_{\beta_k}, \bar{F}_{\beta_k}]_{q^2}, \bar{F}_{\beta_{m-k}(k+1,m)}]_1 + q[[\bar{E}_{\beta_k}, \bar{F}_{\beta_{m-k}(k+1,m)}]_{q^{-1}}, \bar{F}_{\beta_k}]_q \\
&= 0
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Die dritte Behauptung lässt sich ebenso mit 3.28 beweisen. Sei dazu die zweite Behauptung schon gezeigt für $l = j-1$ und $m = j$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
[\bar{E}_{\alpha_j}, \bar{F}_{\alpha_j}]_q &= [\bar{E}_{\alpha_j}, [\bar{F}_{\beta_{j-1}}, \bar{F}_{\alpha_j}]_q]_q \\
&= [[\bar{E}_{\alpha_j}, \bar{F}_{\beta_{j-1}}]_{q^{-1}}, \bar{F}_{\alpha_j}]_{q^3} + q[[\bar{E}_{\alpha_j}, \bar{F}_{\alpha_j}]_{q^2}, \bar{F}_{\beta_{j-1}}]_{q^{-2}} \\
&= q^2\bar{F}_{\beta_{j-1}}
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir in der dritten Behauptung:

$$\begin{aligned}
[\bar{E}_{\beta_j}, \bar{F}_{\beta_j}]_{q^2} &= [[\bar{E}_{\beta_{j-1}}, E_{\alpha_j}]_{q^{-1}}, \bar{F}_{\beta_j}]_{q^2} \\
&= [\bar{E}_{\beta_{j-1}}, [E_{\alpha_j}, \bar{F}_{\beta_j}]_q]_1 + q[[\bar{E}_{\beta_{j-1}}, \bar{F}_{\beta_j}]_q, E_{\alpha_j}]_{q^{-2}} \\
&= q^2[\bar{E}_{\beta_{j-1}}, \bar{F}_{\beta_{j-1}}]_1
\end{aligned}$$

Mit Induktion können wir so die Behauptungen (3.8) und (3.7) beweisen. □

3.2.3. Aussagen zu Wurzelvektoren in $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ und ihren Darstellungen

Sei im Folgenden $C = \psi(U^+[w^+])_{\phi^+} T_L U^-[w^-]_{\phi^-} \subset U_q(\mathfrak{sl}_n)$ eine trianguläre Rechtscoidealunteralgebra im Sinne der Definitonen aus Kapitel 2.

Lemma 3.42:
Gegeben ein $w \in W$. Ein Charakter ϕ auf $\psi(U^+[w])$ mit $supp(\phi) = A \cup B$ für zwei disjunkte und paarweise orthogonale Mengen $A, B \subset \Phi^+$ lässt sich schreiben als $\phi = (\phi_A \otimes \phi_B)\Delta$ für Charaktere $\phi_A|_A = \phi$ und $\phi_A = 0$ sonst bzw. $\phi_B|_B = \phi$ und $\phi_B = 0$ sonst.

Beweis: Es gilt $\phi(E_\mu) = \sum(\phi_A(E_{\mu_{(1)}}) \otimes \phi_B E_{\mu_{(2)}}))$, weil in A_n für $\mu = \mu_{(1)} + \mu_{(2)}$ bestimmt nicht $\mu_{(1)} \perp \mu_{(2)}$ gilt. Also können wir C_ϕ schreiben als $(C_{\phi_A})_{\phi_B}$, denn für $E_\mu \in C$ gilt:

$$(\phi_A \otimes id)\Delta(\phi_B \otimes id)\Delta(E_\mu) = \phi_A(E_{\mu_{2_1}})\phi_B(E_{\mu_1})E_{\mu_{2_2}}$$
$$= \phi_A(E_{\mu_{1_2}})\phi_B(E_{\mu_{1_1}})E_{\mu_2} = ((\phi_A \otimes \phi_B)\Delta \otimes id)\Delta(E_\mu) = (\phi \otimes id)\Delta(E_\mu) \qquad \square$$

Lemma 3.43:
Seien $\bar{E}_\mu$, $\bar{F}_\mu$ zwei charakterverschobene Wurzelvektoren in $C = \psi(U^+[w^+])_{\phi^+} T_L U^-[w^-]_{\phi^-}$ zu einer Wurzel $\mu = [\mu_1, \mu_2] \in \Phi^+(w^+) \cap \Phi^+(w^-)$ sodass für alle $\nu \in supp(\phi^+) \cap supp(\phi^-)$ mit $\nu \prec \mu$ gilt $(\nu, \mu) = 0$, dann ist C nicht ede.

Beweis: Unsere allgemeine Strategie zur Konstruktion von irreduziblen Darstellungen von Dimension größer 1 ist wie folgt: Wir betrachten die Wirkung des Kommutators $[E, F]_1 \in C$ auf einer geeigneten endlichdimensionalen $U_q(\mathfrak{g})$-Darstellung $V = L(\lambda)$, welche wir auf C einschränken wollen. Der Kommutator wirkt trivial auf jeder eindimensionalen Darstellung von C und damit nilpotent auf allen Darstellungen von C, deren Kompositionsreihe nur eindimensionale Darstellungen enthält.

In unserem Fall gilt wegen $(\nu, \mu) = 0$ für alle $k' < \mu_2$ und $j' > \mu_1$ dass $[j', \mu_2], [\mu_1, k'] \notin (supp(\phi^+) \cap supp(\phi^-))$. Wegen dieser Einschränkung an $supp(\phi^+)$ wirkt $\bar{E}_\mu$ also auf der winzigen Darstellung $M(\lambda_1)$ zum Höchstgewicht λ_1 genauso wie $E_\mu K_\mu^{-1}$, ebenso wirkt $\bar{F}_\mu$ so wie F_μ.

Falls wir für ein gegebens $\mathfrak{g}, \mu$ ein $\lambda, v \in V(\lambda)$ finden können, sodass $[E_\mu K_\mu^{-1}, F_\mu]_1.v = cv$ mit $c \neq 0$, so kann der Kommutator nicht nilpotent wirken und folglich muss $V|_C$ mindestens einen irreduziblen Kompositionsfaktor der Dimension größer 1 haben, also ist C nicht ede. Diese Bedingung ist zum Beispiel für $\mu \in \Pi$ trivialerweise für den Höchstgewichtsvektor v erfüllt, aber im Allgemeinen kennen wir $[E_\mu K_\mu^{-1}, F_\mu]_1$ nicht.

Im Fall der A_n können wir die Bedingung explizit auf der winzigen Darstellung $V = V(\lambda_1)$ nachrechnen. Sei $\mu = \sum_{k=\mu_1}^{\mu_2} \alpha_k$. Die Wirkung der einfachen Wurzelvektoren ist dann explizit

$$F_{\alpha_{k+1}}.v_{\lambda_1 - \alpha_1 - \ldots - \alpha_k} \sim v_{\lambda_1 - \alpha_1 - \ldots - \alpha_{k+1}} \tag{3.9}$$
$$F_{\alpha_j}.v_{\lambda_1 - \alpha_1 - \ldots - \alpha_k} = 0, \quad j \neq k+1 \tag{3.10}$$

und alle Gewichtsräume sind eindimensional. Betrachten wir nun $v := v_{\lambda_1-\alpha_1-\ldots-\alpha_{\mu_1-1}}$, so ist $E_\mu K_\mu^{-1}.v$ offenbar trivial, $F_\mu.v$ ist ein nichttriviales Vielfaches von $v_{\lambda_1-\alpha_1-\ldots-\alpha_{\mu_2}}$, weil nur der Summand $F_{\alpha_{\mu_2}} \cdots F_{\alpha_{\mu_1}}$ nichttrivial wirken kann, und mit derselben Argumentation ist auch $E_\mu K_\mu^{-1} F_\mu.v$ ein nichttriviales Vielfaches von v. Damit ist v ein nichttrivialer Eigenvektor für den Kommutator, damit folgt nach der obigen Ausführung die Behauptung. □

Folgerung 3.44:
Seien $\bar{E}_\mu$, $\bar{F}_\mu$ zwei charakterverschobene Wurzelvektoren in $C = \psi(U^+[w^+])_{\phi^+} T_L U^-[w^-]_{\phi^-}$ zu einer Wurzel $\mu = [\mu_1, \mu_2] \in supp(\phi^+) \cap supp(\phi^-)$ sodass für alle $\mu \neq \nu \in supp(\phi^+) \cap supp(\phi^-)$ mit $\nu \prec \mu$ gilt $(\nu, \mu) = 0$, und $\phi^+(E_\mu K_\mu^{-1}) = \lambda$, $\phi^-(F_\mu) = \lambda'$ mit $\lambda\lambda' \neq \frac{q^2}{(1-^2)(q-q^{-1})}$, dann ist C nicht ede.

Beweis: Wie im Beweis zu Lemma 3.43 sehen wir, dass auf der winzigen Darstellung zum Höchstgewicht λ_{μ_1} das Element $\bar{E}_\mu$ so wie $E_\mu K_\mu^{-1} + (1-q^2)\lambda K_\mu^{-1}$ und $\bar{F}_\mu$ so wie $F_\mu + (q^{-1}-q)\lambda' K_\mu^{-1}$ wirkt. Die Darstellung hat also wieder eine mehrdimensionale irreduzible Unterdarstellung. □

Lemma 3.45:
Gegeben $C = \psi(U^+[w])_{\phi^+} T_L U^-[w]_{\phi^-}$ für die gilt $supp(\phi^+) = supp(\phi^-) =: supp(\phi)$ und zwei charakterverschobene Wurzelvektoren $\bar{E}_\mu, \bar{F}_\mu$ zu einer Wurzel $\mu = [\mu_1, \mu_2] \notin \Pi$ mit $\mu \notin supp(\phi)$, aber $\alpha_r \neq \alpha_s \in \mathrm{supp}(\phi) \cap \Pi$ und es gebe zwei unterschiedliche reduzierte Darstellungen w_1 und w_2 von w mit $E_\mu = T_{w_1}(E_\alpha)$ und $F_\mu = T_{w_2}^{-1}(F_\beta)$, sodass gilt:

$$\bar{E}_\mu = E_\mu K_\mu^{-1} + X_{\mu-\alpha_r} K_\mu^{-1} \quad \bar{F}_\mu = F_\mu + Y_{\mu-\alpha_s} K_{\alpha_s}^{-1}$$

für zwei bestimmte Elemente $X_{\mu-\alpha_s} \in U^+_{\mu-\alpha_s}$ und $Y_{\mu-\alpha_r} \in U^-_{\mu-\alpha_r}$, dann ist C nicht ede.

Beweis: Falls $(\alpha_r, \mu) = 0$ und $(\alpha_s, \mu) = 0$ so ist die Situation ein Spezialfall des vorhergehenden Lemmas 3.43. Es genügt also den Fall $r = \mu_1$ (bzw. $r = \mu_2$) zu betrachten: Dann wirkt aber $\bar{E}_\mu$ auf der winzigen Darstellung zum Höchstgewicht λ_1 genauso wie $E_\mu K_\mu^{-1}$. Damit sind wieder die Voraussetzungen im Beweis von Lemma 3.43 erfüllt und wir finden eine mehrdimensionale irreduzible Darstellung als Kompositionsfaktor von $V(\lambda_1)|_C$. □

Daraus folgt direkt für trianguläre Borelunteralgebren $\psi(U^+[w^+])_{\phi^+} T_L U^-[w^-]_{\phi^-}$ und Wurzeln μ wie oben, dass $\mu \in supp(\phi^+) \cap supp(\phi^-)$ liegen muss.

Teil III.

Allgemeine Rechtscoidealunteralgebren

4. Basistheorem

Ziel dieses Kapitels ist die geschickte Wahl eines Algebra-Erzeugendensystems von Rechtscoidealunteralgebren C von $U = U_q(\mathfrak{g})$ vorzustellen. Das heißt einer Menge Z von Elementen in C, welche die Rechtscoidealunteralgebra $C = \langle Z \rangle$ als Algebra erzeugen.

Insbesondere wird gezeigt, dass man ein Erzeugendensystem von Rechtscoidealunteralgebren C, für die gilt $C^0 := C \cap U^0$ ist eine Unterhopfalgebra, wählen kann aus Elementen dessen Leitterme in $U^{\geq 0}$ bzw. $U^{\leq 0}$ liegen. Wir vermuten sogar, dass sich ein Erzeugendensystem wählen lässt, welches aus Elementen der folgenden Form besteht:

$$\overline{E}_\mu + \lambda_F K_{\mu-\nu}^{-1} \overline{F}_\nu + \lambda_K K_\mu^{-1} \tag{4.1}$$

Für Wurzelvektoren E_μ bzw. F_ν in $\psi(U^+[w_1])$ bzw. $U^-[w_2]$ bezüglich bestimmter reduzierter Darstellungen der Elements w_1 und $w_2 \in W$ und mit Charakteren ϕ_E, ϕ_F auf den Unteralgebren $\psi(U^+[w_1])T_L$ bzw. $U^-[w_2]T_L$. Dabei ist $\overline{E}_\mu := (\phi_E \otimes id)\Delta(\psi(E_\mu))$ und $\overline{F}_\nu := (\phi_F \otimes id)\Delta(F_\mu)$.

C sei im Folgenden eine Rechtscoidealunteralgebra mit der Eigenschaft $C^0 := C \cap U^0$ ist eine Unterhopfalgebra. Wir nennen den U^0-*Anteil* von C im Folgenden $T_L := C \cap U^0$ für $L \subset Q$ eine Untergruppe. Zunächst wählen wir eine Menge von $\mathrm{ad}(T_L)$-Gewichtsvektoren, die C als Algebra erzeugen, und zeigen, dass wir solche Elemente in $U_\mu^+ U_\nu^0 U_\gamma^-$ mit $\nu - \gamma$ konstant wählen können. Dann wird gezeigt, dass man Elemente mit jeweils genau einem Leitterm in $U^{\geq 0}$ bzw. $U^{\leq 0}$ wählen kann. Man kann sogar Wurzelvektoren bezüglich eines $w \in W$ mit bestimmter reduzierter Darstellung als Leitterme wählen. Zuletzt geben wir eine Beweisskizze für die Vermutung an, dass eine Wahl in $(U^{\geq 0} + U^{\leq 0}) \cap C$ möglich ist und zeigen einige weitere Eigenschaften, die für ϕ^E, ϕ^F in (4.1) gelten.

Wir zeigen zunächst Aussagen, die für jede Wahl einer reduzierten Darstellung des maximalen Elements $w_0 \in W$ gelten. Sei dazu im folgenden eine reduzierte Darstellung des maximalen Elements w_0 fest gewählt und wir betrachten Elemente von U geschrieben in der PBW-Basis bestehend aus Wurzelvektoren in $U^+[w_0]U^0U^-[w_0]$. Wir verwenden auf Elementen in $\mu \in Q$ die partielle Ordnung $\prec$ und auf Elementen $\overline{\mu} \in \mathbb{N}^{\Phi^+}$ die Ordnung $<_{lex}$ aus Kapitel Ordnungen 1.1.2. Ebenso verwenden wir die Projektion $\mathrm{pr} : \mathbb{Z}\Phi^+ \to \mathbb{Z}\Pi$ gegeben durch die Addition in $Q = \mathbb{Z}\Pi$, d.h. $\mathrm{pr}(\overline{\mu}) := \mu_1\beta_1 + \ldots + \mu_{|\Phi^+|}\beta_{|\Phi^+|}$ aus Kapitel 1.1.2. Es gibt zu jedem $\overline{\mu}$ ein eindeutiges PBW-Monom $E_{\overline{\mu}} \in U^+$ (ebenso in U^-) gegeben durch:

$$E_{\overline{\mu}} := E_{\beta_{|\Phi^+|}}^{\mu_{|\Phi^+|}} \cdots E_{\beta_1}^{\mu_1}$$

Wir benötigen in Kapitel 4 weitere technische Notationen:

Definition 4.1:
Für $\mu \in Q_+, \nu \in Q, \gamma \in Q_+$ bezeichnen wir den Komponenten eines Elements $X \in U$ in dem Q^3-Grad in der triangulären Zerlegung $U_\mu^+ U_\nu^0 U_{-\gamma}^-$ mit $\mathrm{pr}_{(\mu,\nu,\gamma)}(X)$, d.h.

$$\mathrm{pr}_{(\mu,\nu,\gamma)} : \; U \to U_\mu^+ K_\nu U_{-\gamma}^-$$

$$X_{\mu,\nu,\gamma} := \mathrm{pr}_{(\mu,\nu,\gamma)}(X) = \sum_{\substack{\overline{\mu}\in\mathbb{N}^{\Phi^+} \text{ mit } pr(\overline{\mu})=\mu \\ \overline{\gamma}\in\mathbb{N}^{\Phi^+} \text{ mit } pr(\overline{\gamma})=\gamma}} c_{\overline{\mu},\nu,\overline{\gamma}} E_{\overline{\mu}} K_\nu F_{\overline{\gamma}}$$

Diese Projektion in den beiden ersten Komponenten $pr_{(_,_,0)}$ ist natürlich $\mathrm{pr}_{\mu,\nu}$ aus Kapitel 2.3.

U ist keine Q^3-gradiuerte Hopfalgebra, vielmehr gilt

$$\Delta(X_{\mu,\nu,\gamma}) \subset X_{\mu,\nu,\gamma} \otimes K_{\nu-\gamma} + K_{\mu+\nu} \otimes X_{\mu,\nu,\gamma} + \sum_{\substack{(\mu',\gamma') \\ \text{mit } (0,0)<(\mu',\gamma')<(\mu,\gamma)}} U_{\mu'}^+ K_{\nu+\mu-\mu'} U_{-\gamma'}^- \otimes U_{\mu-\mu'}^+ U_{\nu-\gamma'}^0 U_{-\gamma+\gamma'}^- \tag{4.2}$$

Definition 4.2:
Der $U^{\geq 0}$-*Anteil* bzw. der $U^{\leq 0}$-*Anteil* bzw. *gemischte Anteil* eines Elements X seien die Summen

$$\sum_{\mu\in Q_+,\nu\in Q} X_{\mu,\nu,0}, \qquad \sum_{\nu\in Q,\gamma\in Q_+} X_{0,\nu,\gamma}, \qquad \sum_{\mu\neq 0,\nu\in Q,\gamma\neq 0\in Q_+} X_{\mu,\nu,\gamma}$$

Definition 4.3:
Für ein Element $X \in U$ und gegebene $\overline{\mu}, \overline{\gamma} \in \mathbb{N}^{\Phi^+}$, $\nu \in Q$ notieren wir den Koeffizienten des PBW-Basiselements $E_{\overline{\mu}} K_\nu F_{\overline{\gamma}}$ in der PBW-Basis als

$$c_{\overline{\mu},\nu,\overline{\gamma}}(X) \in k$$

Wahl eines Erzeugendensystem von C

Erzeugendensystem aus T_L-stabilen Gewichtsvektoren

Lemma 4.4:
Sei C eine Rechtscoidealunteralgebra in U. Wir können ein Erzeugendensystem Z von C wählen, in dem für alle Elemente $X = \sum_{\nu\in Q,\mu,\gamma\in Q_+} X_{\mu,\nu,\gamma} \in Z$ gilt, dass $\nu - \gamma$ konstant ist.

Beweis: Wir benutzen, dass C eine Rechtscoidealunteralgebra ist, die Formel 4.2 und die PBW-Basis: Sei für jedes $\eta \in Q$ die Linearform $\varphi \in U^*$ gegeben durch $\varphi(K_\eta) = 1$ und $\varphi(x) = 0$ für alle anderen PBW-Basiselemente. Dann liegen für jedes Element $X \in C$ die folgenden Elemente $X^{(\eta)}$ wieder in der Rechtscoidealunteralgebra C:

$$X^{(\eta)} := (id \otimes \varphi)\Delta(X) = \sum_{\substack{\mu,\gamma\in Q_+,\nu\in Q \\ \text{mit } \nu-\gamma=\eta}} X_{\mu,\nu,\gamma}$$

Andererseits gilt $X = \sum_\eta X^{(\eta)}$, also können wir ein gegebenes Erzeugendensystem Z verfeinern, indem wir alle Erzeuger X durch die Menge aller $X^{(\eta)}$ ersetzen. □

Definition 4.5:
Ein *Gewichtsvektor* bzgl. $T_L = U^0 \cap C$ ist ein $x \in C$, sodass es ein $\mu \in Q$ gibt, mit $\mathrm{ad}(K_\nu)x = q^{(\mu,\nu)}x \forall \nu \in L$.

Weil T_L eine Unterhopfalgebra ist, ist die adjungierte Wirkung von Elementen in T_L auf C definiert. Weil C deswegen $\mathrm{ad}T_L$-stabil ist und weil adU^0 auf U diagonalisierbar ist, können wir insbesondere ein Erzeugendensystem aus Gewichtsvektoren bezüglich T_L wählen.

Leitterme von Elementen in C

Definition 4.6:
Gegeben ein Element X, dann definieren wir die Menge aller *Leitterme* wie folgt:
Zunächst definieren wir die Menge aller maximalen U^+-Grade:

$$\mathcal{E}(X) := \max_{\prec}\{0 \neq \mu \in Q_+ \mid \exists \nu \in Q, \gamma \in Q_+ \text{ mit } X_{\mu,\nu,\gamma} \neq 0\}$$

Für jedes $\mu \in \mathcal{E}(X)$ ist dann der entsprechende *E-Leitterm*

$$L_\mu(X) := \sum_{\nu \in Q, \gamma \in Q_+} X_{\mu,\nu,\gamma}$$

Analog können wir *F-Leitterme* definieren.

Bemerkung 4.7:
Hat ein Element $X \in C$ keine E-Leitterme, das heißt $\mathcal{E}(X) = \emptyset$, so gilt schon $X \in U^{\leq 0}$.

Proposition 4.8:
Sei C eine Rechtscoidealunteralgebra mit der Eigenschaft $C^0 := C \cap U^0$ ist eine Unterhopfalgebra. Wir können ein Erzeugendensystem von C wählen aus Elementen dessen E-Leitterme in $U^{\geq 0}$ liegen.

Beweis: Für Elemente X in C sei die Menge der PBW-Monome von E-Leittermen mit nichttrivialem F-Anteil definiert als:

$$\mathcal{M}(X) := \left\{\overline{\mu} \in \mathbb{N}^{\Phi^+} \mid \exists \nu \in Q, 0 \neq \overline{\gamma} \in \mathbb{N}^{\Phi^+} \text{ sodass } c_{\overline{\mu},\nu,\overline{\gamma}}(X) \neq 0 \text{ und } \mathrm{pr}(\overline{\mu}) \in \mathcal{E}(X)\right\}$$

Analog definieren wir für Mengen Z von Elementen $\mathcal{M}(Z) := \bigcup_{X \in Z} \mathcal{M}(X)$. Um Elemente und Erzeugendensysteme bezüglich Ihrer $\mathcal{M}(X)$ zu vergleichen, definieren wir eine partielle Ordnung $\leq$ auf Teilmengen von $\mathbb{N}^{\Phi^+}$ wie folgt: $\mathcal{N} \leq \mathcal{M}$ genau dann wenn es für alle $\overline{\nu} \in \mathcal{N}$ ein $\overline{\mu} \in \mathcal{M}$ gibt, sodass entweder schon $\mathrm{pr}(\overline{\nu}) \prec \mathrm{pr}(\overline{\mu})$ (d.h. partielle Ordnung auf Q) oder für $\mathrm{pr}(\overline{\nu}) = \mathrm{pr}(\overline{\mu})$ immerhin gilt $\overline{\nu} \leq_{lex} \overline{\mu}$ (d.h. lexikographische Ordnung von PBW-Monomen). Wir nennen $\mathcal{N} < \mathcal{M}$ echt kleiner, wenn es mindestens ein $\overline{\mu} \in \mathcal{M}$ gibt; das nicht kleinergleich (wieder bzgl. partieller und dann lexikographischen Ordnung) als *alle* Elemente $\overline{\nu} \in \mathcal{N}$ ist.

Das Ziel dieses Satzes ist es zu zeigen, dass es ein Erzeugendensystem Z gibt mit $\mathcal{M}(Z) = \emptyset$. Wir geben im folgenden einen Algorithmus an, um für ein Element $X \in C$ mit $\mathcal{M}(X) \neq \emptyset$ endlich viele neue Elemente $\mathcal{Y} = \{Y_1, \ldots Y_n\} \subset C$ zu konstruieren mit $\mathcal{M}(\{Y_1, \ldots Y_n\}) < \mathcal{M}(X)$

und $X \in \langle \mathcal{Y} \rangle$ in der von den Y_i erzeugten Unteralgebra liegt. Die Mengen $\mathcal{M}(X)$ für einzelne Elemente X oder endliche Mengen sind endlich. Nach der Definition von $\mathcal{N} < \mathcal{M}$, ausgehend von einem $\mathcal{M}(X)$, sinkt in jedem Iterationsschritt entweder einer der maximalen Q-Grade der Menge oder (bei gleichem Q-Grad) in einem Q-Grad der lexikographisch maximale Grad. Das beweist, dass wir, ausgehend von einem $\mathcal{M}(X)$ in nur endlich vielen Schritten eine endliche Menge $\mathcal{Y} \subset C$ konstruieren können, für die $\mathcal{M}(\mathcal{Y}) = \emptyset$ und $X \in \langle \mathcal{Y} \rangle$. Abschließend stellen wir fest, dass wir damit selbst für ein a-priori unendliches Erzeugendensystem Z von C das gewünschte alternative Erzeugendensystem Z' mit $\mathcal{M}(Z') = \emptyset$ als Vereinigung aller $\mathcal{Y}$ für alle $X \in Z$ konstruieren können - so folgt die Behauptung.

Wir geben nun also den angekündigten Algorithmus an, um für ein Element $X \in C$ mit $\mathcal{M}(X) \neq \emptyset$ endlich viele Elemente $\mathcal{Y} = \{Y_1, \dots Y_n\} \subset C$ zu konstruieren mit $\mathcal{M}(\{Y_1, \dots Y_n\}) < \mathcal{M}(X)$ und $X \in \langle \mathcal{Y} \rangle$:

Sei $\overline{\mu_{max}} \in \mathcal{M}(X)$ ein maximales Element (maximal bezüglich der partiellen Ordnung $\prec$ und unter allen Elementen mit gleichem Q-Grad maximal bezüglich der lexikographischen Ordnung). Wir betrachten den Term $X_{\overline{\mu_{max}}} = \sum\limits_{\nu \in Q, \overline{\gamma} \in \mathbb{N}^{\Phi^+}} c_{\overline{\mu_{max}}, \nu, \overline{\gamma}} E_{\overline{\mu_{max}}} K_\nu F_{\overline{\gamma}}$. Wegen Lemma 4.4 konnten wir X so wählen, dass $\nu - \gamma = \eta$ gilt für ein konstantes $\eta \in Q$. Das heißt $X_{\overline{\mu_{max}}} = \sum\limits_{\overline{\gamma} \in \mathbb{N}^{\Phi^+}} c_{\overline{\mu_{max}}, \nu, \overline{\gamma}} E_{\overline{\mu_{max}}} K_{\eta + \mathrm{pr}(\overline{\gamma})} F_{\overline{\gamma}}$. Sei jetzt $\gamma_{max}(X, \overline{\mu_{max}})$ das maximale $\gamma \in Q_+$, sodass $c_{\overline{\mu_{max}}, \nu, \overline{\gamma}} \neq 0$ für ein $\overline{\gamma}$ mit $\mathrm{pr}(\overline{\gamma}) = \gamma$. Es gibt so ein $\gamma_{max}(X, \overline{\mu_{max}})$, weil $\overline{\mu_{max}} \in \mathcal{M}(X)$. Betrachten wir nun das Koprodukt von X, dann gilt mit $\gamma_{max}(X, \overline{\mu_{max}}) =: \gamma_{max} = \mathrm{pr}(\overline{\gamma_{max}}), \gamma = \mathrm{pr}(\overline{\gamma}),\ \mu = \mathrm{pr}(\overline{\mu_{max}})$:

$$\Delta(X) \subset \sum_{\gamma \in Q_+} K_{\eta+\gamma+\mu} \otimes L_\mu + U \otimes U^+_{x<\mu} U^0 U^- + \text{ Terme in } U^0(U^- \cap ker\epsilon) \otimes U^+_\mu U^0 U^-$$

also liegt schon $K_{\eta+\gamma_{max}+\mu}$ in C und weil C^0 eine Unterhopfalgebra ist, gilt insbesondere auch

$$K^{-1}_{\eta+\gamma_{max}+\mu} \in C$$

Genauso können wir mit der Komultiplikation aus der Rechtscoidealunteralgebreneigenschaft von C für alle $\overline{\gamma} \in \mathbb{N}^{\Phi^+}$ folgern, dass

$$\sum_{\overline{\gamma}} c_{\overline{\mu_{max}}, \nu, \overline{\gamma}} K_{\eta+\gamma+\mu} F_{\overline{\gamma}} \in C$$

Es gilt: $\mathcal{M}(K_{\eta+\gamma}) = \emptyset = \mathcal{M}(K_{\eta+\gamma} F_{\overline{\gamma}})$. Andererseits ist für alle $\overline{\gamma}$ der Term

$$E_{\overline{\mu_{max}}} K_{\eta+\gamma} + (rest) \in C$$

mit $(rest) := \sum\limits_{\mu' \prec \mu \in Q_+, \gamma \in Q_+, \nu \in Q} (rest)_{\mu', \nu, \gamma} + \sum_{\overline{\gamma}, \nu, \overline{\mu'} \prec \overline{\mu}} c^{(rest)}_{\overline{\mu_{max}}, \nu, \overline{\gamma}} E_{\overline{\mu'}} K_\nu F_{\overline{\gamma}}$. Damit gilt

$$\mathcal{M}(E_{\overline{\mu_{max}}} K_{\eta+\gamma} + (rest)) < \mathcal{M}(X)$$

weil insbesondere $\overline{\mu}_{max} \notin \mathcal{M}(E_{\overline{\mu_{max}}}K_{\eta+\gamma} + (rest))$. Betrachten wir das Produkt dieser Elemente und summieren über die verschiedenen $\overline{\gamma}$ so erhalten wir:

$$z := (E_{\overline{\mu_{max}}}K_{\eta+\gamma} + (rest))K^{-1}_{\eta+\gamma_{max}+\mu} \sum_{\overline{\gamma}} c_{\overline{\mu_{max}},\nu,\overline{\gamma}} K_{\eta+\gamma+\mu} F_{\overline{\gamma}} = X_{\overline{\mu_{max}}} + \sum_{\overline{\gamma}} (rest) F_{\overline{\gamma}} + (rest)' \in C$$

wobei $(rest)' \in E_{\overline{\mu}_{max}} U^0 U^-_{\gamma<\gamma_{max}}$. Jetzt gilt aber für $X - z$ auch $\mathcal{M}(X - z) \leq \mathcal{M}(X)$.

Offensichtlich können wir X erzeugen mit den Elementen z und $X - z$, wobei sich z erzeugen lässt aus Elementen mit $\mathcal{M}(E_{\overline{\mu_{max}}}K_{\eta+\gamma} + (rest)), \mathcal{M}(K_{\eta+\gamma+\mu}), \mathcal{M}(K_{\eta+\gamma+\mu}F_{\overline{\gamma}}) < \mathcal{M}(X)$.

Angenommen es gilt $\mathcal{M}(X - z) < \mathcal{M}(X)$ (insbesondere wenn $\overline{\mu_{max}} \notin \mathcal{M}(X - z)$): Dann haben wir wie gewünscht die folgende Menge in C konstruiert, wobei G die endliche Menge aller $\overline{\gamma}$ ist mit $c_{\overline{\mu}_{max},\eta+\gamma,\overline{\gamma}} \neq 0$.

$$\mathcal{Y} = \bigcup_{\overline{\gamma}\in G} \left\{ E_{\overline{\mu_{max}}}K_{\eta+\gamma} + (rest),\ K_{\eta+\gamma+\mu},\ K_{\eta+\gamma+\mu}F_{\overline{\gamma}} \right\} \cup \left\{ X - \underbrace{\sum_{\overline{\gamma}\in G} \left(E_{\overline{\mu_{max}}}K_{\eta+\gamma} + (rest) \right) \cdot K^{-1}_{\eta+\gamma+\mu} \cdot K_{\eta+\gamma+\mu}F_{\overline{\gamma}}}_{=z} \right\}$$

sodass $\langle \mathcal{Y} \rangle \ni X$ und $\mathcal{M}(\mathcal{Y}) < \mathcal{M}(X)$. Wie oben ausgeführt können wir damit induktiv das Erzeugendensystem Z zu einem Erzeugendensystem Z' mit $\mathcal{M}(Z') = \emptyset$ verändern, und damit wie behauptet ein Erzeugendensystem mit E-Leittermen in $U^{\geq 0}$ konstruieren, und die Behauptung ist bewiesen.

Angenommen es gilt $\mathcal{M}(X - z) = \mathcal{M}(X)$, so ist insbesondere $\overline{\mu_{max}} \in \mathcal{M}(X - z)$ (maximal bezüglich der partiellen Ordnung $\prec$ und unter allen Elementen mit gleichem Q-Grad maximal bezüglich der lexikographischen Ordnung). Wir konstruieren eine Folge von Elementen: $X^{(i)}$ mit $X^{(1)} := X - z$ und $X^{(i)} := X^{(i-1)} - z^{(i-1)}$ für $i > 1$, indem wir zu jedem $X^{(i)}$ mit $\mathcal{M}(X - z) = \mathcal{M}(X)$, also $\overline{\mu_{max}} \in \mathcal{M}(X^{(i)})$ die obige Zerlegung betrachten, wobei für das neue maximale $\gamma'_{max}(X^{(i)}, \overline{\mu_{max}})$ von $X^{(i)}$ schon $\gamma'_{max}(X^{(i)}, \overline{\mu_{max}}) \prec \gamma_{max}(X^{(i-1)}, \overline{\mu_{max}})$ gilt. Das heißt es gibt ein j, sodass gilt $\mathcal{M}(X^{(j)} - z^{(j)}) < \mathcal{M}(X)$ und X lässt sich erzeugen von den Elementen $X^{(j)} - z^{(j)}$ sowie $z^{(i)}$ für alle $i \leq j$, wobei für alle $i \leq j$ jeweils $\mathcal{M}(z^{(i)}) < \mathcal{M}(X^{(i)}) \leq \mathcal{M}(X)$ gilt. Damit können wir dann wie oben induktiv ein Erzeugendensystem von der geforderten Form konstruieren.

Lemma 4.9:
Sei C eine Rechtscoidealunteralgebra wie oben, $X \in C$ ein Gewichtsvektor von T_L, dann hat X nur maximal einen Leitterm in $U^{\geq 0}$.

Beweis: Angenommen ein Gewichtsvektor X von T_L hat zwei Leitterme L_μ und L_ν zu unterschiedlichen Elementen $\mu, \nu \in Q_+$, dann folgt insbesondere wegen Lemma 4.4 wie in dem

Beweis zu Satz 4.8, dass wegen

$$L_\mu = \sum_{\overline{\mu} \text{ mit } \mathrm{pr}(\overline{\mu})=\mu} c_{\overline{\mu},\eta,0} E_{\overline{\mu}} K_\eta$$

$$L_\nu = \sum_{\overline{\nu} \text{ mit } \mathrm{pr}(\overline{\nu})=\nu} c_{\overline{\nu},\eta,0} E_{\overline{\nu}} K_\eta$$

auch $K_{\eta-\mu} \in C$ und $K_{\eta+\nu} \in C$, also insbesondere weil $C^0 := C \cap U^0$ eine Unterhopfalgebra ist, auch $K_{\mu-\nu}$ in C liegt. Wegen der Stabilität unter T_L muss dann aber gelten $\mathrm{ad}(K_{\mu-\nu})X = q^{(\mu-\nu)}X$. Das ist aber ein Widerspruch zu $(\mu-\nu,\mu) \neq (\mu-\nu,\nu)$. □

Genauso können wir den Leitterm auch normieren, sodass $L_\mu = X_\mu K_\mu^{-1}$ für ein $X_\mu \in U_\mu^+$ und $K_\mu^{-1} \in U^0$. Die obigen Sätze gelten auch für F-Leitterme und wir können ein Erzeugendensystem wählen, dessen Elemente X nur maximal einen E-Leitterm $L_\mu \in U^{\geq 0}$ und einen F-Leitterm $L_\nu^- \in U^{\leq 0}$ haben, weil sich die beiden Konstruktionsschritte nicht (bzw. nur bedingt) gegenseitig rückgängig machen können, da sie beide den insgesamten Grad der gemischten Terme senken.

Korollar 4.10:
Sei C eine Rechtscoidealunteralgebra mit der Eigenschaft $C^0 := C \cap U^0$ ist eine Unterhopfalgebra. Wir können ein Erzeugendensystem von C wählen aus Elementen mit höchstens je einen E- und F-Leitterm $L_\mu, L_{-\nu}$ besitzen, die sogar von der Form sind:

$$L_\mu = X_\mu K_\mu^{-1},\ X_\mu \in U_\mu^+ \qquad L_{-\nu} = Y_{-\nu} K_{\mu-\nu}^{-1},\ Y_{-\nu} \in U_{-\nu}^-$$

Für Leitterme L_μ in $U^{\geq 0}$ gilt, dass das Produkt zweier solcher Leitterme wieder ein Leitterm eines Elementes in C ist. Ausserdem gilt, dass für jede Linearform $\varphi \in U^*$ auch $(id \otimes \varphi)\Delta(L_\mu)$ wieder Leitterm eines Elements in C ist. Die Menge aller Leitterme bildet also wieder ein Rechtscoidealunteralgebra L in $U^{\geq 0}$. Nach Satz 2.13 gibt es ein $w \in W$ sodass $L = U^+[w]T_{L'}$. Wir können also genau diese Elemente in das Erzeugendensystem wählen deren Leitterme Wurzelvektoren sind und damit insbesondere alle Elemente in C außer $C^{\leq 0}$ erzeugen. Damit folgt schließlich das Hauptergebnis dieses Kapitels:

Satz 4.11:
Sei C eine Rechtscoidealunteralgebra mit der Eigenschaft $C^0 := C \cap U^0$ ist eine Unterhopfalgebra. Dann können wir ein Erzeugendensystem von C konstruieren, für das jeder Erzeuger höchstens je einen E- und F-Leitterm besitzt, der zudem je ein Wurzelvektoren von $\psi(U^+[w^+]), U^-[w^-]$ mit geeigneten U^0 für geeignet gewählte $w^+, w^- \in W$ ist.

Folgerung 4.12:
$C^{\geq 0} := U^{\geq 0} \cap C$ ist eine Rechtscoidealunteralgebra von C also nach Satz 2.13 von der Form $\psi(U^+[w'])_\phi T_L$ für ein $w' \in W$ und einen Charakter ϕ auf $\psi(U^+[w'])$. Dann gilt $w' \leq w$ für oben gewähltes w.

Wahl eines Erzeugendensystem von C in $U^{\geq 0} + U^{\leq 0}$

Wir vermuten, dass wir den vorherigen Satz noch substantiell verschärfen können, was wir aber hier weder beweisen noch im weiteren verwenden:

Vermutung 4.13:
Sei $w \in W$ ein Weylgruppenelement mit reduzierter Darstellung $w = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_{\ell(w)}}$ und $\Phi^+(w) = \{\beta_1, \dots \beta_{\ell(w)}\}$. Für die zugehörigen Wurzelvektoren wissen wir von 1.40 das folgende Kommutatorregel gilt: Seien $\beta_i, \beta_j \in \Phi^+(w)$, und $i < j$, dann ist:

$$[E_{\beta_i}, E_{\beta_j}] = \sum_{(a_{i+1},\dots a_{j-1}) \in \mathbb{N}_0^{j-i-1}} m_{(a_{i+1},\dots a_{j-1})} E_{\beta_{i+1}}^{a_{i+1}} \dots E_{\beta_{j-1}}^{a_{j-1}}$$

nach [LS91] Prop. 5.5.2.

Wir vermuten hier zusätzlich, dass für $\beta_i, \beta_j \in \Phi^+$ mit $\beta_i + \beta_j = \beta_k \in \Phi^+$ zum Vektor $(a_{i+1}, \dots a_{j-1})$ mit $a_i = \delta_{ik}$ der Koeffizient $m_{(a_{i+1},\dots a_{j-1})} \neq 0$ ist.

Vermutung 4.14:
Wir können ein Erzeugendensystem von C wählen bestehend aus Elementen von der Form

$$\overline{E}_\mu + \lambda_F K_{\mu-\nu}^{-1} F_\nu^{\phi_F} + \lambda_K K_\mu^{-1}$$

Wobei E_μ bzw. F_ν Wurzelvektoren sind bezüglich $\psi(U^+[w])$, bzw. $U^-[w']$ für bestimmte Weylgruppenelemente $w, w' \in W$ und Charaktere $\phi_E : \psi(U^+[w]) \to \mathbb{C}$, $\phi_F : U^-[w'] \to \mathbb{C}$.

Bemerkung 4.15:
Ein Beweis würde im Wesentlichen so funktionieren wie der Beweis zu Satz 4.8. Es geht aber an entscheidender Stelle die spezielle Eigenschaft der Ordnung auf $\Phi^+(w)$ aus Vermutung 4.13 ein: Angenommen X hat nicht die geforderte Form. Wir betrachten dann zunächst einen bzgl. $\prec$ maximalen gemischten Summanden und argumentieren wie in obigem Beweis, allerdings verwenden wir anstelle der globalen Maximalität des $E - Terms$ dann Vermutung 4.13 und argumentieren, dass man dieses Element ersetzen kann durch andere erzeugende Elemente mit kleinerem Leitterm.

Für alle Rechtscoidealunteralgebren mit einem Erzeugendensystem von obiger Form können wir bestimmte Aussagen über den U^0-Teil und den Träger von $supp(\phi_E)$ bzw. $supp(\phi_F)$ machen.

Lemma 4.16:
Für erzeugende Elemente einer Rechtscoidealunteralgebra C von der Form $\overline{E}_\mu + c_F K_{\mu-\nu}^{-1} \overline{F}_\nu + c_K K_\mu^{-1}$ mit $\mu \neq \nu$ gibt es folgende Einschränkungen:

- *Es gilt $c_K = 0$ oder $c_F = 0$*
- *Es gilt $\mu + \nu \perp \mu - \nu$*

Beweis: Angenommen $c_F \neq 0$. Weil L_μ und $L_\nu^- K_{\mu-\nu}^{-1}$ Gewichtsvektoren sind folgt $K_{\mu-\nu} \in C$. Die Behauptungen folgen dann leicht weil das Element ein $\mathrm{ad}(T_L)$-Gewichtsvektor ist, also insbesondere stabil unter $\mathrm{ad}K_{\mu-\nu}$. Das heißt aber aus $c_K \neq 0$ folgt $(\mu - \nu, \mu) = 0$, das ist ein Widerspruch zu $\mu \neq 0$ und $c_F \neq 0$. Die zweite Behauptung folgt ebenso, weil mit der $\mathrm{ad}T_L$-Stabilität stets $(\mu - \nu, \mu) = -(\mu - \nu, \nu)$ gelten muss. □

Lemma 4.17:
Für den U^0-Anteil T_L einer Rechtscoidealunteralgebra C die sich erzeugen läßt von Elementen der Form $E_\mu^{\phi_E} K_\mu^{-1} + \lambda_F K_{\mu-\nu}^{-1} F_\nu^{\phi_F} + \lambda_K K_\mu^{-1}$ mit ϕ_E, und ϕ_F wie oben gilt $L \subset (supp(\phi_E) \cup supp(\phi_F))^\perp$ und $L \perp K_{\mu+\nu}$.

Beweis: Die Behauptungen folgen auch aus der $\mathrm{ad}T_L$ stabilen Wahl des Erzeugendensystems, genau wie in Lemma 4.16.

Teil IV.

Struktursätze zu triangulären Borelunteralgebren

5. Struktursätze zur Graduierten von triangulären Rechtscoidealunteralgebren

Wir betrachten in diesem Kapitel die $\mathbb{Z}$-Graduierung deg auf $U = U_q(\mathfrak{g})$, die den erzeugenden Elementen $E_\alpha, F_\alpha, K_\alpha$ für $\alpha \in \Pi$ den Grad $\deg(E_\alpha) = 1$, $\deg(F_\alpha) = -1$ und $\deg(K_\alpha) = 0$ zuordnet.

5.1. Die Graduierte von triangulären Rechtscoidealunteralgebren in U^-

Im folgenden Abschnitt wollen wir eine Vermutung von I. Heckenberger über die Graduierte von $U^-[w]_\phi$ für den Typ A_n beweisen. Wir argumentieren dabei zunächst sehr allgemein und verwenden im letzten Beweisschritt explizit Relationen aus der A_n.

Zunächst beweisen wir eine leichte Verallgemeinerung von [HS09] Theorem 7.3.

Definition 5.1:
Wir definieren den graduierten Vektorraum $U^-[w,\sigma]kM \subset U$ wie folgt: Sei $0 \in M \subset Q$ eine Unter-Halbgruppe des Wurzelgitters, sei $w = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_{\ell(w)}}$ ein Weylgruppenelement und für jedes $\bar{\mu} \in \mathbb{N}\Phi^+$ sei $\sigma(\bar{\mu}) \subset Q$ eine beliebige Teilmenge, wobei $\sigma(0) = M$.

$$U^-[w,\sigma]\ kM := \operatorname{span}_{\mathrm{k}} \left\{ \underbrace{F_{\beta_{\ell(w)}}^{i_{\ell(w)}} F_{\beta_{\ell(w)-1}}^{i_{\ell(w)-1}} \dots F_{\beta_1}^{i_1}}_{F_{\bar{\mu}}}\ K_\mu \quad \middle| \quad \bar{\mu} = \sum_j i_j \beta_j \in \mathbb{N}\Phi^+, \quad \mu \in \sigma(\bar{\mu}) \right\}$$

Bemerkung 5.2:
Man kann technische Kriterien für σ angeben, sodass $U^-[w,\sigma]kM$ tatsächlich eine Rechtscoidealunteralgebra ist:

- $U^-[w,\sigma]kM$ ist eine Algebra, genau dann wenn $\sigma(\bar{\mu}) + \sigma(\bar{\nu}) \subseteq \sigma(\bar{\eta})$ für alle $\bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\eta} \in \mathbb{N}\Phi^+$ sodass das zu $\bar{\eta}$ gehörige PBW-Monom in dem Produkt der PBW-Monome zu $\bar{\mu}$ und $\bar{\nu}$ als Summand auftauchen (insbesondere gilt mit der Projektion $\mathbb{Z}\Phi \to \mathbb{Z}\Pi$ immer $\mathrm{pr}(\bar{\mu}) + \mathrm{pr}(\bar{\nu}) = \mathrm{pr}(\bar{\eta})$)

  Insbesondere bedeutet dies für $\bar{\nu} = 0$, dass jedes $\sigma(\bar{\mu})$ unter Addition mit M abgeschlossen ist. Dies rechtfertigt auch die symbolische Schreibweise $U^-[w,\sigma]\ kM$.

- $U^-[w,\sigma]kM$ ist eine Rechtscoidealunteralgebra genau dann wenn für jede Wurzel $\beta \in \Phi^+$ gilt $\sigma(1 \cdot \beta) \subseteq \sigma(\bar{\eta})$ wann immer das zu $\bar{\eta}$ gehörige PBW-Monom in $\Delta(F_\beta)$ auftritt, d.h. $F_{\bar{\eta}} = (id \otimes \varphi)(\Delta(F_\beta))$ für eine Linearform $\varphi \in U^*$.

  Insbesondere bedeutet dies für $\bar{\eta} = 0$, dass jedes $\sigma(\bar{\mu}) \subseteq M$.

Im Folgenden genügt uns jedoch die Umkehrung.

Satz 5.3:
Alle $\mathbb{Z}^\Pi$-graduierten Rechtscoidealunteralgebren C von U sind isomorph zu so einem $U^-[w,\sigma]kM$ aus Definition 5.1, wobei nicht alle möglichen Abbildungen σ auftreten.

Beweis: Wir wissen von [HS09], dass alle homogenen Rechtscoidealunteralgebren C, also mit $U^0 \subset C$ von der Form $U^-[w]U^0$ sind für ein $w \in W$, und dass alle $\mathbb{Z}^\Pi$-graduierten Rechtscoidealunteralgebren mit der Eigenschaft, dass $T_L := U^0 \cap C$ eine Hopfalgebra ist, von der Form $U^-[w]T_L$ sind. Sei $C = \bigoplus_\mu C_\mu$ nun eine beliebige graduierte Rechtscoidealunteralgebra. Dann betrachten wir die Rechtscoidealunteralgebra $C_0 = C \cap U^0$, diese ist offenbar eine Unterbialgebra von U^0, also $C_0 = kM$ für eine Halbgruppe $M \subset Q$.

Sei nun $L \supset M$ die zu M gehörige Gruppe in Q (Hinzufügen aller Inversen), dann ist $C' := CT_L$ (weil C mit T_L q-kommutiert) eine Rechtscoidealunteralgebra, mit der Eigenschaft, dass $C' \cap U^0 = T_L$ eine Hopfalgebra ist, also C' von der Form $U^-[w]\ T_L$ für ein $w \in W$ ist. Es ist $C \subseteq C'$ und für alle PBW-Monome $F_{\bar{\mu}} = F_{\beta_{\ell(w)}}^{i_{\ell(w)}} F_{\beta_{\ell(w)-1}}^{i_{\ell(w)-1}} \dots F_{\beta_1}^{i_1} \in C'$ mit $\bar{\mu} := \sum_j i_j\beta_j \in \mathbb{N}\Phi^+$ betrachten wir die Teilmenge $\sigma(\bar{\mu}) \subseteq Q$ bestehend aus allen Elementen $\mu \in Q$, sodass

$$F_{\beta_{\ell(w)}}^{i_{\ell(w)}} F_{\beta_{\ell(w)-1}}^{i_{\ell(w)-1}} \dots F_{\beta_1}^{i_1}\ K_\mu \in C$$

Wir zeigen zunächst, dass jedes $\sigma(\bar{\mu})$ nichtleer ist: Nach Konstruktion ist nämlich jeder PBW-Erzeuger in C' eine Kombination aus C und T_L, das heißt es existieren $X_i \in C$ und $\mu_i' \in L$ sodass

$$F_{\beta_{\ell(w)}}^{i_{\ell(w)}} F_{\beta_{\ell(w)-1}}^{i_{\ell(w)-1}} \dots F_{\beta_1}^{i_1} = \sum_i X_i K_{\mu_i'}$$

Da die Summe endlich ist finden wir ein $\mu' \in L$ sodass $\mu_i := \mu_i' + \mu' \in M$ und damit gilt:

$$F_{\beta_{\ell(w)}}^{i_{\ell(w)}} F_{\beta_{\ell(w)-1}}^{i_{\ell(w)-1}} \dots F_{\beta_1}^{i_1} K_{\mu'} = \sum_i X_i K_{\mu_i} \in C$$

also ist $\mu' \in \sigma(\bar{\mu})$.

Wir müssen nun noch nachweisen, dass C keine weiteren Linearkombinationen aus PBW-Monomen $\sum_i a_i F_{\bar{\mu}_i} K_{\nu_i}$ besitzt, die einzeln nicht in C sind: Zunächst können wir wegen der Annahme dass C graduiert ist ein homogenes Element $\sum_i a_i F_{\bar{\mu}_i} K_{\nu_i}$ mit $\mathrm{pr}(\bar{\mu}_i) = \mu$ vom Grad μ annehmen, dies bedeutet nun aber dass kein PBW-Monom $F_{\bar{\mu}_j}$ im Koprodukt $\Delta(F_{\bar{\mu}_i})$ auftreten kann für $\bar{\mu}_i \neq \bar{\mu}_j$. Wir nutzen die Rechtscoidealunteralgebreneigenschaft von C und wenden Linearformen $(id \otimes \varphi)\Delta$ an: Für $\varphi(F_{\bar{\mu}_i}) = 1$ und $\varphi(x) = 0$ für alle anderen

PBW-Monome erhalten wir in C die Summe aller K_{ν_j} mit $\bar{\mu}_j = \bar{\mu}_i$. Für andererseits $\varphi(K_{\nu_i}) = 1$ und $\varphi(x) = 0$ für alle anderen PBW-Monome erhalten wir in C die Summe aller $F_{\bar{\mu}_j}$ über alle j für die $K_{\nu_j} = K_{\nu_i}$ ist. Wir können uns also auf den Fall $K_{\nu_i} = K_{\nu_j} =: K_\nu$ beschränken.

Sei nun X_i die Summe aller $F_{\bar{\mu}_j}$ für j mit $\bar{\mu}_j \neq \bar{\mu}_i$. Angenommen $X_i K_\nu \in C$ so ist natürlich auch $F_{\bar{\mu}_i} K_\nu \in C$ also $\nu \in \sigma(\bar{\mu}_i)$. Betrachten wir nun die Menge σ_i aller $\eta \in Q$ sodass $X_i K_\eta \in C$, dann zeigt Multiplizieren des Elements $X_i K_\nu + F_{\bar{\mu}_i} K_\nu \in C$ mit einem K_η, $\eta \in \sigma_i$, dass $\sigma_i \subset \sigma(\bar{\mu}_i)$. Dasselbe Argument zeigt aber auch, dass $\sigma_i \supset \sigma(\bar{\mu}_i)$ gilt: Induktiv sind also alle $\sigma(\bar{\mu}_j)$ gleich und gleich der Menge der η für die $\sum_i a_i F_{\bar{\mu}_i} K_\eta \in C$. Insbesondere liegen also schon alle $F_{\bar{\mu}_i} K_\nu \in C$.

Beispiel 5.4:
Nicht jede $\mathbb{Z}$-graduierte Rechtscoidealunteralgebra von $U^{\leq 0}$ ist schon $\mathbb{Z}^\Pi$-graduiert, siehe dazu zum Beispiel $C = \langle F_1 K_3^{-1} + F_3 K_1^{-1} \rangle \in U_q(\mathfrak{sl}_3)$.

Lemma 5.5:
Die Abbildung $f : \mathrm{gr}(U^-[w]_\phi) \mapsto U^{\leq 0}$ die jedes Element auf seinen Leitterm bzgl. der $\mathbb{Z}$-Graduierung schickt erhält die Algebrenstruktur, Comodulstruktur und die $\mathbb{Z}$-Graduierung. Insbesondere ist das Bild dieser Abbildung eine $\mathbb{Z}$-graduierte Rechtscoidealunteralgebra von U.

Beweis: Die Abbildung, die jedes Element auf seinen Leitterm unter der $\mathbb{Z}$-Graduierung schickt, ist ein Algebrenisomorphismus, weil das Produkt der Leitterme zweier Elemente wegen der $\mathbb{Z}$-Graduierung wieder Leitterm des Produkts dieser Elemente ist. Es bleibt also zu zeigen, dass diese Abbildung ein Comodulisomorphismus ist. Dazu betrachten wir die Filtrierung, sei $F_{-\lambda}A$ definiert wie folgt

$$F_{-\lambda}A = \{a \in A \mid a \in \bigoplus_{\mu \geq \lambda} U^-_{-\mu}\} = A \cap \bigoplus_{\mu \geq \lambda} U^-_{-\mu}$$

dann gilt für das Coprodukt eines Elements $a \in F_{-\lambda}A$ wegen 1.7:

$$\Delta(a) \subset \bigoplus_{\mu \geq \lambda} (A \otimes U^-)_{-\mu} \subset \bigoplus_{\nu} F_{-\nu}A \otimes U^-_{-\lambda+\nu}$$

Damit ist $\mathrm{im}(f)$ eine $\mathbb{Z}$-graduierte Rechtscoidealunteralgebra von $U^{\leq 0}$.

Wir wollen jetzt zeigen, dass dieses f injektiv ist und das Bild $f(\mathrm{gr}(U^-[w]_\phi)$ genau beschreiben.

Definition 5.6:
Sei V ein $\mathbb{N}^n$-graduierter Vektorraum, sodass jeder Layer $V_{(i_1,\ldots,i_n)}$ endlichdimensional ist. Dann definieren wir die Hilbertreihe als formale Potenzreihe in n Variablen:

$$\mathcal{H}_V(t_1, \ldots t_n) := \sum_{(i_1,\ldots,i_n) \in \mathbb{N}^n} \dim(V_{(i_1,\ldots,i_n)}) \cdot t_1^{i_1} t_2^{i_2} \cdots t_n^{i_n}$$

Wie man leicht sieht erfüllt die Hilbertreihe die folgende nützliche Eigenschaft:

Lemma 5.7:
Für das Tensorprodukt von $\mathbb{N}^n$-graduierten Vektorräumen gilt:

$$\mathcal{H}_{V \otimes W}(t_1, \ldots t_n) = \mathcal{H}_V(t_1, \ldots t_n) \cdot \mathcal{H}_W(t_1, \ldots t_n)$$

Beispiel 5.8:
Für den Polynomring $k[x]$ mit $\deg(x) := n$ gilt:

$$\mathcal{H}_{k[x]}(t) = \sum_{i \in \mathbb{N}} 1 \cdot t^{n \cdot i} = \frac{1}{1 - t^n}$$

Bezüglich der $(-\deg)$-Graduierung gilt wegen der PBW-Basis:

$$\mathcal{H}_{U^-[w]}(t) = \prod_{\mu \in \Phi^+(w)} \frac{1}{1 - t^{ht(\mu)}}$$

Bemerkung 5.9:
Die folgenden Betrachtungen könnten anstelle der Hilbert-Reihe auch sehr ähnlich mit der Gelfand-Kirillov-Dimension vorgenommen werden, welche ebenfalls als Maß für die Anzahl der PBW-Erzeuger verstanden werden kann, aber im Gegensatz zu Hilbertreihe die Algebra-Struktur mitberücksichtigt. Sie hat den Vorteil, besser verträglich mit der Konstruktion oben $C \mapsto CT_L = U^-[w]T_L$ zu sein, was z.B. als Lokalisierung $k[K] \mapsto k[K, K^{-1}]$ verstanden werden kann. Außerdem ist die Frage nach der Gelfand-Kirillov der Rechtscoidealunteralgebren von unabhängigem Interesse.

Die wesentliche Frage ist ob tatsächlich $\mathrm{GKdim}(U^-[w]) = \ell(w)$. Dann gilt $\mathrm{GKdim}(U^-[w]T_L) = \ell(w) + \mathrm{Rang}(L)$ nach [KL], Prop 3.11 womit dann nach [KL], Prop 3.1 auch $\mathrm{GKdim}(C) \leq \ell(w) + \mathrm{Rang}(L)$. Andererseits gilt $\mathrm{GKdim}(C) \geq \ell(w) + \mathrm{Rang}(M)$ womit Gleichheit folgen sollte.

Vermutung 5.10 (Heckenberger):
Die Abbildung $f : \mathrm{gr}(U^-[w]_\phi) \to U^{\leq 0}$ aus Lemma 5.5, die Elemente auf ihre Leitterme schickt ist ein injektiver Homomorphismus von $\mathbb{Z}$-graduierten Rechtscoidealunteralgebren. Das Bild D von f ist von folgender Form:

- $D_0 = M$ ist die Halbgruppe $M := \langle K_\mu^{-1} \mid \mu \in \mathrm{supp}(\phi) \rangle$
- Für die zu M gehörige Gruppe L gilt DT_L ist von der Form $U^-[w']T_L$ für ein w' von folgender Form: Zu dem gewählten $w = s_{\alpha_{k_1}} s_{\alpha_{k_2}} \dots s_{\alpha_{k_m}} \in W$ sei

  $$w' := \Big(\prod_{\beta \in \mathrm{supp}(\phi)} s_\beta \Big) w$$

  Weil in $\mathrm{supp}(\phi)$ alle Elemente paarweise orthogonal sind, ist w' das Element, welches entsteht wenn in w alle Faktoren s_{α_i}, für alle i mit $\beta_i \in \mathrm{supp}(\phi)$, gestrichen werden.

  $$w' = s_{\alpha_{k_1}} s_{\alpha_{k_2}} \dots \not{s}_{\alpha_{k_i}} \dots s_{\alpha_{k_m}}$$

Lemma 5.11:
Sei $w \in W$ und sei ϕ ein Charakter von $U^-[w]$. Angenommen Vermutung 5.10 gilt für alle Weylgruppenelemente der Länge $< l(w)$ und $\Phi^+(w^{-1})$ enthält mindestens zwei einfache Wurzeln. Dann gilt Vermutung 5.10 für w.

Beweis: Wir zeigen die Behauptung induktiv über die Länge $\ell(w)$. Wir wissen aus [HK11b] s.13, dass für ein $u < w$ die Einschränkung von ϕ auf $U^-[u] \subset U^-[w]$ ebenfalls ein Charakter ist mit Träger $\mathrm{supp}(\phi|_{U^-[u]}) \subset \mathrm{supp}(\phi)$. Daher können wir die Rechtscoidealunetralgebra $U^-[u]_\phi \subset U^-[w]_\phi$ betrachten. Für $w = 1$ ist die Rechtscoidealunteralgebra $U^-[1]_\phi = 1$ und die Behauptung ist trivial.

Sei nun $w = us_{\alpha_i}$ für ein $\alpha_i \in \Pi$ mit $\ell(us_{\alpha_i}) = \ell(u) + 1$ und die Vermutung 5.10 sei für $U^-[u]_\phi$ schon bewiesen. Es gilt also $f(\mathrm{gr}(U^-[u]_\phi))_0 = M_u$ für eine Halbgruppe M_u von der geforderten Form und für die zugehörige Gruppe L_u ist $f(\mathrm{gr}(U^-[u]_\phi))T_{L_u} = U^-[u']T_{L_u}$ für ein u' von der geforderten Form. Außerdem gilt natürlich $\mathrm{gr}(U^-[w]_\phi) = \mathrm{gr}(\langle U^-[u]_\phi, \overline{F}_{u(\alpha_i)}\rangle)$. Auf der anderen Seite wissen wir, dass $f(\mathrm{gr}(U^-[w]_\phi)$ eine $\mathbb{Z}$-graduierte Rechtscoidealunteralgebra ist, und dass für die zu $f(\mathrm{gr}(U^-[w]_\phi)_0 = D_0$ gehörige Gruppe L die RCS $f(\mathrm{gr}(U^-[w]_\phi)T_L$ von der Form $U^-[v]T_L$ für ein $v \in W$ ist. Nach der Induktionsvorraussetzung gilt aber schon

$$f(\mathrm{gr}(U^-[u]_\phi)) \subset f(\mathrm{gr}(U^-[w]_\phi)) = D \tag{5.1}$$

also gilt insbesondere $u' \leq v$ und $M_u \subset D_0$. Wir wollen nun beweisen, dass $v = w'$ und dass $D_0 = M$ von der geforderten Form ist.

Vorab wollen wir feststellen, dass offenbar $M = D_0$: Die Leitterme in U^0 sind offenbar genau die K_μ für $\mu \in \mathrm{supp}(\phi)$. Insbesondere ist $D_0 \cong \mathbb{N}^{\mathrm{Rang}(D_0)}$, das heißt frei. Wir notieren eine $\mathbb{N}$-Basis $\{\gamma_1, \dots \gamma_{\mathrm{Rang}(D_0)}\} \subset D_0$.

Erste Information über den U^--Teil des Bildes von f liefert die Anzahl der PBW Erzeuger. Da das Bild keine PBW-Basis im strengen Sinne besitzt extrahieren wir im Folgenden eine analogen Begriff aus der Hilbertreihe:

Dazu betrachten wir die $\mathbb{N}^2$-Graduierung durch $(-\deg)$ sowie eine zusätzliche Graduierung $(-\tilde{\deg})$ bezüglich derer F_α und K_α für $\alpha \in \Pi$ beide Grad 1 haben, sodass die Layer endlichdimensional sind. Die Abbildung f erhält nach Definition die eine $(-\deg)$-Graduierung, andererseits sind auch charakterverschobene Elemente immer noch graduiert bezüglich der $(-\tilde{\deg})$-Graduierung und f erhält auch diese. Wegen der PBW-Basis können wir nun wie in Beispiel 5.8 die Hilbertreihen vom Urbild direkt angeben:

$$\mathcal{H}_{\mathrm{gr}(U^-[w]_\phi)}(t, z) = \prod_{\mu \in \Phi^+(w)} \frac{1}{1 - t^{ht(\mu')} \cdot z^{ht(\mu)}} \tag{5.2}$$

wobei $ht(\mu') = -\deg(\bar{F}_\mu)$, der a-priori unbekannte Grad des charakterverschobenen PBW-Erzeugers ist, wohingegen der $(-\tilde{\deg})$ durch die Charakterverschiebung nicht berührt wird. Das Bild ist schwieriger zu beschreiben, außerdem besitzt es im Allgemeinen keine PBW-Basis und muss a-priori nicht einmal endlich erzeugt sein. Wir führen daher im Folgenden zwei schöne Wahlen ρ^* und ρ_* ein, sodass gilt

$$U^-[v, \rho_*]kD_0 \subseteq D \subseteq U^-[v, \rho^*]kD_0$$

Einerseits sei $\rho^*(\bar{\mu}) := D_0$ für alle $\bar{\mu}$, dies ist nach Bemerkung 5.2 die maximale Wahl für eine Rechtscoidealunteralgebra. Es existieren andereseits viele Wahlen von RCS $D_* = U^-[v, \rho_*]D_0 \subset D$ aus allen Monomen $F_{\beta_j}K_{s_j}, \beta_j \in \Phi^+(v)$ und in $K_\mu, \mu \in D_0$ (weil nach Satz 5.3 für jedes F_{β_j} ein K_{s_j} existiert mit $F_{\beta_j}K_{s_j} \in D$).
Für die beiden Wahlen ρ_*, ρ^* können wir aber nun die Hilbertreihen bestimmen: Für ρ^* existiert eine PBW-Basis aus Monomen in $F_{\beta_j}, \beta_j \in \Phi^+$ und $K_\mu, \mu \in D_0$. Für ρ_* existiert eine PBW-Basis aus Monomen in $F_{\beta_j}K_{s_j}, \beta_j \in \Phi^+$ und $K_\mu, \mu \in D_0$.

$$\mathcal{H}_{U^-[v,\rho^*]kD_0}(t,z) = \prod_{v\in\Phi^+(v)} \frac{1}{1-(tz)^{ht(v)}} \prod_{i=1}^{\mathrm{Rang}(D_0)} \frac{1}{1-z^{ht(\gamma_i)}} \tag{5.3}$$

$$\mathcal{H}_{U^-[v,\rho_*]kD_0}(t,z) = \prod_{v\in\Phi^+(v)} \frac{1}{1-(tz)^{ht(v)}z^{ht(s_j)}} \prod_{i=1}^{\mathrm{Rang}(N)} \frac{1}{1-z^{ht(\gamma_i)}} \tag{5.4}$$

Insbesondere interessieren wir uns für die *Ordnung des Poles* $x = 1$ der Funktion $\mathcal{H}_V(x,x)$, welche wir mit $\mathrm{Pol}(V)$ bezeichnen (a-priori muss $\mathcal{H}_{U^-[v,\rho]kD_0}(x,x)$ keine rationale Funktion sein, aber wie wir nun sehen werden dennoch ein ganzzahliges n besitzen mit $\mathcal{H}_{U^-[v,\rho]kD_0}(x,x)\cdot x^n$ endlich und $\neq 0$): Die Ordnung des Poles bei $x = 1$ sowohl von $U^-[v,\rho_*]kD_0$ wie auch von $U^-[v,\rho^*]kD_0$ unabhängig von der Wahl von s_j ist jeweils gleich, nämlich die Anzahl der Faktoren $|\Phi^+(v)| + \mathrm{Rang}(D_0)$. Daher ist dies auch die Polordnung von D (man beachte aber, dass der endliche Grenzwert von $\mathcal{H}_{U^-[v,\rho^*]kN}(x,x)\cdot x^n$ und $\mathcal{H}_{U^-[v,\rho_*]kN}(x,x)\cdot x^n$durchaus abweichen kann).

Für einen Isomorphismus, wie wir ihn beweisen wollen, müssen die Hilbertreihen von Bild und Urbild übereinstimmen. Vorerst wissen wir $D = f(\mathrm{gr}(U^-[w]_\phi)$, dass die Layer-Dimensionen im Urbild größer gleich den Layer-Dimensionen im Bild sind, insbesondere gilt:

$$\ell(w) = |\Phi^+(w)| = \mathrm{Pol}(\mathrm{gr}(U^-[w]_\phi)) \geq \mathrm{Pol}(D) = \ell(v) + \mathrm{Rang}(D_0)$$

Im Zuge unserer Induktion gilt:

$$\ell(u') + \mathrm{Rang}(M_u) + 1 = \ell(u) + 1 = \ell(w) \geq \ell(v) + \mathrm{Rang}(D_0) \geq \ell(u') + \mathrm{Rang}(M_u)$$

also ist $\ell(v) = \ell(u')$ oder $\ell(u') + 1$ und ebenso ist $\mathrm{Rang}(D_0) = \mathrm{Rang}(M_u)$ oder $\mathrm{Rang}(M_u)+1$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle für s_{α_i}:

1. Fall: $u(s_{\alpha_i}) \in \mathrm{supp}(\phi)$
In diesem Fall ist explizit $f(\overline{F}_{u(\alpha_i)}) = K^{-1}_{u(\alpha_i)}$ also gilt wegen der Induktionsvorraussetzung schon

$$f(\mathrm{gr}(U^-[u]_\phi))\langle K^{-1}_{u(\alpha_i)}\rangle \subset f(\mathrm{gr}(U^-[w]_\phi)$$

Weil die Elemente in $\mathrm{supp}(\phi)$ paarweise orthogonal sind, und nach Induktionsvorraussetzung schon $kM_u = \langle K^{-1}_\mu \mid \mu \in \mathrm{supp}(\phi)\backslash u(\alpha_i)\rangle$ gilt sind die Elemente in $kM_u\langle K^{-1}_{u(\alpha_i)}\rangle$ $\mathbb{Z}$-linear unabhängig, das heißt die Polordnung von $f(\mathrm{gr}(U^-[u]_\phi))\langle K^{-1}_{u(\alpha_i)}\rangle$ ist

$\ell(u') + (\ell(u) - \ell(u')) + 1 = \ell(w)$. Wegen unserer Ungleichung der Polordnungen ist dann aber schon $\ell(v) = \ell(u')$, das heißt , dass $f(\mathrm{gr}(U^-[w]_\phi)$ keine weiteren PBW-Basiselement enthalten kann. Also ist f ein Isomorphismus und $w' = u'$, $D_0 = M := M_w = M_u \cup u(\alpha_i)$ und die Behauptung gilt.

2. Fall: $u(s_{\alpha_i}) \notin \mathrm{supp}(\phi)$:

In diesem Fall ist $f(\overline{F}_{u(\alpha_i)}) \neq K^{-1}_{u(\alpha_i)}$ also ist $\mathrm{gr}(U[w]_\phi) \cap U^0 = \mathrm{gr}(U[u]_\phi) \cap U^0$, das heißt $M_u = M_w := M$.
Aus der Induktionsvorraussetzung wissen wir ja schon, dass $u' \prec v$ und $L = L_u$. Es gilt für die Polordnung dieser Rechtscoidealunteralgebra:

$$\ell(v) + \mathrm{Rang}(M) = \mathrm{Pol}(f(\mathrm{gr}(U^-[w]_\phi)) \geq \mathrm{Pol}(f(\mathrm{gr}(U^-[u]_\phi))\langle f(\overline{F}_{u(\alpha_i)})) = \ell(u') + 1 + \mathrm{Rang}(M)$$

Also gilt $\ell(v) = \ell(u') + 1$ und es gibt ein $\alpha_j \in \Pi$ mit $v = u' s_{\alpha_j}$.

Wir wollen jetzt zeigen, dass $\alpha_i = \alpha_j$: Dazu betrachten wir explizit $f(\overline{F}_{u(\alpha_i)})$: Wir wissen, dass dieser charakterverschobene Wurzelvektor den Q-Grad $deg_Q(f(\overline{F}_{u(\alpha_i)})) = u(\alpha_i) - \sum_x c_x \gamma_x$ hat für $\gamma_x \in \mathrm{supp}(\phi)$. Es gilt also die folgende Formel:

$$u(\alpha_i)\ \textit{modulo}\ \mathrm{supp}(\phi) = u'(\alpha_j)$$

Wir wollen daraus $\alpha_i = \alpha_j$ folgern. Dazu betrachten wir zunächst das Weylgruppenelement w genauer:

Angenommen w hat in irgendeiner reduzierten Darstellung die Form

$$w = r \cdots s_{\alpha_i} s_{\alpha_l} s_{\alpha_i} \tag{5.5}$$

der Länge $\ell(r) + m_{il}$, wobei $i \neq l$ und $m_{il} = 2, 3, 4$ bzw. 6 für $\langle \alpha_i, \alpha_l \rangle$ vom Typ $A_1 \times A_1$, A_2, B_2 bzw. G_2 ist. Das ist gleichbedeutend damit, dass wir auf $r^{-1}w$ die braid relation anwenden können:

$$r \cdots s_{\alpha_l} s_{\alpha_i} = r \cdots s_{\alpha_i} s_{\alpha_l}$$

Nehmen wir zusätzlich an, dass gilt $\beta_{r+1}, \ldots, \beta_{|w|} \notin \mathrm{supp}(\phi)$. Wir wenden nun die Induktionsvorraussetzung auf $u = r \cdots s_{\alpha_i} s_{\alpha_l}$ und auf die alternative reduzierte Darstellung $\tilde{u} = r \cdots s_{\alpha_l} s_{\alpha_i}$ an: Dies liefert $\Phi^+(u') \subset \Phi^+(u' s_{\alpha_j})$ und $\Phi^+(\tilde{u}') \subset \Phi^+(u' s_{\alpha_j})$, also insbesondere $r' \cdots s_{\alpha_i}(\alpha_l) \in \Phi^+(u' s_{\alpha_j})$ und $r' \cdots s_{\alpha_l}(\alpha_i) \in \Phi^+(u' s_{\alpha_j})$. Also erhalten wir folgende Gleichung für α_j:

$$\Phi^+(\underbrace{\cdots s_{\alpha_l} s_{\alpha_i}}_{\text{Länge } m_{ij}-1}) \in \Phi^+(\underbrace{\cdots s_{\alpha_i} s_{\alpha_l}}_{\text{Länge } m_{ij}-1}\ s_{\alpha_j})$$

Falls nun entgegen unserer Behauptung $i \neq j$, so muss schon:

$$\Phi^+(\underbrace{\cdots s_{\alpha_l} s_{\alpha_i}}_{\text{Länge } m_{ij}-1}) \in \Phi^+(\underbrace{\cdots s_{\alpha_i} s_{\alpha_l}}_{\text{Länge } m_{ij}-1})$$

Je nachdem ob m_{il} gerade oder ungerade ist, liegt in der linken Seite α_l und in der rechten α_i oder andersrum. Die Inklusion würde also bedeuten dass sowohl s_{α_i} als auch s_{α_l} und damit schon alle m_{ij} Wurzeln des zugehörigen Rang 2 Wurzelsystems in $\Phi^+(\underbrace{\cdots s_{\alpha_i} s_{\alpha_l}}_{\text{Länge } m_{ij}-1})$ liegen würden, was im Widerspruch zur Länge $m_{ij} - 1$ steht. Damit folgt $\alpha_i = \alpha_j$, und die Behauptung gilt.

Angenommen w hat in keiner reduzierten Darstellung die obige Form (5.5), dann endet w in jeder Darstellung auf s_{α_i}, denn: Würde w in einer anderen reduzierten Darstellung auf s_{α_j} enden, so würde nach dem Satz von Matsumoto [MM] Theorem 29 eine Folge von braid relations existieren, die den einen in den anderen Ausdruck überführen und es gäbe eine reduzierte Darstellung von w in obiger Form (5.5).

Es verbleiben also nur die Fälle in denen w in jeder reduzierten Darstellung auf s_{α_i} endet. Das heißt in jeder reduzierten Darstellung beginnt w^{-1} mit s_{α_i}, das bedeutet $\Phi^+(w^{-1})$ enthält keine anderen einfachen Wurzeln als α_i, also ist die Behauptung schon bewiesen. □

Die verbleibenden Fälle sind sehr spezielle Elemente der Weylgruppe:

Lemma 5.12:
Für ein Weylgruppenelement $w \in W$ und ein $\alpha_i \in \Pi$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- *die Menge $\Phi^+(w^{-1})$ enthält genau eine einfache Wurzel, nämlich α_i*
- *für alle $j \neq i$ gilt $\ell(s_{\alpha_j} w^{-1}) = \ell(w) + 1$, aber $\ell(s_{\alpha_i} w^{-1}) = \ell(w) - 1$*
- *In jeder reduzierten Darstellung von w ist s_{α_i} der letzte Faktor*

Sei W_i die (sog. parabolische) Untergruppe von W, die von den s_{α_j} mit j ungleich i erzeugt wird. Dann ist im obigen Fall w der eindeutige Vertreter der Linksnnebenklasse wW_i mit minimaler Laenge.

Diese Elemente sind für A_n gut berechenbar und wir können die Vermutung 5.10 damit für A_n komplett beweisen:

In der A_n gibt es für jedes solche w mit $\Phi^+(w^{-1}) \cap \Pi = \{\alpha_l\}$ für ein $\alpha_l \in \Pi$ Konstanten l_j mit $1 + a = l_0 < l_1 < l_2 \ldots < l_{l-a} < n$ für $0 \leq a \leq n$, sodass eine reduzierte Darstellung von w der folgenden Form existiert:

$$w = \underbrace{s_{\alpha_{l_{l-a}}} s_{\alpha_{l_{l-a}-1}} \ldots s_{\alpha_{l_{l-a-1}+l_{l-a}-2}}}_{\text{Höhe } 1} \underbrace{s_{\alpha_{l_{l-a-1}}} s_{\alpha_{l_{l-a-1}+1}} s_{\alpha_{l_{l-a-1}-1}}}_{\text{Höhe } 2} \cdots\cdots\cdots \underbrace{s_{\alpha_{l_{l_i}}} \ldots s_{\alpha_{l_{l-i}+l_{l-i+1}-2}}}_{\text{Höhe } i} \cdots\cdots s_{\alpha_{l+1}} \underbrace{s_{\alpha_{1+a}} s_{\alpha_{2+a}} \ldots s_{\alpha_l}}_{\text{Höhe } l-a}$$

Dies sieht man entweder direkt oder systematischer unter Verwendung von Youngtableaux (siehe unten). Der Einfachheit halber und ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir im Folgenden $a = 0$.

Wir verwenden für Wurzeln μ in A_n die Notation 3.21: $\mu = [\mu_1, \mu_2]$ für $1 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq n$ wenn $\mu = \sum_{m=\mu_1}^{\mu_2} \alpha_i$. Alle Wurzeln in A_n sind von dieser Form.

Satz 5.13:
Vermutung 5.10 trifft im Fall A_n zu.

Beweis: Nach Lemma 5.11 reicht es zu zeigen dass für $u \in W$ und $\alpha_i, \alpha_j \in \Pi$ aus

$$u(\alpha_i) \; mod \; \mathrm{supp}(\phi) = u'(\alpha_j)$$

schon $\alpha_i = \alpha_j$ folgt. Außerdem reicht es dazu die Elemente w mit $\Phi^+(w^{-1}) \cap \Pi = \{\alpha_l\}$ für ein $\alpha_l \in \Pi$ zu betrachten. In A_n können wir diese explizit hinschreiben, nämlich für beliebige $1 = l_0 < l_1 < l_2 \ldots < l_l < n$:

$$w = \underbrace{s_{\alpha_{l_l}} s_{\alpha_{l_l-1}} \ldots s_{\alpha_{l_{l-1}+l_l-2}}}_{\text{Höhe } 1} \underbrace{s_{\alpha_{l_{l-1}}} s_{\alpha_{l_{l-1}+1}} s_{\alpha_{l_{l-1}-1}} \ldots\ldots\ldots}_{\text{Höhe } 2} \underbrace{s_{\alpha_{l_{l_i}}} \ldots s_{\alpha_{l_{l-i}+l_{l-i+1}-2}}}_{\text{Höhe } i} \ldots\ldots s_{\alpha_{l+1}} \underbrace{s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \ldots s_{\alpha_l}}_{\text{Höhe } l}$$

Für diese Elemente $w \in W$ können wir die Menge $\Phi^+(w)$ berechnen(siehe Bemerkung 5.14), es gilt:

$$\Phi^+(w) := \{\mu = [\mu_1, \mu_2] \mid \text{ mit } \mu_2 = l_p \text{ für ein } 1 \leq p \leq l \text{ und } 1 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \text{ sowie } \mu_1 \neq l_m + 1 \forall m \leq l\}$$

Wir betrachten jetzt ein solches $w \in W$ zu der einfachen Wurzel α_i und nennen es w_i. Insbesondere liegen alle Elemente aus dem Träger $\mathrm{supp}(\phi)$ in $\Phi^+(w_i)$ und sind also von obiger Form. Genauer wissen wir, dass die Menge der Erzeuger γ_m von $\mathrm{supp}(\phi)$ paarweise aufeinander senkrecht stehen, das heißt $(\gamma_m)_1 \neq (\gamma_q)_1$ für alle $\gamma_m \neq \gamma_q \in \mathrm{supp}(\phi)$. Wir können die Elemente γ_m also ordnen nach ihren Anfangswerten $(\gamma_m)_1$, es sei γ_m die Wurzel in $\mathrm{supp}(\phi)$ mit $(\gamma_m)_1 = m$. Mit Bemerkung 5.14 kennen wir mögliche Wahlen von $\mathrm{supp}(\phi)$ sogar genauer, wir werden das aber im Beweis nicht verwenden.

Andererseits können wir auch alle Möglichkeiten für $u(\alpha_j) = w_i s_{\alpha_i}(\alpha_j)$ explizit berechnen. Seien dazu die zum Element w_i gehörigen Konstanten $1 = i_0 < i_1 < i_2 \ldots < i_i < n$ gegeben. Jetzt unterscheiden wir zwei Fälle:
1. Fall $l \leq i + 1$:

$$w_i s_{\alpha_i}(\alpha_j) = \begin{cases} [i_j + 1, i_{j+1}], & \text{für } j < i - 1 \\ -[1, i_j], & \text{für } j = i - 1 \\ [1, i_i], & \text{für } j = i \\ -[a, i_i], & \text{für } j = i + 1 \text{ und } a = \min\{j \mid i_j > i_{j-1} + 1\} + 1 \end{cases}$$

2. Fall $l > i + 1$:

$$w_i s_{\alpha_i}(\alpha_j) \in \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_r, & \text{für } 2 \leq r \leq i_i - 1 \text{ mit } r \neq i_m, i_m + 1 \forall m < i \\ [r, s], & \text{für } r = i_m \text{ für ein } m \leq i \text{ und } s = i_t + 1 \\ & \text{für ein } t \text{ sodass } i_t + 1 \neq i_{t+1} \text{ und für alle } u \text{ mit } j \leq u \leq t \text{ gilt } i_u + 1 = i_{u+1} \end{array} \right\}$$

Mit diesem Wissen können wir nun die Gleichung genauer analysieren. Seien $c_x \in \mathbb{Z}$ und $\gamma_x \in \mathrm{supp}(\phi)$:

$$u(\alpha_i) + \sum_{x=1}^{n} c_x \gamma_x = u(\alpha_j) \tag{5.6}$$

$$[1, i_i] + \sum_{x=1}^{n} c_x \gamma_x = w_i s_{\alpha_i}(\alpha_j) \tag{5.7}$$

Wir wissen aus den vorherigen Überlegungen, dass $(\gamma_x)_1 = x$ nach Definition, und $(\gamma_x)_2 = i_m$ für ein $m \leq i$ mit $x \leq i_m$ nach Konstruktion. Außerdem wissen wir, weil wir die Elemente in $\Phi^+(w)$ kennen, dass für alle $m \leq i$ gilt:

$$c_{i_m+1} = 0 \tag{5.8}$$

Wir definieren $j := w_i s_{\alpha_i}(\alpha_j)$ und machen eine Fallunterscheidung über mögliche Werte und argumentieren mit der Form von j und der Form möglicher Werte in $\mathrm{supp}(\phi)$ sowie der paarweisen Orthogonalität der Elemente in $\mathrm{supp}(\phi)$:

- Angenommen $\alpha_1 \not\prec j$ und $\alpha_1 \not\prec -j$, daraus folgt sofort $c_1 = 1$:
  - Angenommen es gibt ein $1 < x \leq (\gamma_1)_2$ mit $c_x \neq 0$ so folgt aus der Formel (5.6) schon $x = j_1$:
    - Angenommen $(\gamma_x)_2 < (\gamma_1)_2$ so folgt $j_2 = (\gamma_x)_2$, das ist aber ein Widerspruch zu $j \notin \mathrm{supp}(\phi)$
    - Angenommen $(\gamma_x)_2 > (\gamma_1)_2$ so folgt $j_2 = (\gamma_1)_2$ also $j_1 = i_m+1$ für ein $1 \leq m < i$, das ist aber ein Widerspruch zu $x \neq i_m + 1$ für alle $m \leq i$ wegen Formel (5.8). (folgt auch systematischer aus Bemerkung 5.14)
  - Angenommen für alle $x > 1$ mit $c_x \neq 0$ gilt $x > (\gamma_1)_2$ so folgt sofort $j_1 = (\gamma_1)_2 + 1$ dann folgt aber $j_2 = l_m$ für ein $1 \leq m < i$ und damit $c_{l_m+1} \neq 0$ was ein Widerspruch ist zu Formel (5.8).
- Angenommen $\alpha_1 \prec j$ oder $\alpha_1 \prec -j$, daraus folgt entweder $\alpha_i = \alpha_j$ oder $j = -[1, i_{i-1}]$. Im letzten Fall folgt sofort $c_1 = 2$ und $(\gamma_1)_2 \geq j_2$ sowie für alle $1 \leq x \leq j_2$ gilt $c_x = 0$: (das folgt auch systematischer aus Bemerkung 5.14)
  - Angenommen $(\gamma_1)_2 = j_2$ folgt aus der Formel 5.6 schon $c_{j_2+1} \neq 0$ das ist ein Widerspruch zu Formel (5.8).
  - Angenommen $(\gamma_1)_2 > j_2$ folgt sofort $c_{j_2+1} = -1$ das ist ein Widerspruch zu Formel (5.8).
    (folgt auch systematischer aus Bemerkung 5.14)

Also folgt $\alpha_i = \alpha_j$ und in A_n gilt die Vermutung. □

Wir schließen diesen Abschnitt mit einer systematischeren Beschreibung der Nebenklassen und der obigen Rechnungen durch Young-Tableaus.

Bemerkung 5.14 (Nebenklassen und Youngtableaus in der A_n):
Wir geben hier eine Konstruktion von $\Phi^+(w)$ aller Elemente w, für die gilt, dass $\Phi^+(w^{-1}) \cap \Pi = \{\alpha_l\}$ zur einfachen Wurzel α_l in Π ist, an: In A_n können wir diese explizit hinschreiben, nämlich für beliebige $1 = l_0 < l_1 < l_2 \ldots < l_l < n$:

$$w = \underbrace{s_{\alpha_{l_l}} s_{\alpha_{l_l-1}} \ldots s_{\alpha_{l_{l-1}+l_l-2}}}_{\text{Höhe } 1} \underbrace{s_{\alpha_{l_{l-1}}} s_{\alpha_{l_{l-1}+1}} s_{\alpha_{l_{l-1}-1}} \ldots\ldots\ldots}_{\text{Höhe } 2} \underbrace{s_{\alpha_{l_{l_i}}} \ldots s_{\alpha_{l_{l-i}+l_{l-i+1}-2}}}_{\text{Höhe } i} \ldots\ldots s_{\alpha_{l+1}} \underbrace{s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \ldots s_{\alpha_l}}_{\text{Höhe } l}$$

Jedem solchen Element ordnen wir das folgende Young-Diagramm zu:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline l & l-1 & l-2 \\ \hline l+1 & l & l-1 \\ \hline \end{array} \ldots\ldots \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 2 & 1 \\ \hline 4 & 3 & 2 \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{array}{cccccccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \boxed{l_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \boxed{l_2} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \boxed{l_3} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ \boxed{l_l} & & & & & & & \end{array}$$

Jedes Kästchen gefüllt mit Index k entspricht einem Faktor s_{α_k} in w (von rechts nach links gelesen). Alle Zeilen der Länge l zusammen entsprechen dem Faktor in w der oben mit „Höhe l“ bezeichnet ist. Das vertikale Ende der k-ten Spalte von rechts hat den Inhalt l_k. Mit diesem Young-Diagramm kann man die Menge $\Phi^+(w)$ folgendermaßen berechnen:

Zu jedem Kästchen gehört die Wurzel in $\Phi^+(w)$, die durch Aufaddieren aller einfachen Wurzeln rechts und unter dem Kästchen entsteht. Das ergibt dann die folgende Menge:

$$\Phi^+(w) := \{\mu = [\mu_1, \mu_2] \mid \text{ mit } \mu_2 = l_p \text{ für ein } 1 \leq p \leq l \text{ und } 1 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \text{ sowie } \mu_1 \neq l_m + 1 \forall m \leq l\}$$

Zwei Wurzeln in $\Phi^+(w)$ liegen genau dann nicht aufeinander senkrecht, wenn die zugehörigen Kästchen in derselben Zeile oder derselben Spalte liegen.

Eine wesentliche Eigenschaft von supp(ϕ) ist:

Gegeben ein w mit $\Phi(w^{-1}) \cap \Pi = \{\alpha_i\}$ für ein $\alpha_i \in \Pi$ und ein Charakter ϕ auf $U^-[w_i]$. Zwei Elemente μ, ν können nur dann beide in supp(ϕ) *liegen, wenn sich die zugehörigen Haken in dem Youngtableaux nicht schneiden.*

Beweisskizze: Wir wissen aus [HK11b] s.12, dass ϕ nur dann ein Charakter auf $U^+[w]$ sein kann, wenn supp(ϕ) die folgende Eigenschaft hat: Sei zu $w_i = s_{\alpha_{k_1}} s_{\alpha_{k_2}} \ldots s_{\alpha_{k_m}} \in W$ das Element $w_i' := s_{\alpha_{k_1}} s_{\alpha_{k_2}} \ldots \not{s}_{\alpha_{k_i}} \ldots s_{\alpha_{k_m}}$ jenes Element, welches entsteht wenn in w_i alle Faktoren s_{α_i}, für

alle i mit $\beta_i \in \operatorname{supp}(\phi)$, gestrichen werden, dann ist w_i' eine reduzierte Darstellung, das heißt $\ell(w_i') = \ell(w_i) - |\operatorname{supp}(\phi)|$.

Angenommen es gibt zwei Elemente $\mu, \nu \in \operatorname{supp}(\phi)$ deren zugehörige Haken im Youngtableaux sich schneiden. Wegen Lemma 3.42, können wir uns zunächst auf $\operatorname{supp}(\phi_1) = \{\mu, \nu\}$ einschränken. Wir berechnen dann die neuen Elemente in $\Phi^+(w_i')$. Wir wollen zeigen, dass w_i' keine reduzierte Darstellung ist, dazu zeigen wir, dass einige der Wurzeln die zu den Kästchen im Youngdiagramm gehören nicht mehr positiv sind, also $|\Phi^+(w_i')| \neq |\Phi^+(w_i)| - 2$ gilt:

Seien (μ^1, μ^2) und (ν^1, ν^2) die Kästchen im Youngtableaux die zu den Wurzeln μ und ν gehören, mit o.B.d.A. $\mu^1 < \nu^1$ und $\nu^2 < \mu^2$. Wir streichen die beiden Einträge im Diagramm und betrachten den Eintrag bei (μ^1, ν^2). Die zugehörige Wurzel in $\Phi^+(w_i')$ ist negativ, denn: Die Wurzel entsteht durch Spiegelungen an den jeweiligen vorherigen Einträgen: Wegen der gestrichenen Einträge reicht es sich dazu das Rechteck:$(\mu^1, \mu^2), (\mu^1, \nu^2), (\nu^1, \nu^2), (\nu^1, \mu^2)$ anzusehen. Hier wird die zu dem Eintrag (ν^1, μ^2) gehörige Wurzel ζ auf $-\zeta$ gespiegelt und weil ζ nicht mehr auftaucht in den Wurzeln links vom oder unter dem Rechteck ist die zu dem Kästchen (μ^1, ν^2) gehörige Wurzel negativ, also nicht in $\Phi^+(w_i')$, das heißt $|\Phi^+(w_i')| < |Phi^+(w_i)| - 2$.

5.2. Die Graduierte von triangulären Rechtscoidealunteralgebren in U

Lemma 5.15:
Gegeben ein w, ϕ^- und zugehöriges D und w', sodaß Vermutung 5.10 erfüllt ist. Gegeben außerdem ein w^+, ϕ^+ mit $\operatorname{supp}(\phi^+) = \operatorname{supp}(\phi^-)$ sowie eine Untergruppe $L \subset (\operatorname{supp}(\phi^+))^\perp$ sodass $C = U^-[w]_{\phi^-} T_L U^+[w^+]_{\phi^+}$ eine Unteralgebra ist. Dann ist die Abbildung

$$f: \ \operatorname{gr}(C) \longrightarrow D\, T_L\, U^+[w^+]$$

die jedes Element auf seinen Leitterm bzgl. der $\mathbb{Z}$-Graduierung schickt ein Algebrenisomorphismus.

Beweis: Die Abbildung f die jedes Element auf den Leitterm bzgl. der $\mathbb{Z}$-Graduierung schickt, ist offensichtlich ein Algebrenhomomorphismus. Die Bijektivität folgt folgendermaßen: Wegen Vermutung 5.10 wissen wir schon, dass diese Abbildung $\operatorname{gr}(U^-[w]_{\phi^-})$ isomorph auf D schickt, außerdem ist klar, dass T_L auf T_L geschickt wird. Ferner wird $U^+[w^+]_{\phi^+}$ auf $U^+[w^+]$ geschickt weil der Leitterm eines charakterverschobenen $\overline{E}_\mu$ einfach E_μ ist. Es bleibt zu zeigen, dass $\langle kM, T_L \rangle = kM \otimes T_L$, dies folgt nach Voraussetzung $L \subset (\operatorname{supp}(\phi^+))^\perp$, weil dann M und L $\mathbb{Z}$-linear unabhängig sind. □

Wegen $\ell(w'^{-1}w^+) = \ell(w') + \ell(w^+)$ können wir wie in Lemma 1.38 den Lusztigautomorphismus $T_{w'}$ anwenden auf $DT_L U^+[w^+]$.

Dieser Isomorphismus der Graduierten von C sollte vollständig erklären wann eine trianguläre Rechtscoidealunteralgebra eine Borelunteralgebra ist. Falls wir die Charakterisierung von C als

ede über die Eigenschaft gr(C) in voller Allgemeinheit in beiden Richtungen zeigen könnten, so würde dies unsere zentrale Vermutung implizieren:

Vermutung 5.16:
Jede trianguläre Rechtscoidealunteralgebra von der Form $C = U^-[w]_{\phi^-}T_L\psi(U^+[w^+])_{\phi^+}$ mit $\mathrm{supp}(\phi^+) = \mathrm{supp}(\phi^-)$ und $L = \mathrm{supp}(\phi^+)^\perp$ ist genau dann eine Borelunteralgebra, wenn $w^+w'^{-1} = w_0$.

Wir vermuten sogar, dass die Forderungen $\mathrm{supp}(\phi^+) = \mathrm{supp}(\phi^-)$ und $L = \mathrm{supp}(\phi^+)^\perp$ schon aus der Triangularität folgen. Wir beobachten in Spezialfällen immer wieder, dass die Tatsache, dass eine vorgegebene Kombination von $\psi(U^+[w^+])_{\phi^+}$ und $U^-[w^-]_{\phi^-}$ überhaupt eine Algebra bildet, das heißt abgeschlossen unter der Multiplikation ist, bereits sehr starke Einschränkungen an $\mathrm{supp}(\phi^+)$, $\mathrm{supp}(\phi^-)$ und L impliziert, siehe dazu unter Anderem Lemma 3.12. Wir beobachten andererseits, dass diese Einschränkungen meist auch schon aus der ede Eigenschaft oder Maximalität folgen. Unsere Vermutung bedeutet also eigentlich, dass die Eigenschaft einer Rechtscoidealunteralgebra „triangulär“ zu sein und Borel zu sein eng miteinander verwoben sind. Insbesondere vermuten wir, dass jede Borelalgebra triangulär ist.

Während die späteren Borelalgebren vom sog. Typ 2 sich auch noch mit ganz U^0 zu triangulären Rechtscoidealunteralgebren vergrößern lassen, dann aber nicht mehr ede sind, weil nun auch die nichtcharakterverschobenen Wurzelvektoren enthalten sind, lassen die späteren Borelalgebren vom Typ 3 eine solche Erweiterung als trianguläre Rechtscoidealunteralgebren gar nicht zu (mit gleichem w^+, w^-).

Immerhin können wir im Fall A_n unter Verwendung der winzigen Darstellungen aus Beispiel 1.47 zeigen:

Lemma 5.17:
Im Fall A_n gilt: Gegeben ein w und w' wie in Vermutung 5.10 (die nach Satz 5.13 für A_n erfüllt ist). Gegeben außerdem ein w^+, sodass $C = U^-[w]_{\phi^-}T_L\psi(U^+[w^+])_{\phi^+}$ mit $L \subset (\mathrm{supp}(\phi^+) \cap \mathrm{supp}(\phi^-))^\perp$ eine trianguläre Rechtscoidealunteralgebra ist. Gilt nun $\ell(w'^{-1}w^+) < \ell(w') + \ell(w^+)$, so ist C nicht ede.

Beweis: Für ein allgemeines $U_q(\mathfrak{g})$ gilt: Wegen $\ell(w'^{-1}w^+) < \ell(w') + \ell(w^+)$ ist $\Phi^+(w^+) \cap \Phi^+(w'^-) \neq \emptyset$, also gibt es eine Wurzel $\mu \in \Phi^+(w^+) \cap \Phi^+(w'^-)$ und damit nach Satz 5.13 Elemente $E = \bar{E}_\mu, F \in C$ (F nicht zwingend charakterverschobener Wurzelvektor) mit Leittermen bzgl. der $\mathbb{Z}$-Graduierung $E_\mu K_\mu^{-1}$ und $F_\mu$in der Wurzel μ, bzgl. den gewählten reduzierten Darstellungen w^+ und w'.

Unsere allgemeine Strategie zur Konstruktion von irreduziblen Darstellungen von Dimension größer 1 ist wie folgt: Wir betrachten die Wirkung des Kommutators $[E, F]_1 \in C$ auf einer geeigneten endlichdimensionalen $U_q(\mathfrak{g})$-Darstellung $V = L(\lambda)$, welche wir auf C einschränken wollen. Der Kommutator wirkt trivial auf jeder eindimensionalen Darstellung von C und damit nilpotent auf allen Darstellungen von C, deren Kompositionsreihe nur eindimensionale Darstellungen enthält. Andererseits enthält E nur Terme im Grad $\preceq \mu$ und F nur Terme im Grad

$\geq \mu$, sodass der Kommutator $[E.F]_1$ auf V eine untere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen $[E_\mu K_\mu^{-1}, F_\mu]_1$ ist. *Falls* wir für ein gegebens $\mathfrak{g}, \mu$ ein $\lambda, v \in V(\lambda)$ finden können, sodass $[E_\mu K_\mu^{-1}, F_\mu]_1.v = cv$ mit $c \neq 0$, so kann der Kommutator nicht nilpotent wirken und folglich muss $V|_C$ mindestens einen irreduziblen Kompositionsfaktor der Dimension größer 1 haben, also ist C nicht ede. Diese Bedingung ist zum Beispiel für $\mu \in \Pi$ trivialerweise für den Höchstgewichtsvektor v erfüllt, aber im Allgemeinen kennen wir $[E_\mu K_\mu^{-1}, F_\mu]_1$ nicht.

Im Fall der A_n können wir die Bedingung explizit auf der winzigen Darstellung $V = V(\lambda_1)$ nachrechnen. Sei $\mu = \sum_{k=\mu_1}^{\mu_2} \alpha_k$. Die Wirkung der einfachen Wurzelvektoren ist dann explizit

$$F_{\alpha_{k+1}}.v_{\lambda_1-\alpha_1-\ldots-\alpha_k} \sim v_{\lambda_1-\alpha_1-\ldots-\alpha_{k+1}} \tag{5.9}$$

$$F_{\alpha_j}.v_{\lambda_1-\alpha_1-\ldots-\alpha_k} = 0, \quad j \neq k+1 \tag{5.10}$$

und alle Gewichtsräume sind eindimensional. Betrachten wir nun $v := v_{\lambda_1-\alpha_1-\ldots-\alpha_{\mu_1-1}}$, so ist $E_\mu K_\mu^{-1}.v$ offenbar trivial, $F_\mu.v$ ist ein nichttriviales Vielfaches von $v_{\lambda_1-\alpha_1-\ldots-\alpha_{\mu_2}}$, weil nur der Summand $F_{\alpha_{\mu_2}} \cdots F_{\alpha_{\mu_1}}$ nichttrivial wirken kann, und mit derselben Argumentation ist auch $E_\mu K_\mu^{-1} F_\mu.v$ ein nichttriviales Vielfaches von v. Damit ist v ein nichttrivialer Eigenvektor für den Kommutator, damit folgt nach der obigen Ausführung die Behauptung. □

Teil V.

Trianguläre Borelunteralgebren

6. Typ 1: Homogene Borelalgebren

In diesem Kapitel wird die Klassifikation der homogenen Borelunteralgebren von $U = U_q(\mathfrak{g})$, für q keine Einheitswurzel, angegeben.

Lemma 6.1:
Gegeben ein $w \in W$ und die zugehörige Rechtscoidealunteralgebra $U^-[w]$. Jede endlichdimensionale irreduzible Darstellung V, auf der alle Elemente in $U^-[w] \cap ker\epsilon$ nilpotent wirken ist eindimensional.

Insbesondere ist $U^-[w]$ immer schwach ede. Das Gleiche gilt für $U^+[w]$.

Beweis: Sei $w \in W$ gegeben. Aus Kapitel 6 in [HS09] wissen wir, dass $U^-[w]$ isomorph ist zu $k[F_\alpha]\#T_\alpha(U^-[s_\alpha w])$ für ein $s_\alpha < w$. Wir zeigen jetzt induktiv über die Länge $\ell(w)$, dass jede endlichdimensionale irreduzible Darstellung V von $U^-[w]$, auf der alle Elemente in $U^-[w] \cap ker\epsilon$ nilpotent wirken eindimensional ist.

Für $w = 1$ ist die Behauptung erfüllt. Sei die Behauptung nun bewiesen für alle $w \in W$ mit $\ell(w) = n$. Betrachten wir jetzt ein beliebiges $w \in W$ mit $\ell(w) = n + 1$. Es gibt eine reduzierte Darstellung $w = s_\alpha v$ für ein $\alpha \in \Pi$ und ein $v \in W$ mit $\ell(v) = n$. Wir wollen jetzt zeigen, dass jede endlichdimensionale irreduzible Darstellung V von $U^-[w]$, auf der alle Elemente in $U^-[w] \cap ker\epsilon$ nilpotent wirken eindimensional ist. Sei V eine endlichimensionale irreduzible Darstellung von $U^-[w]$. Es gibt eine eindimensionale $T_\alpha(U^-[v])$-Unterdarstellung von V auf der alle Elemente trivial wirken nach Induktionsvoraussetzung. Sei $V_0 \subset V$ der Vektorraum, der erzeugt wird von Vektoren $v \in V$ auf denen $T_\alpha(U^-[v])$ trivial wirkt, das heißt $V_0 = \{v \in V \mid h.v = \epsilon(h)v \forall h \in T_\alpha(U^-[v])\}$. Wir zeigen zunächst, dass V_0 unter ad-F_α stabil ist: Wir wissen für $\mu \neq 0$ für alle $X_\mu \in T_\alpha(U^-[v])_\mu$, dass für den q-Kommutator gilt $[X_\mu, F_\alpha] \in T_\alpha(U^-[v])$. Angewandt auf $v \in V_0$ bedeutet das:

$$X_\mu F_\alpha.v = q^{(\mu,\alpha)} F_\alpha X_\mu.v + Y.v \text{ für ein } Y \in T_\alpha(U^-[v])$$

Daraus folgt direkt: $X_\mu F_\alpha.v = 0$. Also ist V_0 eine $U^-[w]$-Unterdarstellung von V und weil V irreduzibel ist gilt $V = V_0$. Weil F_α auf V nilpotent wirkt, hat F_α einen Eigenvektor $v_0 \in V$ zum Eigenwert 0. Also folgt schon, weil V irreduzibel ist, dass $V = \langle v_0 \rangle$ und $U^-[w]$ wirkt auf dieser Darstellung trivial.

Ist V ein Subquotient von einem $U_q(\mathfrak{g})$- Modul, so wissen wir nach [Jan96] Proposition 5.1, dass alle Elemente $F_\alpha \in U_q(\mathfrak{g})$ nilpotent auf V wirken. Damit ist $U^-[w]$ schwach ede.

Folgerung 6.2:
Gegeben ein $w \in W$, L eine Unterguppe von Q und die zugehörige Rechtscoidealunteralgebra $C = T_L U^-[w]$ mit der Eigenschaft, dass für alle $\mu \in \Phi^+(w)$ ein $\nu \in L$ existiert mit $(\mu, \nu) \neq 0$, so ist C ede.

Insbesondere ist $U^0 U^-[w]$ ede, ebenso die Rechtscoidealunteralgebra $U^0 U^+[w]$.

Beweis: Wir beweisen die Folgerung genauso wie Lemma 6.1: Wir zeigen, dass jede endlichdimensionale irreduzible Darstellung eindimensional ist und, dass $U^-[w] \cap ker\epsilon$ auf allen eindimensionalen Darstellungen als 0 wirkt.

Weil T_L abelsch ist, ist für $w = 1$ die Behauptung erfüllt. Sei die Behauptung nun bewiesen für alle $w \in W$ mit $\ell(w) = n$. Betrachten wir dazu ein beliebiges $w \in W$ mit $\ell(w) = n + 1$. Es gibt eine reduzierte Darstellung $w = s_\alpha v$ für ein $\alpha \in \Pi$ und ein $v \in W$ mit $\ell(v) = n$. Wir wollen jetzt zeigen, dass die Algebra $T_L U^-[w]$ ede ist. Sei V eine endlichimensionale irreduzible Darstellung von $T_L U^-[w]$. Es gibt eine eindimensionale $T_L T_\alpha(U^-[v])$-Unterdarstellung von V auf der alle Elemente in $T_\alpha(U^-[v])$ trivial wirken nach Induktionsvoraussetzung. Sei $V_0 \subset V$ der Vektorraum, der erzeugt wird von Elementen $v \in V$ auf denen alle Elemente aus $T_\alpha(U^-[v])$ trivial wirken und alle Elemente $K_\mu \in U^0$ als $K_\mu.v = \lambda_\mu v$ für ein $\lambda_\mu \in k^*$. Wir zeigen wieder, dass V_0 unter ad-F_α stabil ist. Dazu reicht es nach Lemma 6.1 sich den q-Kommutator von F_α mit $K_\mu \in T_L$ angewandt auf $v \in V_0$ anzusehen. Es gilt:

$$K_\mu F_\alpha.v = q^{-(\alpha,\mu)} F_\alpha K_\mu.v = q^{-(\alpha,\mu)} \lambda_\mu F_\alpha.v \tag{6.1}$$

Also ist V_0 ad-F_α stabil, d.h. V_0 ist eine $T_L U^-[w]$ Unterdarstellung. Weil V irreduzibel ist, gilt also: $V_0 = V$.

Angenommen F_α hat einen Eigenvektor in V_0 zum Eigenwert $\lambda \neq 0$. Dann liefert (6.1) einen Widerspruch für K_μ mit $(\mu, \alpha) \neq 0$, denn es gilt:

$$\lambda \lambda_\mu v = K_\mu F_\alpha.v = q^{-(\alpha,\mu)} F_\alpha K_\mu.v = q^{-(\alpha,\mu)} \lambda_\mu F_\alpha.v = q^{-(\alpha,\mu)} \lambda_\mu \lambda v \lightning$$

Also ist 0 der einzige Eigenwert von F_α in V_0 mit Eigenvektor v_0. Es ist $\langle v_0 \rangle \subset V_0$ eine eindimensionale $T_L U^-[w]$-Unterdarstellung. Weil V irreduzibel ist gilt also $V = \langle v_0 \rangle$. Damit ist auch gezeigt, dass F_α auf allen eindimensionalen Darstellungen von $T_L U^-[w]$ trivial wirkt, und die Behauptung ist bewiesen.

Im Fall $T_L = U^0$ ist die Eigenschaft dass für alle $\mu \in \Phi^+(w)$ ein $\nu \in L$ existiert mit $(\mu, \nu) \neq 0$ trivialerweise erfüllt für $\nu = \mu$, es folgt $U^0 U^+[w]$ ist ede. □

Lemma 6.3:
Die Unteralgebren U^+U^0 und U^-U^0 sind Borelunteralgebren von U, die wir Standardborelalgebren nennen.

Beweis: Von Lemma 6.2 wissen wir, dass $U^0 U^+[w_0]$ ede ist, wir müssen also nur noch die Maximalität zeigen. Sei C eine ede Rechtscoidealunteralgebra mit $U^{\geq 0} \subset C$: Weil $U^0 \subset C$ ist C

insbesondere triangulär (Proposition 2.2), es gilt also $C = U^+[w_0]U^0U^-[w]$ für ein $w \in W$. Von Satz 3.6 wissen wir aber, dass C nicht ede ist, sobald es ein $\alpha \in \Pi$ gibt mit $E_\alpha, F_\alpha, K_\alpha, K_\alpha^{-1} \in C$. Daher folgt $w = 1$ und $C = U^0U^+[w_0]$ ist eine Borelunteralgebra. Ebenso für U^-U^0. □

Satz 6.4:
Jede homogene Borelunteralgebra B ist als Algebra isomorph zur Standardborelalgebra. Insbesondere gibt es für jedes solche B ein $w \in W$ mit $B = T_w(U^-U^0)$.

Beweis: Sei B eine homogene Borelunteralgebra. Nach Proposition 2.2 ist die homogene Rechtscoidealunteralgebra $B \subset U$ von der Form:

$$B = U^+[w]U^0U^-[v]$$

Angenommen es gibt ein $\mu \in \Phi^+(w) \cap \Phi^+(v)$ so gibt es Elemente $E_\mu, F_\mu \in C$, dann gibt es einen Widerspruch zur Boreleigenschaft nach Satz 3.10 für $\lambda = \lambda' = 0$. Ist B eine Borelunteralgebra so gilt also $\Phi^+(w) \cap \Phi^+(v) = \emptyset$, das heißt $\ell(w^{-1}v) = \ell(w) + \ell(v)$. Damit gilt $B \subseteq U^+[w]U^0U^-[w^{-1}w_0]$. Wir wissen von Korollar 2.8 insbesondere, dass $U^+[w]U^0U^-[w^{-1}w_0]$ als Algebra isomorph zu $U^{\leq 0}$ ist, via Lusztigautomorphismus T_w^{-1}. Es ist also $U^+[w]U^0U^-[w^{-1}w_0]$ nach Folgerung 6.3 ede und wegen der Maximalität von B folgt $B = U^+[w]U^0U^-[w^{-1}w_0] \cong U^{\leq 0}$. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

7. Typ 2: Trianguläre Borelunteralgebren mit $\Phi^+(w^+) \cap \Phi^+(w^-) = \mathrm{supp}(\phi^+) \cap \mathrm{supp}(\phi^-) \neq \emptyset$

In diesem Kapitel werden triangulär erzeugte Borelunteralgebren von $U = U_q(\mathfrak{g})$ für q keine Einheitswurel beschrieben. Es gibt 3 Typen solcher Borelunteralgebren. Der erste Typ sind die Standardborelalgebren aus 6.3, der zweite Typ sind solche für die gilt $\Phi^+(w^+) \cap \Phi^+(w^-) = supp(\phi^+) \cap supp(\phi^-)$. Zuletzt stellen wir den dritten Typ von Borelunteralgebren vor, mit $\Phi^+(w^+) \cap \Phi^+(w^-) \neq (supp(\phi^+) \cap supp(\phi^-))$.

In diesem Kapitel betrachten wir den Typ 2 genauer. Es wird gezeigt, dass die Borelunteralgebren von Typ 2 isomorph sind zu einer Wahl von Cocliquen des Dynkindiagramms und zugehörigen Charakteren. Im Kapitel „Konstruktion“ zeigen wir, dass Rechtscoidealunteralgebren von einer bestimmten Form Borelunteralgebren sind, im Kapitel „Klassifikation“ zeigen wir, dass alle triangulären Borelunteralgebren mit $\Phi^+(w^+) \cap \Phi^+(w^-) = supp(\phi^+) \cap supp(\phi^-)$ isomorph zu Borelunteralgebren dieser Form sind.

7.1. Konstruktion der Borelunteralgebren von Typ 2

In diesem Kapitel betrachten wir $C = \psi(U^+[w_0])_{\phi^+} T_L U^-[x]_{\phi^-}$ wobei $w_0 \in W$ das längste Element der Weylgruppe ist, $x \in W$ sodass $\Phi^+(x) \subset \Pi$ aus paarweise orthogonalen Wurzeln besteht. Ferner sind ϕ^+, ϕ^- die Charaktere mit $supp(\phi^+) = supp(\phi^-) = \Phi^+(x)$ definiert wie folgt: $\phi^+(\psi(E_\alpha)) = \lambda_\alpha \in k^*$ für $\alpha \in supp(\phi^+)$ und 0 sonst und $\phi^-(F_\alpha) = \lambda'_\alpha \in k^*$ und 0 sonst mit $\lambda'_\alpha \lambda_\alpha = \frac{q_\alpha^2}{(1-q_\alpha^{-2})(q_\alpha - q_\alpha^{-1})}$. Außerdem sei $L \subseteq supp(\phi)^\perp$. Wir werden mithilfe der Kommutatorrelationen in C zunächst zeigen, dass C eine trianguläre Rechtscoidealunteralgebra ist, das heißt abgeschlossen unter Multiplikation. Anschließend werden wir zeigen, dass Rechtscoidealunteralgebren von dieser Form ede sind, das heißt die Eigenschaft haben, dass endlichdimensionale irreduzible Darstellungen eindimensional sind, und wenn zusätzlich in $L \subseteq supp(\phi)^\perp$ Gleichheit gilt, zeigen wir, dass C eine Borelunteralgebra ist. Wir schreiben in diesem Kapitel immer C für eine Rechtscoidealunteralgebra von dieser Form.

Kommutatorrelationen für C

Schauen wir uns zunächst die Kommutatorrelationen in C an. Im Folgenden zeigen wir, dass in C die Elemente $\bar{F}_\alpha \in U^-[x]_{\phi^-}$ für $\alpha \in \Phi^+(x)$ mit allen charakterverschobenen Wurzelvektoren in $\psi(U^+[w_0])_{\phi^+}$ außer $\bar{E}_\alpha$ q-kommutieren.

Wir verwenden zum Berechnen der Kommutatoren die Abbildungen r_α und r'_α aus Definition 1.29 und beweisen zunächst einige Verallgemeinerungen der Lemmata 1.30 und 1.31: Seien dazu im Folgenden wie in Definition 1.29 für $\alpha \in \Pi$ die Elemente $r_\alpha(x)$ und $r'_\alpha(x)$ in $U^+_{\mu-\alpha}$ sodass:

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + \sum_{\alpha\in\Pi} r_\alpha(x) K_\alpha \otimes E_\alpha + (rest) \tag{7.1}$$

$$\Delta(x) = K_\mu \otimes x + \sum_{\alpha\in\Pi} E_\alpha K_{\mu-\alpha} \otimes r'_\alpha(x) + (rest) \tag{7.2}$$

wobei (rest) Terme in $U_{\mu-\nu}K_\nu \otimes U^+_\nu$ enthält für $\nu \succ 0, \nu \notin \Pi$ in (7.1) bzw. $\mu - \nu \succ 0$, $\mu - \nu \notin \Pi$ in (7.2).

Lemma 7.1:
Sei $\alpha \in \Pi$ und r'_α wie in Definition 1.29, dann gilt für jedes $X_\mu \in U^+_\mu$ zu einem $\mu \in Q_+$ und jedes $\beta \in \Pi$:

$$r'^i_\alpha(X_\mu E_\beta) = c^i_\alpha q^{(\mu,\alpha)} r'^{i-1}_\alpha(X_\mu) r_\alpha(E_\beta) + r'^i_\alpha(X_\mu) E_\beta$$

für die Konstante $c^i_\alpha = q^{1-i}_\alpha [i]_\alpha \in k$.

Beweis: Wir beweisen durch Induktion über i. Nach Lemma 1.30 gilt ja $r'_\alpha(xx') = q^{(\alpha,\mu)} x r'_\alpha(x') + r'_\alpha(x)x'$ für $x \in U^+_\mu$ und $r'_\alpha(E_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$. Daher gilt die Behauptung für $i = 1$. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt leicht:

$$\begin{aligned}
r'^i_\alpha(X_\mu E_\beta) =& r'^{i-1}_\alpha r'_\alpha(X_\mu E_\beta) \\
\overset{I.A.}{=}& r'^{i-1}_\alpha (q^{(\alpha,\mu)} X_\mu r'_\alpha(E_\beta) + r'_\alpha(X_\mu) E_\beta) \\
=& r'^{i-1}_\alpha (q^{(\alpha,\mu)} X_\mu \delta_{\alpha\beta} + r'_\alpha(X_\mu) E_\beta) \\
\overset{I.V.}{=}& q^{(\alpha,\mu)} r'^{i-1}_\alpha(X_\mu)\delta_{\alpha\beta} + c^{i-1}_\alpha q^{(\alpha,\mu-\alpha)} r'^{i-1}_\alpha(X_\mu) r'_\alpha(E_\beta) + r'^i_\alpha(X_\mu) E_\beta \\
=& r'^{i-1}_\alpha(X_\mu) r'_\alpha(E_\beta)(q^{(\alpha,\mu)} + c^{i-1}_\alpha q^{(\alpha,\mu-\alpha)}) + r'^i_\alpha(X_\mu) E_\beta
\end{aligned}$$

Das heißt es genügt zu zeigen, dass gilt: $q^{(\alpha,\mu)} + c^{i-1}_\alpha q^{(\alpha,\mu-\alpha)} = q^{(\alpha,\mu)} c^i_\alpha$. Das gilt genau dann wenn $1 + c^{i-1}_\alpha q^{-(\alpha,\alpha)} = c^i_\alpha$. Wir müssen also nur noch zeigen: $q^{1-i}_\alpha [i]_\alpha = q^{1-(i-1)}_\alpha [i-1]_\alpha q^{-2}_\alpha + 1$. Betrachte dazu:

$$\begin{aligned}
& q^{1-i}_\alpha [i]_\alpha - 1 - q^{1-(i-1)}_\alpha [i-1]_\alpha q^{-2}_\alpha \\
=& q^{1-i}_\alpha \frac{q^i_\alpha - q^{-i}_\alpha}{q_\alpha - q^{-1}_\alpha} - 1 - q^{1-(i-1)}_\alpha \frac{q^{i-1}_\alpha - q^{1-i}_\alpha}{q_\alpha - q^{-1}_\alpha} q^{-2}_\alpha \\
=& (q^{1-i}_\alpha (q^i_\alpha - q^{-i}_\alpha) - q_\alpha + q^{-1}_\alpha - q^{-i}_\alpha (q^{i-1}_\alpha - q^{1-i}_\alpha)) \frac{1}{q_\alpha - q^{-1}_\alpha} \\
=& (q_\alpha - q^{1-2i}_\alpha - q_\alpha + q^{-1}_\alpha - q^{-1}_\alpha + q^{1-2i}_\alpha) \frac{1}{q_\alpha - q^{-1}_\alpha} \\
=& 0
\end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen. □

Lemma 7.2:
Sei für $\alpha \in \Pi$ das Element r'_α wie in 1.29 und $X_\mu \in U^+_\mu$ für $\mu \in Q_+$ dann gilt:

$$\Delta(X_\mu) = K_\mu \otimes X_\mu + \sum_{\alpha\in\Pi}\sum_i E^i_\alpha K_{\mu-i\alpha} \otimes s^i_\alpha(X_\mu) + (rest)$$

wobei $(rest)$ Terme enthält in $U_\nu \otimes U$ für ein $\nu \in Q_+$ das kein Vielfaches von α ist.
Dabei sei $s^i_\alpha(x) = z^i_\alpha \cdot r'^i_\alpha(x) \in U^+$ für die Konstante $z^i_\alpha = \frac{z_\alpha^{i-1}}{q_\alpha^{2(i-1)} c^i_\alpha} = \frac{z_\alpha^{i-1}}{q_\alpha^{i-1}[i]} \in k$.

Beweis: Beide Seiten sind k-linear. Wir zeigen die Aussage induktiv übder die Höhe $ht(\mu)$ von X_μ. Wir betrachten Wörter in den Erzeugern $E_\alpha, \alpha \in \Pi$. Für $ht(\mu) = 1$, das heißt $X_\mu = E_\alpha$ für ein $\alpha \in \Pi$ ist die Aussage trivial. Angenommen die Behauptung stimmt für Elemente $X_\mu \in U_\mu$, so zeigen wir dass die Behauptung auch für $X_\mu E_\beta$ stimmt für ein beliebiges $\beta \in \Pi$:

$$\begin{aligned}\Delta(X_\mu E_\beta) = \Delta(X_\mu)\Delta(E_\beta) =&(K_\mu \otimes X_\mu + \sum_{\alpha\in\Pi}\sum_i E^i_\alpha K_{\mu-i\alpha} \otimes s^i_\alpha(X_\mu) + (rest))(K_\beta \otimes E_\beta + E_\beta \otimes 1)\\ =&K_\mu E_\beta \otimes X_\mu + K_\mu K_\beta \otimes X_\mu E_\beta + \sum_{\alpha\in\Pi}\sum_i E^i_\alpha K_{\mu-i\alpha} E_\beta \otimes s^i_\alpha(X_\mu)\\ &+ \sum_{\alpha\in\Pi}\sum_i E^i_\alpha K_{\mu-i\alpha} K_\beta \otimes s^i_\alpha(X_\mu) E_\beta + (rest)'\end{aligned}$$

Wobei $(rest)'$ Terme enthält aus $(rest)$ und $(rest)E_\beta$. Wir wollen also zeigen, dass:

$$K_\mu E_\beta \otimes X_\mu + \sum_{\alpha\in\Pi}\sum_i E^i_\alpha K_{\mu-i\alpha} E_\beta \otimes s^i_\alpha(X_\mu) + \sum_{\alpha\in\Pi}\sum_i E^i_\alpha K_{\mu-i\alpha} K_\beta \otimes s^i_\alpha(X_\mu) E_\beta + (rest)' \tag{7.3}$$

$$= \sum_{\alpha\in\Pi}\sum_i E^i_\alpha K_{\mu+\beta-i\alpha} \otimes s^i_\alpha(X_\mu E_\beta) + (rest)_{neu} \tag{7.4}$$

Betrachten wir zunächst den Fall $\alpha \neq \beta$, hier gilt $K_\mu E_\beta \otimes X_\mu + \sum_{\alpha\in\Pi}\sum_i E^i_\alpha K_{\mu-i\alpha} E_\beta \otimes s^i_\alpha(X_\mu) \in (rest)_{neu}$. Es bleibt dann zu zeigen

$$\sum_{\alpha\in\Pi}\sum_i E^i_\alpha K_{\mu-i\alpha} K_\beta \otimes s^i_\alpha(X_\mu) E_\beta = \sum_{\alpha\in\Pi}\sum_i E^i_\alpha K_{\mu+\beta-i\alpha} \otimes s^i_\alpha(X_\mu E_\beta)$$

Das gilt genau dann, wenn $s^i_\alpha(X_\mu)E_\beta = s^i_\alpha(X_\mu E_\beta)$. Letzteres folgt aber aus entsprechender Eigenschaft von r'^i_α. Betrachten wir jetzt den Fall $\beta = \alpha$. Hier ist: $X_\mu = X_\mu s_\alpha(E_\alpha)$. Damit können wir die linke Seite (7.3) schreiben als:

$$\begin{aligned}&K_\mu E_\alpha \otimes X_\mu s_\alpha(E_\alpha)\\ &+ \sum_{\alpha\in\Pi}\sum_{j\geq 2} q^{(\mu-(j-1)\alpha,\alpha)} E^j_\alpha K_{\mu+\alpha-j\alpha} \otimes s^{j-1}_\alpha(X_\mu) s_\alpha(E_\alpha) + \sum_{\alpha\in\Pi}\sum_i E^i_\alpha K_{\mu-i\alpha} K_\alpha \otimes s^i_\alpha(X_\mu) E_\beta + (rest)'\\ =&\sum_{\alpha\in\Pi}\sum_{j\geq 1} q^{(\mu-(j-1)\alpha,\alpha)} E^j_\alpha K_{\mu+\alpha-j\alpha} \otimes s^{j-1}_\alpha(X_\mu) s_\alpha(E_\alpha) + \sum_{\alpha\in\Pi}\sum_i E^i_\alpha K_{\mu+\alpha-i\alpha} \otimes s^i_\alpha(X_\mu) E_\beta + (rest)'\end{aligned}$$

Vergleichen wir das mit der rechten Seite (7.4), bleibt zu zeigen, dass für alle i gilt:

$$s^i_\alpha(X_\mu)E_\beta + q^{(\mu-(i-1)\alpha,\alpha)} s^{i-1}_\alpha(X_\mu) s_\alpha(E_\alpha) = s^i_\alpha(X_\mu E_\alpha)$$

Das wiederum folgt direkt aus der Definition von s_α und Lemma 7.1. □

Lemma 7.3:
Es gelten für r'_α und r_α wie in 1.29 folgende Gleichungen:
a) Für alle $\alpha, \beta \in \Pi$:

$$r_\alpha r'_\beta = r'_\beta r_\alpha$$

b) Für $\alpha, \beta \in \Pi$ mit entweder $\alpha = \beta$ oder $\alpha \perp \beta$:

$$r_\alpha r_\beta = r_\beta r_\alpha$$

c) Für $\alpha, \beta \in \Pi$ mit entweder $\alpha = \beta$ oder $\alpha \perp \beta$:

$$r'_\alpha r'_\beta = r'_\beta r'_\alpha$$

Beweis: Wir zeigen die Aussagen wieder durch eine Induktion über $ht(\mu)$ für Elemente $X_\mu \in U^+$ für $\mu \in Q_+$:
a) Für $\mu \in \Pi$ sind beide Seiten 0. Betrachte jetzt für ein beliebiges $\gamma \in \Pi$, $\mu \in Q_+$ das Produkt $X_\mu \gamma$:

$$\begin{aligned} r_\alpha r'_\beta(X_\mu E_\gamma) =& r_\alpha(q^{(\beta,\mu)} X_\mu \delta_{\beta\gamma} + r'_\beta(X_\mu) E_\gamma) && (7.5)\\ =& q^{(\beta,\mu)} r_\alpha(X_\mu)\delta_{\beta\gamma} + r'_\beta(X_\mu)\delta_{\alpha\gamma} + q^{(\gamma,\alpha)} r_\alpha r'_\beta(X_\mu) E_\gamma && (7.6)\end{aligned}$$

Für die anderen Seite gilt:

$$\begin{aligned} r'_\beta r_\alpha(X_\mu E_\gamma) =& r'_\beta(X_\mu \delta_{\alpha\gamma} + q^{(\alpha,\gamma)} r_\alpha(X_\mu) E_\gamma) && (7.7)\\ =& r'_\beta(X_\mu)\delta_{\alpha\gamma} + q^{(\beta,\alpha)} q^{(\beta,\mu-\alpha)} r_\alpha(X_\mu)\delta_{\beta\gamma} + q^{(\gamma,\alpha)} r'_\beta r_\alpha(X_\mu) E_\gamma && (7.8)\\ \overset{I.V.}{=}& r'_\beta(X_\mu)\delta_{\alpha\gamma} + q^{(\beta,\alpha)} q^{(\beta,\mu-\alpha)} r_\alpha(X_\mu)\delta_{\beta\gamma} + q^{(\gamma,\alpha)} r_\alpha r'_\beta(X_\mu) E_\gamma && (7.9)\end{aligned}$$

□

b) Auch hier sind für $\mu \in \Pi$ beide Seiten 0. Für ein $\mu \in Q_+, \gamma \in \Pi$ betrachten wir zuerst für beliebige $\alpha, \beta \in \Pi$ die linke Seite von $r_\alpha r_\beta = r_\beta r_\alpha$:

$$\begin{aligned} r_\alpha r_\beta(X_\mu E_\gamma) =& r_\alpha(X_\mu \delta_{\beta\gamma} + q^{(\beta,\gamma)} r_\beta(X_\mu) E_\gamma) && (7.10)\\ =& r_\alpha(X_\mu)\delta_{\beta\gamma} + q^{(\beta,\gamma)} r_\beta(X_\mu)\delta_{\alpha\gamma} + q^{(\beta,\gamma)} q^{(\gamma,\alpha)} r_\alpha r_\beta(X_\mu) E_\gamma && (7.11)\end{aligned}$$

Für die rechte Seite gilt:

$$r_\beta r_\alpha(X_\mu E_\gamma) = r_\beta(X_\mu)\delta_{\alpha\gamma} + q^{(\gamma,\alpha)} r_\alpha(X_\mu)\delta_{\beta\gamma} + q^{(\beta,\gamma)} q^{(\gamma,\alpha)} r_\beta r_\alpha(X_\mu) E_\gamma \tag{7.12}$$

Nach Induktionsvoraussetzung sind die beiden Seiten also gleich, wenn gilt:

$$r_\alpha(X_\mu)\delta_{\beta\gamma} + q^{(\beta,\gamma)} r_\beta(X_\mu)\delta_{\alpha\gamma} = r_\beta(X_\mu)\delta_{\alpha\gamma} + q^{(\gamma,\alpha)} r_\alpha(X_\mu)\delta_{\beta\gamma}$$

Das stimmt genau dann, wenn $\alpha = \beta$ oder $(\alpha, \beta) = 0$.
c) Der Beweis folgt analog zu b).

Lemma 7.4:
Wir erweitern r_α zu einem $r_{\bar\alpha}$ für Elmente: $\bar\alpha = \sum_k i_k\alpha_k \in Q$ mit $i_k \in \mathbb{N}$ und paarweise orthogonale Wurzeln $\alpha_k \in \Pi$ wie folgt. Sei x ein homogenes Element in U^+. Dann definieren wir:

$$r_{\bar\alpha}(x) := \prod_k r_{\alpha_k}^{i_k}(x) \in U^+$$

Wegen 7.3 ist das wohldefiniert. Sei außerdem $supp(\bar\alpha) := \{k \in \mathbb{N} \mid i_k \neq 0\}$. Es gilt jetzt für beliebige $X_\mu \in U_\mu^+$ für $\mu \in Q$ und $E_\gamma \in U_\gamma^+$ für $\gamma \in \Pi$:

$$r_{\bar\alpha}(X_\mu E_\gamma) = \sum_{k\in supp(\bar\alpha)} c_{\alpha_k}^{i_k} q^{(\mu,\alpha_k)} r_{\bar\alpha-\alpha_k}(X_\mu) r_{\alpha_k}(E_\beta) + r_{\bar\alpha}(X_\mu)E_\beta$$

Beweis: Wir beweisen die Aussage mit Induktion über $|supp(\bar\alpha)|$. Für $n = 1$ folgt die Behauptung aus 7.1. Betrachten wir jetzt eine Wurzel wie oben $\bar\alpha = \sum_k i_k\alpha_k$ und für ein beliebiges j mit $i_j \neq 0$ gilt insbesondere $r_{\bar\alpha} = r_{\alpha_j}^{i_j} \prod_{k\neq j} r_{\alpha_k}^{i_k}$ Wir nennen jetzt $\sum_{k\neq j} i_k\alpha_k = \bar\alpha'$, also $\bar\alpha = \bar\alpha' + i_j\alpha_j$ und für die Wurzel $\bar\alpha'$ gilt die Behauptung schon aus der Induktionsvoraussetzung.

$$\begin{aligned}
r_{\bar\alpha}(X_\mu E_\gamma) =& r_{\alpha_j}^{i_j} r_{\bar\alpha'}(X_\mu E_\gamma)\\
=& r_{\alpha_j}^{i_j}\Big(\sum_{k\in supp(\bar\alpha')} c_{\alpha_k}^{i_k} q^{(\mu,\alpha_k)} r_{\bar\alpha'-\alpha_k}(X_\mu) r_{\alpha_k}(E_\beta) + r_{\bar\alpha'}(X_\mu)E_\beta\Big)\\
=& \sum_{k\in supp(\bar\alpha')} c_{\alpha_k}^{i_k} q^{(\mu,\alpha_k)} \underbrace{r_{\bar\alpha'+i_j\alpha_j-\alpha_k}}_{r_{\bar\alpha-\alpha_k}}(X_\mu)\delta_{\alpha_k\beta} + c_{\alpha_j}^{i_j} q^{(\alpha_j,\mu)} \underbrace{r_{\bar\alpha'} r_{\alpha_j}^{(i_j-1)}}_{r_{\bar\alpha-\alpha_j}}(X_\mu) r_{\alpha_j}(E_\beta) + r_{\bar\alpha'+i_j\alpha_j}(X_\mu)E_\beta\\
=& \sum_{k\in supp(\bar\alpha)} c_{\alpha_k}^{i_k} q^{(\mu,\alpha_k)} r_{\bar\alpha-\alpha_k}(X_\mu)\delta_{\alpha_k\beta} + r_{\bar\alpha}(X_\mu)E_\beta
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Damit folgt die hier stärkste Verallgemeinerung der technischen Aussage von Lemma 1.30.

Lemma 7.5:
Seien $\bar\alpha = \sum_k i_k\alpha_k \in Q$ und $r_{\bar\alpha} = \prod_k r_{\alpha_k}^{i_k}$ wie oben und $z_{\bar\alpha} = \prod_k z_{\alpha_k}^{i_k} \in k$ für die Elemente z_{α_k} aus Lemma 7.2. Dann gilt für $X_\mu \in U_\mu$ zu einer Wurzel $\mu \in Q_+$:

$$\Delta(X_\mu) = K_\mu \otimes X_\mu + \sum_{\bar\alpha} E_{\bar\alpha} K_{\mu-\bar\alpha} \otimes s_{\bar\alpha}(X_\mu) + (rest)$$

Wobei $(rest)$ Terme enthält die in $U_\nu \otimes U_{\mu-\nu}$ liegen, sodass $\nu \in Q$ keine Linearkombination von paarweise orthogonalen Wurzeln $\alpha_k \in \Pi$ ist.

Beweis: Der Beweis funktioniert genauso wie der von Lemma 7.2 zusammen mit Lemma 7.4.□

Lemma 7.6:
Sei $w_0 \in W$ das maximale Element der Weylgruppe mit einer reduzierter Darstellung $w_0 = s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}\dots s_{\alpha_{\ell(w_0)}}$. Sei $\Phi^+(w) = \{\beta_1,\dots,\beta_{\ell(w_0)}\}$ bezüglich dieser reduzierten Darstellung. Für ein

$\alpha \in \Pi$ sei $\beta_j = \alpha$. Es gilt dann für die Wurzelvektoren E_{β_i}:
a) Für $i < j$:

$$r'_\alpha(E_{\beta_i}) = 0$$

b) Für $i > j$:

$$r_\alpha(E_{\beta_i}) = 0$$

Beweis: Wir verwenden für den Beweis Lemma 1.37, danach gilt:

$$T_\alpha(U^+[s_\alpha w_0]) = \{x \in U^+ \mid r_\alpha(x) = 0\}$$
$$U^+[s_\alpha w_0] = \{x \in U^+ \mid r'_\alpha(x) = 0\}$$

a) Für $i < j$ liegt insbesondere E_{β_i} in $U^+[s_\alpha w_0]$, also folgt $r'_\alpha(E_{\beta_i}) = 0$.
b) Für $i > j$ liegt insbesondere E_{β_i} in $T_\alpha(U^+[s_\alpha w_0])$, also folgt $r_\alpha(E_{\beta_i}) = 0$. □

Lemma 7.7:
Sei ϕ ein Charakter auf einer Rechtscoidealunteralgebra A von U^+ und A_ϕ die charakterverschobene Unteralgebra. Wir definieren die charakterverschobenen Elemente von A_ϕ wie folgt:

$$\bar{X}_\mu := (\phi \otimes id)\Delta(X_\mu) \text{ für } X_\mu \in A_\mu$$

Sei ϕ nun ein Charakter dessen Träger nur paarweise orthogonale Wurzeln in Π enthält, d.h. $supp(\phi) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \subset \Pi$ mit $\phi(\alpha_i) = \lambda_i \in k$. Wir definieren $\bar{\alpha} = \sum_k i_k \alpha_k$ wie oben und $\lambda_{\bar{\alpha}} = \prod_k \lambda_k^{i_k}$. Dann gilt:

$$\bar{X}_\mu = X_\mu + \sum_{0 < \bar{\alpha} < \mu} \lambda_{\bar{\alpha}} s_{\bar{\alpha}}(X_\mu)$$

Beweis: Mit Lemma 7.5 folgt das direkt. □

Lemma 7.8:
Gegeben $C = \psi(U^+[w_0])_{\phi^+} T_L U^-[x]_{\phi^-} \subset U$ wie seit Beginn des Kapitels, das heißt es sei $x \in W$ sodass $\Phi^+(x) \subset \Pi$ aus paarweise orthogonalen Wurzeln besteht. Ferner seien ϕ^+, ϕ^- die Charaktere mit $supp(\phi^+) = supp(\phi^-) = \Phi^+(x)$ definiert wie folgt: $\phi^+(\psi(E_\alpha)) = \lambda_\alpha \in k^*$ für $\alpha \in supp(\phi^+)$ und 0 sonst und $\phi^-(F_\alpha) = \lambda'_\alpha \in k^*$ und 0 sonst, mit $\lambda'_\alpha \lambda_\alpha = \frac{q_\alpha^2}{(1-q_\alpha^{-2})(q_\alpha - q_\alpha^{-1})}$.

Dann gilt für jedes $\alpha \in supp(\phi^+)$ für Elemente $\bar{X}_\mu \in (\psi(U^+[w_0])_{\phi^+})_\mu$ und $\bar{F}_\alpha \in (U^-[x]_{\phi^-})_\alpha$ die folgende Kommutatorregel:

$$[F_\alpha + \lambda'_\alpha K_\alpha^{-1}, \bar{X}_\mu]_{q^{-(\mu,\alpha)}} = 0 \tag{7.13}$$

Beweis: Betrachten wir dazu zunächsten ein Element $r'_\alpha(s_{\bar{\alpha}}(X_\mu))$. Für dieses gilt:

$$r'_\alpha(s_{\bar{\alpha}}(X_\mu)) = \frac{x_\alpha^{i-1}}{x_\alpha^i} s_{\bar{\alpha}+\alpha}(X_\mu)$$

für $i = \frac{(\bar{\alpha},\alpha)}{(\alpha,\alpha)} + 1$ Das heißt es gilt:

$$r'_\alpha(s_{\bar{\alpha}}(X_\mu)) = s_{\bar{\alpha}+\alpha}(X_\mu)q_\alpha^{-1}[i] = s_{\bar{\alpha}+\alpha}(X_\mu)(q_\alpha^{-i-1}\frac{q_\alpha^{2i}-1}{q_\alpha - q_\alpha^{-1}})$$

Setzen wir nun 7.7in (7.13) ein, so erhalten wir:

$$[F_\alpha + \lambda'_\alpha K_\alpha^{-1}, \bar{X}_\mu]_{q^{-(\mu,\alpha)}} = \sum_{0\leqslant\bar{\alpha}} \lambda_{\bar{\alpha}}([F_\alpha, s_{\bar{\alpha}}(X_\mu)K_\mu^{-1}]_{q^{-(\mu,\alpha)}} + \lambda'_\alpha[K_\alpha^{-1}, s_{\bar{\alpha}}(X_\mu)K_\mu^{-1}]_{q^{-(\mu,\alpha)}})$$

Für (7.13) reicht also zu zeigen:

$$\sum_{0\leqslant\bar{\alpha}} \lambda_{\bar{\alpha}}[F_\alpha, s_{\bar{\alpha}}(X_\mu)K_\mu^{-1}]_{q^{-(\mu,\alpha)}} = -\sum_{0\leqslant\bar{\alpha}} \lambda_{\bar{\alpha}}\lambda'_\alpha[K_\alpha^{-1}, s_{\bar{\alpha}}(X_\mu)K_\mu^{-1}]_{q^{-(\mu,\alpha)}} \tag{7.14}$$

Dazu verwenden wir das Lemma 1.31, das liefert uns für $\alpha \in \Pi$ und $x \in U_\mu^+$:

$$xF_\alpha - F_\alpha x = (q_\alpha - q_\alpha^{-1})^{-1}(r_\alpha(x)K_\alpha - K_\alpha^{-1}r'_\alpha(x)) \tag{7.15}$$

Betrachten wir zunächst die linke Seite von (7.14):

$$\begin{aligned}
\sum_{0\leqslant\bar{\alpha}} \lambda_{\bar{\alpha}}[F_\alpha, s_{\bar{\alpha}}(X_\mu)K_\mu^{-1}]_{q^{-(\mu,\alpha)}} &= \sum_{0\leqslant\bar{\alpha}} \lambda_{\bar{\alpha}}(F_\alpha s_{\bar{\alpha}}(X_\mu)K_\mu^{-1} - q^{-(\mu,\alpha)}s_{\bar{\alpha}}(X_\mu)K_\mu^{-1}F_\alpha) \\
&= \sum_{0\leqslant\bar{\alpha}} \lambda_{\bar{\alpha}}(F_\alpha s_{\bar{\alpha}}(X_\mu) - s_{\bar{\alpha}}(X_\mu)F_\alpha)K_\mu^{-1} \\
&\overset{(7.15)}{=} -\sum_{0\leqslant\bar{\alpha}} \lambda_{\bar{\alpha}}(q_\alpha - q_\alpha^{-1})^{-1}(r_\alpha(s_{\bar{\alpha}}(X_\mu))K_\alpha - K_\alpha^{-1}r'_\alpha(s_{\bar{\alpha}}(X_\mu)))K_\mu^{-1} \\
&\overset{Lm.7.6}{=} \sum_{0\leqslant\bar{\alpha}} \lambda_{\bar{\alpha}}(q_\alpha - q_\alpha^{-1})^{-1}q^{-(\alpha,\mu-\bar{\alpha}-\alpha)}r'_\alpha(s_{\bar{\alpha}}(X_\mu))K_\mu^{-1}K_\alpha^{-1} \\
&= \sum_{0\leqslant\bar{\alpha}} \lambda_{\bar{\alpha}}s_{\bar{\alpha}+\alpha}(X_\mu)K_\mu^{-1}K_\alpha^{-1}q_\alpha^{-i-1}\frac{q_\alpha^{2i}-1}{q_\alpha - q_\alpha^{-1}}(q_\alpha - q_\alpha^{-1})^{-1}q^{-(\alpha,\mu)}q_\alpha^i \\
&= \sum_{\alpha\leqslant\bar{\alpha}} \lambda_{\bar{\alpha}}\lambda_\alpha^{-1}s_{\bar{\alpha}}(X_\mu)K_\mu^{-1}K_\alpha^{-1}q_\alpha^{-1}\frac{q_\alpha^{2i-2}-1}{q_\alpha - q_\alpha^{-1}}(q_\alpha - q_\alpha^{-1})^{-1}q^{-(\alpha,\mu)}
\end{aligned}$$

Auf der rechten Seite von (7.14) steht:

$$\begin{aligned}
-\sum_{0\leqslant\bar{\alpha}} \lambda_{\bar{\alpha}}\lambda'_\alpha[K_\alpha^{-1}, s_{\bar{\alpha}}(X_\mu)K_\mu^{-1}]_{q^{-(\mu,\alpha)}} &= -\sum_{0\leqslant\bar{\alpha}} \lambda_{\bar{\alpha}}\lambda'_\alpha(K_\alpha^{-1}s_{\bar{\alpha}}(X_\mu)K_\mu^{-1} - q^{-(\mu,\alpha)}s_{\bar{\alpha}}(X_\mu)K_\mu^{-1}K_\alpha^{-1} \\
&= -\sum_{\alpha\leqslant\bar{\alpha}} \lambda_{\bar{\alpha}}\lambda'_\alpha s_{\bar{\alpha}}(X_\mu)K_\mu^{-1}K_\alpha^{-1}q^{-(\mu,\alpha)}(q_\alpha^{2i-2}-1)
\end{aligned}$$

Vergleichen wir diese beiden Seiten erhalten wir:

$$\sum_{\alpha\leqslant\bar{\alpha}} \lambda_{\bar{\alpha}}\lambda_\alpha^{-1}s_{\bar{\alpha}}(X_\mu)K_\mu^{-1}K_\alpha^{-1}q_\alpha^{-1}\frac{q_\alpha^{2i-2}-1}{q_\alpha - q_\alpha^{-1}}(q_\alpha - q_\alpha^{-1})^{-1}q^{-(\alpha,\mu)}q_\alpha^2 = -\sum_{\alpha\leqslant\bar{\alpha}} \lambda_{\bar{\alpha}}\lambda'_\alpha s_{\bar{\alpha}}(X_\mu)K_\mu^{-1}K_\alpha^{-1}q^{-(\mu,\alpha)}(q_\alpha^{-2i}-1)$$

Es reicht also zu zeigen, dass:

$$\lambda_\alpha^{-1} q_\alpha^{-1} \frac{q_\alpha^{2i-2} - 1}{q_\alpha - q_\alpha^{-1}} (q_\alpha - q_\alpha^{-1})^{-1} q_\alpha^2 = -\lambda'_\alpha (q_\alpha^{2i-2} - 1)$$

Umformen ergibt:

$$\lambda'_\alpha \lambda_\alpha = \frac{q_\alpha^2}{(1 - q_\alpha^{-2})(q_\alpha - q_\alpha^{-1})}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Folgerung 7.9:
Gegeben $C = \psi(U^+[w_0])_{\phi^+} T_L U^-[x]_{\phi^-} \subset U$ wie seit Beginn des Kapitels, das heißt es sei $x \in W$ sodass $\Phi^+(x) \subset \Pi$ aus paarweise orthogonalen Wurzeln besteht. Ferner seien ϕ^+, ϕ^- die Charaktere mit $supp(\phi^+) = supp(\phi^-) = \Phi^+(x)$ definiert wie folgt: $\phi^+(\psi(E_\alpha)) = \lambda_\alpha \in k^*$ für $\alpha \in supp(\phi^+)$ und 0 sonst und $\phi^-(F_\alpha) = \lambda'_\alpha \in k^*$ mit $\lambda'_\alpha \lambda_\alpha = \frac{q_\alpha^2}{(1-q_\alpha^{-2})(q_\alpha - q_\alpha^{-1})}$.

Dann ist C eine trianguläre Rechtscoidealunteralgebra.

Beweis: Dies folgt direkt aus den Kommutatorrelationen von Lemma 7.8: Wir wissen:

$$[\bar{E}_\alpha, \bar{E}_\beta] = [\bar{E}_\alpha, K_\mu] = [\bar{E}_\alpha, \bar{F}_\beta] = [\bar{F}_\alpha, \bar{F}_\beta] = 0,$$
$$[\bar{E}_\alpha, \bar{F}_\alpha] = 1 \frac{q_\alpha^2}{q_\alpha - q_\alpha^{-1}}$$

für alle $\alpha \neq \beta \in \mathrm{supp}(\phi^+)$ und $\mu \in \Phi^+$ mit $K_\mu \in C$, und:

$$[\bar{E}_\beta, K_\mu] = [\bar{E}_\beta, \bar{F}_\alpha] = 0, \tag{7.16}$$
$$[\bar{E}_\mu, \bar{E}_\nu] \subset \psi(U^+[w_0])_{\phi^+} \tag{7.17}$$

für alle $\alpha \in \mathrm{supp}(\phi^+)$, $\beta \in \Phi^+ \backslash \mathrm{supp}(\phi^+)$ und $\mu, \nu \in \Phi^+$ mit $K_\mu \in C$. Also ist C unter Multiplikation abgeschlossen und damit eine Unteralgebra. Als Produkt von Rechtscoidealen ist sie insbesondere auch eine Rechtscoidealunteralgebra. □

Bemerkung 7.10:
Sei $C = \psi(U^+[w_0])_{\phi^+} T_L U^-[x]_{\phi^-}$ die Rechtscoidealunteralgebra wie seit Beginn des Kapitels. Ist $C \subset U_q(\mathfrak{sl}_n)$, so q-kommutiert der Wurzelvektor $\bar{E}_\mu \in \psi(U^+[w_0])_{\phi^+}$ zu einer maximalen Wurzel $\mu \in \Phi^+$ aus Lemma 3.36 mit allen Wurzelvektoren aus C.

Nach Lemma 7.8 q-kommutiert $\bar{E}_\mu$ mit allen Wurzelvektoren aus $T_L U^-[x]_{\phi^-}$. Aus Lemma 3.36 wissen wir, dass E_μ mit allen Wurzelvektoren in U^+ q-kommutiert. Weil $U^+[w_0] \cong U^+[w_0]_\phi$ für Charaktere ϕ auf $U^+[w_0]$ gilt, folgt schon, dass alle Wurzelvektoren in $\psi(U^+[w_0])_{\phi^+}$ mit $\bar{E}_\mu$ q-kommutieren und damit gilt die Behauptung.

Darstellungstheorie von $\psi(U^+[w_0])_{\phi^+}T_LU^-[x]_{\phi^-}$

Sei im Folgenden wie seit Beginn des Kapitels $C = \psi(U^+[w_0])_{\phi^+}T_LU^-[x]_{\phi^-}$, das heißt: Es sei $x \in W$ sodass $\Phi^+(x)$ aus paarweise orthogonalen einfachen Wurzeln besteht. Es seien ϕ^+ und ϕ^- Charaktere mit $supp(\phi^+) = supp(\phi^-) = \Phi^+(x)$, und $\phi^+(E_\alpha)\phi^-(F_\alpha) = \frac{q_\alpha^2}{(1-q_\alpha^{-2})(q_\alpha-q_\alpha^{-1})}$.

Lemma 7.11:
Für $C = \psi(U^+[w_0])_{\phi^+}T_LU^-[x]_{\phi^-}$ gilt: Jede endlichdimensionale irreduzible Darstellung ist eindimensional.

Beweis: Sei V eine endlichdimensionale irreduzible Darstellung von C. Weil die Wurzeln in $supp(\phi^+)$ paarweise orthogonal sind und weil $L = \text{supp}(\phi^+)^\perp$, gelten nach Lemma 7.8 die folgenden Kommutatorregeln:

$$[\bar{E}_\alpha, \bar{E}_\beta] = [\bar{E}_\alpha, K_\mu] = [\bar{E}_\alpha, \bar{F}_\beta] = [\bar{F}_\alpha, \bar{F}_\beta] = 0$$

für alle $\alpha \neq \beta \in \text{supp}(\phi^+)$ und $\mu \in \Phi^+$ mit $K_\mu \in C$. Wir betrachten die reduzierte Darstellung vom maximalen Element

$$w_0 = (\prod_{\alpha_j \in \text{supp}(\phi^+)} s_{\alpha_j})v$$

Sei C' die Unteralgebra erzeugt von den Elementen E_{β_i} für $i > |\text{supp}(\phi^+)|$. Wegen der maximalen Wahl $L = supp(\phi^+)^\perp$ gibt es für jedes $E_{\beta_i} \in C'$ ein $K_\mu \in T_L$ mit $q^{(\beta_i,\mu)} \neq 1$. C' ist als Algebra isomorph zu $U^+[v]$, also können wir Folgerung 6.2 anwenden und zeigen, dass C' ede ist und die Existenz eines Vektors $v \in V$ der von C' annihiliert wird folgern.
Sei $V_{C'}$ der Annihilator von C' in V, das heißt $V_{C'} := \{v \in V | \forall x \in C' : xv = 0\}$. Wir behaupten, dass $V_{C'}$ ein C-Untermodul von V ist: Wir wissen von Satz 7.8 dass alle Elemente $X_\mu \in C'$ mit allen Elementen in $T_LU^-[x]_{\phi^-}$ q-kommutieren. Aus Gradgründen ist klar, dass der q-Kommutator zwischen den Elementen in C' und $\psi(U^+[x])_{\phi^+}$ in C' liegt, also auf der Darstellung verschwindet. Damit ist nach Lemma 3.3 $V_{C'}$ eine C-Unterdarstellung, und weil V irreduzibel ist gilt schon $V_{C'} = V$.
Es gilt dann für die irreduzible Darstellung V von C:

$$C|_V \cong T_L \otimes \bigotimes_{\alpha \in \text{supp}(\phi^+)} \langle \bar{E}_\alpha, \bar{F}_\alpha \rangle$$

Daher folgt die ede Eigenschaft jetzt aus der ede Eigenschaft der einzelnen Komponenten des Tensorprodukts. T_L ist abelsch, und die $\langle \bar{E}_\alpha, \bar{F}_\alpha \rangle$ sind für jedes $\alpha \in \text{supp}(\phi^+)$ quantisierte Weylalgebren, die nach 1.54 ede sind. □

Satz 7.12:
Die Rechtscoidealunteralgebra $C = \psi(U^+[w_0])_{\phi^+}T_LU^-[x]_{\phi^-}$ ist eine Borelunteralgebra von U.

Beweis: Von Lemma 7.11 wissen wir schon, dass C ede ist, es reicht also die Maximalität von C zu zeigen. Sei C' eine ede Rechtscoidealunteralgebra mit $C \subset C'$.

Nach Lemma 4.12 können wir ein Erzeugendensystem von C' wählen aus Elementen, dessen E-Leitterme in $U^{\geq 0}$ liegen. Weil aber $\psi(U^+[w_0])_{\phi^+} \subset C \subset C'$, liegen alle Elemente mit nichttrivialem E-Leitterm bereits in $U^{\geq 0}$: Das heißt zu jedem zusätzlichen Element X in C' finden wir ein Elemenz Y in $C \cap U^{\geq 0}$, sodass X und Y gleiche E-Leiterme haben. Die Differenz ist also von kleinerem Grad und lässt sich wie in Lemma 4.8 durch Elemente mit E-Leittermen in $U^{\geq 0}$ erzeugen, die wieder kleineren Grad wie zuvor haben, nach Induktion folgt dann, dass alle Erzeuger im Sinne des Kapitels 4 entweder in $U^{\geq 0}$ oder in $U^{\leq 0}$ liegen und die Rechtscoidealunteralgebra C' ist triangulär erzeugt, das heißt von der Form $C' = \psi(U^+[w_0])_{\phi^+_{neu}} T_{L'} U^-[xv]_{\phi^-_{neu}}$ für ein $v \in W$ mit $\ell(xv) = \ell(x) + \ell(v)$ und Charaktere ϕ^+_{neu} und ϕ^-_{neu}.

Wegen $T_L \subset C'$, können wir $\phi^+_{neu}, \phi^-_{neu}$ betrachten, sodass alle Elemente in C' ad-T_L-stabil sind. Weil C' ede ist können wir folgern: $\mathrm{supp}(\phi^+_{neu}), \mathrm{supp}(\phi^-_{neu}) \subset (T_L)^\perp = \mathrm{supp}(\phi^+)$. Andererseits können wir mit Satz 3.6 folgern, dass für alle Elemente $\mu \in \Phi^+(w_0) \cap \Phi^+(xv) \supset \Phi^+(x)$ gilt $\mu \in \mathrm{supp}(\phi^+_{neu}) \cap \mathrm{supp}(\phi^-_{neu})$. Damit folgt $\mathrm{supp}(\phi^+_{neu}) = \mathrm{supp}(\phi^-_{neu}) = \mathrm{supp}(\phi^+)$. Weil $T_{L'} \subset (\mathrm{supp}(\phi^+_{neu}) \cap \mathrm{supp}(\phi^-_{neu}))^\perp = (\mathrm{supp}(\phi^+))^\perp$ und natürlich $L \subset L'$ gilt, folgt damit direkt $L' = L$.

Für den Fall $\mathfrak{g} = A_n$ folgt die Behauptung jetzt schon aus Lemma 5.17, im Allgemeinen zeigt man sie wie folgt: Angenommen $v \neq 1$, dann gibt es ein $\alpha \in \Pi \cap \Phi^+(v)$. Ist α orthogonal auf allen Elementen in $\mathrm{supp}(\phi^+)$, dann sind $E_\alpha K_\alpha^{-1}, F_\alpha \in C'$ und Folgerung 3.7 liefert einen Widerspruch zu C' ede. Ist α nicht orthogonal auf allen Elementen in $supp(\phi^+)$, so gibt es eine Wurzel $\mu \in \Phi^+(xv)$ und einen Term $\bar{F}_\mu = cF_\alpha K^{-1}_{\mu-\alpha} + \sum_{\nu>\alpha} X_\nu K^{-1}_{\mu-\nu} \in C'$ für eine Konstante $c \in k^*$ und Terme $X_\nu \in U_\nu^{\leq 0}$ mit $\alpha \prec \nu$, dies folgt daraus, dass die Elemente in $\mathrm{supp}(\phi^+)$ paarweise orthogonal und einfach sind: Man kann die Abspaltung von F_α direkt in den relevanten Fällen A_3, C_3 bzw. D_4 bzw. B_3 (α jeweils die mittlere Wurzel) nachrechnen. Andererseits gilt auch $E_\alpha K_\alpha^{-1} \in C'$. Betrachten wir die Wirkung des 1-Kommutators auf der Niedrigstgewichtsdarstellung $L(\lambda)$ zu einem Niedrigsgewicht λ mit $q^{(\alpha,\lambda)} \neq \pm 1$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
[\bar{F}_\mu, E_\alpha K_\alpha^{-1}].v_\lambda &= \bar{F}_\mu E_\alpha K_\alpha^{-1}.v_\lambda \\
&= cF_\alpha K^{-1}_{\mu-\alpha} E_\alpha K_\alpha^{-1}.v_\lambda + \sum_{\nu>\alpha} X_\nu E_\alpha K_\alpha^{-1}.v_\lambda \\
&= \frac{cq^{-(\mu-\alpha,\alpha)}}{q_\alpha - q_\alpha^{-1}} K_\mu^{-1}(K_\alpha - K_\alpha^{-1}).v_\lambda = c' v_\lambda \qquad \square
\end{aligned}$$

für ein $c' \in k^*$ nach Wahl von dem Niedrigstgewicht λ. Es folgt also dass der Kommutator einen nichttrivialen Eigenwert in der endlichdimensionalen Darstellung $L(\lambda)$ hat und damit kann nicht jede irreduzible endlichdimensionale Darstellung von C' eindimensional sein. Also ist $v = 1$ und $C' = C$, das heißt C ist maximal und damit eine Borelunteralgebra.

7.2. Klassifikation der Borelunteralgebren von Typ 2

Eine triangulär erzeugte Rechtscoidealunteralgebra ist immer von der Form: $C = \psi(U^+[w^+])_{\phi^+} T_L U^-[w^-]_{\phi^-}$, dabei sind $w^-, w^+ \in W$ Elemente der Weylgruppe und stets können wir nach der Definition des Charakters fordern, dass $L \subset (supp(\phi^+) \cup supp(\phi^-))^\perp$. Wir betrachten in diesem Kapitel trianguläre Rechtscoidealunteralgebren C vom Typ 2, das heißt es gelte $\mathrm{supp}(\phi^+) \cap \mathrm{supp}(\phi^-) = \Phi^+(w^+) \cap \Phi^+(w^-)$ und wir fordern die zusätzliche Eigenschaft $\mathrm{supp}(\phi^+) = \mathrm{supp}(\phi^-)$. Außerdem verwenden wir insbesondere den Satz 3.24, den wir im Allgemeinen vermuten, der aber in dieser Arbeit nur für A_n gezeigt werden konnte.

Lemma 7.13:
Sei C eine trianguläre ede Rechtscoidealunteralgebra von der Form $C = \psi(U^+[w_1])_{\phi^+} T_L U^-[w_2]_{\phi^-}$ mit $\Phi^+(w_1) \cap \Phi^+(w_2) = supp(\phi^+) = supp(\phi^-) =: \mathtt{B}$. Dann gibt es Elemente $w_1', w_2' \in W$ mit $\Phi^+(w_1) \subseteq \Phi^+(w_1')$, $\Phi^+(w_2) \subseteq \Phi^+(w_2')$, sodass $\Phi^+(w_1') \cap \Phi^+(w_2') = \mathtt{B}$ und $\Phi^+(w_1') \cup \Phi^+(w_2') = \Phi^+$. Für diese Elemente w_1', w_2' gilt insbesondere $C \subseteq \psi(U^+[w_1'])_{\phi^+} T_L U^-[w_2']_{\phi^-}$.

Beweis: Die Existenz solcher Weylgruppenelemente w_1', w_2' folgt direkt aus Satz 3.24. Es gilt natürlich $U^+[w_1] \subset U^+[w_1']$ und $U^+[w_2] \subset U^+[w_2']$. Wir müssen also für $U^+[w_1]_{\phi^+} \subset U^+[w_1']_{\phi^+}$ nur zeigen, dass ϕ^+ ein Charakter auf $U^+[w_1']$ ist. Aus Satz 3.24 wissen wir aber schon, dass w_1' eine reduzierte Darstellung der Form $w_1' = s_{\alpha_{i_1}} \dots s_{\alpha_{i_k}}$ hat, sodass es ein $j \leq k$ gibt mit $\mathtt{B} = \{\beta_{i_j}, \dots, \beta_{i_k}\}$. Wegen Bemerkung 2.14 ist dann ϕ^+ ein Charakter auf $U^+[w_1']$. Ebenso für $U^-[w_2']$. Damit folgt die Inklusion $C \subseteq \psi(U^+[w_1'])_{\phi^+} T_L U^-[w_2']_{\phi^-}$. □

Wir betrachten jetzt dieses $\psi(U^+[w_1'])_{\phi^+} T_L U^-[w_2']_{\phi^-}$ genauer. Insbesondere wollen wir zeigen, dass es eine trianguläre Rechtscoidealunteralgebra ist und ede. Dazu verwenden wir insbesondere den Satz 3.24 und den Lusztigautomorphismus. Wir wissen schon, daß es für w_2' eine reduzierte Darstellungen $w_2' = s_{\alpha_{i_1}} \dots s_{\alpha_{i_{\ell(w_2')}}}$ gibt, sodass $\mathtt{B} = \{\beta_{i_{\ell(w_2')-|\mathtt{B}|+1}}, \dots, \beta_{i_{\ell(w_2')}}\}$. Wir definieren: $v^{-1} := s_{\alpha_{i_1}} \dots s_{\alpha_{i_{\ell(w_2')-|\mathtt{B}|}}}$ und $x := s_{\alpha_{i_{\ell(w_2')-|\mathtt{B}|+1}}} \dots s_{\alpha_{i_{\ell(w_2')}}}$, sodass $w_2' = v^{-1}x$ und nach Wahl von w_1' gilt dann $vw_1' = w_0$, weil $\Phi^+(w_1') \cup \Phi^+(w_2') = \Phi^+$, außerdem besteht $\Phi^+(x)$ aus paarweise orthogonalen einfachen Wurzeln, nach Definition von $\mathtt{B}$.

Lemma 7.14:
Sei C eine trianguläre ede Rechtscoidealunteralgebra von der Form $C = \psi(U^+[w_1])_{\phi^+} T_L U^-[w_2]_{\phi^-}$ mit $\Phi^+(w_1) \cap \Phi^+(w_2) = supp(\phi^+) = supp(\phi^-) =: \mathtt{B}$. Gegeben die zugehörigen w_1', w_2' und v^{-1} und x wie oben, dann gilt für den Lusztigautomorphismus T_v:

$$T_v(\psi(U^+[w_1'])_{\phi^+} T_L U^-[v^{-1}x]_{\phi^-}) = \psi(U^+[vw_1'])_{T_v(\phi^+)} T_v(T_L)(U^-[x])_{T_v(\phi^-)} \tag{7.18}$$

Wobei $T_v(\phi^\pm)$ definiert ist als $\phi^\pm \circ T_v^{-1}$.

Beweis: Betrachten wir dazu die PBW-Basis Erzeuger von C: Weil C triangulär ist liegen sie in $\psi(U^+[w_1'])_{\phi^+}$, $U^-[v^{-1}x]_{\phi^-}$ und T_L. Betrachten wir zunächst $U^-[v^{-1}x]_{\phi^-}$. Wegen der Wahl der

reduzierten Darstellung von $v^{-1}x$ sind die Basiselemente von $U^-[v^{-1}x]_{\phi^-}$ von der folgenden Form:

$$\bar{F}_\mu = \begin{cases} F_\mu + \phi^-(F_\mu)K_\mu^{-1} & \text{für } \mu \in \mathrm{supp}(\phi^-) \\ F_\mu & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit gilt für den Lusztigautomorphismus T_v:

$$T_v(\bar{F}_\mu) = \begin{cases} T_v(F_\mu) + \phi^-(F_\mu)T_v(K_\mu^{-1}) = T_v(F_\mu) + T_v(\phi^-)(T_v(F_\mu))T_v(K_\mu^{-1}) = \overline{T_v(F_\mu)} & \text{für } \mu \in \mathrm{supp}(\phi^-) \\ T_v(F_\mu) = \overline{T_v(F_\mu)} & \text{sonst} \end{cases}$$

Ebenso ist es mit den Basiselementen von $U^+[w_1']_{\phi^+}$.

Mit diesen Überlegungen können wir analog zu nichtcharakterverschobenen Rechtscoidealunteralgebren argumentieren und erhalten die Behauptung: Weil $\Phi^+(w_1') \cup \Phi^+(w_2') = \Phi^+$ und $\Phi^+(w_1') \cap \Phi^+(w_2') = \mathtt{B}$ folgt schon $\ell(xw_1') = \ell(w_0)$, also gilt:

$$\begin{aligned} T_v(\psi(U^+[w_1'])_{\phi^+}T_LU^-[v^{-1}x]_{\phi^-}) =& T_v(\psi(U^+[w_1'])_{\phi^+})T_v(T_L)T_v(U^-[v^{-1}]_{\phi^-}T_v^{-1}(U^-[x]_{T_v(\phi^-)})) \\ =& \psi(U^+[v])_{T_v(\phi^-)}T_v(\psi(U^+[w_1'])_{\phi^+}T_v(T_L)T_vU^-[x]_{T_v(\phi^-)} \\ =& \psi(U^+[vw_1'])_{T_v(\phi^+)}T_v(T_L)(U^-[x])_{T_v(\phi^-)} \\ =& \psi(U^+[w_0])_{T_v(\phi^+)}T_v(T_L)(U^-[x])_{T_v(\phi^-)} \end{aligned}$$ □

Der Lusztigautmorphismus T_w ist im Allgemeinen kein Koalgebrenhomomorphismus, aber in diesem speziellen Fall ist T_x ein Algebrenhomomorphismus, der ein Rechtscoideal wieder auf Rechtscoideal abbildet.

Die rechte Seite der Gleichung (7.18) hat für L maximal, das heißt $L = supp(\phi^+)^\perp$ die Form $C' = \psi(U^+[w_0])_{\phi^+}T_LU^-[x]_{\phi^-}$ wie in Kapitel 7.1: Es ist $w_0 \in W$ das längste Element der Weylgruppe, $x \in W$ sodass $\Phi^+(x) \subset \Pi$ aus paarweise orthogonalen Wurzeln besteht. Ferner sind ϕ^+, ϕ^- die Charaktere mit $supp(\phi^+) = supp(\phi^-) = \Phi^+(x)$ definiert wie folgt: $\phi^+(\psi(E_\alpha)) = \lambda_\alpha \in k^*$ für $\alpha \in supp(\phi^+)$ und 0 sonst und $\phi^-(F_\alpha) = \lambda_\alpha' \in k^*$ mit $\lambda_\alpha'\lambda_\alpha = \frac{q_\alpha^2}{(1-q_\alpha^{-2})(q_\alpha - q_\alpha^{-1})}$. Dieses Verhältnis folgt mit Lemma 3.12 schon aus der Konstruktion von C' über C und der Tatsache, dass C eine trianguläre Rechtscoidealunteralegra war.

Damit ist C' nach Folgerung 7.9 eine Rechtscoidealunteralgebra und nach Lemma 7.11 sogar ede. Weil T_v ein Algebrenhomomorphismus ist, gilt das gleiche auch für $\psi(U^+[w_1'])_{\phi^+}T_LU^-[w_2']_{\phi^-}$ aus Lemma 7.13, wir wissen also, dass dieses $\psi(U^+[w_1'])_{\phi^+}T_LU^-[w_2']_{\phi^-}$ eine Rechtscoidealunteralgebra ist und ede, insbesondere als Algebra isomorph zu einer Borelunteralgebra.

Wir können dann für eine beliebige trianguläre Borelunteralgebra $C = \psi(U^+[w_1])_{\phi^+}T_LU^-[w_2]_{\phi^-}$ mit $\Phi^+(w_1) \cap \Phi^+(w_2) = supp(\phi^+) = supp(\phi^-)$ schon folgern, dass in Lemma 7.13 bereits

$w_1 = w_1'$ und $w_2 = w_2'$ sowie $L = supp(\phi^+)^\perp$ gelten. In diesem Fall ist C also nach Lemma 7.14 als Algebra isomorph zur Rechtscoidealunteralgebra $C' = \psi(U^+[w_0])_{\phi^+} T_L U^-[x]_{\phi^-}$ aus dem Konstruktionskapitel 7.1.

Eine trianguläre ede Rechtscoidealunteralgebra $C = \psi(U^+[w_1])_{\phi^+} T_L U^-[w_2]_{\phi^-}$ die vermöge Spiegelungen isomorph ist zu der oben konstruierten triangulären Borelunteralgebra, muss a-priori selbst nicht maximal sein, weil C in einer größeren ede Rechtscoidealunteralgebra liegen könnte, deren Spiegelung zu C' keine Rechtscoidealunteralgebra mehr sein könnte.

In der A_n wissen wir zumindest mit Lemma 5.17 und der Maximalität von L, dass C nicht in einer größeren triangulären ede Rechtscoidealunteralgebra liegen kann.

Satz 7.15:
Jede trianguläre Borelunteralgebra $B = \psi(U^+[w^+])_{\phi^+} T_L U^-[w^-]_{\phi^-}$ von U mit der zusätzlichen Eigenschaft $\Phi^+(w^+) \cap \Phi^+(w^-) = \mathrm{supp}(\phi^+) = \mathrm{supp}(\phi^-)$ (Typ 2) ist als Algebra isomorph zu einer Borelunteralgebra von der Form $\psi(U^+[w_0])_{\phi+} T_L U^-[\prod_{\alpha\in c} s_\alpha]_{\phi^-}$ mit $L = c^\perp$, wobei c eine Menge von paarweise orthogonalen einfachen Wurzeln ist und ϕ^+, ϕ^- Charaktere auf $\psi(U^+[\prod_{\alpha\in c} s_\alpha])$ bzw. $U^-[\prod_{\alpha\in c} s_\alpha]$ sind, was gleichbedeutend ist zu einer beliebigen Wahl der Werte $\lambda_\alpha = \phi^+(E_\alpha K_\alpha^{-1})$, $\lambda_\alpha' = \phi^-(F_\alpha)$ für $\alpha \in c$ mit $\lambda_\alpha'\lambda_\alpha = \frac{q_\alpha^2}{(1-q_\alpha^{-2})(q_\alpha - q_\alpha^{-1})}$. Hierbei kann ϕ^+ auf $U^+[\prod_{\alpha\in c} s_\alpha]$ trivial erweitert werden zu einem Charakter ϕ^+ auf $\psi(U^+[w_0])$, weil die Elemente in c paarweise orthogonal sind.

Umgekehrt ist für jede solche Wahl von c, ϕ^+ und ϕ^- schon $\psi(U^+[w_0])_{\phi+} T_L U^-[\prod_{\alpha\in c} s_\alpha]_{\phi^-}$ mit $L = c^\perp$ eine Borelunteralgebra.

Man beachte, dass verschiedene Wahlen von $\lambda_\alpha, \lambda_\alpha'$ durch den Hopf-Automorphismus $E \mapsto tE$, $F \mapsto t^{-1}F$ ineinander übergeführt werden können, sowie verschiedene Wahlen von c durch Diagrammautomorphismen.

Eine trianguläre ede Rechtscoidealunteralgebra $C = \psi(U^+[w_1])_{\phi^+} T_L U^-[w_2]_{\phi^-}$ die vermöge Spiegelungen isomorph ist zu der oben konstruierten triangulären Borelunteralgebra, muss a-priori selbst nicht maximal sein, weil C in einer größeren ede Rechtscoidealunteralgebra liegen könnte, deren Spiegelung zu C' keine Rechtscoidealunteralgebra mehr sein könnte.

In der A_n wissen wir zumindest mit Lemma 5.17 und der Maximalität von L, dass C nicht in einer größeren triangulären ede Rechtscoidealunteralgebra liegen kann.

Beweis: Nach Lemma 7.13 liegt jede trianguläre ede Rechtscoidealunteralgebra $C = \psi(U^+[w_1])_{\phi^+} T_L U^-[w_2]_{\phi^-}$ mit $\Phi^+(w_1) \cap \Phi^+(w_2) = supp(\phi^+) = supp(\phi^-) =: \mathtt{B}$. in einer triangulären ede Rechtscoidealunteralgebra $C \subseteq \psi(U^+[w_1'])_{\phi^+} T_L U^-[w_2']_{\phi^-}$ mit $\Phi^+(w_1) \subseteq \Phi^+(w_1')$, $\Phi^+(w_2) \subseteq \Phi^+(w_2')$, sodass $\Phi^+(w_1') \cap \Phi^+(w_2') = \mathtt{B}$ und $\Phi^+(w_1') \cup \Phi^+(w_2') = \Phi^+$.

Wenn C nach Voraussetzung eine Borelunteralgebra ist, muss C also von der Form $\psi(U^+[w_1'])_{\phi^+} T_L U^-[w_2']_{\phi^-}$ sein; Wir behaupten nicht das jede Algebra von dieser Form

maximal ist.

Wir können dann Lemma 7.14 anwenden: Die rechte Seite der Gleichung (7.18) hat für L maximal, das heißt $L = supp(\phi^+)^\perp$ die Form $C' = \psi(U^+[w_0])_{\phi^+} T_L U^-[x]_{\phi^-}$ wie in Kapitel 7.1: Es ist $w_0 \in W$ das längste Element der Weylgruppe, $x \in W$ sodass $\Phi^+(x) \subset \Pi$ aus paarweise orthogonalen Wurzeln besteht. Ferner sind ϕ^+, ϕ^- die Charaktere mit $supp(\phi^+) = supp(\phi^-) = \Phi^+(x)$ definiert wie folgt: $\phi^+(\psi(E_\alpha)) = \lambda_\alpha \in k^*$ für $\alpha \in supp(\phi^+)$ und 0 sonst und $\phi^-(F_\alpha) = \lambda'_\alpha \in k^*$ mit $\lambda'_\alpha \lambda_\alpha = \frac{q_\alpha^2}{(1-q_\alpha^{-2})(q_\alpha - q_\alpha^{-1})}$. Dieses Verhältnis folgt mit Lemma 3.12 schon aus der Konstruktion von C' über C und der Tatsache, dass C eine trianguläre Rechtscoidealunteralegra war.

Damit ist C' nach Folgerung 7.9 eine Rechtscoidealunteralgebra und nach Lemma 7.11 sogar ede. Weil T_v ein Algebrenhomomorphismus ist, gilt das gleiche auch für $\psi(U^+[w'_1])_{\phi^+} T_L U^-[w'_2]_{\phi^-}$ aus Lemma 7.13, wir wissen also, dass dieses $\psi(U^+[w'_1])_{\phi^+} T_L U^-[w'_2]_{\phi^-}$ eine Rechtscoidealunteralgebra ist und ede, insbesondere als Algebra isomorph zu einer Borelunteralgebra.

Wir können dann für eine beliebige trianguläre Borelunteralgebra $C = \psi(U^+[w_1])_{\phi^+} T_L U^-[w_2]_{\phi^-}$ mit $\Phi^+(w_1) \cap \Phi^+(w_2) = supp(\phi^+) = supp(\phi^-)$ schon folgern, dass in Lemma 7.13 bereits $w_1 = w'_1$ und $w_2 = w'_2$ sowie $L = supp(\phi^+)^\perp$ gelten. In diesem Fall ist C also nach Lemma 7.14 als Algebra isomorph zur Rechtscoidealunteralgebra $C' = \psi(U^+[w_0])_{\phi^+} T_L U^-[x]_{\phi^-}$ aus dem Konstruktionskapitel 7.1.

8. Typ 3: Trianguläre Borelunteralgebren mit $\Phi(w^+) \cap \Phi(w^-) \supsetneq \mathrm{supp}(\phi^+) \cap \mathrm{supp}(\phi^-)$ im Fall A_n

Neben den obigen Borelunteralgebren gibt es noch einen dritten Typ von triangulären Borelunteralgebren. Diese sind als Algebren nicht isomorph zu den anderen Typen. Es handelt sich dabei um solche, für die $\Phi(w^+) \cap \Phi(w^-) \supsetneq supp(\phi^+) \cap supp(\phi^-)$ gilt: Eine überraschende Wendung in der vorliegenden Arbeit war, dass in spezifischen Fällen eine Borelunteralgebra eben durchaus trivial-charakterverschobene (das heißt $\mu \notin \mathrm{supp}(\phi^+) \cap \mathrm{supp}(\phi^-)$) Wurzelvektoren $\bar{E}_\mu$, $\bar{F}_\mu$ enthalten kann, wenn μ nicht einfach ist und eine (charakterverschobene) Weylalgebra $\bar{E}_\nu, \bar{F}_\nu$ mit $\nu \prec \mu$ in C liegt. Diese Borelunteralgebren sind Erweiterungen von Weylalgebren.

Dieses Kapitel enthält nur Teilergebnisse, insbesondere beschränken wir uns auf den Fall A_n.

8.1. Klassifikation der Borelunteralgebren von Typ 3

Wir wollen nun allgemein trianguläre Borelunteralgebren $C = \psi(U^+[w^+])_{\phi^+} T_L U^-[w^-]_{\phi^-}$ in der A_n mit $\Phi(w^+) \cap \Phi(w^-) \supsetneq supp(\phi^+) \cap supp(\phi^-)$ klassifizieren. Wir können das vermutete Ergebnis unter zwei technischen Einschränkungen beweisen, von welchen wir vermuten, dass sie für eine allgemeine Borelunteralgebra zutreffen müssen:

$$supp(\phi^+) = supp(\phi^-)$$

$$\text{O.B.d.A.} \quad \Phi^+(w^-) \subset \Phi^+(w^+)$$

Bemerkung 8.1:
Wir wollen kurz skizzieren, warum wir vermuten, dass diese Bedingungen allgemein erfüllt sind.

Für die erste Bedingung muss das Hinzufügen von Elementen $K_\mu \in U^0$ zu C untersucht werden. Sei $\mu \perp \mathrm{supp}(\phi^+) \cup \mathrm{supp}(\phi^-)$, so ist $C\langle K_\mu \rangle$ immernoch triangulär zu gleichen w^+, w^- und Charakteren ϕ^+, ϕ^-. Sei jetzt $\mu \in \mathrm{supp}(\phi^+) \backslash \mathrm{supp}(\phi^-)$ so gibt es zwei Fälle: Ist $\mu \in \Phi^+(w^-)$ so ist F_μ nicht voll charakterverschoben (d.h. $\bar{F}_\mu$ enthält keinen Summanden in U^0) also kann vermutlich C schon nicht ede gewesen sein. Ist hingegen $\mu \notin \Phi^+(w^-)$ so erwarten wir, dass $C\langle K_\mu \rangle$ immer noch triangulär ist zu dem gleichen w^+, w^-; enthält nun aber neben $\bar{E}_\mu = (\phi^+ \otimes id)E_\mu$ als Differenz mit dem neuen Element K_μ auch noch $(\phi|_{\mathrm{supp}(\phi)\backslash\{\mu\}} \otimes id)E_\mu$, wir können also $C\langle K_\mu \rangle$ mit einen Charakter mit kleinerem Träger schreiben. Zusammengefasst

vermuten wir, dass wir solange Elemente in U^0 vom letzten Typ hinzufügen können, bis $supp(\phi^+)$ und $supp(\phi^-)$ auf den gemeinsamen Schnitt geschrumpft sind.

Die zweite Bedingung scheint auf den ersten Blick offensichtlich, da wir C mit Lusztigautomorphismen auf die behauptete Form bringen können. Das Problem hierbei ist allerdings, ob das neue C noch eine Rechtscoidealunteralgebra ist (bzw. noch trianguläre Form hat), und es ist zu beachten, dass die Wurzelvektoren E_μ jeweils zu verschiedenen reduzierten Darstellungen verschiedener Weylgruppenelemente definiert sind, eine simultane Drehung ist also nur unter zusätzlichen Einschränkungen möglich.

Unter diesen Annahmen können wir nun zeigen, dass jede trianguläre Borelunteralgebra vom Typ Palme ist, siehe Definition 3.39.

Satz 8.2:
Ist $C = \psi(U^+[w^+])_{\phi^+} T_L U^-[w]_{\phi^-}$ ede mit $\Phi^+(w) \subset \Phi^+(w^+)$ und gilt $supp(\phi^+) = supp(\phi^-) =: supp(\phi)$ so kommen nur die folgenden Wahlen für w in Frage:

1. *Im Fall $supp(\phi) = \{\alpha_i\} \subset \Pi$ ist:*

$$w = V_i^{lk} := s_{\alpha_i} s_{\alpha_{i+1}} s_{\alpha_{i+2}} \dots s_{\alpha_{i+l}} s_{\alpha_{i-1}} s_{\alpha_{i-2}} \dots s_{\alpha_{i-k}}$$

   für bestimmte $0 \leq i, l, k \leq n$, wie in Definition 3.39. Es gilt natürlich

$$\Phi^+(V_i^{lk}) := \left\{ \sum_{j=0}^{r} \alpha_{i+j}, \sum_{j=-s}^{0} \alpha_{i+j} \mid 0 \leq r \leq l, 0 \leq s \leq k \right\}$$

2. *Im allgemeineren Fall $supp(\phi) \cap \Pi = \{\alpha_i\}$ ist, wieder in der Notation von Definition 3.39:*

$$w = \mathbb{V}_i := V_i^{l_1 k_1} V_i^{l_2 k_2} \dots$$

   für ein $1 \leq i \leq n$ mit der Eigenschaft $l_j > l_{j+1}$ und $k_j > k_{j+1}$. Das heißt w ist das Inverse von einem speziellen Element im Sinne von Lemma 5.12.
   Wenn $\diamond_{i,m}$ die maximale Raute ist mit $\Phi^+(\diamond_{i,j}) \subset \Phi^+(\mathbb{V}_i)$, dann gilt:

$$\mathrm{supp}(\phi) = \left\{ \sum_{k=i-l}^{i+l} \alpha_k \mid 0 \leq l \leq m \right\}$$

3. *Im allgemeinen Fall $\mathrm{supp}(\phi) \cap \Pi = \{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2} \dots\} =: J$ (paarweise orthogonal) gilt: w ist das spezielle Element mit $\Phi^+(w) \cap \Pi = J$. Das heißt w ist die Verallgemeinerung des Inversen eines speziellen Elements im Sinne von Lemma 5.12.*

   Ist C sogar eine Borelunteralgebra, so vermuten wir, dass wir aus der Maximalität folgern können:

$$w = \prod_i \mathbb{V}_i$$

   Für bestimmte Elemente $\mathbb{V}_i$, die miteinander vertauschen. Der Charakterträger $\mathrm{supp}(\phi)$ ist dann die Vereinigung der Träger der jeweiligen Palmen.

Beweis: Die Behauptungen folgen direkt aus 3.6 und weil die Elemente in $\mathrm{supp}(\phi)$ paarweise orthogonal sind. Die Form des Trägers $\mathrm{supp}(\phi)$ in 2. folgt dabei direkt aus Folgerung 3.44.

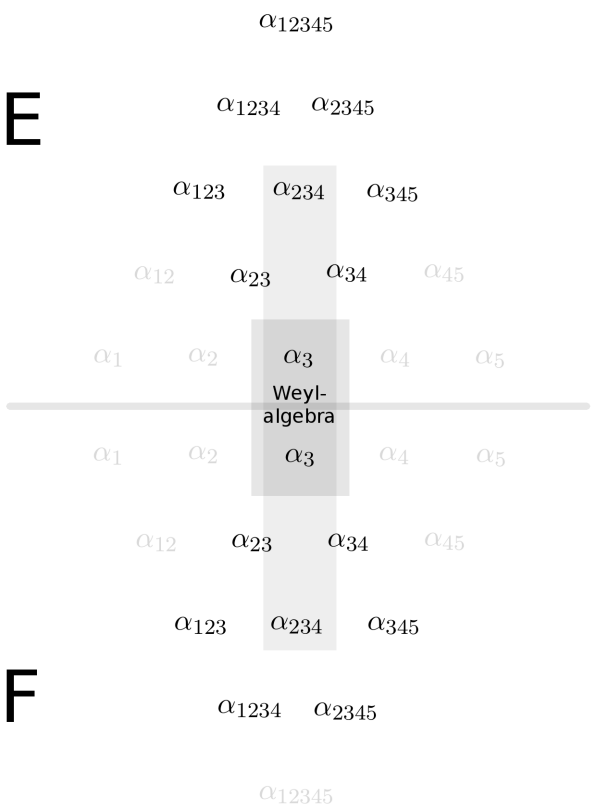
Im Fall C ist eine Borelalgebra folgt aus Lemma 3.45, dass nur solche Kombinationen von $\mathbb{V}_i$ möglich sind die disjunkt sind, d.h. die paarweise miteinander vertauschen. □

Zu einem gegebenen w^- könnten die möglichen w^+ für C eine Borelunteralgebra durch die Ergebnisse von Kapitel 5 bestimmt werden, nämlich nach Vermutung 5.16 $w^+ = w'^- w_0$

Beispiel 8.3:
Sei $\mathfrak{g} = A_5$, dann ist ein Beispiel für obigen Satz eine Palme $\mathbb{V}_3$ der Höhe 2:

$$w = \mathbb{V}_3 = s_{\alpha_3} s_{\alpha_4} s_{\alpha_5} s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} s_{\alpha_3} s_{\alpha_2} s_{\alpha_4}$$

$$\begin{aligned}\Phi^+(w) = \{&\alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_3 + \alpha_2, \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1,\\ &\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \}\end{aligned}$$



Seien ϕ^+, ϕ^- passende Charaktere mit $\mathrm{supp}(\phi^+) = \mathrm{supp}(\phi^-) = \{\alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4\}$. Dann ist nach Satz 5.13 $\mathrm{gr}(U^-[w]_{\phi^-}) \cong U^-[w']kM$ für $M = \mathrm{supp}(\phi)$ und

$$w' = s_{\alpha_4} s_{\alpha_5} s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} s_{\alpha_4}$$

mit

$$\Phi^+(w') = \{\alpha_4, \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1, \alpha_5\}$$

Insgesamt erwarten wir dann ede Rechtscoidealunteralgebren:

$$\psi(U^+[w^+])_{\phi^+} T_L U^-[w]_{\phi^-}$$

für alle w^+ mit $\ell(w'^{-1}w^+) = \ell(w') + \ell(w^+)$, insbesondere eine Borelunteralgebra für $L = \{K_{\alpha_1}, K_{alpha_2}^{-1} K_{\alpha_4}, K_{\alpha_5}, K_{\alpha_1}^{-1}, K_{alpha_2} K_{\alpha_4}^{-1}, K_{\alpha_5}^{-1}\}$ und

$$w^+ = s_{\alpha_3} s_{\alpha_4} s_{\alpha_5} s_{\alpha_2} s_{\alpha_1} s_{\alpha_3} s_{\alpha_2} s_{\alpha_4} s_{\alpha_3}$$

mit

$$\begin{aligned}\Phi^+(w^+) = \{&\alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,\\ &\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, +\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5,\\ &\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_5\}\end{aligned}$$

8.2. Konstruktion der Borelunteralgebren von Typ 3

Wir wollen im Folgenden immerhin Palmen der Höhe 1 konstruieren und ihre ede Eigenschaft beweisen, das heißt Rechtscoidealunteralgebren mit

$$\mathrm{supp}(\phi) = \{\alpha_i\} \in \Pi$$

Nach der Bemerkung 3.39 ist in diesem Fall w von der Form V_i^{lk} für bestimmte $l, k \in \mathbb{N}_0$. Es ist klar, dass gelten muss: $\lambda_{\alpha_i}\lambda_{\alpha_i'} = \frac{q^2}{(q-q^{-1})(1-q^2)}$ für $\phi^+(\psi(E_{\alpha_i})) = \lambda_{\alpha_i}$ und 0 sonst und $\phi^-(F_{\alpha_i}) = \lambda'_{\alpha_i}$ und 0 sonst, sonst ist nach 3.6 C nicht ede.

Lemma 8.4:
Für A_n ist das folgende eine ede Rechtscoidealunteralgebra: Seien $1 \le i \le n$ und $0 \le l \le n - i$, $0 \le k \le i$ beliebig gewählt, dann betrachten wir eine beliebige Palme $\mathbb{V}_i$ der Höhe 1:

$$w^+, w^- := \mathrm{V}_i^{lk}$$

$$\Phi^+(w^+) = \Phi^+(w^-) := \{\sum_{j=0}^{r} \alpha_{i+j}, \sum_{j=-s}^{0} \alpha_{i+j} \mid 0 \le r \le l, 0 \le s \le k\}$$

und Charaktere ϕ^+ und ϕ^- mit $\mathrm{supp}(\phi^+) = \mathrm{supp}(\phi^-) = \{\alpha_i\}$ *wie oben.*

Dann behaupten wir, dass das folgende eine trianguläre Rechtscoidealunteralgebra ist, insbesondere ede und eine Erweiterung der Weylalgebra, obwohl sie viele Paare E_μ, F_μ enthält für μ nicht im Charakterträger:

$$C = \psi(U^+[\mathrm{V}_i^{lk}])_{\phi^+} T_L U^-[\mathrm{V}_i^{lk}]_{\phi^-}$$

für $L = \{\mu \mid \mu \perp \alpha_i\}$ Genauer hat C die folgenden Relationen zwischen zwei charakterverschobenen Wurzelvektoren zu Wurzeln $\mu, \nu, \mu' \in \Phi^+(V_i^{lk})$:

$$[\bar{E}_{\alpha_i}, \bar{F}_{\alpha_i}] = \frac{q^2}{q - q^{-1}} \tag{8.1}$$

$$[\bar{E}_\mu, \bar{E}_\nu] = 0 \quad [\bar{F}_\mu, \bar{F}_\nu] = 0 \tag{8.2}$$

$$[\bar{E}_\mu, \bar{F}_\nu] = 0 \quad \textit{wenn } \mu \neq \nu \tag{8.3}$$

$$[\bar{E}_\mu, \bar{F}_\mu] = q^2 [\bar{E}_{\mu'}, \bar{F}_{\mu'}]_1 \quad \textit{wenn } \mu \neq \alpha_i \tag{8.4}$$

für ein

$$\mu' = \begin{cases} \mu - \alpha_{i+r}, & \textit{wenn } \mu = \sum_{j=0}^{r} \alpha_{i+j} \\ \mu - \alpha_{i-s} \textit{ wenn } \mu = \sum_{j=-s}^{0} \alpha_{i+j} \end{cases} \tag{8.5}$$

Beweis: Die Kommutatorrelationen folgen aus Lemma 3.33 und Lemma 3.41.

Wir zeigen nun die ede Eigenschaft: Sei V eine beliebige endlichdimensionale Darstellung von C. Wir betrachten zunächst die Einschränkung auf die enthaltene Weylalgebra $\langle \bar{E}_{\alpha_i}, \bar{F}_{\alpha_i} \rangle$. Wir wissen aus Beispiel 1.54, dass auf allen endlichdimensionalen Darstellungen der Weylalgebra der Kommutator $[\bar{E}_{\alpha_i}, \bar{F}_{\alpha_i}]_1$ verschwindet. Insbesondere faktorisiert jede endlichdimensionale Darstellung der Weylalgebra zu einer Darstellung der kommutativen Algebra $\mathbb{C}[e, f]/(ef - \frac{q^2}{(q-q^{-1})(1-q^2)}$.

Wir betrachten nun die nächstgrößere Unteralgebra, die neben der Weylalgebra erzeugt ist von allen $\bar{E}_\mu, \bar{F}_\mu$ mit $\mu' = \alpha_i$. Wegen der Kommutatorrelation $[\bar{E}_\mu, \bar{F}_\mu] = [\bar{E}_{\mu'}, \bar{F}_{\mu'}]_1$ wirkt also $[\bar{E}_\mu, \bar{F}_\mu]_{q^{(\mu,\mu)}}$ auf V trivial. Nach Satz 3.3 (und weil $q^{(\mu,\mu)} \neq 1$) impliziert dies, dass die mit allen Elementen q-kommutierenden Elemente $\bar{E}_\mu, \bar{F}_\mu$ auf ganz V trivial wirken.

Betrachten wir nun induktiv die nächstgrößere Unteralgebra mit $\bar{E}_\mu, \bar{F}_\mu$ für $(\mu')' = \alpha_i$ so gilt wieder wegen der Relation $[\bar{E}_\mu, \bar{F}_\mu] = [\bar{E}_{\mu'}, \bar{F}_{\mu'}]_1$ und der eben gezeigten trivialen Wirkung von $\bar{E}_{\mu'}, \bar{F}_{\mu'}$, dass der q-Kommutator trivial auf V wirkt. Induktiv wirken also alle $\bar{E}_\mu, \bar{F}_\mu$ mit $\mu \neq \alpha_i$ trivial auf V.

Folglich ist die Kategorie der endlichdimensionalen Darstellungen von C äquivalent zur Kategorie der endlichdimensionalen Darstellung der Darstellungen von C eindimensional.

Teil VI.

Beispiele

9. Borelunteralgebren der $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

Data der $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

Das einfachste Beispiel einer Quantengruppe ist die $U_q(\mathfrak{sl}_2)$. Sie ist die universelle einhüllende der Liealgebra $\mathfrak{sl}_2$ mit dem Wurzelsystem $\Phi = \{\alpha, -\alpha\}$ zur Basis $\Pi = \{\alpha\}$, und Skalarprodukt $(_,_)$ gegeben durch $(\alpha, \alpha) = 2$. Sie wird also erzeugt von den Elementen $E_\alpha, F_\alpha, K_\alpha, K_\alpha^{-1}$ mit den Relationen

$$[E_\alpha, F_\alpha]_1 = \frac{K_\alpha - K_\alpha^{-1}}{q - q^{-1}} \quad [E_\alpha, K_\alpha]_{q^{-2}} = [F_\alpha, K_\alpha]_{q^2} = 0$$

Der Einfachheithalber schreiben wir für die Erzeuger im Folgenden E, F, K und K^{-1}.

Rechtscoidealunteralgebren der $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

Die Standardborelalgebren $U^{\geq 0}$ und $U^{\leq 0}$ und die U^0 sind die einzigen homogenen Rechtscoidealunteralgebren der $U_q(\mathfrak{sl}_2)$. Desweiteren gibt es die Rechtscoidealunteralgebren $\langle EK^{-1}\rangle$ in $U^{\geq 0}$ und $\langle F\rangle$ in $U^{\leq 0}$, sowie Familien von charakterverschobenen Rechtscoidealunteralgebren $\langle EK^{-1}\rangle_{\phi^+}$ bzw. $\langle F\rangle_{\phi^-}$ für Charaktere auf $\langle EK^{-1}\rangle$ bzw. $\langle F\rangle$ gegeben durch $\phi^+(EK^{-1}) = \lambda$ und $\phi^-(F) = \lambda'$. Sie sind von der Form $\langle EK^{-1}\rangle_{\phi^+} = \langle EK^{-1} + \lambda K^{-1}\rangle$ und $\langle F\rangle_{\phi^-} = \langle F + \lambda' K^{-1}\rangle$.

Borelunteralgebren der $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

Wir werden jetzt alle Borelunteralgebren klassifizieren. Natürlich sind $U^{\geq 0}$ und $U^{\leq 0}$ Borelunteralgebren. Daneben taucht noch eine Familie von andere Borelunteralgebren auf, die wir uns jetzt genauer ansehen.

Die Borelunteralgebra $\langle EK^{-1} + \lambda K^{-1}, F + \lambda' K^{-1}\rangle$

Betrachten wir die Rechtscoidealunteralgebra B erzeugt von $\{EK^{-1} + \lambda K^{-1}, F + \lambda' K^{-1}\}$ mit $\lambda\lambda' = \frac{q^2}{(1-q^2)(q-q^{-1})}$ genauer. Man beachte, dass verschiedene Borelunteralgebren B für verschiedene Wahlen von λ, λ' durch den Hopf-Automorphismus $E \mapsto tE$, $F \mapsto t^{-1}F$ ineinander übergeführt werden können. Wir wollen zeigen, dass B Borel ist. Dazu zeigen wir zunächst, dass jede endlichdimensionale irreduzible Darstellung von B eindimensional ist. Wir

berechnen den q-Kommutator von $EK^{-1} + \lambda K^{-1}$ und $F + \lambda' K^{-1}$:

$$
\begin{aligned}
&[EK^{-1} + \lambda K^{-1}, F + \lambda' K^{-1}]_{q^2} \\
&= (EK^{-1} + \lambda K^{-1})(F + \lambda' K^{-1}) - q^2(F + \lambda' K^{-1})(EK^{-1} + \lambda K^{-1}) \\
&= EK^{-1}F - q^2 FEK^{-1} + \lambda K^{-1}F - q^2 F\lambda K^{-1} + EK^{-1}\lambda' K^{-1} - q^2\lambda' K^{-1}EK^{-1} + (1-q^2)\lambda K^{-1}\lambda' K^{-1} \\
&= EK^{-1}F - q^2 FEK^{-1} + (1-q^2)\lambda K^{-1}\lambda' K^{-1} \\
&= q^2(EF - FE)K^{-1} + (1-q^2)\lambda\lambda' K^{-2} \\
&= \frac{q^2}{q-q^{-1}}(1-K^{-2}) + (1-q^2)\lambda\lambda' K^{-2} = \frac{q^2}{q-q^{-1}}1
\end{aligned}
$$

Wir sehen B ist also isomorph zur Weylalgebra wie in 1.54 mit $c = \frac{q^2}{q-q^{-1}}$ und damit ist jede endlichdimensionale irreduzible Darstellung eindimensional. Jetzt wissen wir schon, dass B ede ist und wollen noch zeigen, dass sie maximal ist. Betrachten wir dazu die Menge von möglichen erzeugenden Elementen, wie in Lemma 4.12. Wir wissen es gibt ein Erzeugendensystem für jede Rechtscoidealunteralgebra dessen Elemente in der Menge $EZS := \{K^i, c_E EK^{-1} + c_F F + c_K K^{-1}\}$ liegen für $i \in \mathbf{Z}$ und Konstanten $c_E, c_F, c_K \in k$. Würden wir B aber um ein Element dieser Menge erweitern, wäre B nicht mehr ede, nach Lemma 3.9 und wie man in der Tabelle unten leicht sehen kann.

Klassifikation aller Borelunteralgebren

Wir wissen nach Lemma 4.12, dass wir ein Erzeugendensystem wählen können von Elementen aus der Menge EZS. Nach Lemma 3.5 wissen wir, dass für eine Borelalgebra B aus $K^i \in B$ stets $K^{-i} \in B$ folgt. Man sieht in der folgenden Tabelle sofort, dass jede Kombination von mindestens zwei Elementen aus EZS entweder B oder $U^{\geq 0}$ bzw. $U^{\leq 0}$ enthält oder nicht ede ist. Andererseits sieht man auch, dass jede Rechtscoidealunteralgebra die ein Element aus EZS enthält in einer Borelunteralgebra liegt. Seien $c_F, c_E, c_K, \lambda_F, \lambda_E \in k^*$ und $i > 0$:

	K^i	$EK^{-1} + \lambda_E K^{-1}$	$F + \lambda_F K^{-1}$	$c_E EK^{-1} + c_F F + c_K K^{-1}$
K^i	$C \subset U^0$	$U^{\geq 0} \subset C$	$U^{\leq 0} \subset C$	nicht ede
$EK^{-1} + \lambda_E K^{-1}$	$U^{\geq 0} \subset C$	$C \subset U^{\geq 0}$	$B \subset C$ oder nicht ede	$B \subset C$ oder nicht ede
$F + \lambda_F K^{-1}$	$U^{\leq 0} \subset C$	$B \subset C$ oder nicht ede	$C \subset U^{\leq 0}$	$B \subset C$ oder nicht ede
$c_E EK^{-1} + c_F F + c_K K^{-1}$	nicht ede	$B \subset C$ oder nicht ede	$B \subset C$ oder nicht ede	$C \subset B$

Satz 9.1:
Es gibt zwei verschiedene Typen von Borelunteralgebren der $U_q(\mathfrak{sl}_2)$. Diese sind die Standard-Borelunteralgeben $U^{\geq 0}$ und $U^{\leq 0}$ sowie die Borelunteralgebra $B := \langle EK^{-1} + \lambda K^{-1}, F + \lambda' K^{-1}\rangle$ mit $\lambda\lambda' = \frac{q^2}{(1-q^2)(q-q^{-1})}$.

Beispiel 9.2:
Wenn wir die irreduziblen endlichdimensionalen Darstellungen $L(\lambda)$ von U auf eine Borelunteralgebra B einschränken so ist die Darstellung nicht mehr irreduzibel, aber auch nicht notwendig halbeinfach. Für eine Borelunteralgebra müssen alle Kompositionsfaktoren eindimensional sein.

Konkret sieht das in der $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ nach Definition 1.42 wie folgt aus: Gegeben einen Höchstgewichtsvektor von $L(\lambda)$ zum (einzigen) dominanten Gewicht $\lambda = \frac{1}{2}\alpha$ und seien $x_0 := v_\lambda,\ x_1 := v_{\lambda-\alpha}$, dann wirken die Elemente von B wie folgt:

$$(EK^{-1} + \lambda_E K^{-1}).x_0 = \lambda q^{-1} x_0 \qquad (EK^{-1} + \lambda_E K^{-1}).x_1 = \lambda q x_1 + q x_0 \tag{9.1}$$

$$(F + \lambda' K^{-1}).x_0 = x_1 + \lambda' q^{-1} x_0 \qquad (F + \lambda' K^{-1}).x_1 = \lambda' q x_1 \tag{9.2}$$

Man prüft leicht nach, dass $L(\lambda)$ den eindimensionalen Untermodul $\langle x_0 + \lambda(1 - q^{-2})x_1\rangle$ hat zum Eigenwert λq von $EK^{-1} + \lambda_E K^{-1}$ bzw. $\lambda' q^{-1}$ von $F + \lambda' K^{-1}$ und den eindimensionalen Faktormodul $L(\lambda)/(x_0 + \lambda(1 - q^{-2})x_1)$ mit den Eigenwerten λq^{-1} bzw. $\lambda' q$.

10. Borelunteralgebren der $U_q(\mathfrak{sl}_3)$

10.1. Relationen und Eigenschaften der $U_q(\mathfrak{sl}_3)$

Die $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ ist das kleinste Beispiel in dem nichttriviale Borelunteralgebren von Typ 3 auftauchen. Wir wollen zunächst die Struktur, Wurzelvektoren und Darstellungstheorie explizit angeben und die bekannten Rechtsocidealunteralgebren beschreiben. Danach werden wir die verschiedenen Typen von Borelunteralgebren klassifizieren.

Data der $U_q(\mathfrak{sl}_3)$

Die $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ ist die quantisert universell Einhüllende der Liealgebra $\mathfrak{sl}_3$ mit dem Wurzelsystem $\Phi = \{\alpha, \beta, \alpha+\beta, -\alpha, -\beta, -\alpha-\beta\}$ zur Basis $\Pi = \{\alpha, \beta\}$ mit Skalarprodukt $(_,_)$ gegeben durch $(\alpha,\alpha) = 2 = (\beta,\beta)$ und $(\alpha,\beta) = -1$. Das Gewichtsgitter Λ wird von den Fundamentalgewichten $\lambda_1 = \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta$ und $\lambda_2 = \frac{1}{3}\alpha + \frac{2}{3}\beta$ aufgespannt. Die Algebra $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ wird also erzeugt von den Elementen $\{E_\alpha, F_\alpha, E_\beta, F_\beta, K_\alpha, K_\beta, K_\alpha^{-1}, K_\beta^{-1}\}$. Ihre Weylgruppe ist $W = \{s_\alpha, s_\beta, s_\alpha s_\beta, s_\beta s_\alpha, s_\alpha s_\beta s_\alpha\}$ für einfache Spiegelungen s_α und s_β. Die reduzierten Darstellungen sind eindeutig für alle Elemente der Weylgruppe außer dem längsten Element $w_0 = s_\alpha s_\beta s_\alpha$. Hier gibt es zwei mögliche Wahlen von reduzierten Darstellungen, nämlich $s_\alpha s_\beta s_\alpha$ und $s_\beta s_\alpha s_\beta$. Die Wurzelvektoren zu den einfachen Wurzeln sind die erzeugenden Elemente und die zur Wurzel $\alpha+\beta$ sind je nach zu Grunde liegender reduzierter Darstellung gegeben durch:

$$E_{\alpha\beta} := T_\alpha(E_\beta) = E_\alpha E_\beta - q^{-1} E_\beta E_\alpha \qquad E_{\beta\alpha} := T_\beta(E_\alpha) = -q^{-1}(E_\alpha E_\beta - q E_\beta E_\alpha) = T_\alpha^{-1}(E_\beta)$$
$$F_{\alpha\beta} := T_\alpha(F_\beta) = -q(F_\alpha F_\beta - q^{-1} F_\beta F_\alpha) \qquad F_{\beta\alpha} := T_\beta(F_\alpha) = F_\alpha F_\beta - q F_\beta F_\alpha = T_\alpha^{-1}(F_\beta)$$

Die Quantengruppe ist symmterisch in α und β und mit der Abildung ω auch symmetrisch in E und F. Daher werden wir im Folgenden nur die Relationen berechnen, die sich nicht durch Symmetrie aus den anderen ergeben. Der Wurzelvektor in $\alpha+\beta$ kommutiert mit den anderen Wurzelvektoren wie folgt:

$$[E_{\alpha\beta}, F_{\alpha\beta}]_1 = \frac{K_{\alpha+\beta} - K_{\alpha+\beta}^{-1}}{q - q^{-1}}$$
$$[E_{\alpha\beta}, F_\alpha]_1 = -E_\beta K_\alpha^{-1} \qquad [E_{\beta\alpha}, F_\alpha]_1 = q^{-1} E_\beta K_\alpha$$
$$[E_{\alpha\beta}, E_\alpha]_{q^{-1}} = 0 \qquad [E_{\beta\alpha}, E_\alpha]_q = 0$$

Die Komultiplikation ist für $\alpha \in \Pi$ gegeben durch:

$$\Delta(E_\alpha) = E_\alpha \otimes 1 + K_\alpha \otimes E_\alpha \quad \Delta(F_\alpha) = F_\alpha \otimes K_\alpha^{-1} + 1 \otimes F_\alpha$$

Für Wurzelvektoren in $\alpha\beta$ ist sie gegeben durch:

$$\Delta(E_{\alpha\beta}) = E_{\alpha\beta} \otimes 1 + K_{\alpha+\beta} \otimes E_{\alpha\beta} + (1 - q^{-2})E_\alpha K_\beta \otimes E_\beta \tag{10.1}$$

$$\Delta(F_{\alpha\beta}) = F_{\alpha\beta} \otimes K_{\alpha+\beta}^{-1} + 1 \otimes F_{\alpha\beta} + (q^{-1} - q)F_\beta \otimes F_\alpha K_\beta^{-1} \tag{10.2}$$

Der winzige Vermamodul von der $U_q(\mathfrak{sl}_3)$

Nach Bemerkung 1.48 wissen wir, dass alle Höchstgewichtmoduln zu den fundamentalen dominanten Gewichten winzige dominante Gewichte sind. Die winzigen Darstellungen sind also gegeben durch $L(\lambda_1) = M(\frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta)$ und $L(\lambda_2) = M(\frac{1}{3}\alpha + \frac{2}{3}\beta)$. Wir wollen die Wirkung der Wurzelvektoren konkret angeben. Schauen wir uns dazu zunächst $L(\lambda_1)$ an.

Der Vermamodul zum Höchstgewicht λ_1

Es gilt hier $W\lambda_1 = \{\lambda_1, \lambda_1 - \alpha, \lambda_1 - \alpha - \beta\}$. Für diese Elemente ist das Skalarprodukt gegeben durch:

$$\begin{aligned}
&\langle \lambda_1, \alpha\rangle = 1 && \langle \lambda_1, \beta\rangle = 0 && \langle \lambda_1, \alpha+\beta\rangle = 1\\
&\langle \lambda_1 - \alpha, \alpha\rangle = -1 && \langle \lambda_1 - \alpha, \beta\rangle = 1 && \langle \lambda_1 - \alpha, \alpha+\beta\rangle = 0\\
&\langle \lambda_1 - \alpha - \beta, \alpha\rangle = 0 && \langle \lambda_1 - \alpha - \beta, \beta\rangle = -1 && \langle \lambda_1 - \alpha - \beta, \alpha+\beta\rangle = -1
\end{aligned}$$

Seien $x_0 := v_{\lambda_1}$, $x_1 := v_{\lambda_1-\alpha}$ und $x_2 := v_{\lambda_1-\alpha-\beta}$ die drei Vektoren die den Vektorraum V aufspannen. Dann wirken die Wurzelvektoren von $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ auf V wie folgt:

	E_α	E_β	$E_{\alpha\beta}$	$E_{\beta\alpha}$	F_α	F_β	$F_{\alpha\beta}$	$F_{\beta\alpha}$	K_α	K_β	$K_{\alpha+\beta}$
x_0	0	0	0	0	x_1	0	x_2	$-qx_2$	qx_0	x_0	qx_0
x_1	x_0	0	0	0	0	x_2	0	0	$q^{-1}x_1$	qx_1	x_1
x_2	0	x_1	x_0	$-q^{-1}x_0$	0	0	0	0	x_2	$q^{-1}x_2$	$q^{-1}x_2$

Insbesondere unterscheiden sich die Elemente $E_{\alpha\beta}$ und $E_{\beta\alpha}$ bzw. $F_{\alpha\beta}$ und $F_{\beta\alpha}$ in der Wirkung nur um eine Konstante, hier $-q^{-1}$ bzw. $-q$.

Ähnlich sieht auch der winzige Vermamodul zu λ_2 aus.

Der Vermamodul zum Höchstgewicht λ_2

Hier gilt $W\lambda_2 = \{\lambda_2, \lambda_2 - \beta, \lambda_2 - \alpha - \beta\}$. Für diese Elemente ist das Skalarprodukt gegeben durch:

$$\begin{aligned}
&\langle \lambda_2, \alpha\rangle = 0 && \langle \lambda_2, \beta\rangle = 1 && \langle \lambda_2, \alpha+\beta\rangle = 1\\
&\langle \lambda_2 - \beta, \alpha\rangle = 1 && \langle \lambda_2 - \beta, \beta\rangle = -1 && \langle \lambda_2 - \beta, \alpha+\beta\rangle = 0\\
&\langle \lambda_2 - \alpha - \beta, \alpha\rangle = -1 && \langle \lambda_2 - \alpha - \beta, \beta\rangle = 0 && \langle \lambda_2 - \alpha - \beta, \alpha+\beta\rangle = -1
\end{aligned}$$

Seien $y_0 := v_{\lambda_2}$, $y_1 := v_{\lambda_2-\beta}$ und $y_2 := v_{\lambda_2-\alpha-\beta}$ die drei Vektoren die den Vektorraum V aufspannen. Dann wirken die Wurzelvektoren von $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ wie folgt:

	E_α	E_β	$E_{\alpha\beta}$	$E_{\beta\alpha}$	F_α	F_β	$F_{\alpha\beta}$	$F_{\beta\alpha}$	K_α	K_β	$K_{\alpha+\beta}$
y_0	0	0	0	0	0	y_1	$-qy_2$	y_2	y_0	qy_0	qy_0
y_1	0	y_0	0	0	y_2	0	0	0	qy_1	$q^{-1}y_1$	y_1
y_2	y_1	0	$-q^{-1}y_0$	y_0	0	0	0	0	$q^{-1}y_2$	y_2	$q^{-1}y_2$

Wieder sehen wir, dass sich die Elemente $E_{\alpha\beta}$ und $E_{\beta\alpha}$ bzw. $F_{\alpha\beta}$ und $F_{\beta\alpha}$ in der Wirkung nur um eine Konstante unterscheiden, hier $-q^{-1}$ bzw. $-q$.

10.2. Rechtscoidealunteralgebren der $U_q(\mathfrak{sl}_3)$

Zunächst werden wir die homogenen Rechtscoidealunteralgebren im positiven Borelpart angeben und allgemeine homogene Rechtscoidealunteralgebren berechnen. Dann wird die Klassifikation aller Rechtscoidealunteralgebren in $U^{\geq 0}$ verwendet um diese in der $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ explizit zu bestimmen. Zuletzt betrachten wir allgemeine Rechtscoidealunteralgebren und geben wie in Kapitel 4 eine Liste aller möglichen Elemente eines geschickt gewählten Erzeugendensystems an.

Homogene Rechtscoidealunteralgebren im positiven Borelpart der $U_q(\mathfrak{sl}_3)$

Im positiven Borelpart der $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ liegen bis auf Isomorphie genau fünf Typen von homogenen Rechtscoidealunteralgebren, jeweils eine pro Weylgruppenelement. $U^+[s_\alpha]U^0 = \langle E_\alpha, U^0\rangle$, $U^+[s_\beta]U^0 = \langle E_\beta, U^0\rangle$, $U^+[s_\alpha s_\beta]U^0 = \langle E_\alpha, E_{\alpha\beta}, U^0\rangle$, $U^+[s_\beta s_\alpha]U^0 = \langle E_\beta, E_{\beta\alpha}, U^0\rangle$ und $U^{\geq 0}$. Die Rechtscoidealunteralgebren in $U^{\leq 0}$ entstehen analog.

Homogene Rechtscoidealunteralgebren der $U_q(\mathfrak{sl}_3)$

Nach [HK11a] kennen wir auch alle homogenen Rechtscoidealunteralgebren in ganz U, diese sind mit der Notation von oben bis auf Isomorphie und Symmetrie die homogenen Rechtscoidealunteralgebren im positiven bzw. negativen Borelpart siehe obigen Abschnitt, sowie die Rechtscoidealunteralgebren gegeben durch $U^+U^0U^-[s_\alpha]$, $U^+[s_\beta s_\alpha]U^0U^-[s_\alpha]$, $U^+[s_\beta s_\alpha]U^0U^-[s_\alpha s_\beta]$ und $U^+[s_\alpha]U^0U^-[s_\alpha]$ und $U^+[s_\alpha]U^0U^-[s_\beta]$, sowie ganz U.

Rechtscoidealunteralgebren im positiven Borelpart der $U_q(\mathfrak{sl}_3)$

Verzichtet man auf die Eigenschaft homogen, so entstehen neue Rechtscoidealunteralgebren. Diese werden nach [HS09] durch Charakterverschiebung erzeugt. Wir geben nun bis auf Isomorphie alle Typen von nichthomogenen Rechtscoidealunteralgebren im positiven Borelpart der $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ an. Betrachten wir zunächst die zusammenhängenden Rechtscoidealunteralgebren in C (d.h. jene für welche gilt $U^0 \cap C = k \cdot 1$).

Hier gibt es die Rechtscoidealunteralgebra $\langle E_\alpha K_\alpha^{-1}\rangle_\phi$ mit Charakter ϕ definiert durch $\phi(E_\alpha K_\alpha^{-1}) = \lambda_\alpha$. Desweiteren gibt es die Rechtscoidealunteralgebra $\langle E_\alpha K_\alpha^{-1}, E_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1}\rangle_\phi$ mit Charakter definiert durch $\phi(E_\alpha K_\alpha^{-1}) = \lambda_\alpha$ und $\phi_\alpha(E_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1}) = 0$, sowie die

Rechtscoidealunteralgebra $\langle E_\alpha K_\alpha^{-1}, E_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1}\rangle_\phi$ für einen Charakter ϕ auf $\langle E_\alpha K_\alpha^{-1}, E_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1}\rangle$ mit $\phi_\alpha(E_\alpha K_\alpha^{-1}) = 0$ und $\phi(E_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1}) = \lambda_{\alpha\beta}$.

Diese Rechtscoidealunteralgebren werden von charakterverschobenen Elementen erzeugt, die wir explizit angeben wollen. Sei dazu $c_\alpha := \lambda_\alpha(1-q^{-2})$ und $c_\beta := \lambda_\beta(1-q^{-2})$ und $\phi_\nu(E_\mu K_\mu^{-1}) = \delta_{\mu\nu}\lambda_\nu$ für $\mu, \nu \in \Phi^+$.

	$E_\alpha K_\alpha^{-1}$	$E_\beta K_\beta^{-1}$	$E_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1}$	$E_{\beta\alpha}K_{\alpha+\beta}^{-1}$
$(\phi_\alpha \otimes id)\Delta$	$E_\alpha K_\alpha^{-1} + \lambda_\alpha K_\alpha^{-1}$	$E_\beta K_\beta^{-1}$	$E_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1} + c_\alpha E_\beta K_{\alpha+\beta}^{-1}$	$E_{\beta\alpha}K_{\alpha+\beta}^{-1}$
$(\phi_\beta \otimes id)\Delta$	$E_\alpha K_\alpha^{-1}$	$E_\beta K_\beta^{-1} + \lambda_\beta K_\beta^{-1}$	$E_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1}$	$E_{\beta\alpha}K_{\alpha+\beta}^{-1} + c_\beta E_\alpha K_{\alpha+\beta}^{-1}$
$(\phi_{\alpha\beta} \otimes id)\Delta$	$E_\alpha K_\alpha^{-1}$	$E_\beta K_\beta^{-1}$	$E_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1} + \lambda_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1}$	$E_{\beta\alpha}K_{\alpha+\beta}^{-1} + \lambda_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1}$

Alle Rechtscoidealunteralgebren C in $U_q(\mathfrak{sl}_3)^{\geq 0}$ sind von der Form $C = C^+T_L$ für ein C^+ wie oben. Für das T_L gilt dann nach [HK11a] folgende Einschränkung $T_L \subset \mathrm{supp}(\phi)^\perp$. In den obigen Fällen kann dieses T_L dann wie folgt aussehen: Im Fall $\phi = \phi_\alpha$ liegt T_L in $\langle K_{2\beta+\alpha}, K_{2\beta+\alpha}^{-1}\rangle$. Im Fall $\phi = \phi_{\alpha+\beta}$ liegt T_L in $\langle K_{\alpha-\beta}, K_{\alpha-\beta}^{-1}\rangle$. Die charakterverschobenen Rechtscoidealunteralgebren der $U_q(\mathfrak{sl}_3)^{\leq 0}$ bestimmt man analog.

Basiselemente von Rechtscoidealunteralgebren der $U_q(\mathfrak{sl}_3)$

Sei nun C eine beliebige Rechtscoidealunteralgebra von $U_q(\mathfrak{sl}_3)$. Aus Kapitel 4 wissen wir, dass wir ein Erzeugendensystem von C wählen können, dessen Elemente eine bestimmte Form haben. Diese möglichen Elemente wollen wir jetzt ganz explizit angeben. In der $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ kommen dabei bis auf Symmetrie in E und F bzw. α und β folgende Elemente in Frage:

Liste 10.1 (möglicher Basiselemente):

1. Elemente aus U^0
2. Wurzelvektoren:
   - $E_\alpha K_\alpha^{-1}$
   - $E_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1}$
3. Charakterverschobene Wurzelvektoren:
   - $E_\alpha K_\alpha^{-1} + \lambda_\alpha K_\alpha^{-1}$ für ein $\lambda_\alpha \in k^*$
   - $E_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1} + \lambda_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1}$ für ein $\lambda_{\alpha\beta} \in k^*$
     - Rechtscoidealunteralgebren die dieses Element enthalten, enthalten auch $E_\alpha K_\alpha^{-1}$
   - $E_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1} + \lambda_\alpha(1-q^{-2})E_\beta K_{\alpha+\beta}^{-1}$ für ein $\lambda_\alpha \in k^*$
     - Rechtscoidealunteralgebren die dieses Element enthalten, enthalten auch $E_\alpha K_\alpha^{-1} + \lambda_\alpha K_\alpha^{-1}$

4. Gemischte Elemente mit Leittermen in unterschiedlichen Wurzeln: Hier gibt es wegen der adT_L stabilen Wahl bis auf Symmetrie nur folgende Möglichkeiten:
   - $E_\alpha K_\beta^{-1} + c_F F_\beta$ für ein $c_F \in k^*$
     - Rechtscoidealunteralgebren die dieses Element enthalten, enthalten auch $K_\beta^{-1} K_\alpha$
   - $E_\alpha K_{\alpha+\beta}^{-1} + c_F F_{\alpha\beta}$ für ein $c_F \in k^*$
     - Rechtscoidealunteralgebren die dieses Element enthalten, enthalten auch K_β^{-1}
5. Gemischte Elemente mit Leittermen in derselben Wurzel:
   - $E_\alpha K_\alpha^{-1} + c_F F_\alpha + c_K K_\alpha^{-1}$ für $c_F, c_K \in k$
   - $E_{\alpha\beta} K_{\alpha+\beta}^{-1} + \lambda_\alpha^+ (1-q^{-2}) E_\beta K_{\alpha+\beta}^{-1} + c_F F_{\alpha\beta} + c_F (q^{-1}-q) \lambda_\alpha^- F_\beta K_\alpha^{-1} + c_K K_{\alpha+\beta}^{-1}$ für $\lambda_\alpha^+, \lambda_\alpha^-, c_K \in k$ und $c_F \in k^*$
     - Rechtscoidealunteralgebren die dieses Element enthalten, enthalten auch $E_\alpha K_\alpha^{-1} + \lambda_\alpha^+ K_\alpha^{-1}$ und $F_\alpha + \lambda_\alpha^- K_\alpha^{-1}$
   - $E_{\alpha\beta} K_{\alpha+\beta}^{-1} + \lambda_\alpha (1-q^{-2}) E_\beta K_{\alpha+\beta}^{-1} + c_F F_{\beta\alpha} + c_F \lambda_\beta^- (q^{-1}-q) F_\alpha K_\beta^{-1} + c_K K_{\alpha+\beta}^{-1}$ für $\lambda_\alpha^+, \lambda_\beta^-, c_K \in k$ und $c_F \in k^*$
     - Rechtscoidealunteralgebren die dieses Element enthalten, enthalten auch $E_\alpha K_\alpha^{-1} + \lambda_\alpha^+ K_\alpha^{-1}$ und $F_\beta + \lambda_\beta^- K_\beta^{-1}$
   - $E_{\alpha\beta} K_{\alpha+\beta}^{-1} + c_\alpha (1-q^{-2}) F_\alpha E_\beta K_\beta^{-1} - c_\alpha c_\beta q^{-1} F_{\alpha\beta} + c_K K_{\alpha+\beta}^{-1}$ für $c_\alpha, c_\beta \in k^*$ und $c_K \in k$
     - Rechtscoidealunteralgebren die dieses Element enthalten, enthalten auch $E_\alpha K_\alpha^{-1} + c_\alpha F_\alpha$ und $E_\beta K_\beta^{-1} + c_\beta F_\beta$

Die Menge dieser möglichen Erzeugendenelemente nennen wir EZS. Jede Rechtscoidealunteralgebra lässt sich von einer Auswahl dieser Elemente erzeugen und jedes einzelne dieser Elemente kann in einem Erzeugendensystem liegen wie in Kapitel 4. Kombinationen der Elemente sind aber nur begrenzt möglich. Welche Kombinationen im Fall „C ist eine Borelunteralgebra“ möglich sind, wollen wir im Folgenden erörtern.

10.3. Konstruktion der Borelunteralgebren der $U_q(\mathfrak{sl}_3)$

Wir wollen nun die Borelunteralgebren der $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ konstruieren und klassifizieren. Wir beginnen mit den triangulären Borelunteralgebren. Es werden die drei Typen von triangulären Borelunteralgebren aus Kapitel 6, 7 und 8 vorgestellt, und gezeigt, dass es keine weiteren Typen gibt. Dazu werden wir verschiedene Kombinationen von Elementen aus EZS betrachten. Wir werden bei einigen Kombinationen mit dem winzigen Vermamodul einen Widerspruch zur ede Eigenschaft konstruieren. Anschließend werden wir mit der Maximalität zeigen, dass alle triangulären Borelunteralgebren von der beschriebenen Form sind.

Trianguläre Borelunteralgebren der $U_q(\mathfrak{sl}_3)$

Wir wissen aus der Definition der triangulären Borelunteralgebren 1.55 mit Lemma 3.5 und Satz 2.13 schon, dass eine trianguläre Borelunteralgebra B immer von der Form $\psi(U^+[w^+])_{\phi^+}T_L U^-[w^-]_{\phi^-}$ ist, für Weylgruppenelemente $w^+, w^- \in W$, Charaktere ϕ^+ auf $\psi(U^+[w^+])$, ϕ^- auf $U^-[w^-]$ und eine Unterhopfalgebra $T_L \subset U^0$ mit $L \subset (\mathrm{supp}(\phi^+) \cup \mathrm{supp}(\phi^-))^\perp$.

Typ 1: Standardborelalgebren

Nach Satz 6.3 sind $U^{\geq 0}$ und $U^{\leq 0}$ Borelunteralgebren.

Typ 2: Borelunteralgebren mit $\Phi^+(w^+) \cap \Phi^+(w^-) = \mathrm{supp}(\phi^+) \cap \mathrm{supp}(\phi^-)$

Die Borelunteralgebren $\psi(U^+[w^+])_{\phi^+}T_L U^-[w^-]_{\phi^-}$ mit $\Phi^+(w^+) \cap \Phi^+(w^-) = \mathrm{supp}(\phi^+) \cap \mathrm{supp}(\phi^-)$ sind nach Satz 7.15 bis auf Symmetrie alle als Algebra isomorph zu $\psi(U^+[w_0])_{\phi^+}\langle K_{2\beta+\alpha}, K_{2\beta+\alpha}^{-1}\rangle U^-[s_\alpha]_{\phi^-}$ mit $\phi^+(E_\alpha K_\alpha^{-1}) = \lambda_\alpha^+$ und 0 sonst, sowie $\phi^-(F_\alpha) = \lambda_\alpha^-$, sodass $\lambda_\alpha^+\lambda_\alpha^- = \frac{q^2}{(1-q^2)(q-q^{-1})}$. Genauer gibt es bis auf Symmetrie zwei solche Borelunteralgebren, diese sind

$$\psi(U^+[w_0])_{\phi^+}\langle K_{2\beta+\alpha}, K_{2\beta+\alpha}^{-1}\rangle U^-[s_\alpha]_{\phi^-}$$

mit Charakteren wie oben und

$$\psi(U^+[s_\alpha s_\beta])_{\phi^+}\langle K_{\alpha-\beta}, K_{\alpha-\beta}^{-1}\rangle U^-[s_\beta s_\alpha]_{\phi^-}$$

mit $\phi^+(E_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1}) = \lambda_{\alpha\beta}^+$ sowie $\phi^-(F_{\alpha\beta}) = \lambda_{\alpha\beta}^-$, sodass $\lambda_{\alpha\beta}^+\lambda_{\alpha\beta}^- = \frac{q^2}{(1-q^2)(q-q^{-1})}$ gilt.

Typ 3: Die Borelunteralgebra $\psi(U^+[s_\alpha s_\beta])_{\phi^+}\langle K_{2\beta+\alpha}, K_{2\beta+\alpha}^{-1}\rangle U^-[s_\alpha s_\beta]_{\phi^-}$

Der dritte Typ im Sinne des Kapitel 8 von triangulären Borelunteralgebren der $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ ist von der Form $\psi(U^+[s_\alpha s_\beta])_{\phi^+}\langle K_{2\beta+\alpha}, K_{2\beta+\alpha}^{-1}\rangle U^-[s_\alpha s_\beta]_{\phi^-}$ mit $\phi^+(E_\alpha K_\alpha^{-1}) = \lambda_\alpha^+$ und 0 sonst, sowie $\phi^-(F_\alpha) = \lambda_\alpha^-$ und 0 sonst, sodass $\lambda_\alpha^+\lambda_\alpha^- = \frac{q^2}{(1-q^2)(q-q^{-1})}$ wie oben. Die erzeugende Elemente dieser Rechtscoidealunteralgebra sind die Folgenden:

$$\begin{aligned}
\bar{E_\alpha} &:= E_\alpha K_\alpha^{-1} + \lambda_\alpha^+ K_\alpha^{-1} \\
\bar{F_\alpha} &:= F_\alpha + \lambda_\alpha^- K_\alpha^{-1} \\
K &:= K_{2\beta+\alpha} \text{ und } K^{-1} := K_{2\beta+\alpha}^{-1} \\
\bar{E_{\alpha\beta}} &:= E_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1} + (1-q^{-2})\lambda_\alpha^+ E_\beta K_{\alpha+\beta}^{-1} \\
\bar{F_{\beta\alpha}} &:= F_{\beta\alpha} + (q^{-1}-q)\lambda_\alpha^- F_\beta K_\alpha^{-1}
\end{aligned}$$

Es gilt dann für das Produkt der Konstanten $c_1 := (1-q^{-2})\lambda_\alpha^+$ bzw. $c_2 := (q^{-1}-q)\lambda_\alpha^-$ in den Termen $\bar{E_{\alpha\beta}}$ bzw. $\bar{F_{\beta\alpha}}$:

$$c_1c_2 = (1-q^{-2})\lambda_\alpha^+(q^{-1}-q)\lambda_\alpha^- = (1-q^{-2})(q^{-1}-q)\frac{q^2}{(1-q^2)(q-q^{-1})} = 1$$

Für solche c_1 und c_2 betrachten wir jetzt den Kommutator der beiden Elemente, es gilt:

$$\begin{aligned}&[E_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1} + (1-q^{-2})\lambda_\alpha^+ E_\beta K_{\alpha+\beta}^{-1}, F_{\beta\alpha} + (q^{-1}-q)\lambda_\alpha^- F_\beta K_\alpha^{-1}]_{q^2}\\ &= (F_\alpha + \lambda_\alpha^- K_\alpha^{-1})(E_\alpha K_\alpha^{-1} + \lambda_\alpha^+ K_\alpha^{-1})(q^4 - q^2) + \frac{q^4}{q-q^{-1}}1\end{aligned}$$

Also sind die Kommutatoren der erzeugenden Elemente in B alle gegeben durch:

$$[K, \bar{E}_\alpha]_1 = [K, \bar{F}_\alpha]_1 = [K, \bar{E}_{\alpha\beta}]_1 = [K, \bar{F}_{\beta\alpha}]_1 = 0 \tag{10.3}$$

$$[\bar{E}_\alpha, \bar{F}_\alpha]_{q^2} = \frac{q^2}{q-q^{-1}}1 \quad [\bar{E}_\alpha, \bar{E}_{\alpha\beta}]_q = [\bar{E}_\alpha, \bar{F}_{\beta\alpha}]_q = 0 \tag{10.4}$$

$$[\bar{F}_\alpha, \bar{E}_{\alpha\beta}]_{q^{-1}} = [\bar{F}_\alpha, \bar{F}_{\beta\alpha}]_{q^{-1}} = 0 \tag{10.5}$$

$$[\bar{E}_{\alpha\beta}, \bar{F}_{\beta\alpha}]_{q^2} = \bar{F}_\alpha \bar{E}_\alpha (q^4 - q^2) + \frac{q^4}{q-q^{-1}}1 \tag{10.6}$$

Betrachten wir nun eine Darstellung V von B. Wir wissen schon, dass $\langle \bar{E}_\alpha, \bar{F}_\alpha \rangle$ ede ist nach Kapitel 9. Wie im allgemeinen Beweis von Lemma 8.4 wirkt $[\bar{E}_\alpha, \bar{F}_\alpha]_1$ trivial auf jedem endlichdimensionalen V. Also wirkt der Term $\bar{F}_\alpha \bar{E}_\alpha$ als $\frac{q^2}{(q-q^{-1})(1-q^2)}1$ auf V. Setzen wir das in den q-Kommutator von $\bar{E}_{\alpha\beta}$ und $\bar{F}_{\beta\alpha}$ ein erhalten wir auf ganz V bereits $[\bar{E}_{\alpha\beta}, \bar{F}_{\beta\alpha}]_{q^2}$ wirkt als 0.

Andererseits hat $\bar{E}_\alpha$ einen Eigenvektor v zu einem Eigenwert $\neq 0$ und wegen den Relationen (10.4) sind die Elemente $\bar{E}_{\alpha\beta}^{\,n}.v$ dann Eigenvektoren von $\bar{E}_\alpha$ zu unterschiedlichen Eigenwerten oder zum Eigenwert 0. Weil V endlich ist, finden wir also insbesondere einen Vektor w mit $\bar{E}_{\alpha\beta}.w = 0$. Weil auf V alle Elemente mit $\bar{E}_{\alpha\beta}$ q-kommutieren können wir mit Satz 3.3 zeigen, dass $\bar{E}_{\alpha\beta}$ auf jeder irreduziblen Darstellung als 0 wirkt. Das gleiche kann man mit dem gleichen Argument für $\bar{F}_{\beta\alpha}$ zeigen. Es ist dann $B|_V \cong \langle K, K^{-1} \rangle \otimes \langle \bar{E}_\alpha, \bar{F}_\alpha \rangle$, also ist B ede.

Die Maximalität dieser Borelalgebra folgt aus der Kenntnis aller Borelunteralgebren der $U_q(\mathfrak{sl}_3)$, siehe Satz 10.3:

Die Maximalität unter allen triangulären Borelunteralgebren folgt mit der Maximalität von L und Lemma 5.17.

Die Maximalität auch unter nicht triangulären ede Rechtscoidealunteralgebren folgt damit, dass wir sehen werden, dass nur solche Kombinationen von erzeugenden Elementen in ede Rechtscoidealunteralgebren der $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ möglich sind, die wiederum schon in größeren triangulären ede Rechtscoidealunteralgebren liegen.

10.4. Klassifikation der triangulären Borelunteralgebren der $U_q(\mathfrak{sl}_3)$

Wir wollen jetzt alle triangulären Borelunteralgebren der $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ klassifizieren. Sei also C zunächst eine beliebige trianguläre Rechtscoidealunteralgebra, das heißt von der Form

$\psi(U^+[w^+])_{\phi^+}T_L U^-[w^-]_{\phi^-}$, für Weylgruppenelemente $w^+, w^- \in W$, Charaktere ϕ^+ auf $\psi(U^+[w^+])$, ϕ^- auf $U^-[w^-]$ und eine Unterhopfalgebra $T_L \subset U^0$ mit $L \subset (\mathrm{supp}(\phi^+) \cup \mathrm{supp}(\phi^-))^\perp$. Wir betrachten alle möglichen Kombinationen von w^+ und w^- und erörtern, ob C in den jeweiligen Fällen eine Borelunteralgebra sein kann. Dabei gibt es für bestimmte Kombinationen von w^+ und w^- folgende Einschränkungen für die Charaktere ϕ^+ und ϕ^- und T_L:

Für T_L gilt in triangulären Borelunteralgebren C einerseits $L \subset (\mathrm{supp}(\phi^+) \cup \mathrm{supp}(\phi^-))^\perp$, weil C triangulär ist und insbesondere $L = (\mathrm{supp}(\phi^+) \cup \mathrm{supp}(\phi^-))^\perp$ weil C maximal ist. Die Charaktere sind wegen der Maximalität so, dass es für keine anderen Charaktere eine größere Unterhopfalgebra $T_{L'} \supsetneq T_L$ geben kann, sodass $C' := C\langle T_{L'}\rangle$ immernoch ede ist. Damit sind die Träger der möglichen Charaktere in den folgenden Fällen schon eindeutig bestimmt.

Nach Lemma 3.9 gilt für alle $\alpha \in \Phi^+(w^+) \cap \Phi + (w^-) \cap \Pi$ bereits $\phi^+(E_\alpha K_\alpha^{-1})\phi^-(F_\alpha) = \frac{q^2}{(1-q^2)(q-q^{-1})}$. Außerdem gilt nach Lemma 3.10 im Falle $\Phi^+(w^+) \cap \Phi^+(w^-) \cap \Pi = \emptyset$ und $\alpha + \beta \in \Phi + (w^+) \cap \Phi + (w^-)$ bereits $\phi^+(E_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1})\phi^-(F_{\alpha\beta}) = \frac{q^2}{(1-q^2)(q-q^{-1})}$.

In der folgenden Tabelle geben wir an für welche Kombinationen von w^+ und w^- die Rechtscoidealunteralgebra C mit geeigneten Charakteren eine Borelunteralgebra sein kann und von welchem Typ sie dann ist:

$w^- \backslash w^+$	s_α	$s_\alpha s_\beta$	$s_\alpha s_\beta s_\alpha$	$s_\beta s_\alpha$	s_β
s_α	$\lightning$ max	$\lightning$ max	2	1	$\lightning$ max
$s_\alpha s_\beta$	$\lightning$ max	3	$\lightning$ ede	2	1
$s_\alpha s_\beta s_\alpha$	2	$\lightning$ ede	$\lightning$ ede	$\lightning$ ede	2
$s_\beta s_\alpha$	1	2	$\lightning$ ede	3	$\lightning$ max
s_β	$\lightning$ max	1	2	$\lightning$ max	$\lightning$ max

Die Kästchen mit Zahlen als Eintrag bezeichnen die von uns konstruierten ede Rechtscoidealunteralgebren des jeweiligen Typs.

Weiter heißt "$\lightning$ max", dass C keine Borelunteralgebra sein kann, weil sie in einer größeren ede Rechtscoidealunteralgebra liegt. Der Widerspruch zur Maximalität ist in der Tabelle leicht ersichtlich, wenn die ede Eigenschaft geklärt ist, was aufwendiger ist.

"$\lightning$ ede"bedeutet, dass eine Rechtscoidealunteralgebra mit dieser Wahl von Weylgruppenelementen nicht ede sein kann: Wir wollen jetzt den Widerspruch zur ede Eigenschaft in den obigen Fällen in der Tabelle beweisen. Dazu genügt es sich wegen Symmetrie die Kombinationen des Elements $E_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1} + (1-q^{-2})\lambda_\alpha^+ E_\beta K_{\alpha+\beta}^{-1}$ mit Elementen in $U^-[w^-]_{\phi^-}$ vom Grad $\alpha+\beta$ anzusehen:

Rechtscoidealunteralgebren mit dem Element $E_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1} + (1-q^{-2})\lambda_\alpha^+ E_\beta K_{\alpha+\beta}^{-1}$ Wir betrachten alle möglichen Kombinationen zwischen dem Element $(\phi^+ \otimes id)\Delta(E_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1}) = E_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1} + (1-q^{-2})\lambda_\alpha^+ E_\beta K_{\alpha+\beta}^{-1}$ und allen Elementen in EZS mit Leitterm in Wurzel $\alpha+\beta$. Stets gilt

mit $E_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1} + (1-q^{-2})\lambda_\alpha^+ E_\beta K_{\alpha+\beta}^{-1} \in C$ schon $E_\alpha K_\alpha^{-1} + \lambda_\alpha^+ K_\alpha^{-1} \in C$, daher können die Elemente $F_{\beta\alpha}$ und $F_{\beta\alpha} + c_F K_{\alpha+\beta}^{-1}$ für alle $c_F \in k$ nicht in der ede Rechtscoidealunteralgebra C liegen nach Satz 3.6. Das heißt wir betrachten nur die folgenden Kombinationen:

1. $E_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1} + (1-q^{-2})\lambda_\alpha^+ E_\beta K_{\alpha+\beta}^{-1}$ und $F_{\alpha\beta}$
2. $E_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1} + (1-q^{-2})\lambda_\alpha^+ E_\beta K_{\alpha+\beta}^{-1}$ und $(\phi^- \otimes id)\Delta(F_{\alpha\beta}) = F_{\alpha\beta} + (q^{-1}-q)\lambda_\beta^- F_\alpha K_\beta^{-1}$
3. $E_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1} + (1-q^{-2})\lambda_\alpha^+ E_\beta K_{\alpha+\beta}^{-1}$ und $(\phi^- \otimes id)\Delta(F_{\alpha\beta}) = F_{\alpha\beta} + \lambda_{\beta\alpha}^- K_{\alpha+\beta}^{-1}$
4. $E_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1} + (1-q^{-2})\lambda_\alpha^+ E_\beta K_{\alpha+\beta}^{-1}$ und $(\phi^- \otimes id)\Delta(F_{\beta\alpha}) = F_{\beta\alpha} + (q^{-1}-q)\lambda_\alpha^- F_\beta K_\beta^{-1}$

Angenommen zwei solche Elemente liegen in C. Wir werden jetzt jeweils den Kommutator der beiden Elemente auf dem Höchstgewichtvektor einer der winzigen Vermamoduln wirken lassen. Finden wir bei dieser Wirkung einen Eigenwert $\neq 0$, so kann V auf ganz C nicht in eindimensionale Darstellungen zerfallen, da der Kommutator von zwei Elementen im eindimensionalen immer als 0 wirkt. (Der Kommutator muss also für ede-Algebren ein nilpotenter Endomorphismus sein).

1.) Betrachten wir hier die Darstellung $L(\lambda_2)$ und den Vektor $y_0 = v_{\lambda_2} \in L(\lambda_2)$. Für den Kommutator der Elemente $E_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1} + (1-q^{-2})\lambda_\alpha^+ E_\beta K_{\alpha+\beta}^{-1}$ und $F_{\alpha\beta}$ gilt, wie man mit Abschnitt 10.1 leicht sehen kann:

$$\begin{aligned}
[E_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1} + (1-q^{-2})\lambda_\alpha^+ E_\beta K_{\alpha+\beta}^{-1}, F_{\alpha\beta}]_1.y_0 &= -q(E_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1} + \lambda_\alpha^+ E_\beta K_{\alpha+\beta}^{-1}).y_2 \\
&= -q(-q^{-1})qy_0 + 0 \\
&= qy_0
\end{aligned}$$

Also hat der Kommutator in $L(\lambda_2)$ den nichttrivialen Eigenvektor y_0 zum Eigenwert $q \neq 0$. Es folgt direkt C ist nicht ede, wenn sowohl $E_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1} + (1-q^{-2})\lambda_\alpha^+ E_\beta K_{\alpha+\beta}^{-1}$ als auch $F_{\alpha\beta}$ in C liegen.

2.) Betrachten wir hier die Darstellung $L(\lambda_2)$ und den Vektor $y_0 = v_{\lambda_2} \in L(\lambda_2)$. Für den Kommutator der Elemente $E_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1} + (1-q^{-2})\lambda_\alpha^+ E_\beta K_{\alpha+\beta}^{-1}$ und $F_{\beta\alpha} + (q^{-1}-q)\lambda_\beta^- F_\alpha K_\beta^{-1}$ gilt, wie man mit Abschnitt 10.1 leicht sehen kann:

$$\begin{aligned}
[E_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1} + (1-q^{-2})\lambda_\alpha^+ E_\beta K_{\alpha+\beta}^{-1}, F_{\alpha\beta} + (q^{-1}-q)\lambda_\beta^- F_\alpha K_\beta^{-1}]_1.y_0 &= -q(E_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1} + \lambda_\alpha^+ E_\beta K_{\alpha+\beta}^{-1}).y_2 \\
&= -q(-q^{-1})qy_0 + 0 \\
&= qy_0
\end{aligned}$$

Also hat der Kommutator in $L(\lambda_2)$ den nichttrivialen Eigenvektor y_0 zum Eigenwert $q \neq 0$. Es folgt direkt C ist nicht ede, wenn sowohl $E_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1} + (1-q^{-2})\lambda_\alpha^+ E_\beta K_{\alpha+\beta}^{-1}$ als auch $F_{\alpha\beta} + (q^{-1}-q)\lambda_\beta^- F_\alpha K_\beta^{-1}$ in C liegen.

3.) Betrachten wir hier wieder die Darstellung $L(\lambda_2)$ und den Vektor $y_0 = v_{\lambda_2} \in L(\lambda_2)$. Für den Kommutator der Elemente $E_{\alpha\beta}K^{-1}_{\alpha+\beta} + (1-q^{-2})\lambda^+_\alpha E_\beta K^{-1}_{\alpha+\beta}$ und $F_{\beta\alpha} + \lambda^-_{\beta\alpha}K^{-1}_{\alpha+\beta}$ gilt, wie man mit Abschnitt 10.1 leicht sehen kann:

$$\begin{aligned}
&[E_{\alpha\beta}K^{-1}_{\alpha+\beta} + (1-q^{-2})\lambda^+_\alpha E_\beta K^{-1}_{\alpha+\beta}, F_{\alpha\beta} + \lambda^-_{\beta\alpha}K^{-1}_{\alpha+\beta}]_1.y_0\\
&= (E_{\alpha\beta}K^{-1}_{\alpha+\beta} + (1-q^{-2})\lambda^+_\alpha E_\beta K^{-1}_{\alpha+\beta}).(-qy_2 + q^{-1}\lambda^-_{\beta\alpha}y_0)\\
&= -q(-q^{-1})qy_0 + 0\\
&= qy_0
\end{aligned}$$

Also hat der Kommutator in $L(\lambda_2)$ den nichttrivialen Eigenvektor y_0 zum Eigenwert $q \neq 0$. Es folgt wieder C ist nicht ede.

4.)Wenn die Elemente $E_{\alpha\beta}K^{-1}_{\alpha+\beta}+(1-q^{-2})\lambda^+_\alpha E_\beta K^{-1}_{\alpha+\beta}$ und $F_{\alpha\beta}+(q^{-1}-q)\lambda^-_\alpha F_\beta K^{-1}_\beta$ in C liegen, so liegen auch schon $E_\alpha K^{-1}_\alpha + \lambda^+_\alpha K^{-1}_\alpha$ und $F_\alpha + \lambda^-_\alpha K^{-1}_\alpha$ in C, wie man mit der Komultiplikation leicht sehen kann. Aus 3.9 folgt dann aber, dass C nur dann ede sein kann, wenn $\lambda^+_\alpha\lambda^-_\alpha = \frac{q^2}{(1-q^2)(q-q^{-1})}$. Alle triangulären Borelunteralgebren die diese zwei Terme enthalten, enthalten dann aber schon ganz $B = \psi(U^+[s_\alpha s_\beta])_{\phi^+}\langle K_{2\beta+\alpha}, K^{-1}_{2\beta+\alpha}\rangle U^-[s_\alpha s_\beta]_{\phi^-}$ aus Typ 3.

Es folgt, dass die Kombinationen von w^+ und w^- in der obigen Tabelle mit "$\not\downarrow$ ede"für Borelunteralgebren nicht in Frage kommen, weil insbesondere für jede Wahl von T_L, ϕ^+ und ϕ^- die Rechtscoidealunteralgebra $\psi(U^+[w^+])_{\phi^+}T_L U^-[w^-]_{\phi^-}$ nicht ede ist.

Satz 10.2:
Jede trianguläre Borelunteralgebra der $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ ist entweder von Typ 1) das heißt eine Standardborelalgebra, oder von Typ 2) also mit $\Phi(w^+) \cap \Phi(w^-) = (\mathrm{supp}(\phi_E) \cap \mathrm{supp}(\phi_F))$ oder von Typ 3) das ist in der $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ genau $B = \psi(U^+[s_\alpha s_\beta])_{\phi^+}\langle K_{2\beta+\alpha}, K^{-1}_{2\beta+\alpha}\rangle U^-[s_\alpha s_\beta]_{\phi^-}$.

10.5. Klassifikation der allgemeinen Borelunteralgebren der $U_q(\mathfrak{sl}_3)$

Wir wollen jetzt zeigen, dass jede Borelunteralgebren der $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ trianguläre ist und abschließend eine vollständige Liste aller Borelunteralgebren der $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ vorstellen. Insbesondere zeigen wir dabei, dass im Fall der $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ die Vermutung 5.16 zutrifft. Dazu betrachten wir alle Möglichkeiten für einen einzelnen Erzeuger $X \in C$ aus dem besonderen Erzeugendensystem EZS einer beliebigen Rechtscoidealunteralgebra, siehe Abschnitt 10.2. Wir prüfen jeweils mögliche Kombinationen von X mit je einem anderen Erzeuger Y aus EZS. In vielen Fällen zeigen die Lemmata in Kapitel 3.2 dann, dass $C \ni X, Y$ nicht ede sein kann:

Unsere allgemeine Strategie zur Konstruktion von irreduziblen Darstellungen von Dimension größer 1 ist wie folgt: Wir betrachten die Wirkung des Kommutators $[X, Y]_1 \in C$ auf einer geeigneten endlichdimensionalen $U_q(\mathfrak{g})$-Darstellung $V = L(\lambda)$, welche wir auf C einschränken wollen, typischerweise die winzigen Darstellungen $L(\lambda_i)$ aus Abschnitt 10.1. Der Kommutator

wirkt trivial auf jeder eindimensionalen Darstellung von C und damit nilpotent auf allen Darstellungen von C, deren Kompositionsreihe nur eindimensionale Darstellungen enthält. *Falls* wir für gegebene X, Y ein $v \in V(\lambda)$ finden können, sodass $[X, Y]_1.v = cv$ mit $c \neq 0$, so kann der Kommutator nicht nilpotent wirken und folglich muss $V|_C$ mindestens einen irreduziblen Kompositionsfaktor der Dimension größer 1 haben, also ist C nicht ede.

Für die verbleibenden Fälle X, Y geben wir jeweils explizit eine trianguläre Borelunteralgebra C' die im Kapitel 10.3 bereits konstruiert worden ist an, mit $C \subset C'$. Dabei geht insbesondere die Rechtscoidealunteralgebreneigenschaft ein.

Betrachten wir dazu zunächst gemischte Elemente X mit Leittermen in unterschiedlichen Wurzeln, anschließend Elemente X mit Leitermen in einer Wurzel in Π und zuletzt solche mit Leittermen in $\alpha + \beta$.

$X \in C$ für ein X mit Leittermen in unterschiedlichen Wurzeln

$X = F_\alpha + c_1 E_\beta K_\alpha^{-1}$ mit $c_1 \neq 0$

- X in Kombination mit dem Element $c_2 F_\beta + c_3 E_\alpha K_\beta^{-1}$ für beliebige $c_2, c_3 \in k$:
  Wir geben die Wirkungen der beiden Elemente und ihres Kommutators in $L(\lambda_1)$ und in $L(\lambda_2)$ explizit an.

	x_0	x_1	x_2
$F_\alpha + c_1 E_\beta K_\alpha^{-1}$	x_1	0	$c_1 x_1$
$c_2 F_\beta + c_3 E_\alpha K_\beta^{-1}$	0	$c_2 x_2 + c_3 q^{-1} x_0$	0
$[F_\alpha + c_1 E_\beta K_\alpha^{-1}, c_2 F_\beta + c_3 E_\alpha K_\beta^{-1}]_1$	$-c_2 x_2 + c_3 q^{-1} x_0$	$(c_2 c_1 + c_3 q^{-1}) x_1$	$-c_1 c_2 x_2 - c_1 c_3 q^{-1} x_0$

	y_0	y_1	y_2
$F_\alpha + c_1 E_\beta K_\alpha^{-1}$	0	$y_2 + c_1 q^{-1} y_0$	0
$c_2 F_\beta + c_3 E_\alpha K_\beta^{-1}$	$c_2 y_1$	0	$c_3 y_1$
$[F_\alpha + c_1 E_\beta K_\alpha^{-1}, c_2 F_\beta + c_3 E_\alpha K_\beta^{-1}]_1$	$c_2 y_2 + c_1 c_2 q^{-1} y_0$	$(-c_4 - c_3 c_1 q^{-1}) y_1$	$c_3 y_2 + c_3 c_1 q^{-1} y_0$

  Wir sehen, dass der Kommutator einen Eigenvektor x_1 in $L(\lambda_1)$ bzw. y_1 in $L(\lambda_2)$ hat zum Eigenwert $c_2 c_1 + c_3 q^{-1}$ bzw. $-c_3 - c_2 c_1 q^{-1}$. Für beliebige c_2, c_3 nicht beide gleich 0, hat der Kommutator also einen nichttrivialen Eigenwert, und die Darstellung kann nicht in eindimenssionale zerfallen. (Jordan-Hölder-Reihe).

$\Rightarrow$ Es folgt C liegt in C' für ein C' homogen der Form $U^+[s_\beta]U^0U^-[s_\alpha s_\beta]$ bzw. $U^+[s_\beta s_\alpha]U^0U^-[s_\alpha]$ oder in einem C' triangulär von Typ 2 mit Charakteren ϕ^+, ϕ^- sodass $\mathrm{supp}(\phi^+) = \mathrm{supp}(\phi^-) = \{\alpha + \beta\}$, der Form $\psi(U^+[s_\beta s_\alpha])_{\phi^+}\langle K_{\alpha-\beta}, K_{\beta-\alpha}\rangle U^-[s_\alpha s_\beta]_{\phi^-}$.

$X = F_{\alpha\beta} + c_1 E_\beta K_{\alpha+\beta}^{-1}$ **mit** $c_1 \neq 0$

- X in Kombination mit dem Element $c_2 E_{\alpha\beta} + c_3 F_\beta K_\alpha^{-1}$ für beliebige $c_2, c_3 \in k$:
  Wir geben die Wirkungen der beiden Elemente und ihres Kommutators in $L(\lambda_1)$ explizit an.

	x_0	x_1	x_2
$F_{\alpha\beta} + c_1 E_\beta K_{\alpha+\beta}^{-1}$	x_2	0	qc_1x_1
$c_2 E_{\alpha\beta} + c_3 F_\beta K_\alpha^{-1}$	0	qc_3x_2	c_2x_0
$[F_{\alpha\beta} + c_1 E_\beta K_{\alpha+\beta}^{-1}, c_2 E_{\alpha\beta} + c_3 F_\beta K_\alpha^{-1}]_1$	$-c_2x_0$	$q^2c_1c_3x_1$	$c_2x_2 - q^2c_1c_3x_2$

  Der Kommutator $[F_{\alpha\beta} + c_1 E_\beta K_{\alpha+\beta}^{-1}, c_2 E_{\alpha\beta} + c_3 F_\beta K_\alpha^{-1}]_1$ hat in $L(\lambda_1)$ also die Eigenvektoren x_0 zum Eigenwert $-c_2$ und x_1 zum Eigenwert $c_3c_1q^2$. Also hat er mindestens einen nichttrivialen Eigenwert und die Darstellung $L(\lambda_1)$ zerfällt nicht in eindimensionale Darstellung, C ist also nicht ede.(Jordan-Hölder-Reihe)

$\Rightarrow$ Es folgt C liegt in C' für ein C' homogen der Form $U^+[s_\beta]U^0U^-[s_\alpha s_\beta]$.

Wenden wir uns nun den gemischten Elementen mit Leittermen in derselben Wurzel zu.

$X \in C$ für ein X mit Leittermen in derselben Wurzeln

$X = E_\alpha K_\alpha^{-1} + c_1 F_\alpha + c_2 K_\alpha^{-1}$ **mit** $c_1 \neq 0$

- X in Kombination mit dem Element $c_3 E_\beta K_\beta^{-1} + c_4 F_\beta + c_5 K_\beta^{-1}$ in C für $c_3, c_4, c_5 \in k$ beliebig.

  Wenn Elemente $X := E_\alpha K_\alpha^{-1} + c_1 F_\alpha + c_2 K_\alpha^{-1}$ und Elemente $Y := c_3 E_\beta K_\beta^{-1} + c_4 F_\beta + c_5 K_\beta^{-1}$ in C liegen. Mit X, Y liegt auch schon das Element $Z := [X, Y]_q$ in C. Es gilt:

$$\begin{aligned} Z = [E_\alpha K_\alpha^{-1} + c_1 F_\alpha + c_2 K_\alpha^{-1}, E_\beta K_\beta^{-1} + c_4 F_\beta + c_5 K_\beta^{-1}]_q = \\ qE_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1} + (1-q^{-2})c_1 F_\alpha E_\beta K_\beta^{-1} - q^{-1}F_{\alpha\beta}c_1c_4 + F_\alpha K_\beta^{-1}(1-q^{-2})c_1c_5 \\ +c_2(q-q^{-1})E_\beta K_{\alpha+\beta}^{-1} + c_2c_5(1-q^{-1})K_{\alpha+\beta}^{-1} \end{aligned}$$

  Für $c_1, c_4 \neq 0$ folgt mit der Komulitplikation schon $K_\alpha K_\beta^2 \in C$ für $(1-q)(1-q^{-1})c_2^2 \neq q^2(1-q^{-2})c_1$. Dann ist aber das Element schon nicht adT_L stabil, was ein Widerspruch ist. Gilt hingegen $(1-q)(1-q^{-1})c_2^2 = q^2(1-q^{-2})c_1$ so sind die beiden Elemente A und B adT_L-stabil und für die Kommutatoren der Elemente gilt:

$$[X, Y]_{q^{-1}} = Z \quad [X, Z]_q = (q^2-1)c_1Y \quad [Y, Z]_{q^{-1}} = -(q-q^{-1})c_4X \tag{10.7}$$

  Wir werden zunächst eine Fallunterscheidung machen, für verschiedene Kombinationen von c_i ungleich 0:

	$E_\alpha K_\alpha^{-1} + c_1 F_\alpha$	$E_\alpha K_\alpha^{-1} + c_1 F_\alpha + c_2 K_\alpha^{-1}$
$c_3 E_\beta K_\beta^{-1} + c_5 K_\beta^{-1}$	a)	b)
$c_3 E_\beta K_\beta^{-1} + c_4 F_\beta$	c)	d)
$c_3 E_\beta K_\beta^{-1} + c_4 F_\beta + c_5 K_\beta^{-1}$	e)	f)

Wir konstruieren wieder winzige Vermamoduln und prüfen die Kommutatoren der zwei Elemente auf nichttriviale Eigenvektoren:

	x_0	x_1	x_2
A	$c_1 x_1 + c_2 q^{-1} x_0$	$q x_0 + c_2 q x_1$	$c_2 x_2$
B	$c_5 x_0$	$c_4 x_2 + c_5 q^{-1} x_1$	$q c_3 x_1$
$[A, B]_1$	$c_1 c_5 (1 - q^{-1}) x_1 - c_1 c_4 x_2$	$c_2 c_4 (1 - q) x_2 + (1 - q) c_5 x_0$	$c_3 q^2 x_0 - q(1 - q) c_3 c_2 x_1$

Wir berechnen zunächst Eigenvektoren X des Kommutators und erhalten:

$$\begin{aligned}
&X^3 \\
&- (c_2 c_4 (1 - q)(-q(1 - q) c_3 c_2 + c_1 c_5 (1 - q^{-1})(1 - q) c_5 + c_3 q^2 (-c_1 c_4)) X \\
&- (-c_1 c_4)(1 - q) c_5 (-q(1 - q) c_3 c_2 - c_1 c_5 (1 - q^{-1}) c_3 q^2 c_2 c_4 (1 - q) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Es gibt also einen nichttrivialen Eigenwert, wenn

$$-c_2^2 c_4 c_3 (1 - q)^2 q + c_1 c_5^2 (1 - q^{-1})(1 - q) - c_1 c_4 c_3 q^2 \neq 0$$

a) und b): Es ist a) ein Spezialfall von b) Hier gilt jeweils $c_4 = 0$, aber $c_1, c_5 \neq 0$ und wir sehen in der Formel oben, dass es einen Eigenwert $\neq 0$ gibt, weil

$$-c_2^2 c_4 c_3 (1 - q)^2 q + c_1 c_5^2 (1 - q^{-1})(1 - q) - c_1 c_4 c_3 q^2 = c_1 c_5^2 (1 - q^{-1})(1 - q) \neq 0$$

also ist C nicht ede.

c) Setzen wir $c_2 = c_5 = 0$ in der obigen Formel erhalten wir:

$$-c_2^2 c_4 c_3 (1 - q)^2 q + c_1 c_5^2 (1 - q^{-1})(1 - q) - c_1 c_4 c_3 q^2 = -c_1 c_3 c_4 q^2 \neq 0$$

also ist C nicht ede.

d),e) und f) Weil die Kommutatorreglen für fixes c_1, c_4 nicht von c_2 und c_5 abhängen:

$$[X, Y]_{q^{-1}} = Z \quad [X, Z]_q = (q^2 - 1) c_1 Y \quad [Y, Z]_{q^{-1}} = -(q - q^{-1}) c_4 X \tag{10.8}$$

ist die Algebrenstruktur gleich dem Fall c) und wir wissen C ist nicht ede.

$\Rightarrow$ Es folgt C liegt in einer Borelunteralgebra C' von Typ 2 der Form $\psi(U^+[w_0])_{\phi^+}\langle K_{2\beta+\alpha}, K_{2\beta+\alpha}^{-1}\rangle U^-[s_\alpha]_{\phi^-}$ mit $\phi^+(E_\alpha K_\alpha^{-1}) = \lambda_\alpha^+$ und 0 sonst sowie $\phi^-(F_\alpha) = \lambda_\alpha^-$ sodass $\lambda_\alpha^+\lambda_\alpha^- = \frac{q^2}{(1-q^2)(q-q^{-1})}$, oder vom Typ 3 der Form $\psi(U^+[s_\alpha s_\beta])_{\phi^+}\langle K_{2\beta+\alpha}, K_{2\beta+\alpha}^{-1}\rangle U^-[s_\alpha s_\beta]_{\phi^-}$ mit Charakteren wie oben.

$X \in C$ **für ein** X **mit Leitterm in** $\alpha+\beta$

Hier betrachten wir nur die Kombination mit den Elementen die wegen der Komulitplikation schon in C liegen müssen.

$X = E_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1} + c_1E_\beta K_{\alpha+\beta}^{-1} + c_2F_{\alpha\beta} + c_3F_\beta K_\alpha^{-1} + c_4K_{\alpha+\beta}^{-1}$ **mit** $c_2 \neq 0$

- Hier folgt aus der Komultiplikation direkt, dass die Elemente $E_\alpha K_\alpha^{-1} + c_1\frac{1}{q^2-1}K_\alpha^{-1}$ und $F_\alpha + c_3\frac{1}{c_2(q-q^{-1})}K_\alpha^{-1}$ in C liegen, siehe Liste 10.1. Also gilt wegen Satz 3.6 insbesondere $c_1, c_3 \neq 0$, sonst ist C nicht ede.
- X in Kombination mit $E_\alpha K_\alpha^{-1} + c_1\frac{1}{q^2-1}K_\alpha^{-1}$:
  Für den Kommutator der beiden Elemente gilt:

$$[E_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1} + c_1E_\beta K_{\alpha+\beta}^{-1} + c_2F_{\alpha\beta} + c_3F_\beta K_\alpha^{-1} + c_4K_{\alpha+\beta}^{-1}, E_\alpha K_\alpha^{-1} + c_1\frac{1}{q^2-1}K_\alpha^{-1}]_q$$
$$= (1-q)c_1\frac{1}{q^2-1}c_4K_\alpha^{-2}K_\beta^{-1}$$

  Das liefert aber für $c_4 \neq 0$ einen Widerspruch zu $E_\alpha K_\alpha^{-1} + c_1\frac{1}{q^2-1}K_\alpha^{-1}$ ist adT_L-stabil, also zu C ist ede.

$\Rightarrow$ Es folgt C liegt in einer Borelunteralgebra C' vom Typ 3 der Form $\psi(U^+[s_\alpha s_\beta])_{\phi^+}\langle K_{2\beta+\alpha}, K_{2\beta+\alpha}^{-1}\rangle U^-[s_\alpha s_\beta]_{\phi^-}$ mit $\phi^+(E_\alpha K_\alpha^{-1}) = \lambda_\alpha^+$ und 0 sonst sowie $\phi^-(F_\alpha) = \lambda_\alpha^-$ und 0 sonst, sodass $\lambda_\alpha^+\lambda_\alpha^- = \frac{q^2}{(1-q^2)(q-q^{-1})}$.

$X = E_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1} + c_1E_\beta K_{\alpha+\beta}^{-1} + c_2F_{\beta\alpha} + c_3F_\alpha K_\beta^{-1} + c_4K_{\alpha+\beta}^{-1}$ **mit** $c_2 \neq 0$

- Hier folgt aus der Komultiplikation direkt, dass die Elemente $E_\alpha K_\alpha^{-1} + c_1\frac{1}{q^2-1}K_\alpha^{-1}$ und $F_\beta + c_3\frac{1}{c_2(q-q^{-1})}K_\beta^{-1}$ in C , siehe Liste 10.1. Also kommen wegen Satz 3.10 und Satz 3.6 nur solche Elemente für C ede in Frage, in denen mindestens zwei der Konstanten c_1, c_3, c_4 schon 0 sind.

$\Rightarrow$ Es folgt C liegt in C' für ein C' triangulär von Typ 2 mit Charakteren ϕ^+,ϕ^- sodass $\mathrm{supp}(\phi^+) = \mathrm{supp}(\phi^-) = \{\alpha+\beta\}$, der Form $\psi(U^+[s_\beta s_\alpha])_{\phi^+}\langle K_{\alpha-\beta}, K_{\beta-\alpha}\rangle U^-[s_\alpha s_\beta]_{\phi^-}$.

Die obigen Erläuterungen ergeben, dass alle ede Rechtscoidealunteralgebren der $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ in mindestens einer triangulären Borelunteralgebra liegen.

Satz 10.3:
Jede Borelunteralgebra der $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ ist triangulär. Es gibt nach Satz 10.2 bis auf Algebrenisomorphie und Spiegelungen die folgenden:

- *Die Standardborelalgebra $U^{\geq 0}$ von Typ 1 mit PBW-Erzeugern*

$$E_\alpha,\ E_\beta,\ E_{\alpha\beta},\ K_\alpha,\ K_\beta,\ K_\alpha^{-1},\ K_\beta^{-1}$$

- *Eine Borelunteralgebra $\psi(U^+[w_0])_{\phi^+}\langle K_{2\beta+\alpha}, K_{2\beta+\alpha}^{-1}\rangle U^-[s_\alpha]_{\phi^-}$ vom Typ 2 mit Charakteren $\phi^+(E_\alpha K_\alpha^{-1}) = \lambda_\alpha^+$ und 0 sonst sowie $\phi^-(F_\alpha) = \lambda_\alpha^-$, sodass $\lambda_\alpha^+\lambda_\alpha^- = \frac{q^2}{(1-q^2)(q-q^{-1})}$. Sie hat PBW-Erzeuger*

$$E_\beta K_\beta^{-1},\ E_{\beta\alpha}K_{\alpha+\beta}^{-1},\ E_\alpha K_\alpha^{-1} + \lambda_\alpha^+ K_\alpha^{-1},\ F_\alpha + \lambda_\alpha^- K_\alpha^{-1},\ K_{2\beta+\alpha},\ K_{2\beta+\alpha}^{-1}$$

- *Eine Borelunteralgebra $\psi(U^+[s_\alpha s_\beta])_{\phi^+}\langle K_{2\beta+\alpha}, K_{2\beta+\alpha}^{-1}\rangle U^-[s_\alpha s_\beta]_{\phi^-}$ vom Typ 3. Sie hat PBW-Erzeuger*

$$E_\alpha K_\alpha^{-1}+\lambda_\alpha^+ K_\alpha^{-1},\ E_{\alpha\beta}K_{\alpha+\beta}^{-1}+\lambda_\alpha^+(1-q^{-2})E_\beta K_{\alpha+\beta}^{-1},\ F_\alpha+\lambda_\alpha^- K_\alpha^{-1},\ F_{\alpha\beta}+\lambda_\alpha^-(q^{-1}-q)F_\beta K_\alpha^{-1}\ K_{2\beta+\alpha},\ K_{2\beta+\alpha}^{-1}$$

11. Trianguläre Borelunteralgebren der $U_q(\mathfrak{sl}_4)$

Wir wollen zunächst die Struktur, Wurzelvektoren und Darstellungstheorie explizit angeben und die bekannten Rechtskoidealunteralgebren beschreiben. Danach werden wir die verschiedenen Typen von triangulären Borelunteralgebren klassifizieren.

Data der $U_q(\mathfrak{sl}_4)$

Die $U_q(\mathfrak{sl}_4)$ ist die quantisert universell Einhüllende der Liealgebra $\mathfrak{sl}_4$ mit dem Wurzelsystem $\Phi^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\}$ zur Basis $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ mit Skalarprodukt $(_, _)$ gegeben durch $(\alpha_1, \alpha_1) = 2 = (\alpha_2, \alpha_2) = (\alpha_3, \alpha_3)$ und $(\alpha_1, \alpha_2) = -1 = (\alpha_2, \alpha_3)$ und $(\alpha_1, \alpha_3) = 0$. Das Gewichtsgitter Λ wird von den Fundamentalgewichten $\lambda_1 = \frac{3}{4}\alpha_1 + \frac{2}{4}\alpha_2 + \frac{1}{4}\alpha_3$ und $\lambda_2 = \frac{2}{4}\alpha_1 + \frac{4}{4}\alpha_2 + \frac{2}{4}\alpha_3$ und $\lambda_3 = \frac{1}{4}\alpha_1 + \frac{2}{4}\alpha_2 + \frac{3}{4}\alpha_3$ aufgespannt. Die Algebra $U_q(\mathfrak{sl}_4)$ wird also erzeugt von den Elementen $\{E_{\alpha_1}, F_{\alpha_1}, E_{\alpha_2}, F_{\alpha_2}, E_{\alpha_3}, F_{\alpha_3}, K_{\alpha_1}, K_{\alpha_2}, K_{\alpha_3}, K_{\alpha_1}^{-1}, K_{\alpha_2}^{-1}, K_{\alpha_3}^{-1}\}$. Ihre Weylgruppe W wird von den einfachen Spiegelunegn s_{α_1}, s_{α_2} und s_{α_3} erzeugt. Das längste Element ist $w_0 = s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_3}s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}$. Die Wurzelvektoren zu den einfachen Wurzeln sind die erzeugenden Elemente und die zur Wurzel $\alpha_1 + \alpha_2$ sind je nach zu Grunde liegender reduzierter Darstellung gegeben durch:

$$E_{\alpha_1\alpha_2} := T_{\alpha_1}(E_{\alpha_2}) = E_{\alpha_1}E_{\alpha_2} - q^{-1}E_{\alpha_2}E_{\alpha_1} \qquad E_{\alpha_2\alpha_1} := T_{\alpha_2}(E_{\alpha_1}) = -q^{-1}(E_{\alpha_1}E_{\alpha_2} - qE_{\alpha_2}E_{\alpha_1})$$
$$F_{\alpha_1\alpha_2} := T_{\alpha_1}(F_{\alpha_2}) = -q(F_{\alpha_1}F_{\alpha_2} - q^{-1}F_{\alpha_2}F_{\alpha_1}) \qquad F_{\alpha_2\alpha_1} := T_{\alpha_2}(F_{\alpha_1}) = F_{\alpha_1}F_{\alpha_2} - qF_{\alpha_2}F_{\alpha_1}$$

Die Quantengruppe ist symmterisch in α_1 und α_3 und mit der Abildung ω auch symmetrisch in E und F. Daher werden wir im Folgenden nur die Relationen berechnen, die sich nicht durch Symmetrie aus den anderen ergeben. Der Wurzelvektor in $\alpha_1 + \alpha_2$ kommutiert mit den anderen Wurzelvektoren wie folgt:

$$[E_{\alpha_1\alpha_2}, F_{\alpha_1\alpha_2}]_1 = \frac{K_{\alpha_1+\alpha_2} - K_{\alpha_1+\alpha_2}^{-1}}{q - q^{-1}} \qquad [E_{\alpha_1\alpha_2}, F_{\alpha_1}]_1 = -E_{\alpha_2}K_{\alpha_1}^{-1} \tag{11.1}$$
$$[E_{\alpha_2\alpha_1}, F_{\alpha_1}]_1 = q^{-1}E_{\alpha_2}K_{\alpha_1} \qquad [E_{\alpha_1\alpha_2}, E_{\alpha_1}]_{q^{-1}} = 0 \tag{11.2}$$

Die Komultiplikation ist für $\alpha_1 \in \Pi$ gegeben durch:

$$\Delta(E_{\alpha_1}) = E_{\alpha_1} \otimes 1 + K_{\alpha_1} \otimes E_{\alpha_1} \quad \Delta(F_{\alpha_1}) = F_{\alpha_1} \otimes K_{\alpha_1}^{-1} + 1 \otimes F_{\alpha_1}$$

Für Wurzelvektoren in $\alpha_1\alpha_2$ ist sie gegeben durch:

$$\Delta(E_{\alpha_1\alpha_2}) = E_{\alpha_1\alpha_2} \otimes 1 + K_{\alpha_1+\alpha_2} \otimes E_{\alpha_1\alpha_2} + (1 - q^{-2})E_{\alpha_1}K_{\alpha_2} \otimes E_{\alpha_2} \tag{11.3}$$
$$\Delta(F_{\alpha_1\alpha_2}) = F_{\alpha_1\alpha_2} \otimes K_{\alpha_1+\alpha_2}^{-1} + 1 \otimes F_{\alpha_1\alpha_2} + (q^{-1} - q)F_{\alpha_2} \otimes F_{\alpha_1}K_{\alpha_2}^{-1} \tag{11.4}$$

Trianguläre Borelunteralgebren der $U_q(\mathfrak{sl}_4)$

Wir wissen aus der Definition der triangulären Borelunteralgebren 1.55 mit Lemma 3.5 und Satz 2.13 schon, dass eine trianguläre Borelunteralgebra B immer von der Form $\psi(U^+[w^+])_{\phi^+}T_L U^-[w^-]_{\phi^-}$ ist, für Weylgruppenelemente $w^+, w^- \in W$, Charaktere ϕ^+ auf $\psi(U^+[w^+])$, ϕ^- auf $U^-[w^-]$ und eine Unterhopfalgebra $T_L \subset U^0$ mit $L \subset (\mathrm{supp}(\phi^+) \cup \mathrm{supp}(\phi^-))^\perp$.

Typ 1: Standardborelalgebren

Nach Satz 6.3 sind $U^{\geq 0}$ und $U^{\leq 0}$ Borelunteralgebren.

Typ 2: Borelunteralgebren mit $\Phi^+(w^+) \cap \Phi^+(w^-) = \mathrm{supp}(\phi^+) \cap \mathrm{supp}(\phi^-)$

Die triangulären Borelunteralgebren $\psi(U^+[w^+])_{\phi^+}T_L U^-[w^-]_{\phi^-}$ mit $\Phi^+(w^+) \cap \Phi^+(w^-) = \mathrm{supp}(\phi^+) \cup \mathrm{supp}(\phi^-)$ sind nach Satz 7.15 alle isomorph zu einer Borelunteralgebra der folgenden Form:

- $\psi(U^+[w_0])_{\phi^+}\langle K_{2\alpha_2+\alpha_1}, K^{-1}_{2\alpha_2+\alpha_1}\rangle U^-[s_{\alpha_i}]_{\phi^-}$ für $i \in \{1,2,3\}$ mit $\phi^+(E_{\alpha_i}K^{-1}_{\alpha_i}) = \lambda^+_{\alpha_i}$ und 0 sonst sowie $\phi^-(F_{\alpha_i}) = \lambda^-_{\alpha_i}$, sodass $\lambda^+_{\alpha_i}\lambda^-_{\alpha_i} = \frac{q^2}{(1-q^2)(q-q^{-1})}$.
- $\psi(U^+[w_0])_{\phi^+}\langle K_{2\alpha_2+\alpha_1}, K^{-1}_{2\alpha_2+\alpha_1}\rangle U^-[s_{\alpha_1}s_{\alpha_3}]_{\phi^-}$ mit $\phi^+(E_{\alpha_1}K^{-1}_{\alpha_1}) = \lambda^+_{\alpha_1}$, $\phi^+(E_{\alpha_3}K^{-1}_{\alpha_3}) = \lambda^+_{\alpha_3}$ und 0 sonst, sowie $\phi^-(F_{\alpha_1}) = \lambda^-_{\alpha_1}$, sodass $\lambda^+_{\alpha_1}\lambda^-_{\alpha_1} = \frac{q^2}{(1-q^2)(q-q^{-1})}$, sowie $\phi^-(F_{\alpha_3}) = \lambda^-_{\alpha_3}$, sodass $\lambda^+_{\alpha_3}\lambda^-_{\alpha_3} = \frac{q^2}{(1-q^2)(q-q^{-1})}$.

Typ 3: Borelunteralgebren mit $\Phi^+(w^+) \cap \Phi^+(w^-) \neq (\mathrm{supp}(\phi^+) \cap \mathrm{supp}(\phi^-)$

Nach Lemma 5.17 wissen wir, dass für eine trianguläre ede Rechtscoidealunteralgebra gelten muss

$$\ell((w^-)'^{-1}w^+) = \ell(w^-) + \ell(w^+) \quad \text{oder} \quad \ell((w^+)'^{-1}w^-) = \ell(w^+) + \ell(w^-)$$

wobei w' sich aus aus w und $\mathrm{supp}(\phi)$ berechnet.

In der Vermutung 5.16 vermuten wir, dass C genau dann eine Borelunteralgebra ist, wenn $(w^+)'w'^{-1} = w_0$. A-priori könnte sowohl die zugehörige Rechtscoidealunteralgebra nicht ede sein, oder aber noch nicht maximal.

Im Folgenden wollen wir zeigen, dass die triangulären Rechtscoidealunteralgebren der $U_q(\mathfrak{sl}_4)$ mit $w^+w'^{-1} = w_0$ ede sind. Andererseits folgt die Maximalität unter den triangulären Rechtscoidealunteralgebren mit Lemma 5.17. Die allgemeine Maximalität konnten wir ohne die Kenntnis der nichttriangulären ede Rechtscoidealunteralgebren nicht nachweisen. Wir vermuten aber, dass die folgenden ede Rechtscoidealunteralgebren Borelunteralgebren sind.

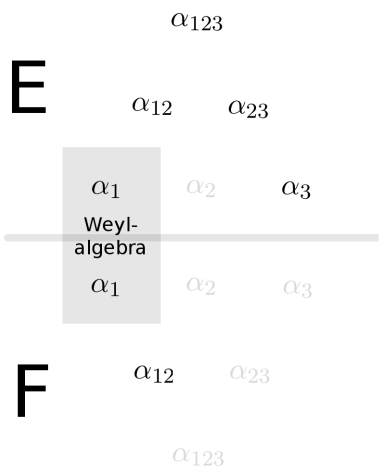
Wir wollen nun zeigen, dass die triangulären Rechtscoidealunteralgebren vom Typ 3 in A_3 ede sind, d.h. $C = \psi(U^+[w^+])_{\phi^+}T_L U^-[w^-]_{\phi^-}$ mit $\Phi^+(w^+) \cap \Phi^+(w^-) \not\subset \mathrm{supp}(\phi^+) = \mathrm{supp}(\phi^-)$ und mit $w^+w'^{-1} = w_0$ und $L = \mathrm{supp}(\phi^+)^\perp$. Es gibt bis auf Isomorphie und Symmetrie drei solche

Rechtscoidealunteralgebren mit $|\mathrm{supp}(\phi^+)| = 1$ und zwei mit $|\mathrm{supp}(\phi^+)| = 2$.

In jedem dieser Fälle berechnen wir händisch die q-Kommutatorrelationen der Erzeuger von B und zeigen je nach Fall, dass eine beliebige endlichdimensionale irreduzible Darstellung V der Algebra B eindimensional ist. Die Strategie hierfür ist wie in Lemma 8.4 (allgemeine Palme der Höhe 1): Wir finden eine enthaltene quantisierte Weylalgebra $\langle X, Y\rangle$, von der wir bereits wissen, dass sie auf endlichdimensionalen Darstellungen kommutativ wirkt, d.h. der Kommutator $[X, Y]_1$ trivial wirkt. Damit finden wir anhand der jeweils expliziten Liste der Kommutatoren dann ein (auf V) mit allen Erzeugern von C q-kommutierendes Element $Z \in C$. Nach Satz 3.3 muss dann Z auf jeder irreduziblen Darstellung V trivial wirken, womit induktiv weitere Kommutatoren verschwinden, bis alle Elemente außer den Weylalgebren trivial wirken. Die Details der Rechnung unterscheiden sich von Fall zu Fall aber die Argumentation ist in jedem Fall gleich.

1. $|\mathrm{supp}(\phi^+)| = 1$**:**

1.1. $|\Phi^+(w^+) \cap \Phi^+(w^-)| = |\mathrm{supp}(\phi^+)| + 1$ Hier gibt es bis auf Isomorphie und Symmetrie genau einen Typ maximaler triangulärer ede Rechtscoidealunteralgebra, gegeben durch $B = \psi(U^+[s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_3}s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}])_{\phi^+}\langle K_{\alpha_3}, K_{\alpha_2}^2K_{\alpha_1}, K_{\alpha_3}^{-1}, K_{\alpha_2}^{-2}K_{\alpha_1}^{-1}\rangle U^-[s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}]_{\phi^-}$ mit $\phi^+(E_{\alpha_1}K_{\alpha_1}^{-1}) = \lambda$ sonst 0 und $\phi^-(F_{\alpha_1}) = \lambda'$, sonst 0, sodass $\lambda\lambda' = \frac{q^2}{(1-q^2)(q-q^{-1})}$. Die Borelunteralgebra von Typ 3 aus $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ (Kapitel 10.3) liegt in B.



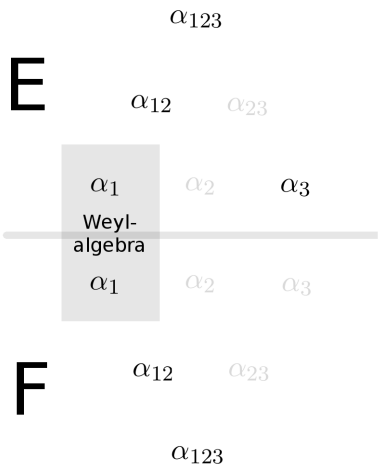
Betrachten wir die q-Kommutatorrelationen und nennen dazu die charakterverschobenen Wurzelvketoren $\bar{E}_{\alpha_1}, \bar{E}_{\alpha_1\alpha_2}$ etc., dann gilt:

	$\bar{F}_{\alpha_1}$	$\bar{F}_{\alpha_1\alpha_2}$
$\bar{E}_{\alpha_1}$	$\frac{q^2}{q-q^{-1}}$	0
$\bar{E}_{\alpha_1\alpha_2}$	0	$q^2[\bar{E}_{\alpha_1}, \bar{F}_{\alpha_1}]_1$
$\bar{E}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$	0	0
$\bar{E}_{\alpha_3}$	0	0
$\bar{E}_{\alpha_3\alpha_2}$	0	0

Die quantisierte Weylalgebra ist hier $\langle \bar{E}_{\alpha_1}, \bar{F}_{\alpha_1} \rangle$, und der Kommutator verschwindet auf jeder endlichdimensionalen Darstellung. Die deswegen auf V mit allen Erzeugern aus C q-kommutierenden Elemente Z sind dann $\bar{F}_{\alpha_1\alpha_2}$ bzw. $\bar{E}_{\alpha_1\alpha_2}$, bzw. $\bar{E}_{\alpha_3\alpha_2}$, wohingegen die restlichen Erzeuger $\bar{E}_{\alpha_3}$ und $\bar{E}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$ ohnehin mit allen anderen Erzeugern q-kommutieren.

1.2. $|\mathbf{\Phi}^+(\mathbf{w}^+) \cap \mathbf{\Phi}^+(\mathbf{w}^-)| = |\mathrm{supp}(\phi^+)| + \mathbf{2}$

1.2.1. $B = \psi(U^+[s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_3}s_{\alpha_1}])_{\phi^+}\langle K_{\alpha_3}, K_{\alpha_2}^2K_{\alpha_1}, K_{\alpha_3}^{-1}, K_{\alpha_2}^{-2}K_{\alpha_1}^{-1}\rangle U^-[s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_3}]_{\phi^-}$ mit ϕ^+ und ϕ^- wie oben. Wieder liegt Typ 3 aus $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ in B.



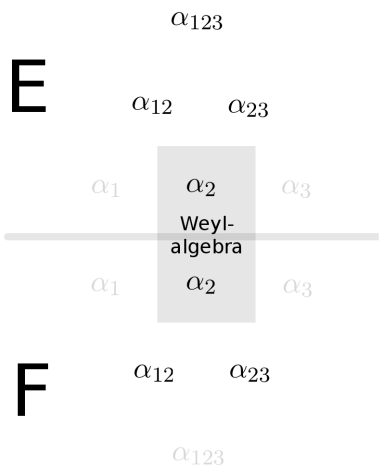
Desweiteren gelten hier die q-Kommutatorregeln:

	$\bar{F}_{\alpha_1}$	$\bar{F}_{\alpha_1\alpha_2}$	$\bar{F}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$
$\bar{E}_{\alpha_1}$	$\frac{q^2}{q-q^{-1}}$	0	0
$\bar{E}_{\alpha_1\alpha_2}$	0	$q^2[\bar{E}_{\alpha_1}, \bar{F}_{\alpha_1}]_1$	0
$\bar{E}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$	0	0	$q^2[\bar{E}_{\alpha_1\alpha_2}, \bar{F}_{\alpha_1\alpha_2}]_1$
$\bar{E}_{\alpha_3}$	0	0	$q^2\bar{F}_{\alpha_1\alpha_2}$

Die quantisierte Weylalgebra ist hier $\langle \bar{E}_{\alpha_1}, \bar{F}_{\alpha_1} \rangle$, und der Kommutator verschwindet auf jeder endlichdimensionalen Darstellung. Die deswegen auf V mit allen Erzeugern aus C

q-kommutierenden Elemente Z sind dann $\bar{F}_{\alpha_1\alpha_2}$ bzw. $\bar{E}_{\alpha_1\alpha_2}$. Wenn diese Elemente verschwinden q-kommutieren in einem weiteren Induktionsschritt die restlichen Elemente mit jeweils allen anderen Erzeugern.

1.2.2. $B = \psi(U^+[s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}s_{\alpha_3}s_{\alpha_2}])_{\phi^+}\langle K_{\alpha_1}^{-1}K_{\alpha_3}, K_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}, K_{\alpha_1}K_{\alpha_3}^{-1}, K_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}^{-1}\rangle U^-[s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}s_{\alpha_3}]_{\phi^-}$ mit den Charakteren $\phi^+(E_{\alpha_2}K_{\alpha_2}^{-1}) = \lambda$, sonst 0 und $\phi^-(F_{\alpha_2}) = \lambda'$, sonst 0, sodass $\lambda\lambda' = \frac{q^2}{(1-q^2)(q-q^{-1})}$.



Hier gelten die folgenden q-Kommutatorregeln:

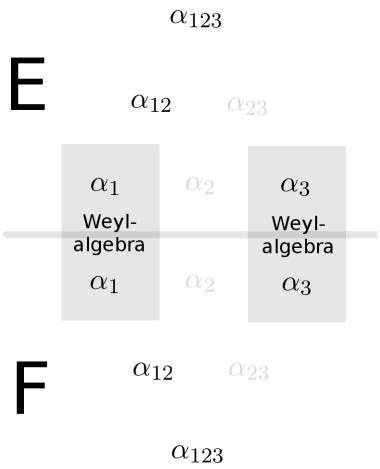
	$\bar{F}_{\alpha_2}$	$\bar{F}_{\alpha_2\alpha_1}$	$\bar{F}_{\alpha_2\alpha_3}$
$\bar{E}_{\alpha_2}$	$\frac{q^2}{q-q^{-1}}$	0	0
$\bar{E}_{\alpha_2\alpha_1}$	0	$q^2[\bar{E}_{\alpha_2}, \bar{F}_{\alpha_2}]_1$	0
$\bar{E}_{\alpha_2\alpha_3}$	0	0	$q^2[\bar{E}_{\alpha_2}, \bar{F}_{\alpha_2}]_1$
$\bar{E}_{\alpha_2\alpha_1\alpha_3\alpha_2}$	0	$-q^{-1}[[\bar{E}_{\alpha_2}, \bar{F}_{\alpha_2}]_1, \bar{E}_{\alpha_3}]_1$	$-q^{-1}[[\bar{E}_{\alpha_2}, \bar{F}_{\alpha_2}]_1, \bar{E}_{\alpha_1}]_1$

Die quantisierte Weylalgebra ist hier $\langle \bar{E}_{\alpha_2}, \bar{F}_{\alpha_2}\rangle$. Alle anderen Elemente verschwinden wieder induktiv auf jeder irreduziblen Darstellung V.

2. $|\mathrm{supp}(\phi^+)| = 2$**:**

Wenden wir uns jetzt dem Fall zu, dass der Träger des Charakters zwei Elemente beinhaltet. Hierfür gibt es in der A_3 zwei Möglichkeiten und es gilt dann stets entweder $|\Phi^+(w^+) \cap \Phi^+(w^-)| = |\mathrm{supp}(\phi^+)|$, also ist B triangulär von Typ 2 oder $|\Phi^+(w^+) \cap \Phi^+(w^-)| = |\mathrm{supp}(\phi^+)| + 2$

2.1. $B = \psi(U^+[s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_3}s_{\alpha_1}])_{\phi^+}\langle K_{\alpha_3}K_{\alpha_2}^2K_{\alpha_1}, K_{\alpha_3}^{-1}K_{\alpha_2}^{-2}K_{\alpha_1}^{-1}\rangle U^-[s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_3}s_{\alpha_1}]_{\phi^-}$ mit Charakteren $\phi^+(E_{\alpha_1}K_{\alpha_1}^{-1}) = \lambda_{\alpha_1}$ und $\phi^-(F_{\alpha_1}) = \lambda'_{\alpha_1}$ sodass $\lambda_{\alpha_1}\lambda'_{\alpha_1} = \frac{q^2}{(1-q^2)(q-q^{-1})}$, und $\phi^+(E_{\alpha_3}K_{\alpha_3}^{-1}) = \lambda_{\alpha_3}$ und $\phi^-(F_{\alpha_3}) = \lambda'_{\alpha_3}$ sodass $\lambda_{\alpha_3}\lambda'_{\alpha_3} = \frac{q^2}{(1-q^2)(q-q^{-1})}$ sonst 0.

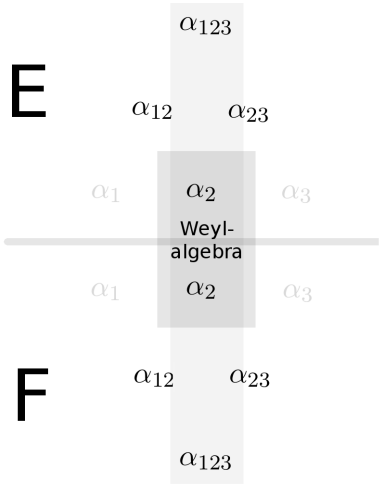


Hier gelten die Kommutatorregeln:

	$\bar{F}_{\alpha_1}$	$\bar{F}_{\alpha_1\alpha_2}$	$\bar{F}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$	$\bar{F}_{\alpha_3}$
$\bar{E}_{\alpha_1}$	$\frac{q^2}{q-q^{-1}}$	0	0	0
$\bar{E}_{\alpha_1\alpha_2}$	0	$q^2[\bar{E}_{\alpha_1}, \bar{F}_{\alpha_1}]_{\alpha_1}$	0	0
$\bar{E}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$	0	0	$q^2[\bar{E}_{\alpha_1\alpha_2}, \bar{F}_{\alpha_1\alpha_2}]_1$	$\bar{E}_{\alpha_1\alpha_2}$
$\bar{E}_{\alpha_3}$	0	0	$q^2\bar{F}_{\alpha_1\alpha_2}$	$\frac{q^2}{q-q^{-1}}$

Hier gibt es zwei Weylalgebren $\langle \bar{E}_{\alpha_1}, \bar{F}_{\alpha_1}\rangle$ und $\langle \bar{E}_{\alpha_3}, \bar{F}_{\alpha_3}\rangle$, die miteinander kommutieren. Die restlichen Elemnte verschwinden wieder induktiv auf jeder irreduziblen Darstellung.

2.2. $B = \psi(U^+[s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}s_{\alpha_3}s_{\alpha_2}])_{\phi^+}\langle K_{\alpha_1}^{-1}K_{\alpha_3}, K_{\alpha_1}K_{\alpha_3}^{-1}\rangle U^-[s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}s_{\alpha_3}s_{\alpha_2}]_{\phi^-}$ mit Charakteren $\phi^+(E_{\alpha_2}K_{\alpha_2}^{-1}) = \lambda_{\alpha_2}$ und $\phi^-(F_{\alpha_2}) = \lambda'_{\alpha_2}$ sodass $\lambda_{\alpha_2}\lambda'_{\alpha_2} = \frac{q^2}{(1-q^2)(q-q^{-1})}$, und $\phi^+(E_{\alpha_2\alpha_1\alpha_3\alpha_2}K_{\alpha_2\alpha_1\alpha_3\alpha_2}^{-1}) = \lambda_{\alpha_2\alpha_1\alpha_3\alpha_2}$ und $\phi^-(F_{\alpha_2\alpha_1\alpha_3\alpha_2}) = \lambda'_{\alpha_2\alpha_1\alpha_3\alpha_2}$ sodass $\lambda_{\alpha_2\alpha_1\alpha_3\alpha_2}\lambda'_{\alpha_2\alpha_1\alpha_3\alpha_2} = \frac{q^2}{(1-q^2)(q-q^{-1})}$ sonst 0.



Hier gelten die Kommutatorregeln:

	$\bar{F}_{\alpha_2}$	$\bar{F}_{\alpha_2\alpha_1}$	$\bar{F}_{\alpha_2\alpha_3}$	$\bar{F}_{\alpha_2\alpha_1\alpha_3\alpha_2}$
$\bar{E}_{\alpha_2}$	$\frac{q^2}{q-q^{-1}}$	0	0	0
$\bar{E}_{\alpha_2\alpha_1}$	0	$q^2[\bar{E}_{\alpha_2}, \bar{F}_{\alpha_2}]_1$	0	$[[\bar{E}_{\alpha_2}, \bar{F}_{\alpha_2}]_1, \bar{F}_{\alpha_3}]_1$
$\bar{E}_{\alpha_2\alpha_3}$	0	0	$q^2[\bar{E}_{\alpha_2}, \bar{F}_{\alpha_2}]_1$	$[[\bar{E}_{\alpha_2}, \bar{F}_{\alpha_2}]_1, \bar{F}_{\alpha_1}]_1$
$\bar{E}_{\alpha_2\alpha_1\alpha_3\alpha_2}$	0	$-q^{-1}[[\bar{E}_{\alpha_2}, \bar{F}_{\alpha_2}]_1, \bar{E}_{\alpha_3}]_1$	$-q^{-1}[[\bar{E}_{\alpha_2}, \bar{F}_{\alpha_2}]_1, \bar{E}_{\alpha_1}]_1$	$-[\bar{E}_{\alpha_2\alpha_1}, \bar{F}_{\alpha_2\alpha_1}]_1$ $-[\bar{E}_{\alpha_2\alpha_3}, \bar{F}_{\alpha_2\alpha_3}]_1$ $+c(1-K^{-2}_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3})$

Die erste quantisierte Weylalgebra ist hier $\langle \bar{E}_{\alpha_2}, \bar{F}_{\alpha_2} \rangle$, deren Kommutator wieder auf jeder endlichdimensionalen Darstellung verschwindet. Damit q-kommutieren auch die vier Elemente der Höhe 2 mit allen Erzeugern und wirken daher trivial. Modulo diesen Relationen ist dann $\langle \bar{E}_{\alpha_2\alpha_1\alpha_3\alpha_2}, \bar{F}_{\alpha_2\alpha_1\alpha_3\alpha_2} \rangle$ eine weitere quantisierte Weylalgebra die mit der ersten quantisierten Weylalgebra kommutiert.

Satz 11.1:
Jede trianguläre Borelunteralgebra der $U_q(\mathfrak{sl}_4)$ ist bis auf Spiegelungen und Algebrenisomorphie von der folgenden Form:

- *Die Standardborelalgebra $U^{\geq 0}$ von Typ 1*
- *Eine Borelunteralgebra vom Typ 2:*
  - $\psi(U^+[w_0])_{\phi^+}\langle K_{2\alpha_2+\alpha_1}, K^{-1}_{2\alpha_2+\alpha_1}, K_{\alpha_3}, K^{-1}_{\alpha_3}\rangle U^-[s_{\alpha_1}]_{\phi^-}$
    mit $\mathrm{supp}(\phi^+) = \mathrm{supp}(\phi^-) = \{\alpha_1\}$
  - $\psi(U^+[w_0])_{\phi^+}\langle K_{2\alpha_2+\alpha_1}, K^{-1}_{2\alpha_2+\alpha_1}\rangle U^-[s_{\alpha_1}s_{\alpha_3}]_{\phi^-}$
    mit $\mathrm{supp}(\phi^+) = \mathrm{supp}(\phi^-) = \{\alpha_1, \alpha_3\}$

- *Eine Borelunteralgebra vom Typ 3, das heißt:*
  - $\psi(U^+[s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_3}s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}])_{\phi^+}\langle K_{\alpha_3}, K_{\alpha_2}^2K_{\alpha_1}, K_{\alpha_3}^{-1}, K_{\alpha_2}^{-2}K_{\alpha_1}^{-1}\rangle U^-[s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}]_{\phi^-}$
    mit $\operatorname{supp}(\phi^+) = \operatorname{supp}(\phi^-) = \{\alpha_1\}$
  - $\psi(U^+[s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_3}s_{\alpha_1}])_{\phi^+}\langle K_{\alpha_3}, K_{\alpha_2}^2K_{\alpha_1}, K_{\alpha_3}^{-1}, K_{\alpha_2}^{-2}K_{\alpha_1}^{-1}\rangle U^-[s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_3}]_{\phi^-}$
    mit $\operatorname{supp}(\phi^+) = \operatorname{supp}(\phi^-) = \{\alpha_1\}$
  - $\psi(U^+[s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_3}s_{\alpha_1}])_{\phi^+}\langle K_{\alpha_3}K_{\alpha_2}^2K_{\alpha_1}, K_{\alpha_3}^{-1}K_{\alpha_2}^{-2}K_{\alpha_1}^{-1}\rangle U^-[s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_3}s_{\alpha_1}]_{\phi^-}$
    mit $\operatorname{supp}(\phi^+) = \operatorname{supp}(\phi^-) = \{\alpha_1, \alpha_3\}$
  - $\psi(U^+[s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}s_{\alpha_3}s_{\alpha_2}])_{\phi^+}\langle K_{\alpha_1}^{-1}K_{\alpha_3}, K_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}, K_{\alpha_1}K_{\alpha_3}^{-1}, K_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}^{-1}\rangle U^-[s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}s_{\alpha_3}]_{\phi^-}$
    mit $\operatorname{supp}(\phi^+) = \operatorname{supp}(\phi^-) = \{\alpha_2\}$
  - $\psi(U^+[s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}s_{\alpha_3}s_{\alpha_2}])_{\phi^+}\langle K_{\alpha_1}^{-1}K_{\alpha_3}, K_{\alpha_1}K_{\alpha_3}^{-1}\rangle U^-[s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}s_{\alpha_3}s_{\alpha_2}]_{\phi^-}$
    mit $\operatorname{supp}(\phi^+) = \operatorname{supp}(\phi^-) = \{\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\}$

Literaturverzeichnis

[AHS10] N. Andruskiewitsch, I. Heckenberger, H.-J. Schneider,
The Nichols algebra of a semisimple Yetter-Drinfeld module, Amer. J. Math. 132, pp. 1493-1547, 2010.

[AS] N. Andruskiewitsch, H.-J. Schneider,
Pointed Hopf Algebras, New Directions in Hopf Algebras MSRI Publications, Volume 43, 2002.

[BB05] A. Björner and F. Brenti,
Combinatorics of Coxeter Groups, Springer-Verlag, 2005.

[CKP93] C. De Concini, Victor G. Kac, C. Procesi,
Some quantum analogues of solvable Lie groups, arXiv:9308138, Preprint 1993.

[Drin86] V.G. Drinfeld,
Quantum Groups, Proceedings of the ICM Berkeley, pp. 798-820, 1986.

[Fron] C. Fronsdal,
On the Classification of q-Algebras, Letters in Mathematical Physics, Volume 53, Issue 2, pp 105-120, 2000.

[HK11a] I. Heckenberger and S. Kolb,
Homogeneous right coideal subalgebras of quantized enveloping algebras, Bull. London Math. Soc. 44, 837-848, 2012.

[HK11b] I. Heckenberger and S. Kolb,
Right coideal subalgebras of the Borel part of a quantized enveloping algebra, Int. Math. Res. Not. IMRN, no. 2, pp 419-451, 2011.

[HS09] I. Heckenberger and H.-J. Schneider,
Right coideal subalgebras of Nichols algebras and the Duflo order on the Weyl groupoid, Israel Journal of Mathematics 197, 139-187, 2013.

[Hum70] J. Humphreys,
Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, Springer-Verlag, Library of Congress Catalog, 1980.

[Jan96] J. Jantzen,
Lectures in Quantum Groups, Graduate Studies in Mathematics, Volume 6, American Mathematical Society, 1996.

[Jim86] Michio Jimbo,
A q-analogue of $U(\mathfrak{gl}_n)$, Hecke Algebra and the Yang-Baxter equation, Letters in Mathematical Physics 11.3, pp. 247-252, 1986.

[Kas95] C. Kassel,
Quantum Groups, Springer-Verlag, Graduate texts in mathematics, Volume 155, 1995.

[KS08] V. Kharchenko and A. V. L. Sagahon,
Right coideal subalgebras in $U_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$, J. Algebra 319, pp 2571-2625, 2008.

[Kh15] V. Kharchenko
Explicit coproduct formula for quantum groups of infinite series, J. Algebra 208, pp 13-43, 2015.

[KSR11] V. Kharchenko, A. V. L. Sagahon, and J. L. G. Rivera,
Computing of the number of right coideal subalgebras of $U_q(\mathfrak{so}_{2n+1})$, J. Algebra 341, pp 279–296, 2011.

[Kh99] V. Kharchenko,
A quantum analog of the Poincare-Birkhoff-Witt theorem, Algebra and Logic, Volume 38, Issue 4, pp 259-276, 1999.

[KL] Gunter R. Krause and Thomas H. Lenagan,
Growth of Algebras and Gelfand-Kirillov Dimension American Mathematical Society; Revised edition, 1999

[Len14] S. Lentner,
A Frobenius homomorphism for Lusztig's quantum groups for arbitrary roots of unity Commun. Contemp. Math., Volume 18, 2016.

[Let02] G. Letzter,
Coideal subalgebras and quantum symmetric pairs, New directions in Hopf algebras (Cambridge), MSRI Publications, Volume 43, Cambridge Univ. Press, pp. 117-166, 2002.

[LS91] S. Levendorskii and Y. Soibelman,
Algebras of functions on compact quantum groups, Schubert cells and quantum tori, Commun. Math. Phys. 139, no.1, 141-170, 1991.

[MM] H. Matsumoto,
Générateurs et relations des groupes de weyl généralisés C.R. Acad. Sci. Paris, Volume 258, 1964.

[PA] P. Papi,
A characterization of a special ordering in a root system Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 120, pp 661-665, 1994.

Index

$ht(\mu)$ Höhe der Wurzel μ, 22

$[,]_c$ c-Kommutator, 30
$(_,_)$ Bilinearform, 21
$[,]$ q-Kommutator, 30
$A_n = \mathfrak{sl}_{n+1}$, 26
E_α, F_α, K_α, K_α^{-1} Erzeuger der Quantengruppe, 28
β_i Wurzeln in $\Phi^+(w)$ zu gegebener reduzierter Darstellung von w, 24
$C_\phi := \{(\phi \otimes id)\Delta(x) \mid x \in C\}$, 41
Δ Komultiplikation, 29
ϵ Koeins, 29
E_{β_i} Wurzelvektor zu β_i, 33
$U = U_q(\mathfrak{g})$ Quantengruppe, 28
$\mathcal{K}$, 41
Λ Gewichtgitter, 24
$L(\lambda)$ Faktormodul, 34
$M(\lambda)$ Vermamodul, 34
Φ Wurzelsystem, 21
ϕ Charakter, 41
$\Phi^+(w) = \{\alpha \in \Phi^+ \mid w^{-1}\alpha \prec 0\}$, 24
Π Basis des Wurzelsystems, 22
$\psi(x_\beta)$, 41
Q Wurzelgitter, 22
Q_+ positives Wurzelgitter, 22
$r_\alpha(x)$, $r'_\alpha(x)$, 31
S Antipode, 29
s_α Spiegelung, 21
$\mathrm{supp}(\phi)$ Träger des Charakters, 41
T_w Lusztigautomorphismus zu gegebener reduzierter Darstellung von w, 33
T_α, 32
$U^0 := U^0(\mathfrak{g})$ erzeugt von allen K_α, K_α^{-1}, 28
$U^+ := U_q^+(\mathfrak{g})$, 28
$U^- := U_q^-(\mathfrak{g})$, 28
$U^{\geq 0} := U_q^{\geq 0}(\mathfrak{g}) = U_q^+(\mathfrak{g})U_q(\mathfrak{g})^0$, 28
$U^{\leq 0} := U_q^{\leq 0}(\mathfrak{g}) = U_q^-(\mathfrak{g})U_q(\mathfrak{g})^0$, 28
$U_\mu := \{u \in U \mid K_\nu u K_\nu^{-1} = q^{(\nu,\mu)}u\}$, 29
$U_q^-(\mathfrak{g})$ erzeugt von allen F_α , 28
$U_q^+(\mathfrak{g})$ erzeugt von allen E_α , 28
$U_q(\mathfrak{g}_J)$, 40
$U^+[w]$, 39
W Weylgruppe, 21
adjungierte Darstellung, 29

Basis
  des Gewichtgitters, 24
  des Wurzelsystems, 22
  PBW-Basis, 33
Bilinearform, 21

Cartanmatrix, 22
Cartanunteralgebra, 26
Charakter, 41

Dynkin-Diagramm, 22

ede, 36
ede
  schwach, 36

Gewichte
  winzige dominante, 35
Gewichte
  dominante, 24
  fundamentale dominante, 24
  integrale, 24
Gewichtsvektor, 71
Graduierung
  $\mathbb{Z}\Phi$-Graduierung auf U, 29

Höchstgewichtsmodul, 34
Höhe einer Wurzel $\mu \in \Phi$, 22
homogen, 39

irreduzibles Wurzelsystem, 22

Kommutator
  c-Kommutator, 30
  q-Kommutator, 30

Länge
  eines Weylgruppenelements $w \in W$, 23
  von $\alpha \in \Phi$, 21
Leitterm, 71
Liealgebra, 25
Lusztigautomorphismus, 32

Ordnung
  auf $\Phi^+(w)$, 25
  auf Q_+, 22
  auf der Weylgruppe, 23

Quantengruppe, 28
quantisierte Weylalgebra, 37

Rang $Rank(\Phi)$, 22
Rechtscoidealunteralgebra, 36
reduzierte Darstellung, 23

Spiegelung, 21
Standardborelalgebra, 36
stark orthogonal, 48

Träger des Charakters, 41
triangulär, 37
triangulär erzeugt, 37

Vermamodul, 34
  winzige Vermamodul, 35

Weylalgebra, 36
Weylgruppe, 21
Wurzelgitter, 22
Wurzeln
  positive Wurzeln, 22
Wurzeln
  einfache Wurzeln, 22
Wurzelsystem, 21
Wurzelvektoren, 33

zusammenhängend, 40