Kählersche Geometrie auf Hurwitz-Räumen

Philipps Universität Marburg

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

dem
Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
vorgelegt von

M.Sc. Philipp Naumann

geboren in Lich

Marburg, im März 2016

Vom Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg (Hochschulkennziffer 1180)
als Dissertation angenommen am: 02.05.2016

Erstgutachter: Prof. Dr. G. Schumacher
Zweitgutachter: Prof. Dr. R. Axelsson

Tag der Einreichung: 17.03.2016
Tag der mündlichen Prüfung: 10.05.2006

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung **3**

2. Überlagerungen von Riemannschen Flächen **11**
2.1. Topologische Überlagerungen . . . 11
2.2. Holomorphe Abbildungen als verzweigte Überlagerungen . . . 14
2.3. Einfache Überlagerungen . . . 18
2.4. Konstruktion des Hurwitz-Raums . . . 19
2.5. Eigenschaften des Hurwitz-Raums . . . 21

3. Deformationstheorie von Abbildungen **25**
3.1. Notationen und Vorbereitungen . . . 25
3.2. Deformationen komplexer Strukturen . . . 27
3.3. Deformationen von Abbildungen - Horikawa-Theorie Teil I . . . 32
3.4. Horikawa-Theorie - Teil II . . . 35
3.5. Familien von Abbildungen zwischen Kähler-Mannigfaltikeiten . . . 39
3.6. Überlagerungen von Riemannschen Flächen . . . 41
3.7. Die Dolbeault-Sequenz einer Abbildung von Geradenbündeln . . . 43
3.8. Schiffer-Variationen . . . 46
3.9. Infinitesimale Betrachtungen zum Hurwitz-Raum . . . 46
3.10. Beispiele . . . 48

4. Die Weil-Petersson-Metrik **53**
4.1. Familien von Überlagerungen Riemannscher Flächen . . . 53
4.2. Definition der Metrik . . . 55
4.3. Positivität der Metrik . . . 56
4.4. Wahl der Koordinaten . . . 57
4.5. Vorbereitungen zur Berechnung der Krümmung . . . 59
4.6. Kähler-Eigenschaft der Weil-Petersson-Metrik . . . 61
4.7. Berechnung der Krümmung . . . 63
4.7.1. Die Krümmung für einen Unterraum . . . 64
4.7.2. Die Krümmung des Bündels $f_*\beta^*T_Y$ . . . 69

5. Weitere Aspekte **75**
5.1. Das relative kanonische Bündel $K_{\mathcal{H}_0^{n,b}/\mathcal{M}_g^0}$ . . . 75
5.2. Vergleich der Metriken ω_X und $\beta^*\omega_Y$ und das Lemma von Ahlfors-Schwarz . . . 77
5.3. Eine Anwendung der Bochner-Kodaira-Nakano Formel . . . 78
5.4. A priori Resultate und induzierte Metriken . . . 80

5.5. Hörmanders L^2-Abschätzung 83
5.6. Die Metrik im punktierten Fall 85

Literaturverzeichnis **89**

A. Englische Zusammenfassung **93**

B. Danksagung **99**

C. Erklärung **100**

D. Lebenslauf **101**

1. Einleitung

Hurwitz-Räume sind Modulräume für verzweigte Überlagerungen von kompakten Riemannschen Flächen. Diese wurden zuerst von Clebsch [Cl72] und Hurwitz [Hu91] betrachtet. Im Kontext der algebraischen Geometrie folgten systematische Untersuchungen von Fulton [Fu69] sowie Harris und Mumford [HM82]. Ihre Bedeutung für arithmetische Fragestellungen wurde von M. Fried [Fri77] entdeckt. Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Geometrie von Hurwitz-Räumen, die wir mit komplex-differentialgeometrischen Methoden untersuchen und soll einen Beitrag zum Gebiet der Komplexen Geometrie leisten.

Ein klassischer Zugang zu kompakten Riemannschen Flächen bzw. glatten projektiv-algebraischen Kurven über den komplexen Zahlen ist die Beschreibung als verzweigte Überlagerungen der Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{P}^1$. Der generische Fall ist der einer *einfachen* Überlagerung. Dabei treffen sich über jedem Verzweigungswert höchstens zwei Blätter der Überlagerung. Für die Anzahl b der Verzweigungspunkte einer n-blättrigen einfachen Überlagerung durch eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g gilt nach der Riemann-Hurwitz-Formel

$$b \quad = \quad 2n + 2g - 2.$$

Der klassische *Hurwitz-Raum* $\mathcal{H}^{n,b}$ ist nun die Menge aller (Äquivalenzklassen von) einfachen Überlagerungen $f : X \to \mathbb{P}^1$ von kompakten Riemannschen Flächen X vom Grad n mit b Verzeigungspunkten. Die Riemannsche Fläche X setzen wir dabei stets als hyperbolisch voarus, d.h. $g > 1$. Eine einzelne Überlagerung ist durch das b-Tupel seiner Verzweigungswerte zusammen mit gewissen Monodromie-Daten gegeben, für die es stets nur endliche viele Möglichkeiten gibt. Auf diese Weise erhält man eine endliche, unverzweigte Überlagerung

$$\mathcal{H}^{n,b} \to \operatorname{Sym}^b \mathbb{P}^1 \setminus \Delta = \mathbb{P}^b \setminus \Delta.$$

Daher kann der Raum $\mathcal{H}^{n,b}$ mit einer komplexen Struktur versehen werden, so dass dieser zu einer b-dimensionalen quasi-projektiven Mannigfaltigkeit wird. Ordnen wir einer einfachen Überlagerung $f : X \to \mathbb{P}^1$ die Isomorphieklasse seines Totalraums zu, so erhalten wir eine Abbildung auf den Modulraum $\mathcal{M}_g$ der kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht g:

$$\mathcal{H}^{n,b} \to \mathcal{M}_g.$$

Wir untersuchen nun die Faser dieser Projektion. Eine Überlagerung $f : X \to \mathbb{P}^1$ ist durch den Polstellendivisor $D = (f)_\infty$ und ein Element des Linearsystems $H^0(X, D)$ gegeben, welches zur meromorphen Funktion f gehört. Die Wahl von D hängt dabei von n Parametern ab. Ist $n > 2g - 2$, so ist $h^1(X, D) = 0$ und nach Riemann-Roch

$$h^0(X, D) = n - g + 1,$$

so dass wir für die Wahl von $f \in H^0(X, D)$ noch $n - g + 1$ freie Parameter erhalten. Also ist die Familie von Abbildungen $f : X \to \mathbb{P}^1$ mit festem X gerade

$$n + (n - g + 1) = 2n - g + 1$$

-dimensional. Somit schließen wir

$$\dim \mathcal{M}_g = b - (2n - g + 1) = (2n + 2g - 2) - (2n - g + 1) = 3g - 3.$$

Dies ist Riemanns Zählweise für die Anzahl der Parameter, die zur Beschreibung einer kompakten Riemannschen Fläche vom Geschlecht g benötigt werden (siehe [Ri57]).

Hurwitz-Räume erschienen zuerst in den Arbeiten von Clebsch [Cl72] und Hurwitz [Hu91], wo sie als Hilfsobjekt zum Studium des Modulraums von Kurven verwendet wurden. Mit Hilfe einer kombinatorischen Beschreibung von Clebsch konnte Hurwitz zeigen, dass der Raum $\mathcal{H}^{n,b}$ zusammenhängend ist. Zudem erkannte bereits Hurwitz, dass der Raum $\mathcal{H}^{n,b}$ die Struktur einer komplexen Mannigfaltigkeit besitzt. Später bewies Severi [Sev21], dass sich für $n > g$ jede Kurve vom Geschlecht g als einfache n-blättrige Überlagerung $f : X \to \mathbb{P}^1$ scheiben lässt. Die Abbildung $\mathcal{H}^{n,b} \to \mathcal{M}_g$ ist für $n > g$ also surjektiv. Zusammen mit dem Resultat von Hurwitz konnte Severi somit zeigen, dass auch der Modulraum $\mathcal{M}_g$ zusammenhängend ist. In der fundamentalen Arbeit [Fu69] gibt Fulton eine algebraische Konstruktion des Hurwitz-Raums als ein Schema von endlichem Typ über $\mathbb{Z}$, das einen gewissen Modulfunktor repräsentiert. Dies erlaubt ihm zu zeigen, dass Reduktionen des Hurwitz-Schemas nach bestimmten Primzahlen irreduzibel sind. Damit beweist er die Irreduzibilität von $\mathcal{M}_g \otimes \mathbb{F}_p$ für $p > g + 1$. Weitere Anwendungen von Hurwitz-Räumen wurden von Harris und Mumford gegeben. In der Arbeit [HM82] konstruieren sie eine Kompaktifizierung $\overline{\mathcal{H}^{n,b}}$ von $\mathcal{H}^{n,b}$. Randpunkte entsprechen dabei sog. *zulässigen* Überlagerungen von singulären Kurven, welche i.A. nicht mehr einfach sind. Die Abbildung $\mathcal{H}^{n,b} \to \mathcal{M}_g$ setzt sich dabei zu einer Abbildung $\overline{\mathcal{H}^{n,b}} \to \overline{\mathcal{M}_g}$ fort, wobei $\overline{\mathcal{M}_g}$ die Deligne-Mumford-Kompaktifizierung des Modulraums ist.

Abgesehen vom Modulraum der Kurven spielen Hurwitz-Räume auch eine wichtige Rolle in der Galois-Theorie. Im Rahmen des regulären inversen Galois-Problems werden Galois-Überlagerungen $f : X \to \mathbb{P}^1$ mit einer festen Galois-Gruppe G studiert. Als erstes erkannte M. Fried in seiner Arbeit [Fri77], dass die Geometrie des Modulraums von verzweigten Galois-Überlagerungen wichtige arithmetische Konsequenzen besitzt. Matzat greift in [Mat91] die Ideen von Fried auf und gibt konkrete Anwendungen für das reguläre inverse Galois-Problem. Schließlich konstruieren Fried und Völklein in [FV91] allgemeinere Typen von Hurwitz-Räumen, welche den Zusammenhang zwischen algebraischer Geometrie und Arithmetik genauer beschreiben. Die Existenz von rationalen Punkten auf einem geeigneten Hurwitz-Schema liefert dabei Realisierungen einer festen Gruppe G als Galois-Gruppe einer regulären Galois-Erweiterung von $\mathbb{Q}(t)$ (näheres dazu auch in [Vö96]). Verallgemeinerungen der Resultate von Fried und Völklein sowie Konstruktionen von verallgemeinerten Hurwitz-Stacks finden sich in [We98]. Etwas Überblick über die vielen verschiedenen Hurwitz-Schemata bzw. -Stacks verschafft die Arbeit [Mo95], welche die Harris-Mumford-Komapktifizierung des Hurwitz-Schemas zum Thema hat. Zum Einstieg in die arithmetische Theorie der Hurwitz-Räume eignet sich besonders gut der Übersichtsartikel von Romagny und Wewers [RW06].

Die geometrische Untersuchung des Hurwitz-Raums mit Hilfe von differentialgeometrischen Methoden beginnt mit der Arbeit von Axelsson, Biswas und Schumacher in [ABS15]. Ausgehend von einer deformationstheoretischen Sichtweise erklären die Autoren eine hermitesche Metrik auf dem Raum $\mathcal{H}^{n,b}$, welche sich aufgrund einer Faser-Integral-Formel als eine Kähler-Metrik herausstellt. In Analogie zur Weil-Petersson-Metrik auf dem Teichmüller-Raum von Riemannschen Flächen bezeichnen sie ihre Metrik als *verallgemeinerte Weil-Petersson-Metrik*. Diese reflektiert auf infinitesimaler Ebene sowohl die Variation der komplexen Struktur der Riemannschen Fläche als auch die Variation der Überlagerung. Ferner studieren sie *verallgemeinerte Hurwitz-Räume* $\mathcal{H}^{n,b}(Y)$, welche einfach verzweigte Überlagerungen $f : X \to Y$ vom Grad n mit b Verzweigungspunkten einer beliebigen kompakten Riemannschen Fläche Y parametrisieren. Diese existieren nach der Arbeit [HGS02] als zusammenhängende, glatte Deligne-Mumford-Stacks von endlichem Typ über $\mathbb{C}$. Da sich die verallgemeinerte Weil-Petersson-Metrik auf jeder Basis einer effektiv parametrisierten Familie von einfachen Überlagerungen einführen lasst und die Konstruktion funktoriell in der Basis ist, induziert die Weil-Petersson-Metrik eine (Orbifold-)Metrik auf dem zugehörigen groben Modulraum des Hurwitz-Stacks $\mathcal{H}^{n,b}(Y)$. Im klassischen Fall von Überlagerungen des $\mathbb{P}^1$ ist eine universelle Familie über dem Hurwitz-Raum $\mathcal{H}^{n,b}$ gegeben, weshalb dieser sich als ein feiner Modulraum herausstellt. Für die Weil-Petersson-Kähler-Form werden in der allgemeinen Situation nun weitere Resultate bewiesen: Die Form stellt sich als Krümmungsform der hermiteschen Metrik auf der Deligne-Paarung des relativen kanonischen Bündels der Faserung und dem Pull-Back des (anti-)kanonischen Bündels auf Y heraus. Alternativ kann die Form auch als die Krümmungsform einer Quillen-Metrik auf einem Determinantenbündel geschrieben werden. Nach einem Resultat aus [Sch12] kann das Determinantenbündel als Geradenbündel auf eine Kompaktifizierung des Hurwitz-Raums fortgesetzt werden, wobei sich auch die Quillenmetrik als eine singuläre hermitesche Metrik fortsetzt. Eine Potenz des Determinantenbündels liefert dann eine Einbettung des kompaktifizierten Hurwitz-Raums in einen projektiven Raum.

Wir kommen nun zum Inhalt der vorliegenden Arbeit. Der Ausgangspunkt ist die Arbeit [ABS15]. Unser Augenmerk liegt hauptsächlich auf dem klassischen Hurwitz-Raum $\mathcal{H}^{n,b}$. Die verallgemeinerten Hurwitz-Räume $\mathcal{H}^{n,b}(Y)$ werden in Form von effektiv parametrisierten Familien von einfachen Überlagerungen $(\beta, f) : \mathcal{X} \to Y \times S$ untersucht. Wir möchten die verallgemeinerte Weil-Petersson-Kähler-Form aus [ABS15] studieren und interessieren uns hierbei vor allem für ihre Krümmung. Wünschenswert ist ein Ausdruck des vollen Krümmungstensors, welcher nur intrinsische Daten enthält, welche sowohl durch die infinitesimale Deformation der komplexen Struktur als auch der Überlagerung an sich gegeben werden. Dies bedeutet technisch, dass sämtliche Ableitungen in Basisrichtung als Ableitungen in Faserrichtung ausgedrückt werden können. Vorbild ist hierbei die kompakte Krümmungsformel für die Weil-Petersson-Metrik auf dem Teichmüller-Raum (siehe z.B. [LSY04]). Mit ihrer Hilfe lässt sich in dieser Situation beispielsweise zeigen, dass die holomorphe Schnittkrümmung als auch die Ricci-Krümmung nach oben durch eine negative Konstante abgeschätzt werden können (siehe [Sch93]). Dies liefert die Hyperbolizität des Teichmüller-Raums.

Der Aufbau der Arbeit ist nun wie folgt: Nach der Einleitung stellen wir im zweiten Kapitel zunächst einige Grundlagen zur Theorie der verzweigten Überlagerungen von Riemannschen Flächen bereit. Hierbei ist der *Riemannsche Existenzsatz* von zentraler Bedeutung. Mit dessen Hilfe geben wir dann eine analytische Konstruktion des klassischen Hurwitz-Raums $\mathcal{H}^{n,b}$ als eine

komplexe quasi-projektive Mannigfaltigkeit der Dimension b zusammen mit einer universellen Familie $(\beta, f) : \mathcal{X} \to \mathbb{P}^1 \times \mathcal{H}^{n,b}$ von einfachen Überlagerungen vom Grad n mit jeweils b Verzweigungswerten. Dazu benötigen wir das Fehlen von nicht trivialen Automorphismen einer einfachen Überlagerungen $X \to \mathbb{P}^1$, was in der allgemeineren Situation $X \to Y$ nicht mehr gilt. Direkt aus der Konstruktion ergeben sich sofort einige Eigenschaften des klassischen Hurwitz-Raums $\mathcal{H}^{n,b}$. Die Tatsache, dass die Automorphismengruppe des $\mathbb{P}^1$ noch auf dem Hurwitz-Raum operiert, ergibt:

Theorem 1.1. *Der Hurwitz-Raum $\mathcal{H}^{n,b}$ ist nicht hyperbolisch.*

Eliminieren wir die Wirkung der PGL(2), indem wir die Verzweigunsgwerte ordnen und drei dieser Werte auf $0, 1$ und ∞ setzen, so erhalten wir den *reduzierten* Hurwitz-Raum $\mathcal{H}^{n,b}_{red}$, welcher unverzweigt über dem Raum $\mathcal{M}_{0,b}$ liegt. Da der Raum der b-fach punktierten rationalen Kurven mit der Menge $[\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}]^{b-3} \setminus \{\text{alle Diagonalen}\}$ (siehe z.B. [Mu99], S. 243) identifiziert werden kann, erhalten wir

Theorem 1.2. *Der reduzierte Hurwitz-Raum $\mathcal{H}^{n,b}_{red}$ ist hyperbolisch.*

In Kapitel 3 entwickeln wir die Deformationstheorie von holomorphen Abbildungen auf der Grundlage von Horikawas Arbeiten [Ho73, Ho74]. Für eine holomorphe Abbildung $f : X \to Y$ ist dabei der Raum der infinitesimalen Deformationen der Abbildung f mit festgehaltenem Y gegeben durch $H^0(X, N_f)$, wobei N_f die *Normalengarbe* der Abbildung bezeichnet. Im Falle einer verzweigten Überlagerung von Riemannschen Flächen stimmt die Normalengarbe mit der Strukturgarbe $\mathcal{O}_R$ des Verzweigungsdivisors R auf X überein. Die holomorphen Schnitte dieser diskreten Garbe sind zur Definition eines inneren Produktes auf dem Raum der infinitesimalen Deformationen $H^0(X, N_f)$ jedoch denkbar ungeeignet. Dieser Raum besitzt nach Horikawa aber auch eine Dolbeault-Beschreibung

Proposition 1.3 ([Ho74])**.** *Für eine nicht ausgeartete holomorphe Abbildung $f : X \to Y$ gilt*

$$H^0(X, N_f) \cong \frac{\{(\xi, \vartheta) \in A^{0,0}(X, f^*T_Y) \times A^{0,1}(T_X) \,:\, \bar{\partial}\xi = f_*\vartheta, \bar{\partial}\vartheta = 0\}}{\{(f_*\zeta, \bar{\partial}\zeta) : \zeta \in A^{0,0}(X, T_X)\}} =: D'_{X/Y}$$

Wir entwickeln die Theorie an dieser Stelle weiter. Um die entprechenden Aussagen formulieren zu könnnen, müssen wir nun etwas Notation einführen. Es sei $(F, p) : \mathcal{X} \to Y \times S$ eine Familie von nicht ausgearteten holomorphen Abbildungen nach Y. Für ein $s_0 \in S$ setzen wir $X = X_{s_0}$ und $f = F|_X : X \to Y$. Die charakteristische Abbildung (Kodaira-Spencer-Abbildung für Deformationen von Abbildungen) an der Stelle $s_0 \in S$ sei mit $\tau_{s_0} : T_{S,s_0} \to D'_{X/Y}$ bezeichnet. Dann bekommen wir

Proposition 1.4. *Sei $\partial/\partial s \in T_{S,s_0}$ ein Tangentialvektor. Wir setzen diesen in einer Umgebung $V \subset S$ von $s_0 \in S$ zu einem holomorphen Vektorfeld fort. Sei $\chi \in \Gamma(p^{-1}(V), \mathcal{A}^{0,0}(T_{\mathcal{X}}))$ ein differenzierbarer Lift dieses Vektorfeldes. Dann wird die Klasse von $\tau_{s_0}(\partial/\partial s)$ in $D'_{X/Y}$ repräsentiert durch das Paar $(F_*(\chi)|_X, \bar{\partial}(\chi)|_X)$.*

Wir betrachten nun spezieller Familien von nicht ausgearteten holomorphen Abbildungen $f_s : X_s \to Y$, bei denen die Fasern X_s kompakte Kähler-Mannigfaltigkeiten sind. Dann besitzt

jede Dolbeault-Klasse in $H^1(X_s, T_{X_s})$ genau einen harmonischen Repräsentanten. Wir fixieren nun wieder eine Faser $X = X_{s_0}$ und die zugehörige Abbildung $f = f_{s_0}$. Der Garbenmonomorphismus $f_* : T_X \to f^*T_Y$ induziert einen Monomorphismus $f_* : A^{0,1}(T_X) \to A^{0,1}(f^*T_Y)$ der globalen $(0,1)$-Fomen. Wir bezeichnen die harmonischen Formen mit $\mathcal{H}^{0,1}(X, T_X)$. Unter der Voraussetzung $H^0(X, T_X) = 0$ erhalten wir

Proposition 1.5.

$$D'_{X/Y} \cong \{\chi \in A^{0,0}(f^*T_Y) \,:\, \bar{\partial}\chi \in f_*(\mathcal{H}^{0,1}(X, T_X))\} =: H_{X/Y}$$

Die Elemente aus $H_{X/Y}$ bezeichnen wir (in nicht ganz korrekter Weise) als *harmonische Repräsentanten.* Diese Beschreibung hat nun weitere Konsequenzen für das Studium der infinitesimalen Deformationen solcher Abbildungen.

Das Kapitel 4 der Arbeit hat schließlich die verallgemeinerte Weil-Petersson-Metrik zum Gegenstand der Betrachtung. Wir erinnern zunächst an die *horizontalen Hochebungen* aus [Sch93], welche die Berechnung der Krümmung im Fall des Teichmüller-Raums deutlich vereinfacht. In Analogie dazu erhalten wir mittels Proposition 1.4 und Proposition 1.5

Proposition 1.6. *Der Push-Forward von horizontalen Hochhebungen von Tangentialvektoren liefert harmonische Repräsentanten der charakteristischen Abbildung.*

Dies erklärt die Bedeutung der Objekte aus [ABS15], welche dort ad hoc zur Definition der Weil-Petersson-Metrik eingeführt wurden. Es wäre nun natürlich, die Weil-Petersson-Metrik als das innere Produkt der differenzierbaren Vektorfelder aus Proposition 1.6 zu erklären. Jedoch zeigt sich, dass dies keine Kähler-Metrik auf dem Hurwitz-Raum liefert. Vielmehr wird die Kähler-Eigenschaft erst durch die Hinzunahme eines zweiten Terms hergestellt, wir er in [ABS15] erklärt ist. Dies deutet auf eine Beschreibung der charakteristischen Abbildung durch den Raum $D'_{X/Y}$ hin. Wir definieren die Weil-Petersson-Metrik dabei etwas allgemeiner als in [ABS15] für eine effektiv parametrisierte Familie von verzweigten Überlagerungen $\beta_s : X_s \to Y$ mit kompakten Riemannschen Flächen X_s und Y, wobei die Fasern X_s stets hyperbolisch seien. Wir verzichten hier auf die Bedingung der Einfachheit, welche für die Metrik keine Rolle spielt. Der Nachweis der Kähler-Eigenschaft erfolgt durch eine direkte Rechnung, wird also nicht wie in [ABS15] aus der Faser-Integral-Formel gefolgert.

Der Rest des Kapitels ist der Berechnung der Krümmung gewidmet. In der Situation des Hurwitz-Raums ist der Ausdruck für den metrischen Tensor wesentlich komplizierter als im Falle des Teichmüller-Raums. Für eine verzweigte Überlagerung $X \to Y$ stehen die hyperbolische Metrik auf X und der Pull-Back einer Metrik von konstanter Ricci-Krümmung auf Y in keinem engen Zusammenhang. Beide Ausdrücke spielen aber im metrischen Tensor der Weil-Petersson-Metrik eine Rolle. Zudem wird ein Tangentialvektor an den Hurwitz-Raum weder durch ein holomorphes Objekt noch durch eine echte harmonische Form repräsentiert. Beides zusammen scheint die Berechnung einer sinnvolen Krümmungsformel unmöglich zu machen. Wir berechnen daher die Krümmung des Bündel $f_*\beta^*T_{\mathbb{P}^1}$ für die universelle Familie $(\beta, f) : \mathcal{X} \to \mathbb{P}^1 \times \mathcal{H}^{n,b}$. Dies ist unter der Voraussetzung $b > 4g-4$ ein holomorphes Unterbündel des Tangentialbündels an den Hurwitz-Raum. Die von der Weil-Petersson-Metrik induzierte Metrik ist dabei faserweise gegeben durch die natürliche L^2-Metrik in $H^0(X_s, \beta_s^*T_{\mathbb{P}^1})$. Die Krümmungsformel lautet

Theorem 1.7.

$$\begin{aligned} R^{WP}_{i\bar{\jmath}k\bar{l}}(s) = & - \int_{X_s} D_k(u_i^w) D_{\bar{l}}(u_{\bar{\jmath}}^{\overline{w}}) h_{w\overline{w}}\, gdA \\ & + \int_{X_s} u_i^w u_{\bar{\jmath}}^{\overline{w}} (\xi_k^w + a_k^z \zeta_z^w)(\xi_{\bar{l}}^{\overline{w}} + a_{\bar{l}}^{\bar{z}} \zeta_{\bar{z}}^{\overline{w}}) h^2_{w\overline{w}}\, gdA \\ & + \int_{X_s} \Box\varphi_{k\bar{l}} u_i^w u_{\bar{\jmath}}^{\overline{w}} h_{w\overline{w}}\, gdA \end{aligned}$$

Dabei kann der erste Term noch in mehrere Terme aufgespalten werden, so dass die expliziten Ableitungen in Basisrichtung komplett verschwinden. Für eine Erklärung der beteiligten Objekte und äquivalente Ausdrucksformen dieser Krümmung siehe Kapitel 4. In der Situation $b > 4g-4$ ist die Abbildung $\mathcal{H}^{n,b} \to \mathcal{M}_g$ eine Submersion auf den glatten offenen Teil des Modulraums, der den Kurven ohne nicht triviale Automorphismen entspricht. Bezeichnen wir diesen Teil mit $\mathcal{M}_g^0$ und ersetzen $\mathcal{H}^{n,b}$ durch den offenen Teil $\mathcal{H}_0^{n,b}$, der vermöge der Projektion $\mathcal{H}^{n,b} \to \mathcal{M}_g$ über $\mathcal{M}_g^0$ liegt, so gilt der Zusammenhang

$$\mathcal{K}^{-1}_{\mathcal{H}_0^{n,b}/\mathcal{M}_g^0} \cong \det(f_*\beta^* T_{\mathbb{P}^1}).$$

(Hierbei betrachten wir die eingeschränkte Familie $(\beta, f) : \mathcal{X}|_{f^{-1}(\mathcal{H}_0^{n,b})} \to \mathbb{P}^1 \times \mathcal{H}_0^{n,b}$.) Die Krümmungsformel für $f_*\beta^* T_{\mathbb{P}^1}$ liefert daher auch eine Krümmungsformel für das relative kanonische Bündel. Die Faser eines Punktes der Projektion $\mathcal{H}_0^{n,b} \to \mathcal{M}_g^0$, welcher die Isomorphieklasse einer Riemannschen Fläche X mit trivialer Automorphismengruppe repräsentiert, bezeichnen wir mit $\mathcal{H}_X$. Dies ist eine komplexe Untermannigfaltigkeit der Dimension $(2n-g+1)$, die uns schon zu Anfang dieser Einleitung begegnet ist. Die Einschränkung des Bündels $f_*\beta^* T_{\mathbb{P}^1}$ auf einen Unterraum $\mathcal{H}_X$ stellt sich als das Tangentialbündel an diesen heraus:

$$f_*\beta^* T_{\mathbb{P}^1}|_{\mathcal{H}_X} = T_{\mathcal{H}_X}.$$

Wir erhalten für diese Unterräume eine Krümmungsformel bezüglich der eingeschränkten Weil-Petersson-Metrik:

Theorem 1.8.

$$\begin{aligned} R_{i\bar{\jmath}k\bar{l}}(s_0) = & - \int G_{\bar{\partial}}(\psi_{ik}) \cdot \psi_{\bar{\jmath}\bar{l}}\, gdA \\ & + \int (\xi_i \cdot \xi_{\bar{\jmath}})(\xi_k \cdot \xi_{\bar{l}})\, gdA \end{aligned}$$

Das positive Vorzeichen vor dem zweiten Integral kommt durch die Metrik positiver Krümmung des $\mathbb{P}^1$ zu Stande. Aufgrund der Theoreme 1.1 und 1.2 wissen wir bereits, dass wir negative Krümmung nur dann erreichen können, falls wir Familien betrachten, bei denen drei der Verzweigungswerte konstant die Werte $0, 1$ und ∞ annehmen. Dies ermöglicht es, an Stelle der positiv gekrümmten Metrik des $\mathbb{P}^1$ eine konstant negativ gekrümmte Metrik des vollständigen hyperbolischen Raumes $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ zu wählen. Dadurch werden aus den Integralen, welche den

metrischen Tensor definieren, uneigentliche Integrale. Die Bedingung der Integrabilität, welche eine entsprechende Krümmungsformel wie in Theorem 1.8 rechtfertigen würde, führt jedoch auf zu starke Restriktionen der beteiligten Objekte. Dies und weitere Aspekte werden in Kapitel 5 diskutiert.

2. Überlagerungen von Riemannschen Flächen

Das erste Kapitel der Arbeit dient der Einführung des Hurwitz-Raums $\mathcal{H}^{n,b}$ von einfachen Überlagerungen der Riemannschen Zahlenkugel vom Grad n mit b Verzweigungspunkten. Dazu benötigen wir einige Grundlagen aus der Theorie der verzweigten Überlagerungen von Riemannschen Flächen. Wir erinnern zunächst an die Theorie der topologischen Überlagerungen. Darauf aufbauend können wir verzweigte Überlagerungen von kompakten Riemannschen Flächen betrachten. Wir geben viele der allgemein bekannten Resultate ohne Beweis an. Wir verweisen dazu auf [Hat02, Mi95, Ac94, Fo77]. Nach einer kurzen Diskussion von *einfachen* Überlagerungen kommen wir sodann zur Konstruktion des Hurwitz-Raums. Die grundlegende Arbeit von Fulton [Fu69] dient dabei als Referenz, wobei wir auch Überlegungen aus [ABS15] verwenden. Anschließend können wir sofort einige Eigenschaften des Hurwitz-Raums angeben, die sich direkt aus dessen Konstruktion ergeben.

2.1. Topologische Überlagerungen

In diesem Abschnitt erinnern wir an die Klassifikation von Überlagerungen zwischen topologischen Räumen. Diese wird durch die (Konjugations-Klassen von) Untergruppen der Fundamentalgruppe der Basis oder auch durch die Wirkung dieser auf eine Faser der Überlagerung beschrieben. Wir fassen die für uns wichtigsten Resultate (ohne Beweise) zusammen. Wir halten uns in diesem und im kommenden Abschnitt hauptsächlich an [Mi95] mit Ergänzungen aus [Ac94, Fo77, Hat02]. Da wir uns nur für Riemannsche Flächen, also insbesondere Mannigfaltigkeiten, interessieren, sollen alle auftretenden topologischen Raume hinreichend schön sein, d.h. etwa wegzusammenhängend sowie lokal wegzusammenhängend als auch semilokal einfach zusammenhängend (siehe hierzu [Hat02]). Das erspart uns diese Voraussetzungen in einigen der folgenden Aussagen.

Definition 2.1. Seien X, Y topologische Räume. Eine surjektive Abbildung $f : X \to Y$ heißt *unbegrenzte, unverzweigte Überlagerung*, wenn Folgendes gilt:
Jeder Punkt $y \in Y$ besitzt eine offene Umgebung U, so dass sich das Urbild $f^{-1}(U)$ schreiben lässt als

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j,$$

wobei die $V_j, j \in J$, paarweise disjunkte offene Teilmengen von X und zudem alle Abbildungen $f|_{V_j} : V_j \to U$ Homöomorphismen sind.

Bemerkung 2.2. Eine unverzweigte und unbegrenzte Überlagerung ist also eine Überlagerung im Sinne der Topologie. Wir lassen in diesem Kapitel die Begriffe unverzweigt, unbegrenzt weg

und sprechen einfach von Überlagerungen. Im nächsten Abschnitt werden wir auch verzweigte Überlagerungen betrachten.

Für eine Überlagerung $f : X \to Y$ ist die Kardinalität der Faser $f^{-1}(y)$ konstant auf Y, da Y als wegzusammenhängend vorausgesetzt wurde. Diesen Wert nennt man den *Grad* der Überlagerung beziehungsweise seine *Blätterzahl.* Überlagerungen von endlichen Grad heißen *endlich.*

Eine Überlagerung $f : X \to Y$ besitzt die Eigenschaft, dass man Wege $\gamma : [0,1] \to Y$ stets liften kann: Zu jedem $x \in X$ mit $f(x) = \gamma(0)$ existiert genau ein Weg $\tilde{\gamma}$ in X mit $\tilde{\gamma}(0) = x$. Dabei gilt das sogannte *Monodromieprinzip:* Die Hochhebungen homotoper Kurven sind wieder homotop.

Wir kommen nun zur Klassifikation von Überlagerungen einer festen Riemannschen Fläche Y bis auf Isomorphie. Dabei gilt: Ist $f : X \to Y$ eine Überlagerung von zusammenhängenden topologischen Räumen und Y eine Riemansche Fläche, so existiert genau eine komplexe Struktur auf X, so dass $f : X \to Y$ holomorph ist. Aus diesem Grund sind alle unsere Überlagerungen automatisch holomorphe Abbildungen zwischen Riemannschen Flächen. Zwei Überlagerungen $f_1 : X_1 \to Y$ und $f_2 : X_2 \to Y$ heißen *äquivalent,* falls eine biholomorphe Abbildung $g : X_1 \to X_2$ existiert mit $f_2 \circ g = f_1$.

Jede Riemannsche Fläche Y besitzt eine universelle Überlagerung $\tilde{f} : \tilde{X} \to Y$, so dass $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend ist. Die Fundamentalgruppe der Basis $\pi_1(Y, y)$ operiert auf der universellen Überlagerung $\tilde{X}$ wie folgt: Wir fixieren einen Punkt $\tilde{x} \in \tilde{f}^{-1}(y)$. Wir wählen eine geschlossene Kurve γ in y, einen Punkt $x \in \tilde{X}$ sowie eine Hochhebung $\tilde{\gamma}$ von γ mit Anfangspunkt $\tilde{x}$. Für eine Kurve α von $\tilde{x}$ nach x betrachten wir die Hochhebung von $\tilde{f}(\alpha)$, welche in $\tilde{\gamma}(1)$ beginnt. Wir setzen $[\gamma](x)$ als den Endpunkt dieser Hochhebung, was wieder ein Punkt aus der Faser von $\tilde{f}(x)$ ist.

Schränken wir diese Operation auf eine Untergruppe $H \subset \pi_1(Y, y)$ ein, so liefert der Quotient $\tilde{X}/H$ auch eine Überlagerung von Y. Zwei solche Überlagerungen sind isomorph, falls ihre Untergruppen konjugiert zueinander sind. Man erhält auf diese Art und Weise alle Überlagerungen von Y:

Proposition 2.3. *Die Isomorphie-Klassen von zusammenhängenden Überlagerungen von Y entsprechen eineindeutig den Konjugationsklassen von Unterguppen $H \subset \pi_1(Y, y)$.*

Für eine Überlagerug $f : X \to Y$ mit $f(x) = y$ ist $f_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)$ (definiert durch $f_*[u] = [f(u)]$) injektiv. Die Untergruppe $f_*(\pi_1(X, x)) \subset \pi_1(Y, y)$ besteht gerade aus allen Homotopieklassen von geschlossenen Kurven in y, deren Hochhebungen wieder geschlossene Kurven in x sind. Die Konjugationsklasse dieser Untergruppe hängt nicht meht von x ab. Der Grad der Überlagerung ist dann gerade der Index dieser Untergruppe in $\pi_1(Y, y)$. Ein *Automorphismus* (oder auch *Deck-Transformation*) einer Überlagerung $f : X \to Y$ ist eine biholomorphe Abbildung $\varphi : X \to X$ mit $f \circ \varphi = f$. Die Gruppe aller Deck-Transformationen einer Überlagerung $f : X \to Y$ bezeichnen wir mit $\mathrm{Deck}(X/Y)$.

Definition 2.4. Eine Überlagerung $f : X \to Y$ heißt *galoissch* (oder *normal*), falls $\mathrm{Deck}(X/Y)$ transitiv auf jeder Faser von f operiert.

Die universelle Überlagerung $\tilde{f} : \tilde{X} \to Y$ einer Riemannschen Fläche Y ist normal.

Proposition 2.5. *Für eine Überlagerung $f : X \to Y$ mit $f(x) = y$ und $H := f_*(\pi_1(X, x))$ gilt: Deck$(X/Y) \cong N(H)/H$ und f ist normal, falls H eine normale Untergruppe von $\pi_1(Y, y)$ ist. Dabei bezeichnet $N(H)$ den Normalisator von H in $\pi_1(Y, y)$.*

Insbesondere ist die Fundamentalgruppe der Basis $\pi_1(Y, y)$ isomorph zur Deck-Transformationsgruppe Deck$(\tilde{X}/Y)$ der universellen Überlagerung $\tilde{f} : \tilde{X} \to Y$.

Beispiel 2.6. Es sei $D := \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < |z| < 1\}$ die punktierte Einheitskreisscheibe in der komplexen Ebene und $H := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) < 0\}$ die obere Halbebene. Die Abbildung $p : H \to D$ definiert durch $p(z) = \exp(2\pi \mathrm{i} z)$ ist die universelle Überlagerung von D. Durch die Wahl eines Erzeugers identifizieren wir die Fundamentalgruppe von D mit $\mathbb{Z}$. Die Untergruppen sind somit alle von der Form $n\mathbb{Z}, n \geqslant 0$. Für $n = 0$ erhalten wir wieder die universelle Überlagerung $p : H \to D$. Im Fall $n > 0$ erhalten wir die endlichen Überlagerungen $p_n : D \to D, z \mapsto z^n$. Dies sind somit alle Überlagerungen der punktierten Einheitskreisscheibe.

Im Folgenden beschränken wir uns auf endliche Überlagerungen. Sei $f : X \to Y$ eine solche Überlagerung vom Grad n. Wir bezeichnen die Elemente in der Faser von $y \in Y$ mit $x_1, \ldots, x_n$. Jede in y geschlossene Kurve γ besitzt eine Hochhebung $\tilde{\gamma}_i$ nach X mit Anfangspunkt x_i. Die Endpunkte $\tilde{\gamma}_i(1)$ liefern aufgrund der Eindeutigkeit der Hochhebungen wieder die Menge $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Wir setzen $x_{\sigma(i)} = \tilde{\gamma}_i(1)$ und erhalten so eine Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Aufgrund des Monodromiesatzes hängt diese nicht von γ ab. Wir erhalten einen Gruppenhomomorphismus

$$\rho : \pi_1(Y, y) \to \mathcal{S}_n.$$

Diesen bezeichnet man als *Monodromie-Darstellung* der Überlagerung $f : X \to Y$. Die Tatsache, dass X wegzusammenhängend ist, liefert sofort, dass das Bild von ρ eine transitive Untergruppe der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_n$ liefert. Dieses Bild bezeichnen wir mit $M(X/Y)$ und nennen es die *Monodromiegruppe* der Überlagerung.

Beispiel 2.7. Wir betrachten die Überlagerung $p_n : X \to Y$ mit $X = Y = D$ und $p(z) = z^n$. Ist $y = 1/2^n$ der Basispunkt von Y, so besitzt dieser die Urbilder $x_i = \zeta^i/2, i = 1, \ldots, n$, falls ζ eine primitive n-te Einheitswurzel ist. Der Erzeuger $\gamma(t) = \exp(2\pi \mathrm{i} t)/2^n, t \in [0, 1]$ besitzt die Hochhebungen $\tilde{\gamma}_i(t) = \zeta^i \exp(2\pi \mathrm{i} t)/2$ mit Anfangspunkt $\zeta^i/2$ und Endpunkt ζ^{i+1}. Die Monodromie-Darstellung ρ dieser Überlagerung bildet den Erzeuger $[\gamma]$ somit auf die zyklische Permutation ab, welche i auf $i + 1$ abbildet.

Eine Untergruppe H der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_n$ heißt *regulär*, falls das einzige Element aus H, welches Fixpunkte besitzt, die Identität ist. Die Decktransformationsgruppe Deck(X/Y) einer Überlagerung $f : X \to Y$ vom Grad n ist isomorph zu einer regulären Untergruppe der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_n$. Falls die Überlagerung $f : X \to Y$ normal ist, so ist auch die Monodromiegruppe $M(X/Y)$ eine reguläre Untergruppe der $\mathcal{S}_n$. Weiter gilt:

Proposition 2.8. *Ist $f : X \to Y$ eine normale Überlagerung mit $f(x) = y$, so sind die Gruppen Deck(X/Y) und $M(X/Y)$ beide isomorph zu $\pi_1(Y, y)/f_*\pi_1(X, x)$.*

Für eine Überlagerung $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ sei $f^{-1}(y_0) = \{x = x_0, x_1, \ldots\}$. Weiter setzen wir

$$f_*(\pi_1(X, x)) = \{\gamma \in \pi_1(Y, y) \,|\, \rho(\gamma)(x) = x\} =: D_0$$

und

$$f_*(\pi_1(X, x_i)) = \{\gamma \in \pi_1(Y, y) \mid \rho(\gamma)(x_i) = x_i\} =: D_i$$

Wegen $\tilde{\gamma}_i^{-1}\pi_1(X, x_0)\tilde{\gamma}_i = \pi_1(X, x_i)$ ist $\gamma_i^{-1}D_0\gamma_i = D_i$. Weiter ist

$$\pi_1(Y, y_0) = \gamma_0 D_0 \cup \gamma_1 D_0 \cup \dots$$

die Zerlegung in Rechts-Nebenklassen. $\gamma_i D_0$ ist die Menge aller Kurven, deren Liftungen, welche in x_0 starten, in x_i enden. Der Kern der Monodromie-Darstellung ist dann

$$\ker \rho = \bigcap_i D_i = \bigcap_{\sigma \in \pi_1(Y, y_0)} \sigma^{-1} D_0 \sigma =: N$$

Dies ist die größte normale Untergruppe von $\pi_1(Y, y_0)$, welche in D_0 enthalten ist. Falls die Überlagerung $f : X \to Y$ galoissch ist, so gilt $D_0 = \ker \rho$ und $M(X/Y)$ ist eine reguläre Untergruppe von $\mathcal{S}_n$. Ansonsten betrachten wir die Überlagerung X_N, welche zur Untergruppe $N \subset \pi_1(Y, y_0)$ gehört. Dann ist $Y_N \to Y$ normal mit $\mathrm{Deck}(Y_N/Y) = M(Y/Y)$. Die Fläche Y_N zusammen mit der Überlagerung $Y_N \to Y$ bezeichnen wir als den *Galois-Abschluss* oder *Normalisierung* von $f : X \to Y$.

2.2. Holomorphe Abbildungen als verzweigte Überlagerungen

Seien X, Y Riemannsche Flächen und $f : X \to Y$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung, $a \in X$ und $b = f(x)$. Dann existieren lokale holomorphe Koordinaten z um den Punkt a mit $z(a) = 0$ und w um den Punkt b mit $w(b) = 0$, so dass sich f in diesen Koordinaten lokal um a schreiben lässt als $f(z) = z^k$ für eine natürliche Zahl $k \geqslant 1$. Diese Zahl ist unabhängig von den gewählten lokalen Koordinaten und heißt *Vielfachheit* von f im Punkt a. Wir schreiben $k = \mathrm{mult}_a(f)$. Ist $\mathrm{mult}_a(f) > 1$, so nennen wir a einen *Verzweigungspunkt* von f. Ist $b \in Y$ ein Punkt, so dass das Urbild $f^{-1}(b)$ einen Verzweigungspunkt enthält, so nennen wir b einen *Verzweigungswert* der Abbildung f. Im Sinne der Funktionentheorie ist eine Abbildung zwischen topologischen Räumen $f : X \to Y$ eine *(verzweigte) Überlagerung,* falls f stetig, offen und diskret ist (siehe [Fo77]). Somit ist jede nicht konstante holomorphe Abbildung $f : X \to Y$ zwischen Riemannschen Flächen X und Y eine ggf. verzweigte Überlagerungsabbildung. Ist $f : X \to Y$ sogar eine eigentliche, nicht konstante, holomorphe Abbildung, so ist die Menge der Verzweigungspunkte A abgeschlossen und diskret. Da f eigentlich ist, ist damit auch die Menge der Verzweigungswerte B abgeschlossen und diskret. Es gilt dann folgende

Proposition 2.9. *Seien X, Y Riemannsche Flächen und $f : X \to Y$ eine eigentliche, nicht konstante holomorphe Abbildung. Dann gibt es eine natürliche Zahl n, so dass f jeden Wert $c \in Y$ mit Vielfachheit gerechnet n-mal annimmt.*

Beweis. Siehe [Fo77] □

Die Zahl n aus der Proposition nennt man den *Grad* der Abbildung f. Eine Überlagerung vom Grad n und b Verzweigungswerten bezeichen wir kurz als (n, b)-Überlagerung. Es seien nun X und Y kompakte Riemannsche Flächen. Damit ist eine nicht konstante holomorphe Abbildung

$f : X \to Y$ vom Grad n automatisch eigentlich und eine (verzweigte) Überlagerung. Es sei $A \subset X$ die endliche Menge aller Verzweigungspunkte von f und $B \subset Y$ die endliche Menge aller Verzweigunsgwerte von f. Wir setzen $Y' := Y \setminus B$ und $X' = X \setminus f^{-1}(B)$. Dann ist $f|_{X'} : X' \to Y'$ eine unverzweigte Überlagerung im Sinne der Topologie. Diese eingeschränkte Abbildung besitzt wieder eine Monodromie-Darstellung $\rho : \pi_1(Y', y') \to \mathcal{S}_n$, die wir die Monodromie-Darstellung der holomorphen Abbildung f nennen. Da mit X auch wieder X' zusammenhängend ist, ist das Bild von ρ eine transitive Untergruppe der $\mathcal{S}_n$. Wir betrachten nun die Permutation von ganz speziellen Kurven in X'. Dazu wählen wir einen Verzweigungswert $b \in Y$ und um diesen Punkt eine punktierte offene Umgebung $W^* = W \setminus \{b\}$. Das Urbild von b besteht aus den Punkten $a_1, \ldots, a_k$ mit $1 \leqslant k < n$. Wir wählen W klein genug, so dass $f^{-1}(W)$ aus disjunkten offenen Umgebungen $U_1, \ldots, U_k$ der Punkte $a_1, \ldots, a_k$ besteht, in denen lokale Koordinaten z_j um a_j existieren mit $f(z_j) = z_j^{m_j}$, wobei $m_j = \mathrm{mult}_{a_j}(f)$ die Vielfachheit von f im Punkte a_j ist. Verkleinern wir die Umgebungen $U_j^* = U_j \setminus a_j$ auf punktierte offene Kreisscheiben, so dass auch W^* eine punktierte offene Kreisscheibe bleibt, so ist $f|_{U_j^*}$ als endliche Überlagerung gegeben durch $z_j \mapsto z_j^{m_j}$. Für einen Punkt $y_0 \in W^*$ besteht das Urbild von $f|_{U_j^*} : U_j^* \to W^*$ aus genau m_j Punkten. Wir betrachten nun eine in y_0 beginnende einfach geschlossene Kurve um den Punkt b, welche komplett in W^* verläuft. Eine solche Kurve nennen wir eine *einfache Kurve* um den Punkt b. Die Monodromie-Darstellung dieser Kurve ist nach Beispiel 2.6 eine zyklische Permutation der m_j Urbilder. Mittels eines Weges von y' nach y_0 identifizieren wir die Faser über y_0 mit der Faser über y' und erhalten

Proposition 2.10. *Es sei $f : X \to Y$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung und $b \in Y$ ein Verzweigungswert mit den k Urbildern $a_1, \ldots, a_k$ und $\mathrm{mult}_{a_j}(f) = m_j$. Dann ist die Struktur der Zykelzerlegung der Permutation, welche eine einfache Kurve um b repräsentiert, gegeben durch $(m_1, \ldots, m_k)$.*

In den folgenden zwei Beispielen sei z eine lokale Koordinate auf $\mathbb{C} = \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$ und w eine loakle Koordinate auf $\mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$ mit $z = 1/w$. Wir bezeichnen mit Ram (ramification) die Menge der Verzweigungspunkte und mit Br (branching) die Menge der Verzweigungswerte.

Beispiel 2.11 ([Mi95], Problem III.4 G)**.** Sei $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ mit $f(z) = z^3/(1 - z^2)$. Offenbar ist 0 die einizige Nullstelle. Da diese die Vielfachheit 3 besitzt, gilt $\deg(f) = 3$. Weiter sind 1 und -1 einfache Polstellen. Für den Punkte $z = \infty$ betrachten wir $f(1/w) = w^{-3}/(1 - w^{-2})$ und $1/f(1/w) = (1 - w^{-2})/w^{-3} = w^3(1 - w^{-2}) = w/(w^2 - 1)$ Damit ist auch $w = 0$, also $z = \infty$ eine Polstelle der Vielfachheit 1. Wir bestimmen die Verzweigungspunkte von f:

$$f'(z) = \frac{3z^2(1 - z^2) + z^3(2z)}{(1 - z^2)^2}$$

Es gilt $f'(z) = 0$ genau dann, wenn $z^2(3(1-z^2)+2z^2) = 0$ ist. Somit ist $\mathrm{Ram}(f) = \{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$ mit $\mathrm{mult}_0(f) = 3$ und $\mathrm{mult}_{\sqrt{3}}(f) = \mathrm{mult}_{-\sqrt{3}}(f) = 2$. Ferner ist $\mathrm{Br}(f) = \{0, -3\sqrt{3}/2, 3\sqrt{3}/2\}$. Die Fälle mit $\mathrm{ord}_p(f) \neq 0$ sind $\mathrm{ord}_0(f) = 3$, $\mathrm{ord}_1(f) = \mathrm{ord}_{-1}(f) = \mathrm{ord}_\infty(f) = -1$. Die Riemann-Hurwitz-Formel (siehe Korollar 3.37) liefert in diesem Fall $-2 = 3(-2) + 4$. Die zu den drei Verzweigungswerten zugehörigen Permutationen sind bis auf Konjugation gegeben durch $\sigma_1 = (123), \sigma_2 = (12)$ und $\sigma_3 = (23)$.

Beispiel 2.12 ([Mi95], Problem III.4 H)**.** Sei nun $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ mit $f(z) = -4z^2(z-1)^2/(2z-1)^2$. Die beiden Punkte $z = 0$ und $z = 1$ sind jeweils doppelte Nullstellen. Weiter sind die Punkte $1/2$ und ∞ doppelte Polstellen. Letzteres sieht man auch in w-Koordinaten:
$f(1/w) = -4w^{-2}(w^{-1}-1)^2/(2w^{-1}-1)^2$ und $1/f(1/w) = -w^2(2w^{-1}-1)^2/(4(w^{-1}-1)^2) = -(2-w)^2/(4(1-w^{-1})^2) = -w^2(2-w)^2/(4(1-w)^2)$ Die Abbildung f hat also den Grad 4. Nun suchen wir nach den Verzweigungspunkten:

$$f'(z) = -\frac{(8z(z-1)^2) + 8z^2(z-1)(2z-1)^2 - 16z^2(z-1)^2(2z-1)}{(2z-1)^4}$$

Damit ist $f'(z) = 0$ genau dann, wenn

$$(8z(z-1)^2 + 8z^2(z-1))(2z-1)^2 = 16z^2(z-1)^2(2z-1)$$

Dies ist eine Gleichung vom Grad 5, von der wir 5 Lösungen erwarten. Wir kennen bereits die Lösungen $z_1 = 0, z_2 = 1$ und $z_3 = 1/2$. Teilen wir die Gleichung durch die zugehörigen Linearfaktoten, so bleibt

$$(8(z-1) + 8z)(2z-1) = 16z(z-1)$$

Diese führt noch auf die Lösungen $z_4 = (1+i)/2$ und $(1-i)/2$. Zudem ist auch $z = \infty$ ein Verzweigungspunkt. Wir erhalten $\mathrm{Ram}(f) = \{0, 1, (1+i)/2, (1-i)/2, 1/2, \infty\}$ und $\mathrm{Br}(f) = \{0, 1, \infty\}$. Alle Verzweigungspunkte sind einfach und über jedem Verzweigungswert liegen genau zwei solche Verzweigungspunkte. Die Riemann-Hurwitz-Formel wird zu $-2 = 4(-2) + 6$. Die zu den drei Verzweigungswerten zugehörigen Permutationen in S_4 sind bis auf Konjugation $\sigma_1 = (12)(34), \sigma_2 = (13)(24)$ und $\sigma_3 = (14)(23)$.

Jede Decktransformation von $f|_{X'} : X' \to Y'$ lässt sich zu einer Deck-Transformation von ganz $f : X \to Y$ fortsetzen (siehe [Fo77]). Daher nennen wir eine nicht konstante holomorphe Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei kompakten Riemannschen Flächen *normal.*, falls die zugehörige unverzweigte Überlagerung $f|_{X'} : X' \to Y'$ normal ist. Eine solche Abbildung f ist *gleichverzweigt*, d.h. die k Urbilder eines Verzweigungswertes sind alles Verzweigungspunkte mit der Vielfacheit n/k.

Wir betrachten nun eine kompakte Riemannsche Fläche Y zusammen mit einer endlichen Teilmenge $B \subset Y$. Wählen wir einen Basispunkt $y \in Y \setminus B$, so möchten wir nun umgekehrt aus einem Gruppenhomomorphismus $\rho : \pi_1(Y \setminus B, y) \to \mathcal{S}_n$ mit transitivem Bild eine holomorphe Abbildung $f : X \to Y$ vom Grad n mit kompaktem X erhalten, deren Verzweigungswerte in B enthalten sind. Dies geschieht wie folgt: Wir fixieren einen Index, z.B. 1 und betrachten

$$H = \{[\gamma] \in \pi_1(Y \setminus B, y) \mid \rho([\gamma])(1) = 1\}.$$

Dann ist H eine Untergruppe von $\pi_1(Y', y)$ vom Index n, zu der nach der Theorie der topologischen Überlagerungen eine zusamennhängende Überlagerung $f_\rho : X'_\rho \to Y'$ gehört, wobei X'_ρ wieder eine Riemannsche Fläche und f_ρ holomorph ist. Eine Umnummerierung der Punkte in der Faser der Überlagerung liefert eine isomorphe Überlagerung und entspricht einem konjugierten Gruppenhomomorphismus. Wir können die unverzweigte Überlagerung $f_\rho : X'_\rho \to Y'$ zu einer (über B) verzweigten Überlagerung $f_\rho : X_\rho \to Y$ fortsetzen, indem wir die Struktur der

Zykel-Zerlegung von einfachen Kurven um die Punkte $b \in B$ untersuchen. Diese liefert nämlich gerade die Potenzen m_j, mit der eine kreisförmige punktierte Umgebung U_j^* auf eine ebensolche Umgebung W^* um den Punkt $b \in B$ vermöge $z \mapsto z^{m_j}$ abgebildet wird. Zudem liefert dies sogenannte Lochkarten auf X', mit denen wir die Lücken in U_j^* schließen können und die Überlagerung $z \mapsto z^{m_j}$ von $W^* = W \setminus b$ zu einer verzweigten Überlagerung $U_j \to W, z \mapsto z^{m_j}$ fortsetzen können. Insgesamt erhalten wir so eine eigentliche holomorphe Abbildung $f_\rho : X \to Y$, die höchstens über B verzweigt ist. Die Tatsache, dass Y kompakt ist, liefert nun auch, dass X kompakt ist. Eine Punkt $b \in B$ liefert dann keinen Verzweigungspunkt, falls die zyklische Struktur der einfachen Kurve um b gegeben ist durch $(1, \ldots, 1)$. Wir erhalten somit insgesamt

Proposition 2.13. *Es sei Y eine kompakte Riemannsche Fläche, $B \subset Y$ eine endliche Teilmenge und $y \in Y \setminus B$ ein Punkt. Dann entsprechen den Isomophie-Klassen von eigentlichen holomorphen Abbildungen $f : X \to Y$ vom Grad n, deren Verweigungswerte in B liegen, genau den Konjugationsklassen von Gruppenhomomorphismen $\rho : \pi_1(Y \setminus B, y) \to \mathcal{S}_n$, deren Bild eine transitive Unterguppe von $\mathcal{S}_n$ liefert.*

Zusammenfassend formulieren wir nun

Proposition 2.14. *(Riemannscher Existenzsatz) Es sei $B \subset Y$ eine endliche Teilmenge einer kompakten Riemannschen Fläche X. Weiter sei $y \in Y \setminus B$ und n eine natürliche Zahl. Dann stehen folgende Mengen zueinander in Bijektion:*

(i) Äquivalenzklassen von n-blättrigen verzweigten Überlagerungen von Y, deren Verzweigungswerte in B enthalten sind.

(ii) Äquivalenzklassen von n-blättrigen unverzweigten topologischen Überlagerungen von $Y \setminus B$.

(iii) Konjugationsklassen von Gruppenhomomorphismen $\pi_1(Y \setminus B, y) \to \mathcal{S}_n$, deren Untergruppe transitiv ist.

(iv) Konjugationsklassen von Untergruppen von $\pi_1(Y \setminus B, y)$ vom Index n.

Wir interessieren uns besonders für den Fall $Y = \mathbb{P}^1$. Fixieren wir r Punkte $b_1, \ldots, b_r \in \mathbb{P}^1$, so ist die Fundamentalgruppe von $Y' = \mathbb{P}^1 \setminus \{b_1, \ldots, b_r\}$ bekanntlich eine freie Gruppe in r Erzeugern $[\gamma_1], \ldots, [\gamma_r]$, welche der Relation

$$[\gamma_1][\gamma_2] \cdots [\gamma_r] = 1$$

genügen. Dabei ist $[\gamma_i]$ die Homotopie-Klasse einer einfachen Kurve um den Punkt b_i. Wählen wir einen Basispunkt $y \in Y'$, so ist ein Gruppen-Homomorphismus $\rho : \pi_1(Y', y) \to \mathcal{S}_n$ somit gegeben durch die Wahl von r Permutationen $\sigma_i = \rho([\gamma_i])$, so dass

$$\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_r = 1.$$

Wir erhalten

Korollar 2.15. *Für eine endliche Menge $B = \{b_1, \ldots, b_r\} \subset \mathbb{P}^1$ entsprechen den Isomorphie-Klassen von eigentlichen holomorphen Abbildungen $f : X \to \mathbb{P}^1$ vom Grad n, deren Verzweigungswerte in B liegen, genau die Konjugationsklassen von r-Tupel $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ von Permutationen in $\mathcal{S}_n$ mit $\sigma_1 \cdots \sigma_r = 1$, so dass die von ihnen erzeugte Untergruppe transitiv ist.*

2.3. Einfache Überlagerungen

Definition 2.16. Eine nicht konstane holomorphe Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei kompakten Riemannschen Flächen X und Y heißt *einfach*, falls über jedem Verzweigungswert $b \in Y$ genau ein Verzweigungspunkt $a \in X$ liegt, so dass die Abbildung f den Punkt b in a mit der Vielfachheit zwei annimmt: $\mathrm{mult}_a(f) = 2$.

Ist $f : X \to Y$ eine einfache Überlagerung mit Verzweigungspunkt $b \in Y$, so betrachten wir eine einfach geschlossene Kurve um b, welche ansonsten keine Verzweigungspunkte von f umläuft, also eine einfache Kurve um den Punkt b. Die durch die Monodromie-Darstellung gegebene Permutation ist dann eine Transposition. Diese vertauscht gerade die Punkte aus der Faser des Basispunktes, die in den beiden Blättern der Überlagerung liegen und sich in dem Verzweigungspunkt über b treffen. Eine transitive Untergruppe der $\mathcal{S}_n$, welche von Transpositionen erzeugt wird, ist schon die gesamte symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_n$. Aus der Riemann-Hurwitz-Formel (siehe Abschnitt 3.6) folgt, dass für eine einfache Überlagerung $f : X \to \mathbb{P}^1$ vom Grad n mit b Verzweigungspunkten und -werten die Fläche X das Geschlecht $(b - 2n + 2)/2$ besitzt und die Anzahl der Verzweigungspunkte gerade sein muss. Wir erhalten somit eine Verschärfung von Korollar 2.15:

Proposition 2.17. *Für eine endliche Menge $B = \{b_1, \ldots, b_r\} \subset \mathbb{P}^1$ entsprechen den Isomorphie-Klassen von einfachen Überlagerungen $f : X \to \mathbb{P}^1$ vom Grad n, deren Verzweigungswerte in B liegen, genau die Konjugationsklassen von r-Tupel $(\tau_1, \ldots, \tau_r)$ von Transpositionen in $\mathcal{S}_n$ mit $\tau_1 \cdots \tau_r = 1$, so dass die von ihnen erzeugte Untergruppe die gesamte $\mathcal{S}_n$ ergibt.*

Nun geben wir noch ein wichtiges Resultat für einfache Überlagerungen, welches uns die Existenz einer universellen Familie von einfachen Überlagerungen des $\mathbb{P}^1$ liefern wird:

Proposition 2.18. *Es sei $n > 2$ und $f : X \to \mathbb{P}^1$ eine n-blättrige einfache Überlagerung. Ist $\varphi : X \to X$ ein Automorphismus von X mit $f \circ \varphi = f$, so ist φ bereits die Identität.*

Beweis. (nach [ABS15]) Der Automorphismus φ muss die Verzweigungspunkte fest lassen, somit ist $\varphi \circ \varphi$ in einer Umgebung der Verzeigungspunkte die Identität. Falls $\varphi \neq \mathrm{id}$, so ist φ eine Involution, welche unter anderem die beiden Blätter ineinander überführt, die sich in den Verzweigungspunkten treffen. Der Quotient X/φ liefert eine unverzweigte Überlagerung von $\mathbb{P}^1$ und ist damit schon selbst isomorph zu $\mathbb{P}^1$. Daher muss im Fall $\varphi \neq \mathrm{id}$ der Grad $n = 2$ sein. $\square$

Ein alternativer Beweis verläuft über den Galois-Abschluss $\overline{f} : \overline{X} \to \mathbb{P}^1$, welcher die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_n$ als Galois-Gruppe besitzt. Dieser dominiert die Überlagerung $f : X \to Y$, d.h. es gibt eine Überlagerung $g : \overline{X} \to X$ vom Grad $(n-1)!$, do dass $\overline{f} = f \circ g$. Die Überlagerung $g : \overline{X} \to X$ ist normal mit der Galois-Gruppe $\mathcal{S}_{n-1}$. Da der Normalisator der $\mathcal{S}_{n-1}$ in der $\mathcal{S}_n$ für $n > 2$ wieder nur die Gruppe $\mathcal{S}_{n-1}$ liefert, ergibt sich aus Proposition 2.5, dass die Gruppe der Deck-Transformationen von $f : X \to Y$ nur aus der Identität besteht.

2.4. Konstruktion des Hurwitz-Raums

Wir kommen nun zur Konstruktion des Hurwitz-Raums $\mathcal{H}^{n,b}$ aller einfachen Überlagerungen der Riemannschen Zahlenkugel vom Grad n mit b Verzweigungspunkten und -werten.

Zunächst arbeiten wir allgemein mit einer kompakten Riemmanschen Fläche Y vom Geschlecht $g(Y)$. Weiter sei b eine natürlich Zahl. Wir betrachten das b-fache direkte Produkt Y^b, auf dem die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_b$ operiert. Der Quotient ist das b-fache symmetrische Produkt von Y und eine kompakte Mannigfaltigkeit der Dimension b. Wir bezeichnen diese mit $Y^{(b)}$. Im Falle von $Y = \mathbb{P}^1$ ist $Y^{(b)} = \mathbb{P}^b$ der komplex-projektive Raum der Diemsion b. Allgemein identifizieren wir die Punkte von $Y^{(b)}$ mit ungeordneten b-Tupeln von Punkten aus Y. Die b-Tupel mit weniger als b verschiedenen Punkten bilden den sogenannten *Diskriminanten-Ort* Δ von $Y^{(b)}$. Sei nun $H(n, b, Y)$ die Menge aller Äquivalenz-Klassen von (n, b)-Überlagerungen $\beta : X \to Y$ und $\delta : H(n, b, Y) \to Y^{(b)} \setminus \Delta$ die Abbildung, welche der Klasse einer Überlagerung ihre Verzweigungswerte zuordnet. Diese ist wohldefiniert. Für eine Menge von Verzweigungswerten $B = \{p_1, \ldots, p_b\}$ besteht das Urbild $\delta^{-1}(B)$ aus allen (n, b)-Überlagerungen von Y, die über der Menge B verzweigt sind. Diese bezeichnen wir mit $H(n, B, Y)$. Wir erklären nun eine Topologie auf der Menge $H(n, b, Y)$, so dass δ zu einer endlichen, unverzweigten Überlagerung wird: Für eine feste Überlagerung $\beta : X \to Y$ mit Verzweigungspunkten $p_1, \ldots, p_b$ wählen wir paarweise disjunkte offene Kreisscheiben $D_1, \ldots, D_b$ um die Punkte $p_1, \ldots, p_b$. Für eine Tupel $q := (q_1, \ldots, q_b) \in D_1 \times \cdots D_b$ wählen wir einen Homomorphismus $\alpha : Y \to Y$, welcher p_j auf q_j abbildet und außerhalb der Kreisscheiben D_j die Identität ist. Wir setzen $\beta_q := \alpha \circ \beta$, was zunächst nur eine stetige Abbildung von X nach Y ist, wobei wir X und Y jetzt als topologische Räume auffassen. Da diese über $Y \setminus \{q_1, \ldots, q_b\}$ unverzweigt ist, gibt es nach dem Riemannschen Existenzsatz eine eindeutige komplexe Struktur auf X, so dass $\beta_q : X \to Y$ eine über den Punkten $q_1, \ldots, q_b$ verzweigte holomorphe (n, b)-Überlagerung wird. Diese hängt nicht von der Abbildung α ab, da die fortgesetzte holomorphe Abbildung β_q selbst nur von der Klasse des Gruppenhomomorphismus' $\pi_1(Y \setminus \{p_1, \ldots, p_b\}, y) \to \mathcal{S}_n$ abhängt und $Y \setminus \{p_1, \ldots, p_b\}$ sowie $Y \setminus \{q_1, \ldots, q_b\}$ als Deformationsretrakte von $Y \setminus \{D_1 \cup \ldots \cup D_b\}$ isomorphe Fundamentalgruppen besitzen. Daher hängt die Klasse von β_q selbst nur von q ab. Die Abbildungen β_q für $q \in D$ haben topologisch gesehen somit alle den gleichen Totalraum X und auch dieselbe Monodromie-Darstellung $\pi_1(Y \setminus \{q_1, \ldots, q_b\}) \to \mathcal{S}_n$. Die Mengen

$$U(\beta; D_1, \ldots, D_b) := \{\beta_q \ : \ q \in D_1 \times \cdots \times D_b\}$$

bilden die Basis einer Topologie auf $H(n, b, Y)$, so dass die Abbildung $U(\beta, D_1, \ldots, D_b) \to D_1 \times \cdots \times D_b$ ein Homöomorphismus ist. Bezeichnen wir mit D das Bild von $D_1 \times \cdots \times D_b$ in $Y^{(b)}$, dann bilden diese Mengen eine Basis der Quotiententoplogie auf $Y^{(b)}$. Weiter sehen wir, dass die Abbildung $\delta : H(n, b, Y) \to Y^{(b)} \setminus \Delta$ dadurch zu einer endlichen topologischen, also unverzweigten Überlagerung wird. Die Menge D bildet dabei eine Elementarumgebung des Tupels $B = (p_1, \ldots, p_b)$. Die Faser $\delta^{-1}(B)$ entspricht den Konjugationsklassen von Gruppenhomomorphismen $\pi_1(Y \setminus \{p_1, \ldots, p_b\}, y) \to \mathcal{S}_n$ und ist damit insbesondere auch endlich. Punkte aus $H(n, Q, Y)$ und $H(n, b, Q')$ für $Q, Q' \in D$ liegen in der gleichen Zusammenhangskomponente von $\delta^{-1}(D)$, falls der zugehörige Gruppenhomomorphismus $\pi_1(Y \setminus Q', y) \to \mathcal{S}_n$ durch $\pi_1(Y \setminus Q, y) \cong \pi_1(Y \setminus Q', y)$ bis auf Konjugation vom zugehörigen Homomorphismus

$\pi_1(Y \setminus Q, y) \to \mathcal{S}_n$ induziert ist. Somit können wir die Menge $H(n, b, Y)$ mit einer eindeutigen komplexen Struktur versehen, so dass $\delta : H(n, b, Y) \to Y^{(b)} \setminus \Delta$ holomorph wird. Damit wird $H(n, b, Y)$ zu einer (nicht kompakten) komplexen Mannigfaltigkeit, welche im Falle $n > 2$ nicht mehr zusammenhängend ist.

Wir kommen nun zum klassischen *Hurwitz-Raum* $\mathcal{H}^{n,b}$. Dieser besteht als Menge aus allen Äquivalenzklassen von einfachen (n, b)-Überlagerungen $\beta : X \to \mathbb{P}^1$. In diesem Fall besagt die Riemann-Hurwitz-Formel, dass die Anzahl der Verzweigungspunkte $b = 2g(X)+2n-2$ ist. Daher muss b nun eine gerade Zahl sein und mindestens $2n-2$, damit solche Überlagerungen existieren. Zudem ist das Geschlecht $g(X)$ des Totalraums durch die Werte von n und b festgelegt. Es ist $\mathcal{H}^{n,b}$ eine offene und abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von $H(n, b, \mathbb{P}^1)$ und die Einschränkung von δ wird wieder zu einer endlichen, unverzweigten Überlagerung $\delta : \mathcal{H}^{n,b} \to \mathbb{P}^b \setminus \Delta$. Es gilt die

Proposition 2.19. *(Clebsch, Hurwitz) Der Hurwitz-Raum $\mathcal{H}^{n,b}$ ist zusammenhängend.*

Beweis. Siehe [ACG11] oder [Fu69]. □

Damit wird $\mathcal{H}^{n,b}$ zu einer (nicht kompakten) zusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeit der Dimesnion b, welche unverzweigt über einer quasi-projektiven Varietät liegt. Damit gilt weiter (siehe [HM98])

Proposition 2.20. *Der Hurwitz-Raum $\mathcal{H}^{n,b}$ ist eine quasi-projektive komplexe Mannigfaltigkeit der Diemsnion b.*

Wir möchten nun eine *universelle Familie* $(\beta, f) : \mathcal{X} \to \mathbb{P}^1 \times \mathcal{H}^{n,b}$ über dem Hurwitz-Raum konstruieren, so dass eine Faser $\beta_s : X_s \to \mathbb{P}^1$ die einfache (n, b)-Überlagerung $s \in \mathcal{H}^{n,b}$ repräsentiert. Folgendes Beispiel aus [Fu69] zeigt, dass dies für $n = 2$ nicht möglich ist:

Beispiel 2.21. Es ist $\mathcal{H}^{2,b} = \mathbb{P}^b \setminus \Delta$. Der Kandidat für eine universelle Familie ist

$$\mathcal{X} = \{[x : y : z] \times [a_0 : \ldots : a_b] \in \mathbb{P}^2 \times \mathcal{H}^{2,b} \mid z^2 y^{b-2} = \sum_{i=0}^{b} a_i x^i y^{b-i}\},$$

wobei $\beta_s : X \to \mathbb{P}^1$ gegeben ist durch die Projektion auf $[x : y]$. Diese ist jedoch nicht universell. Um dies zu sehen, fixieren wir b verschiedene komplexe Zahlen $p_1, \ldots, p_b$. Wir betrachten die Basis $S = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und darüber die Menge

$$Z = \{[x : y : z] \times t \in \mathbb{P}^2 \times S \mid z^2 y^{b-2} = t(x - p_1 y) \cdots (x - p_b y)\}$$

mit der Abbildung $g : Z \to \mathbb{P}^1 \times S$ definiert durch $g([x : y : z], t) = ([x : y], t)$. Aufgrund der lokalen Existenz einer holomorphen Wurzel für jedes $s \in S$ ist diese Familie lokal trivial. Insbesondere sind alle Fasern isomorph zur Überlagerung g_1. Die natürliche Abbildung von S nach $\mathcal{H}^{2,b}$ ist also konstant. Wäre die Familie über $\mathcal{H}^{2,b}$ universell, so wäre die Familie über S ein Pull-Back der universellen Familie unter der konstanten Abbildung, also global trivial. Die Familie über S ist jedoch nicht global trivial, da auf S keine holomorphe Wurzelfunktion existiert.

Wir betrachten nun den Fall $n > 2$ und verwenden wieder die Notation von vorher. Für eine feste einfache (n, b)-Überlagerung $\beta_p : X \to \mathbb{P}^1$ mit dem Verzweigungswerte-Tupel $p = (p_1, \ldots, p_b)$ betrachten wir die Menge der Überlagerungen

$$U(\beta; D_1, \ldots, D_b) := \{\beta_q : X_q \to \mathbb{P}^1 \ : \ q \in D_1 \times \cdots \times D_b\}.$$

Wir versehen die disjunkte Vereinigung

$$\mathcal{X} := \dot{\bigcup_{q \in D}} X_q$$

der Riemannschen Flächen X_q mit einer komplexen Struktur, so dass die Abbildung $f : \mathcal{X} \to U(\beta), X_q \ni x \mapsto q$ eigentlich und holomorph wird, faserweise die komplexe Struktur von X_q aber erhalten bleibt. Wir erhalten somit lokal um jeden Punkt unseres Hurwitz-Raumes eine Familie $(\beta, f) : \mathcal{X} \to \mathbb{P}^1 \times U(\beta_p)$. Aufgrund von Proposition 2.18 existieren im Fall von einfachen Überlagerugen des $\mathbb{P}^1$ mit der Blätterzahl $n > 2$ keine nicht trivialen Automorphismen. Daraus folgt, dass auch die Isomorphismen zwischen zwei äquivalenten einfachen (n, b)-Überlagerungen $X \to \mathbb{P}^1$ und $X' \to \mathbb{P}^1$ eindeutig sind. Die lokalen Familien über den Umgebungen $U(\beta_p)$ können somit zu einer globalen Familie über dem Hurwitz-Raum $\mathcal{H}^{n,b}$ verklebt werden. Diese bezeichnen wir wieder mit

$$(\beta, f) : \mathcal{X} \to \mathbb{P}^1 \times \mathcal{H}^{n,b}.$$

Bemerkung 2.22. In seiner Arbeit [Fu69] konstruiert Fulton den Hurwitz-Raum der einfachen algebraischen (n, b)-Überlagerungen als ein Schema über $\mathbb{Z}$, indem er zeigt, dass der zugehörige Hurwitz-Funktur darstellbar ist. Er bemerkt zudem, dass der soeben konstruierte Hurwitz-Raum $\mathcal{H}^{n,b}$ ein universelles Objekt in der Kategorie der komplexen Räume darstellt. Die von uns konstruierte Familie $(\beta, f) : \mathcal{X} \to \mathbb{P}^1 \times \mathcal{H}^{n,b}$ ist also eine *universelle Familie* von einfachen (n, b)-Überlagerungen.

2.5. Eigenschaften des Hurwitz-Raums

Wir führen in Kapitel 3 der Arbeit in Analogie zum Teichmüller-Raum eine Weil-Petersson-Metrik auf dem Hurwitz-Raum ein, welche sich als eine Kähler-Metrik herausstellt. Aus Sicht der Differentialgeometrie stellt sich sofort die Frage nach der Krümmung dieser Metrik, insbesondere auch die Frage nach Hyperbolizität. Dazu können wir a priori schon einige Bemerkungen machen. Der Hurwitz-Raum $\mathcal{H}^{n,b}$ wurde als eine endliche, unverzweigte Überlagerung der quasi-projektiven Varietät $\mathbb{P}^b - \Delta$ konstruiert, wobei Δ den Diskriminaten-Ort in $\mathbb{P}^b = (\mathbb{P}^1)^{(b)}$ beschreibt. Für jede einfache (n, b)-Überlagerung $\beta_0 : X \to \mathbb{P}^1$ und jeden Automorphismus $\alpha : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ ist die Abbildung $\alpha \circ \beta_0 : X \to \mathbb{P}^1$ wieder eine einfache (n, b)-Überlagerung, die im Falle von $\alpha \neq \mathrm{id}$ nicht wieder äquivalent zu β_0 ist. Somit operiert die dreidimensionale komplexe Lie-Gruppe $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1) = \mathrm{PGL}(2)$ auf dem Hurwitz-Raum $\mathcal{H}^{n,b}$. Nun gilt folgender Satz (siehe [Ko70], S.68):

Theorem 2.23. *Eine zusammenhängende komplexe Lie-Gruppe, die holomorph und effektiv auf einer hyperbolischen Mannigfaltigkeit operiert, besteht nur aus der Identiät.*

Damit bekommen wir:

Proposition 2.24. *Der Hurwitz-Raum $\mathcal{H}^{n,b}$ ist nicht hyperbolisch.*

Nun gilt für hyperbolische Mannigfaltigkeiten auch folgende Aussage (siehe [Ko70], S.57):

Theorem 2.25. *Sind M und $\tilde{M}$ komplexe Mannigfaltigkeiten und ist $\tilde{M}$ eine unverzweigte Überlagerung von M, so ist M genau dann hyperbolisch, falls $\tilde{M}$ hyperbolisch ist.*

Damit erhalten wir auch

Korollar 2.26. *Die quasi-projektive Varietät $\mathbb{P}^b \setminus \Delta$ ist nicht hyperbolisch.*

Es stellt sich somit die Frage, ob wir Hyperbolizität erreichen können, falls wir die Wirkung von $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ eliminieren können. Dazu verlegen wir unsere Sichtsweise in eine andere Kategorie. Wir betrachten zwei Überlagerungen $f : X \to Y$ und $f' : X' \to Y$ als äquivalent, falls biholomorphe Abbildungen $\varphi : X \to X'$ und $\psi : Y \to Y$ existieren mit $f' \circ \varphi = \psi \circ f$. Damit eliminieren wir im Fall von $Y = \mathbb{P}^1$ tatsächlich die Wirkung von $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$. Wir betrachten die Verzweigungswerte $P_1, \ldots, P_b$ nun als ein geordnetes b-Tupel. Durch die Tatsache, dass die Gruppe der Möbiustransformationen $\mathrm{PGL}(2)$ exakt dreifach transitiv auf dem $\mathbb{P}^1$ operiert, können wir erreichen, dass $P_{b-2} = 0, P_{b-1} = 1$ und $P_b = \infty$ gilt. Wir konstruieren den sogenannten *reduzierten Hurwitz-Raum* $\mathcal{H}^{n,b}_{red}$ nun als endliche und unverzweigte Überlagerung von

$$[(\mathbb{P}^1)^b \setminus \bigcup_{i<j} \Delta_{ij}]/\,\mathrm{PGL}(2) \cong (\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\})^{b-3} \setminus \Delta_{b-3},$$

wobei Δ_{b-3} die schwache Diagonale bezeichnet. Dies ist die Sichtweise von [HM82]. Nun ist der Raum $\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$ bekanntermaßen hyperbolisch. Damit ist auch $(\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\})^{b-3} \setminus \Delta_{b-3}$ hyperbolisch und aufgrund von Theorem 2.25 bekommen wir

Korollar 2.27. *Der reduzierte Hurwitz-Raum $\mathcal{H}^{n,b}_{red}$ ist hyperbolisch.*

Der reduzierte Hurwitz-Raum $\mathcal{H}^{n,b}_{red}$ ist eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension $b-3 = 2n+2g-5$ (vgl. [Na79], S.162).

Bemerkung 2.28. Der Begriff *reduzierter Hurwitz-Raum* taucht zuerst in der arithmetischen Theorie auf (siehe [DF99, BF02, Ca08]). Anders als hier betrachtet man dort die Verzweigungspunkte aber stets als ungeordnetet. Teils betrachtet man den Hurwitz-Raum auch von vornherein als reduziert modulo den Automorphismen des $\mathbb{P}^1$ ([Pa13]).

Jede kompakte Riemannsche Fläche X lässt sich als eine einfache n-blättrige Überlagerung des $\mathbb{P}^1$ realisieren, falls n hinreichend groß ist. Ein geometrisches Argument dazu geht wie folgt (siehe [ACG11], S. 863): Wir wählen eine Einbettung

$$\phi : X \to \mathbb{P}^r, \quad r \geqslant 3,$$

von X als eine komplexe Kurve vom Grad n. Dazu genügt $n \geqslant 2g(X)+1$. Projizieren wir X generisch auf einen $\mathbb{P}^2$, so ist die Bildkurve C eine ebene Kurve vom Grad n mit höchstens

gewöhnlichen Doppelpunkten als Singularitäten. Da C nur eine endliche Anzahl von Wendepunkten und Bitangenten besitzt, liefert eine allgemeine Projektion auf einen $\mathbb{P}^1$ die gewünschte Darstellung als eine n-blättrige einfach verzweigte Überlagerung des $\mathbb{P}^1$. Mittels geeigneter Linearsysteme und Riemann-Roch lässt sich sogar Folgendes beweisen (siehe [Fu69]):

Proposition 2.29. *Es sei X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g. Ist $n \geqslant g+1$, so existiert eine n-blättrige einfache Überlagerung $f : X \to \mathbb{P}^1$ mit $b = 2g + 2n - 2$ Verzweigungswerten.*

Es sei $\mathcal{M}_g$ der Modulraum der kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht g. Die vorangegangene Proposition liefert nun

Theorem 2.30. *Die natürliche Abbildung*

$$s : \mathcal{H}^{n,b} \to \mathcal{M}_g,$$

welche der Klasse einer Überlagerung $f : X \to \mathbb{P}^1$ die Isomorphieklasse $[X]$ des Totalraums zuordnet, ist holomorph und für $n > g$ surjektiv.

3. Deformationstheorie von Abbildungen

In diesem Kapitel stellen wir die Deformationstheorie von holomorphen Abbildungen zwischen komplexen Mannigfaltigkeiten dar, wie sie von Horikawa in [Ho73, Ho74] entwickelt wurde. Als Vorbild dient dabei die Deformationstheorie komplexer Strukturen nach Kodaira und Spencer, an die wir zunächst erinnern werden. Wie im absoluten Fall lässt sich auch in der relativen Situation der Raum der infinitesimalen Deformationen einer holomorphen Abbildung als Kohomologiegruppe einer kohärenten Garbe lesen. In diesem Fall sind dies die globalen holomorphen Schnitte der Normalengarbe N_f der betrachteten holomorphen Abbildung $f : X \to Y$. Um Metriken auf den Basen von Familien von komplexen Mannigfaltigkeiten zu erklären, ist es von entscheidender Wichtigkeit, die Klassen von $H^1(X_s, T_{X_s})$ mittels Hodge-Theorie durch harmonische $(0,1)$-Formen mit Werten im Tangentialbündel zu realisieren (siehe hierzu [Sch93]). Erst diese globalen Objekte ermöglichen es, eine Weil-Petersson-Metrik auf der Basis zu erklären. Daher kommt in der relativen Situation dem besseren Verständnis des Raums $H^0(X, N_f)$ eine besondere Bedeutung zu. Wir stellen eine Möglichkeit vor, wie sich die Elemente dieses Raums mittels der Geometrie von X als differenzierbare Vektorfelder mit Werten im zurückgezogenen Tangentialbündel f^*T_Y schreiben lassen, deren äußere Ableitung in die konjugierte Richtung von einer harmonischen $(0,1)$-Form mit Werten in T_X herkommt. Dies hat weitere Konsequenzen für das Studium der infinitesimalen Deformationen von $f : X \to Y$. Damit wird dieser Abschnitt zu einem Kernbestandteil der vorliegenden Arbeit.

3.1. Notationen und Vorbereitungen

Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit, L ein holomorphes Geradenbündel auf X. Sei weiter $\mathcal{O}(L)$ die Garbe von Keimen von holomorphen Schnitten von L sowie $\mathcal{A}^{p,q}(L)$ die Garben von Keimen von differenzierbaren (p,q)-Formen mit Werten in L. Wir schreiben $\mathcal{D}(L)$ für $\mathcal{A}^{0,0}(L)$. Ferner sei $\bar\partial\mathcal{D}(L) \subset \mathcal{A}^{0,1}(L)$ die Untergarbe aller Keime von $\bar\partial$-geschlossenen $(0,1)$-Formen mit Werten in L. Wir benötigen im Folgenden den Dolbeault-Isomorphismus:

Theorem 3.1.

$$H^1(X, \mathcal{O}(L)) \cong \frac{H^0(X, \bar\partial\mathcal{D}(L))}{\bar\partial H^0(X, \mathcal{D}(L))}$$

Beweis. Man betrachte die kurze exakte Garben-Sequenz

$$0 \to \mathcal{O}(L) \to \mathcal{D}(L) \xrightarrow{\bar\partial} \bar\partial\mathcal{D}(L) \to 0$$

sowie die zugehörige lange exakte Kohomologiesequenz

$$0 \to H^0(X, \mathcal{O}(L)) \to H^0(X, \mathcal{D}(L)) \xrightarrow{\bar\partial} H^0(X, \bar\partial\mathcal{D}(L)) \xrightarrow{\delta^*} H^1(X, \mathcal{O}(L)) \to 0$$

□

Uns interessiert nicht nur die Aussage des Dolbeault-Isomorphismus', sondern auch die konkreten Beschreibungen der zugehörigen Abbildungen

$$\delta^* : H^0(X, \bar{\partial}\mathcal{D}(L)) \to H^1(X, \mathcal{O}(L))$$

sowie

$$\Phi : H^1(X, \mathcal{O}(L)) \to \frac{H^0(X, \bar{\partial}\mathcal{D}(L))}{\bar{\partial}H^0(X, \mathcal{D}(L))}.$$

Die Elemente von $H^1(X, \mathcal{O}(L))$ interpretieren wir mittels $H^1(X, \mathcal{O}(L)) = \cup_{\mathcal{U}} H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(L))$ in der Čech-Kohomologie als Kohomologieklassen aus $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(L)) = Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(L))/B^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(L))$, wobei $\mathcal{U}$ eine lokal endliche Überdeckung von X sei. Den Randoperator von $C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(L))$ nach $C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(L))$ beziehungsweise von $C^0(\mathcal{U}, \mathcal{D}(L))$ nach $C^1(\mathcal{U}, \mathcal{D}(L))$ bezeichnen wir stets mit δ. Die Elemente von $H^0(X, \mathcal{O}(L))$ bzw. $H^0(X, \mathcal{D}(L))$ sind die globalen holomorphen bzw. differenzierbaren Schnitte des Bündels L. Ganz allgemein verwenden wir für Schnitte über einer offenen Menge $U \subset X$ einer Garbe $\mathcal{F}$ die Bezeichnungen $\mathcal{F}(U)$ oder auch $\Gamma(U, \mathcal{F})$.

Sei zunächst $\mu \in \Gamma(X, \bar{\partial}\mathcal{D}(L)) \subset \mathcal{A}^{0,1}(X, L)$ eine $\bar{\partial}$-geschlossene $(0,1)$-Form mit Werten in L. Nach dem Dolbeaultschen Lemma existiert eine lokal endliche Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ von X und differenzierbare Schnitte $\nu_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{D}(L))$ mit $\bar{\partial}(\nu_i) = \mu|_{U_i}$. Wir fassen diese zu einer Kokette $\nu \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{D}(L))$ zusammen. Dann ist $\delta(\nu) \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(L))$. Wir setzen $\delta^*(\mu) = [\delta(\nu)] \in H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(L)) \subset H^1(X, \mathcal{O}(L))$. Dies ist unabhänging von der Wahl der gewählten Überdeckung $\mathcal{U}$ und der Kokette $\nu \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{D}(L))$. Sei nämlich $\mathcal{U}' = (U'_j)_{j \in J}$ eine weitere lokal endliche Überdeckung von X und $\nu' \in C^0(\mathcal{U}', \mathcal{D}(L))$ eine Kokette mit $\bar{\partial}(\nu'_j) = \mu|_{U'_j}$. Nach Übergang zu einer lokal endlichen Verfeinerung können wir annehmen, dass $\mathcal{U} = \mathcal{U}'$ gilt. Dann ist $(\nu' - \nu) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(L))$ und es gilt: $\delta(\nu') = \delta(\nu) + \delta(\nu' - \nu)$, also $[\delta(\nu)] = [\delta(\nu')]$ als Kohomologieklassen in $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(L))$.

Sei nun umgekehrt eine Kohomologieklasse $\theta \in H^1(X, \mathcal{O}(L))$ vorgegeben. Dann ist $\theta \in H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(L))$ für eine lokal endliche Überdeckung $\mathcal{U}$ von X. Sei $\vartheta \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(L))$ eine Kozykel in der Klasse von θ. Wähle ein $\nu \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{D}(L))$ mit $\delta(\nu) = \vartheta$. Dies ist wegen $H^1(X, \mathcal{D}(L)) = \{0\}$ immer möglich. Dann ist $\bar{\partial}(\nu) \in Z^0(\mathcal{U}, \bar{\partial}\mathcal{D}(L)) = \Gamma(X, \bar{\partial}\mathcal{D}(L))$ und wir setzen $\Phi(\theta) = [\bar{\partial}(\nu)]$ als Restklasse modulo $\bar{\partial}(\Gamma(X, \mathcal{D}(L)))$. Wir müssen zeigen, dass dies unabhänging von dem gewählten Repräsentanten $\vartheta \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(L))$ und der Kokette $\nu \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{D}(L))$ ist. Wir zeigen zuerst die Unabhängigkeit von $\nu \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{D}(L))$. Sei daher zunächst $\nu' \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{D}(L))$ mit $\delta(\nu') = \vartheta$. Dann ist $(\nu' - \nu) \in \Gamma(X, \mathcal{D}(L))$ und daher $[\bar{\partial}(\nu')] = [\delta(\nu) + \delta(\nu' - \nu)] = [\delta(\nu)]$ als Restklasse modulo $\bar{\partial}(\Gamma(X, \mathcal{D}(L)))$. Sei nun $\vartheta' \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(L))$ mit $\vartheta' \sim \vartheta$ gegeben, also $(\vartheta - \vartheta') \in B^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}(L))$. Dann existiert ein $\xi \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}(L))$ mit $\delta(\xi) = (\vartheta' - \vartheta)$. Sei weiter $\nu \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{D}(L))$ mit $\delta(\nu) = \vartheta$. Wir benötigen nun ein $\nu' \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{D}(L))$ mit $\delta(\nu') = \vartheta'$. Nach dem soeben Bewiesenen ist $[\bar{\partial}(\nu')]$ unabhänging von ν'. Wir wählen daher konkret $\nu' = (\nu + \xi) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{D}(L))$. Für dieses gilt $\delta(\nu') = \delta(\nu + \xi) = \vartheta'$ und wir erhalten $\bar{\partial}(\nu') = \bar{\partial}(\nu + \xi) = \bar{\partial}(\nu)$, also auch $[\bar{\partial}(\nu)] = [\bar{\partial}(\nu')]$.

Für $H^q(X, \mathcal{O}(L))$ schreiben wir wie üblich im Folgenden einfach $H^q(X, L)$.

3.2. Deformationen komplexer Strukturen

Wir stellen in diesem Abschnitt einige grundlegende Resultate aus der Theorie der Deformationen von komplexen Mannigfaltigkeiten zur Verfügung. Als Referenz dient uns dabei [Ma05].

Definition 3.2. Eine *glatte Familie von kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten* (oder kurz: *Familie*) ist eine eigentliche holomorphe Submersion $f : \mathcal{X} \to S$ zwischen zwei komplexen Mannigfaltigkeit $\mathcal{X}$ und S, wobei S zusammenhängend ist.

Dabei heißt $\mathcal{X}$ der *Totalraum* und S die *Basis* der Familie. Die Fasern der Familien sind die kompakten Mannigfaltigkeiten $X_s := f^{-1}(s)$ für $s \in S$. Ist $U \subset S$ eine offene Menge, so ist die Einschränkung $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \to U$ wieder eine Familie. Zwei Familien $f_1 : \mathcal{X}_1 \to S$ und $f_2 : \mathcal{X}_2 \to S$ über derselben Basis sind isomorph, falls eine biholomorphe Abbildung g von $\mathcal{X}_1$ nach $\mathcal{X}_2$ existiert, so dass $f_1 = f_2 \circ g$.

Definition 3.3. Eine Familie $f : \mathcal{X} \to S$ heißt *trivial*, falls sie zur Produktfamilie $X_s \times S \to S$ für ein (und damit für alle) $s \in S$ isomorph ist. Sie heißt *lokal trivial*, falls eine offene Überdeckung $S = \bigcup U_i$ existiert, so dass jede Einschränkung $f|_{f^{-1}(U_i)} : f^{-1}(U_i) \to U_i$ trivial ist.

Lemma 3.4. *Sei $f : \mathcal{X} \to S$ eine glatte Familie und $s \in S$. Dann ist das Normalenbündel $N_{X_s/\mathcal{X}}$ von X_s in $\mathcal{X}$ trivial.*

Beweis. Die Submersion induziert die kurze exakte Sequenz von Vektorbündeln

$$0 \to T_{X_s} \to T_{\mathcal{X}|X_s} \to f^*T_{s,S} \to 0$$

□

Definition 3.5. Eine *Deformation* einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit X ist eine Familie $f : \mathcal{X} \to (S, s_0)$ über einer punktierten Mannigfaltigkeit (S, s_0) zusammen mit einem Isomorphismus $i : X \to X_{s_0}$. Dafür schreiben wir auch

$$X \xrightarrow{i} \mathcal{X} \xrightarrow{f} (S, s_0).$$

Definition 3.6. Zwei Deformationen von X über derselben Basis

$$X \xrightarrow{i} \mathcal{X}_1 \xrightarrow{f_1} (S, s_0) \quad \text{und} \quad X \xrightarrow{j} \mathcal{X}_2 \xrightarrow{f_2} (S, s_0)$$

sind isomorph, falls eine offene Umgebung $s_0 \in U \subset S$ und eine biholomorphe Abbildung von $f_1^{-1}(U)$ nach $f_2^{-1}(U)$ existiert, so dass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & f_1^{-1}(U) \arrow[dl] \arrow[d, "f_1"] \\
f_2^{-1}(U) \arrow[r, "f_2"'] & U
\end{tikzcd}$$

Definition 3.7. Sei $f : X \to Y$ eine holomorphe Abbildung von komplexen Mannigfaltigkeiten. Seien $\zeta \in \Gamma(Y, \mathcal{D}(T_Y))$ und $\xi \in \Gamma(X, \mathcal{D}(T_X))$ differenzierbare Vektorfelder. Wir schreiben $f_*\xi = \zeta$, falls $f_{*,x}(\xi(x)) = \zeta(f(x))$ für jedes $x \in X$ gilt. Dabei ist $f_{*,x} : T_{x,X} \to T_{f(x),Y}$ das Differential von f an der Stelle $x \in X$. Wir nennen in diesem Fall ξ einen (differenzierbaren) *Lift* von ζ.

Sei nun $f : \mathcal{X} \to S$ eine glatte Familie kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten. Wir setzen $\dim(S) = m$ und $\dim(\mathcal{X}) = m + n$, also $\dim(X_s) = n$ für jedes $s \in S$.

Definition 3.8. Ein Satz von holomorphen lokalen Koordinaten $(z_1, \ldots, z_n, s_1, \ldots, s_m) : U \to \mathbb{C}^{n+m}, V \subset \mathcal{X}$ nennen wir *zulässig*, falls $f(U)$ in einer Koordiantenumgebung $(v_1, \ldots, v_m) : V \to \mathbb{C}^m, V \subset S$ enthalten ist, so dass $s_i = v_i \circ f$ für jedes $1 \leqslant i \leqslant m$.

Nach dem Satz über implizite Funktionen besitzt $\mathcal{X}$ eine lokal endliche Überdeckung $\mathcal{X} = \bigcup U_i$ durch zulässige Koordinatenumgebungen.

Lemma 3.9. *Sei $f : \mathcal{X} \to S$ eine glatte Familie. Dann besitzt jedes Vektorfeld $\zeta \in \Gamma(S, \mathcal{D}(T_Y))$ einen differenierabren Lift $\xi \in \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}(T_X))$.*

Beweis. Wir wählen eine lokal endliche Überdeckung von zulässigen Koordinatenumgebungen $\mathcal{X} = \bigcup U_i$. In jeder Koordinatenumgebung finden wir ein Vektorfeld $\xi_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{D}(T_X))$ mit $f_*(\xi_i) = \zeta$. Nun wählen wir eine der Überdeckung untergeordnete Partition der Eins $1 = \sum \rho_i$ mit $\rho_i : U_i \to \mathbb{C}$ und setzen $\xi := \sum \rho_i \xi$. □

Sei $T_{\mathcal{X}/S}$ das relative Tangentialbündel von $f : \mathcal{X} \to S$. Die lokalen Schnitte dieses Bündels sind Vektorfelder v auf $\mathcal{X}$ mit $f_*v = 0$. Ist $(z_1, \ldots, z_n, s_1, \ldots, s_m)$ ein System von zulässsigen lokalen Koordinaten, so ist $\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}$ eine Basis von Schnitten des relativen Tangentialbündels in dieser Koordinatenumgebung. Die Einschränkung von $T_{\mathcal{X}/S}$ auf eine Faser X_s ergibt das Tangentialbündel T_{X_s} an die Faser X_s.

Für eine offene Teilmenge $V \subset S$ sei $\Gamma(V, T_S)$ der Raum der holomorphen Vektorfelder auf V. Sei $\zeta \in \Gamma(V, T_S)$ so ein holomorphes Vektorfeld. Wir wählen dazu einen differenzierbaren Lift $\xi \in \Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{D}(T_{\mathcal{X}}))$. In zulässigen holomorphen lokalen Koordinaten z_i, s_j ist ξ dann von der Form

$$\xi = \sum_i \xi_i(z, s) \frac{\partial}{\partial z_i} + \sum_j \zeta_j(s) \frac{\partial}{\partial s_j},$$

wobei die $\zeta_i(s)$ holomorph sind. Daher ist

$$\bar{\partial}(\xi) = \sum_j \bar{\partial}\xi_j \frac{\partial}{\partial z_j},$$

also $\bar{\partial}(\xi) \in \Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{A}^{0,1}(T_{\mathcal{X}/S}))$. Die Form $\bar{\partial}(\xi)$ ist $\bar{\partial}$-geschlossen, da sie lokal sogar $\bar{\partial}$-exakt ist. Wir identifizieren $H^1(f^{-1}(V), T_{\mathcal{X}/S})$ mit der Dolbeault-Kohomologie und definieren die *(lokale) Kodaira-Spencer-Abbildung* durch

$$\mathcal{K}S(V)_f : \Gamma(V, T_S) \to H^1(f^{-1}(V), T_{\mathcal{X}/S}), \quad \xi \mapsto [\bar{\partial}\xi]$$

Lemma 3.10. *Die Abbildung $\mathcal{K}S(V)_f$ ist ein wohldefinierter Homomorphismus von $\mathcal{O}(V)$-Moduln.*

Beweis. Sei $\xi' \in \Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{D}(T_{\mathcal{X}}))$ ein weiteres Vektorfeld mit $f_*\xi' = \zeta$. Dann ist $(\xi' - \xi) \in \Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{D}(T_{\mathcal{X}/S}))$ und damit $[\bar{\partial}(\xi')] = [\bar{\partial}(\xi) + \bar{\partial}(\xi' - \xi)] = [\bar{\partial}(\xi)]$ in $H^1(f^{-1}(V), T_{\mathcal{X}/S})$. Ist $g \in \mathcal{O}(V)$, so ist $f_*((f^*g)\xi) = g\,\zeta$ und $\bar{\partial}((f^*g)\xi) = (f^*g)\bar{\partial}(\xi)$. □

Ist $V_1 \subset V_2 \subset S$, dann kommutieren die beiden lokalen Kodaira-Spencer-Abbildungen $\mathcal{K}S(V_i)_f : \Gamma(V_i, T_S) \to H^1(f^{-1}(V_i), T_{\mathcal{X}/S})$ für $i = 1, 2$ mit den Restriktionsabbildungen $\Gamma(V_2, T_S) \to \Gamma(V_1, T_S)$ sowie $H^1(f^{-1}(V_2), T_{\mathcal{X}/S}) \to H^1(f^{-1}(V1), T_{\mathcal{X}/S})$ und wir erhalten die *globale Kodaira-Spencer-Abbildung*

$$\mathcal{K}S_f : \Theta_S \to R^1 f_*(\Theta_{\mathcal{X}/S})$$

als einen Garbenhomomorphismus von $\mathcal{O}_S$-Moduln. Weiter erhalten wir für jedes $s \in S$ eine lineare Abbildung $KS_{f,s} : T_{S,s} \to H^1(X_s, T_{X_s})$, so dass für jede offene Menge $s \in V \subset S$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(V, T_S) \arrow[r, "\mathcal{K}S(V)_f"] \arrow[d, "r"] & H^1(f^{-1}(V), T_{\mathcal{X}/S}) \arrow[d, "r"] \\
T_{S,s} \arrow[r, "KS_{f,s}"] & H^1(X_s, T_{X_s})
\end{tikzcd}$$

Dabei sind die vertikalen Pfeile die natürlichen Restriktionsabbildungen.

Bemerkung 3.11. Die lineare Abbildung $KS_{f,s} : T_{S,s} \to H^1(X_s, T_{X_s})$ lässt sich auch direkt erhalten, wenn mann differenzierbare Hochhebungen von Tangentialvekoren aus $T_{S,s}$ nach X_s betrachtet. Für jede Isomorphieklasse einer Deformation $X \xrightarrow{i} \mathcal{X} \xrightarrow{f} (S, s_0)$ ist die lineare Abbildung $KS_{f,s_0} : T_{s_0,S} \to H^1(X_{s_0}, T_{X_{s_0}})$ erklärt. Der Homomorphismus zwischen den Halmen $\mathcal{K}S_{f,s_0} : \Theta_{S,s_0} \to R^1 f_*(\Theta_{\mathcal{X}/S})_{s_0}$ ist jedoch nur bis auf einen Isomorphismus des $\mathcal{O}_{S,s_0}$-Moduls $R^1 f_*(\Theta_{\mathcal{X}/S})_{s_0}$ erklärt.

Die Kodaira-Spencer-Abbildung beschreibt die Obstruktionen zum Auffinden holomorpher Hochhebungen von Vektorfeldern:

Proposition 3.12. *Sei $\mathcal{X} \to S$ eine Familie von kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten und $\zeta \in \Gamma(V, T_S)$. Dann ist $\mathcal{K}S(V)_f(\zeta)$ genau dann gleich Null, falls ein holomorphes Vektorfeld $\xi \in \Gamma(f^{-1}(V), T_{\mathcal{X}})$ existiert mit $f_*(\xi) = \zeta$.*

Beweis. Die eine Implikation ist trivial. Es gelte also $\mathcal{K}S(V)_f(\zeta) = 0$. Sei $\xi' \in \Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{D}(T_{\mathcal{X}}))$ ein Vektorfeld mit $f_*\xi' = \zeta$. Da nun $\mathcal{K}S(V)_f(\zeta) = [\bar{\partial}(\xi)]$ gleich Null ist, existiert ein $\chi \in \Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{D}(T_{\mathcal{X}/S}))$ mit $\bar{\partial}(\chi) = \bar{\partial}(\xi')$. Wir setzen $\xi := \xi' - \chi$. Dann ist $\xi \in \Gamma(f^{-1}(V), T_{\mathcal{X}})$ ein holomorphes Vektorfeld mit $f_*(\xi) = \zeta$. □

Wir berechnen nun die Kodaira-Spencer-Abbildung in Čech-Kozykeln. Sei dazu $V \subset S$ biholomorph zu einem Polizylinder und $s^1, \ldots, s^m$ lokale holomorphe Koordinaten in V. Weiter wählen wir eine lokal endliche Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_i\}$ von $f^{-1}(V) \subset \mathcal{X}$ durch Koordinatenumgebungen

U_a und zulässigen holomorphen Koordinaten $z_i^1, \ldots, z_i^n, s_i^1, \ldots, s_i^m : U_i \to \mathbb{C}, s_i^\alpha = f^* s^\alpha$. Auf den Durchschnitten $U_i \cap U_j$ haben wir holomorphe Übergangsfunktionen

$$\begin{aligned} z_i^\alpha &= f_{ij}^\alpha(z_j, s_j), \quad && \alpha = 1, \ldots, n \\ s_i^\beta &= s_j^\beta, && \beta = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

Wir fixieren nun eine Koordinatenrichtung $1 \leqslant \beta \leqslant m$ und ein $\xi \in \Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{D}(T_\mathcal{X}))$ mit $f_* \xi = \partial / \partial s^\beta$. In den lokalen Koordinaten haben wir dann

$$\xi = \sum_\alpha \xi_i^\alpha(z_i, s_i) \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha} + \frac{\partial}{\partial s_i^\beta} \text{ auf } U_i, \quad \xi = \sum_\alpha \xi_j^\alpha(z_j, s_j) \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha} + \frac{\partial}{\partial s_j^\beta} \text{ auf } U_j.$$

Nun ist $(\xi - \partial / \partial s_i^\beta) \in \Gamma(U_i, \mathcal{D}(T_{\mathcal{X}/S}))$ in jeder Koordinatenumgebung U_i und $\bar{\partial}\left(\xi - \partial / \partial s_i^\beta\right) = \bar{\partial}(\xi)$. Daher wird die Dolbeault-Klasse $\mathcal{K}S(V)_f(\partial / \partial s^\beta)$ in $H^1(\mathcal{U}, T_{\mathcal{X}/S})$ durch folgenden Kozykel repräsentiert:

$$\mathcal{K}S(V)_f \left(\frac{\partial}{\partial s^\beta}\right)_{ji} = \left(\xi - \frac{\partial}{\partial s_i^\beta}\right) - \left(\xi - \frac{\partial}{\partial s_j^\beta}\right) = \frac{\partial}{\partial s_j^\beta} - \frac{\partial}{\partial s_i^\beta} = \sum_\alpha \frac{\partial f_{ij}^\alpha(z_j, s_j)}{\partial s_j^\beta} \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha}.$$

Es gibt noch eine dritte Variante, die Kodaira-Spencer-Abbildung zu beschreiben:

Proposition 3.13. *Wir betrachten eine glatte Familie $f : \mathcal{X} \to S$ und die kurze exakte Garbensequenz*

$$0 \to T_{\mathcal{X}/S} \to T_\mathcal{X} \to f^* T_S \to 0$$

Dann ist die Kodaira-Spencer-Abbildung der verbindende Garben-Homomorphismus in der zugehörigen langen exakten Sequenz der direkten Bilder:

$$\mathcal{K}S_f : \Theta_S \to R^1 f_*(T_{\mathcal{X}/S})$$

Wir lassen den Beweis dazu aus, da er analog zum Beweis der Aussage für die lineare Kodaira-Spencer-Abbildung KS_{f,s_0} einer Deformation $X \xrightarrow{i} \mathcal{X} \xrightarrow{f} (S, s_0)$ verläuft, der nun folgt. Sei im Folgenden s_0 der Ursprung in $\mathbb{C}$ und S ein glatter Raumkeim um diesen Punkt. Wir schreiben nun X für die zentrale Faser X_{s_0}.

Proposition 3.14. *Sei $X \xrightarrow{i} \mathcal{X} \xrightarrow{f} (S, s_0)$ eine Deformation einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit X. Dann ist*

$$\rho := KS_{f,0} : \quad T_{S,0} \to H^1(X, T_X)$$

der verbindende Vektorraum-Homomorphismus in der langen exakten Kohomologie-Sequenz zur exakten Garbensequenz

$$0 \to T_X \to T_{\mathcal{X}|X} \to f^* T_{S,0} \to 0.$$

Beweis. Wir beschreiben den verbindenden Homomorphismus

$$\delta : H^0(X, f^*(T_{S,0})) = T_{S,0} \to H^1(X, T_X)$$

in der Dolbeault-Kohomologie. Sei dazu $\partial/\partial s \in T_{S,0}$ der Tangential-Einheits-Vektor. Wir interpretieren diesen als holomorphen Schnitt des trivialen Normalenbündels $N_{X/\mathcal{X}} = f^*(T_{S,0})$. Nun wählen wir eine lokal endliche Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)$ aus Koordinatenumgebungen mit zulässigen Koordinaten (z_i, s_i). Dann ist $\sigma_i := \partial/\partial s_i \in \Gamma(U_i, T_{\mathcal{X}})$ ein lokaler holomorpher Schnitt von $T_{\mathcal{X}}$. Wir schränken diesen auf X ein und erhalten so eine Kokette $\sigma = (\sigma_i) \in C^0(\mathcal{U} \cap X, T_{\mathcal{X}/X})$ mit $f_*(\sigma_i) = \partial/\partial s$. Dann ist $\delta(\partial/\partial s)$ gegeben durch die Kohomologieklasse des Kozykels

$$\theta_{ij} = \sigma_j - \sigma_i \in \Gamma(U_i \cap U_j \cap X, T_X).$$

Diesen Rechnen wir nun in Dolbeault-Kohomologie um. Der Kozykel (θ_{ij}) zerfällt differenzierbar in $\theta_{ij} = \tau_j - \tau_i$ mit $\tau = (\tau_i) \in C^0(\mathcal{U} \cap X, \mathcal{D}(T_X))$. Die Dolbeault-Klasse von θ ist dann gegeben durch $\bar{\partial}(\tau) \in \Gamma(X, \mathcal{A}^{0,1}(T_X))$. Wegen

$$\sigma_i - \tau_i = \sigma_j - \tau_j$$

ist aber $\xi := \sigma - \tau = (\sigma_i - \tau_i) \in Z^0(\mathcal{U} \cap X, \mathcal{D}(T_{\mathcal{X}/X}))$ ein differenzierteres Vektorfeld auf X mit $f_*(\xi) = \partial/\partial s$ und $\bar{\partial}(\xi) = \bar{\partial}(\tau)$. Daher repräsentiert die Dolbeault-Klasse von $\delta(\partial/\partial s)$ die Kodaira-Spencer-Klasse von $\partial/\partial s$. □

Lemma 3.15. *Sei $f : \mathcal{X} \to \Delta_R^n$ eine glatte Familie von kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten und $s_1, \ldots, s_n$ Koordinaten auf dem Polyzylinder $\Delta_R^n \subset \mathbb{C}^n$. Falls holomorphe Vektorfelder $\chi_1, \ldots, \chi_n$ auf $\mathcal{X}$ existieren mit $f_*\chi_h = \partial/\partial s_h$, dann existiert ein $0 < r \leqslant R$, so dass $f : f^{-1}(\Delta_r^n) \to \Delta_r^n$ isomorph zur trivialen Familie ist.*

Beweis. Für $r \leqslant R, h \leqslant n$ beschreiben wir durch

$$\Delta_r^h = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| < r, \ldots, |z_h| < r, z_{h+1} = 0, \ldots, z_n = 0\} \subset \Delta_R^n.$$

den h-dimensionalen Polyzylinder vom Multiradius $(r, \ldots, r, 0, \ldots, 0)$. Wir zeigen durch Induktion nach h, dass ein $R \geqslant r_h > 0$ existiert, so dass die Familie nach Einschränkung trivial über $\Delta_{r_h}^n$ ist. Wir setzen $r_0 = R$ und die Aussage ist klar für $h = 0$. Wir nehmen nun an, dass die Familie bereits trivial ist über $\Delta_{r_h}^h$ für ein $h < n$. Durch Einschränken von Δ_R^n können wir annehmen, dass $R = r_h$ gilt und die Familie trivial über Δ_R^h ist.
Die Integration des holomorphen Vektorfeldes χ_{h+1} liefert eine offene Umgebung $M \times \{0\} \subset U \subset M \times \mathbb{C}$ und eine holomorphe Abbildung $H(x, s) : U \to \mathcal{X}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Für jedes $x \in \mathcal{X}$ ist $\{x\} \times \mathbb{C} \cap U = \{x\} \times \Delta(x)$, wobei $\Delta(x)$ eine Kreisscheibe ist.

(2) Für jedes $x \in \mathcal{X}$ ist die Abbildung $H_x = H(x, -) : \Delta(x) \to \mathcal{X}$ eine Lösung des Cauchy-Problems

$$\begin{cases} \frac{dH_x}{ds}(s) = \chi_{h+1}(H_x(s)) \\ H_x(0) = x. \end{cases}$$

Insbesondere ist $f(H(x,s)) = f(x) + (0,\dots,0,s,\dots,0)$ (s ist an der $(h+1)$-ten Stelle), falls $H(x,s)$ definiert ist.

(3) Falls $V \subset \mathcal{X}$ mit $V \times \Delta \subset U$, so ist $H(-,s) : V \to \mathcal{X}$ für jedes $s \in \Delta$ eine offene Einbettung.

Da f eigentlich ist, so existiert ein $r \leqslant R$, so dass $f^{-1}(\Delta_r^h) \times \Delta_r \subset U$. Dann ist die Abbildung $H : f^{-1}(\Delta_r^h) \times \Delta_r \to f^{-1}(\Delta_r^{h+1})$ biholomorph, liefert also eine Trivialisierung der Familie über Δ_r^{h+1}. □

3.3. Deformationen von Abbildungen - Horikawa-Theorie Teil I

In diesem Abschnitt erklären wir die Kodaira-Spencer-Abbildung für Deformationen von nicht-ausgearteten holomorphen Abbildungen. Sei Y in diesem Abschnitt eine feste kompakte komplexe Mannigfaltigkeit.

Definition 3.16. Eine *Familie von holomorphen Abbildungen nach* Y ist eine Familie $(\mathcal{X}, p, S) = (X_s)_{s\in S}$ von kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten zusammen mit einer holomorphen Abbildung $F : \mathcal{X} \to Y$. Wir fassen diese in dem Quadrupel (X, p, S, F) zusammen. Wir setzen $f_s = F|_{X_s} : X_s \to Y$ und bezeichnen die Familie auch durch $(X_s, f_s)_{s\in S}$.

Wir definieren nun die charakteristische Abbildung. Sei $(\mathcal{X}, p, S, F)$ eine Familie von holomorphen Abbildungen nach $Y, s_0 \in S, X = X_{s_0}$ und $f := F|_X : X \to Y$. Wir haben die exakte Sequenz

$$0 \to T_{X/Y} \to T_X \xrightarrow{df} f^*T_Y$$

von kohärenten Garben auf X. Sei N_f die Normalengarbe von f, also der Kokern von df. Dann bekommen wir die exakte Sequenz

$$0 \to T_{X/Y} \to T_X \xrightarrow{df} f^*T_Y \xrightarrow{P} N_f \to 0. \tag{3.1}$$

Nach Übergang zu einer Umgebung von $s_0 \in S$ (falls notwendig) können wir folgende Situation herstellen:

i) S ist eine offene Teilmenge im $\mathbb{C}^r$ mit Koordinaten $s = (s_1, \cdots, s_r)$ und $s_0 = (0, \cdots, 0)$.

ii) $\mathcal{X}$ wird überdeckt durch eine endliche Anzahl von Steinschen Koordinaten-Umgebungen $\mathcal{U}_i$ zusammen mit bezüglich $p : \mathcal{X} \to S$ zulässigen Koordinaten $(z_i^1, \cdots, z_i^n, s^1, \cdots, s^r)$.

iii) Y wird überdeckt durch eine endliche Anzahl von Steinschen Koordinaten-Umgebungen V_i mit lokalen Koordinaten $w_i = (w_i^1, \dots, w_i^m)$, so dass $F(\mathcal{U}_i) \subset \mathcal{V}_i := V_i \times S$ und F in diesen lokalen Koordinaten gegeben ist durch

$$w_i = F_i(z_i, s).$$

Wir setzen $f_i(z_i) := F_i(z_i, 0)$.

iv) Auf $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$ haben wir holomorphe Übergangsfunktionen

$$z_i = f_{ij}(z_j, s).$$

v) Auf $V_i \cap V_j$ haben wir holomorphe Übergangsfunktionen

$$w_i = g_{ij}(w_j).$$

Daraus ergibt sich die Verträglichkeitsbedingung

$$F_i(f_{ij}(z_j, s), s) = g_{ij}(F_j(z_j, s)). \tag{3.2}$$

Sei nun $\partial/\partial s \in T_{S,0}$ ein Tangentialvektor und setze

$$\tau_i = \sum_\gamma \frac{\partial F_i^\gamma}{\partial s}\Big|_{s=0} \frac{\partial}{\partial w_i^\gamma} \in \Gamma(U_i, f^* T_Y) \quad (U_i = \mathcal{U}_i \cap X). \tag{3.3}$$

Dabei sei $\partial F/\partial s = \sum v_\lambda \partial F/\partial s^\lambda$, falls $\partial/\partial s = \sum v_\lambda \partial/\partial s^\lambda$. Wir differenzieren die Gleichung 3.2 nach s und erhalten für jedes $1 \leqslant \rho \leqslant m$ die Beziehung

$$\sum_\sigma \frac{\partial F_i^\rho}{\partial z_i^\sigma} \frac{\partial f_{ij}^\sigma}{\partial s} + \frac{\partial F_i^\rho}{\partial s} = \sum_\sigma \frac{\partial g_{ij}^\rho}{\partial w_j^\sigma} \frac{\partial F_j^\sigma}{\partial s} \tag{3.4}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\tau_j - \tau_i &= \sum_\sigma \frac{\partial F_j^\sigma}{\partial s} \frac{\partial}{\partial w_j^\sigma} - \sum_\rho \frac{\partial F_i^\rho}{\partial s} \frac{\partial}{\partial w_i^\rho} \\
&= \sum_\sigma \frac{\partial F_j^\sigma}{\partial s} \sum_\rho \frac{\partial g_{ij}^\rho}{\partial w_j^\sigma} \frac{\partial}{\partial w_i^\rho} - \sum_\rho \frac{\partial F_i^\rho}{\partial s} \frac{\partial}{\partial w_i^\rho} \\
&= \sum_\rho \left(\sum_\sigma \frac{\partial F_j^\sigma}{\partial s} \frac{\partial g_{ij}^\rho}{\partial w_j^\sigma} - \frac{\partial F_i^\rho}{\partial s} \right) \frac{\partial}{\partial w_i^\rho} \\
&\overset{3.4}{=} \sum_\rho \left(\sum_\sigma \frac{\partial f_{ij}^\sigma}{\partial s} \frac{\partial F_i^\rho}{\partial z_i^\sigma} \right) \frac{\partial}{\partial w_i^\rho} \\
&= f_* \left(\sum_\sigma \frac{\partial f_{ij}^\sigma}{\partial s} \frac{\partial}{\partial z_i^\sigma} \right).
\end{aligned}$$

In dem Ausdruck

$$\theta_{ij} = \sum_\sigma \frac{\partial f_{ij}^\sigma}{\partial s}\Big|_{s=0} \frac{\partial}{\partial z_i^\sigma}$$

erkennen wir die Kodaira-Spencer-Klasse der Familie $p : \mathcal{X} \to S$ an der Stelle 0. Wir bekommen also den kompakten Ausdruck

$$\tau_j - \tau_i = \phi_*(\theta_{ij}) \tag{3.5}$$

Damit definiert die 0-Kokette $(P\tau_i)$ auf X bezüglich der Überdeckung (U_i) mit Werten in $f^*(T_Y)$ ein Element aus $H^0(X, N_f)$. Dies definiert eine lineare Abbildung

$$\tau : T_{S,0} \to H^0(X, N_f), \tag{3.6}$$

die sogenannte *charakteristische Abbildung* (oder auch Kodaira-Spencer-Abbildung) der Familie von holomorphen Abbildungen nach Y im Punkt $0 \in S$.

Proposition 3.17. *Die lineare Abbildung τ ist unabhänging von der gewählten Überdeckung und den gewählten Koordinaten.*

Für einen Beweis siehe [Ho73].

Eine holomorphe Abbildung $f : X \to Y$ heißt *nicht ausgeartet*, falls $\operatorname{Rang}_z df = \dim X$ für einen Punkt $z \in X$. Dies gilt dann für eine offene dichte Teilmenge von X. Die Menge der Punkte $z \in X$ mit $\operatorname{Rang}_z df < \dim X$ bildet eine echte analytische Teilmenge von X. Diese Bedingung ist äquivalent zu $T_{X/Y} = 0$ und die exakte Sequenz 3.1 reduziert sich auf

$$0 \to T_X \xrightarrow{df} f^*(T_Y) \to N_f \to 0. \tag{3.7}$$

Proposition 3.18. *Sei $(\mathcal{X}, p, S, F)$ eine Familie von nicht ausgearteten holomorphen Abbildungen nach $Y, s_0 \in S$ und $X = \mathcal{X}_{s_0}$. Dann ist das folgende Diagramm kommutativ:*

$$\begin{tikzcd} T_{S,s_0} \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\rho"'] & H^0(Y, N_f) \arrow[d, "\delta"] \\ & H^1(X, T_X) \end{tikzcd}$$

Dabei ist ρ die Kodaira-Spencer-Abbildung der Familie $(\mathcal{X}, p, S)$ an der Stelle s_0 und δ die Randabbildung in der langen exakten Sequenz der Kohomologiegruppen.

Beweis. Es ist $\rho(\partial/\partial s)$ die Kohomologie-Klasse des 1-Kozykels $\theta_{ij} = \sum_\sigma (\partial f_{ij}^\sigma/\partial s)\Big|_{s=0} (\partial/\partial z_i^\sigma)$. Die Aussage folgt damit aus der Beziehung 3.5. □

Die Proposition 3.18 besagt, dass im Falle einer nicht ausgearteten holomorphen Abbildung die infinitesimalen Deformationen durch die charakteristische Abbildung beschrieben werden. Der Raum $H^0(X, N_f)$ beschreibt also die Menge der Isomorphie-Klassen von Familien über $\operatorname{Spec}(\mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2))$, siehe dazu [Se06].

Wir wollen im nicht ausgearteten Fall die infinitesimale Situation noch besser verstehen und betrachten dazu die kurze exakte Sequenz 3.7 sowie die zugehörige lange exakte Kohomologiesequenz

$$0 \to H^0(X, T_X) \xrightarrow{f_*} H^0(X, f^*T_Y) \to H^0(X, N_f) \xrightarrow{\delta} H^1(X, T_X) \to H^1(X, f^*T_Y) \to \cdots$$

Dabei ordnet die Korandabbildung: $\delta : H^0(X, N_f) \to H^1(X, T_X)$ der Deformation einer Abbildung $f : X \to Y$ die zugehörige Deformation von X zu; die Abbildung wird dabei vergessen. Der Raum $H^1(X, f^*T_Y)$ beschreibt dabei die Obstruktionen, eine Deformation von X als eine Deformationen von f zu realisieren. Der Kern der Korandabbildung besteht aus allen Deformationen von f, welche X fest lassen, modulo den Automorphismen von X. Daher beschreibt der Raum $H^0(X, f^*T_Y)$ die infinitesimalen Deformationen von $f : X \to Y$, bei denen sowohl Y als auch X fest bleibt. Das zurückgezogene Tangentialbündel f^*T_Y lässt sich dabei mit dem Normalenbündel des Graphen von f in $X \times Y$ identifizieren. Daher taucht hier wie im Falle der Deformationen von Untermannigfaltigkeiten ein Raum von globalen Vektorfeldern auf. Die Einbettung $H^0(X, T_X) \to H^0(X, f^*T_Y)$ beschreibt dabei die Deformationen von f durch Umparametrisieren mittels der Automorphismen von X. Der Raum der globalen holomorphen Vektorfelder zeigt sich hier als der Tangentialraum der Automorphismengruppe im neutralen Element. Zudem sehen wir damit auch, dass die globalen holomorphen Vektorfelder auf X die infinitesimalen Deformationen der Identiät von X beschreiben.

3.4. Horikawa-Theorie - Teil II

Wir werden nun die charakteristische Abbildung τ weiter untersuchen und eine bessere Beschreibung ihres Wertebereichs erhalten.

Sei wieder Y eine feste kompakte komplexe Mannigfaltigkeit und $(X_s, f_s)_{s \in S}$ eine Familie von holomorphen Abbildungen nach Y. Für einen Punkt $s_0 \in S$ setzen wir wieder $X = X_{s_0}$ und $f = f_{s_0} : X \to Y$. Sei weiter $\mathcal{U} = \{U_i\}$ eine Steinsche Überdeckung von X. Wir setzen

Definition 3.19.

$$D_{X/Y} := \frac{\{(\tau, \theta) \in C^0(\mathcal{U}, f^*T_Y) \times Z^1(\mathcal{U}, T_X) \,:\, \delta\tau = f_*\theta\}}{\{(f_*\sigma, \delta\sigma) \,:\, \sigma \in C^0(\mathcal{U}, T_X)\}}$$

Lemma 3.20. *(i) $D_{X/Y}$ hängt nicht von der Wahl der Steinschen Überdeckung ab.*

(ii) $D_{X/Y}$ ist ein endlich-dimensionaler Vektorraum.

(iii) Wir haben die beiden exakten Sequenzen

$$H^0(X, T_X) \xrightarrow{df} H^0(X, f^*T_Y) \to D_{X/Y} \to H^1(X, T_X) \to H^1(X, f^*T_Y), \tag{3.8}$$

$$0 \to H^1(X, T_{X/Y}) \to D_{X/Y} \to H^0(X, N_f) \to H^2(X, T_{X/Y}). \tag{3.9}$$

Beweis. Wir definieren einen Homomorphismus $D_{X/Y} \to H^1(X, T_X)$, indem wir die Klasse von (τ, θ) in $D_{X/Y}$ auf die Kohomologie-Klasse von θ abbilden. Ähnlich definieren wir einen Homomorphismus $H^0(X, f^*T_Y) \to D_{X/Y}$, indem wir ein $\tau \in H^0(X, f^*T_Y) \cong Z^0(\mathcal{U}, f^*T_Y))$ auf die Klasse von $(\tau, 0)$ abbilden. Damit wird die Sequenz an der Stelle $D_{X/Y}$ tatsächlich exakt: Ist nämlich ein Paar (τ, θ) gegeben, welches eine Klasse in $D_{X/Y}$ repräsentiert, so dass der Kozykel θ zerfällt, so existiert ein $\sigma \in C^0(\mathcal{U}, T_X)$ mit $\delta\sigma = \theta$. Wir setzen $\tau' := \tau - f_*\sigma \in C^0(\mathcal{U}, f^*T_Y)$. Damit ist (τ, θ) äquivalent zu $(\tau', 0)$ mit $\delta\tau' = 0$, also $\tau' \in Z^0(\mathcal{U}, f^*T_Y)) \cong H^0(X, f^*T_Y)$. Die

Exaktheit an den übrigen Stellen ist klar. Nach dem Fünferlemma hängt $D_{X/Y}$ nicht von der Steinschen Überdeckung ab. Die zweite Aussage folgt aus der exakten Sequenz 3.8.

Nun zur zweiten Sequenz: Wir starten mit der exakten Sequenz

$$0 \to T_{X/Y} \xrightarrow{J} T_X \xrightarrow{F} f^*T_Y \xrightarrow{P} N_f \to 0.$$

Einem Element $\chi \in Z^1(\mathcal{U}, T_{X/Y})$ ordnen wir die Klasse von $(0, J\chi)$ in $D_{X/Y}$ zu. Dies erklärt den ersten Homomorphismus. Ein Element aus $D_{X/Y}$ repräsentieren wir durch ein Paar (τ, θ) mit $\tau = (\tau_i)$. Dann repräsentiert das System $(P\tau_i)$ ein Element von $H^0(X, N_f)$. Dies definiert den zweiten Homomorphismus. Schließlich repräsentieren wir ein Element von $H^0(X, N_f)$ durch ein $\tau \in C^0(\mathcal{U}, f^*T_Y)$, so dass $\delta\tau = f_*\vartheta$ für ein $\vartheta \in C^1(\mathcal{U}, T_X)$. Wegen $f_*(\delta\vartheta) = \delta(\delta\tau) = 0$, kann $\delta\vartheta$ als ein 2-Kozykel mit Werten in $T_{X/Y}$ aufgefasst werden. Dies erklärt den dritten Homomorphismus. Nun zur Exaktheit an der ersten Stelle: Sei $\chi \in Z^1(\mathcal{U}, T_{X/Y})$ mit $(0, J\chi) = (f_*\sigma, \delta\sigma)$ für ein $\sigma \in C^0(\mathcal{U}, T_X)$. Damit folgt aber schon aufgrund der Injektivität von J, dass $\delta\sigma = \chi$ mit $\sigma \in C^0(\mathcal{U}, T_{X/Y})$, da $f_*\sigma = 0$. Exaktheit an der Stelle $D_{X/Y}$: Wir starten mit einer Klasse aus $D_{X/Y}$, welche den Nullschnitt in $H^0(X, N_f)$ liefert. Für einen beliebigen Repräsentanten (τ, θ) dieser Klasse existiert dann ein $\sigma \in C^0(\mathcal{U}, T_X)$ mit $\theta = f_*\sigma$. Wegen $\delta\tau = f_*\theta = \delta f_*\sigma = f_*\delta\sigma$ gilt dann aber $f_*(\theta - \delta\sigma) = 0$. Wir setzen $\chi := (\theta - \delta\sigma) \in Z^1(\mathcal{U}, T_{X/Y})$. Damit ist (τ, θ) äquivalent zu $(0, J\chi)$. Um schließlich noch die Exaktheit an der Stelle $H^0(X, N_f)$ nachzuweisen, repräsentieren wir einen Schnitt von $H^0(X, N_f)$ durch ein Paar $(\tau, \vartheta) \in C^0(\mathcal{U}, f_*T_Y) \times C^1(\mathcal{U}, T_X)$ mit $\delta\tau = f_*\vartheta$. Ist nun $\delta\vartheta = \delta\psi$ für ein $\psi \in C^1(\mathcal{U}, T_{X/Y})$, dann ist $\vartheta' := (\vartheta - \psi) \in Z^1(\mathcal{U}, T_X)$ mit $\delta\tau = f_*\vartheta'$. Also repräsentiert das Paar (τ, ϑ') den gleichen Schnitt in N_f wie (τ, ϑ). □

Korollar 3.21. *(i) Ist f nicht ausgeartet, so gilt $D_{X/Y} \cong H^0(X, N_f)$.*

(ii) Ist f glatt, so gilt $D_{X/Y} \cong H^1(X, T_{X/Y})$.

Nun folgt eine Dolbeault-Beschreibung des Raums $D_{X/Y}$:

Lemma 3.22.

$$D_{X/Y} \cong \frac{\{(\xi, \vartheta) \in A^{0,0}(X, f^*T_Y) \times A^{0,1}(T_X) \,:\, \bar\partial\xi = f_*\vartheta, \bar\partial\vartheta = 0\}}{\{(f_*\zeta, \bar\partial\zeta) : \zeta \in A^{0,0}(X, T_X)\}}$$

Beweis. Sei $(\tau, \theta) \in C^0(\mathcal{U}, f^*T_Y) \times Z^1(\mathcal{U}, T_X)$ ein Repräsentant einer Klasse in $D_{X/Y}$. Wir setzen $\tau = (\tau_i)$ und $\theta = (\theta_{ij})$. Wir wählen $\eta_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{A}^{0,0}(T_X))$ mit $-\theta_{ij} = \eta_j - \eta_i$ auf U_{ij}. Dann definieren wir $\vartheta \in A^{0,1}(X, T_X)$ durch die Formel

$$\vartheta = \bar\partial\eta_i, \qquad \text{auf } U_i,$$

d.h. ϑ ist ein Dolbeault-Repräsentant der Klasse $[\theta]$. Andererseits haben wir nun $\tau_j - \tau_i = -f_*\eta_j + f_*\eta_i$ auf U_{ij}. Daher definieren wir $\xi \in A^{0,0}(f^*T_Y)$ durch die Formel

$$\xi = \tau_i + f_*\eta_i \qquad \text{auf } U_i.$$

Diese beiden stehen dann in der Beziehung

$$\bar{\partial}\xi = f_*\vartheta.$$

Haben wir eine weitere Kokette $\eta' = (\eta'_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{A}^{0,0}(T_X))$ mit $-\theta_{ij} = \eta_j - \eta_i$, so unterscheiden sich η und η' durch ein $\zeta \in A^{0,0}(T_X)$. Die Formen ϑ und ξ werden dann zu $\vartheta + \bar{\partial}\zeta$ und $\xi + f_*\zeta$. Starten wir mit einem Repräsentanten $(f_*\sigma, \delta\sigma)$ mit $\sigma \in C^0(\mathcal{U}, T_X)$ aus der trivialen Klasse von $D_{X/Y}$, so können wir $\eta_i = -\sigma|_{U_i}$ wählen und bekommen so $\vartheta = \bar{\partial}(-\sigma) = 0$ und $\xi = f_*\sigma + f_*(-\sigma) = 0$. Damit hängt die Klasse von (ξ, ϑ) nicht von der Wahl des Repräsentanten ab.

Ist nun umgekehrt ein Paar (ξ, ϑ) mit $\bar{\partial}\xi = f_*\vartheta$ und $\bar{\partial}\vartheta = 0$ gegeben, so finden wir $\eta_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{A}^{0,0}(T_X))$ mit $\vartheta = \bar{\partial}\eta_i$ auf U_i. Wir setzen $\theta_{ij} = -\eta_j + \eta_i$ auf U_{ij} und $\tau_i = \xi - f_*\eta_i$ auf U_i. Dann ist $\bar{\partial}\theta_{ij} = \bar{\partial}\tau_i = 0$, d.h. $\theta = (\theta_{ij}) \in Z^1(\mathcal{U}, T_X)$ und $\tau = (\tau_i) \in C^0(\mathcal{U}, f^*T_Y)$. Weiter gilt auch die Beziehung $\tau_j - \tau_i = f_*\theta$. Haben wir eine weitere Kokette $\eta' = (\eta'_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{A}^{0,0}(T_X))$ mit $\vartheta = \bar{\partial}\eta'_i$ auf U_i, so unterscheiden sich η und η' durch ein $\sigma \in C^0(\mathcal{U}, T_X)$ und θ bzw. τ wird zu $\theta + \delta\sigma$ bzw. $\tau + f_*\sigma$. Damit ist die Klasse von (τ, θ) in $D_{X/Y}$ wohldefiniert. Weiter sehen wir auch, dass eine Paar der Form $(f_*\zeta, \bar{\partial}\zeta)$ mit $\zeta \in A^{0,0}(T_X)$ auf die Klasse von $(0, 0)$ abgebildet wird. Damit erhalten wir den gewünschten Isomorphismus. □

Wir arbeiten nun mit der rechten Seite des vorigen Lemmas und bezeichnen diese mit $D'_{X/Y}$. Wir haben in einem früheren Abschnitt die Kodaira-Spencer-Abbildung $\rho : T_{S,s} \to H^1(X_s, T_{X_s})$ für Familien von komplexen Mannigfaltigkeiten $(\mathcal{X}, p, S)$ mit Hilfe der Dolbeault-Beschreibung von $H^1(X_s, T_{X_s})$ eingeführt. Ähnlich wollen wir nun im Falle einer Familie $(\mathcal{X}, p, S, F)$ von nicht ausgearteten holomorphen Abbildungen die charakteristische Abbildung $\tau : T_{S,s_0} \to D'_{X/Y}$ beschreiben:

Proposition 3.23. *Sei $(\mathcal{X}, p, S, F)$ eine Familie von nicht ausgearteten holomorphen Abbildungen nach Y. Für ein $s_0 \in S$ setzen wir $X := X_{s_0}$ und $f = F|_X : X \to Y$. Sei $\partial/\partial s \in T_{S,s_0}$ ein Tangentialvektor. Wir setzen diesen in einer Umgebung $V \subset S$ von $s_0 \in S$ zu einem holomorphen Vektorfeld fort. Sei $\chi \in \Gamma(p^{-1}(V), \mathcal{A}^{0,0}(T_{\mathcal{X}}))$ ein differenzierbarer Lift dieses Vektorfeldes. Dann wird die Klasse von $\tau(\partial/\partial s)$ in $D'_{X/Y}$ repräsentiert durch das Paar $(F_*(\chi)|_X, \bar{\partial}(\chi)|_X)$.*

Beweis. Sei $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_i)$ eine lokal endliche, Steinsche offene Überdeckung von $p^{-1}(V)$ durch zulässige Koordinatenumgebungen. Dann ist $\tau(\partial/\partial s) \in D_{X/Y}$ gegeben durch ein Paar $(\tau, \theta) \in C^0(\mathcal{U}, f^*T_Y) \times Z^1(\mathcal{U}, T_X)$ mit $\delta\tau = f_*\theta$. In lokalen Koordinaten hat $\tau = (\tau_i)$ die Gestalt

$$\tau_i = \sum_\gamma \frac{\partial F_i^\gamma}{\partial s}\Big|_{s=s_0} \frac{\partial}{\partial w_i^\gamma} \in \Gamma(U_i, f^*T_Y) \quad (U_i = \mathcal{U}_i \cap X)$$

Wir bemerken, dass $\tau_i = F_*(\partial/\partial s)|_X$ gilt, wobei wir s als lokale Koordinate auf $\mathcal{U}_i$ ansehen. Der Kozykel $\theta = (\theta_{ij})$ mit

$$\theta_{ij} = \sum_\sigma \frac{\partial f_{ij}^\sigma}{\partial s}\Big|_{s=s_0} \frac{\partial}{\partial z_i^\sigma}$$

repräsentiert die Kodaira-Spencer-Klasse $\rho(\partial/\partial s)$. Wir wissen bereits, dass $\bar{\partial}(\chi)|_X$ einen Dolbeault-Repräsentanten der Klasse von θ liefert. Wir schreiben nun lokal χ als

$$\chi = \sum_\alpha \chi_i^\alpha(z_i, s)\frac{\partial}{\partial z_i^\alpha} + \frac{\partial}{\partial s} \text{ auf } \mathcal{U}_i.$$

Wegen $\bar{\partial}(\chi - \partial/\partial s) = \bar{\partial}(\chi)$ liefert die 0-Kokette $\eta = (\eta_i)$ mit

$$\eta_i = \sum_\alpha \chi_i^\alpha(z_i, s)\frac{\partial}{\partial z_i^\alpha} \in \Gamma(U_i, \mathcal{D}(T_{\mathcal{X}/S}))$$

einen differenzierbaren Zerfall des Kozykels θ. Nach dem Beweis des vorigen Lemmas ist $\tau(\partial/\partial s) \in D'_{X/Y}$ damit gegeben durch das Paar (ξ, θ) mit

$$\xi = \tau_i + f_*\eta_i \quad \text{ auf } U_i.$$

Hieraus folgt nun schließlich $\xi = F_*(\chi)|_X$. □

Wir geben noch eine weitere Beschreibung der charakteristischen Abbildung an, wie sie sich in [HM98] wiederfindet. Wir schreiben $\Phi = (F, p) : \mathcal{X} \to Y \times S$ und bezeichnen mit $\pi : Y \times S \to S$ die Projektion auf den zweiten Faktor. Dann haben wir eine Inklusion $\pi^*T_S \to T_{Y\times S}$, die wir mittels Φ nach $\mathcal{X}$ zurückziehen: $i : \Phi^*\pi^*T_S = p^*T_S \to \Phi^*T_{Y\times S}$. Die Verkettung mit der Surjektion von $\Phi^*T_{Y\times S}$ auf die Normalengarbe $\mathcal{N}$ von $\Phi : \mathcal{X} \to Y \times S$ liefert eine Abbildung $T : p^*T_S \to \mathcal{N}$. Dabei betrachten wir ein holomorphes Vektorfeld auf S als ein Vektorfeld auf $\mathcal{X}$ mit Werten im zurückgezogenen Bündel $\Phi^*T_{Y\times S}$. Wir erhalten folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & & p^*T_S \arrow[d] \arrow[dr, "T"] & & \\
0 \arrow[r] & T_{\mathcal{X}} \arrow[r, "\Phi_*"] & \Phi^*T_{Y\times S} \arrow[r] & \mathcal{N} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Wir schränken das Ganze auf X ein, nehmen globale Schnitte und erhalten die charakteristische Abbildung

$$\tau : T_{S,s_0} \to H^0(X, p^*T_{S,s_0}) \to H^0(X, N).$$

Dabei haben wir die Beziehung $N_s = \mathcal{N} \otimes \mathcal{O}_{X_s}$ benutzt. Wir ergänzen nun dieses Diagramm um die kurze exakte Sequenz, welche die Deformation der komplexen Struktur beschreibt. Wir erhalten dann folgendes kommutative Diagramm:

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & T_{\mathcal{X}/S} \arrow[r] & T_{\mathcal{X}} \arrow[r, shift left] \arrow[dl, "F_*"'] \arrow[d, "\Phi_*"'] & p^*T_S \arrow[l, dashed, shift left] \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[ddl, "T"] & 0 \\
 & F^*T_Y \arrow[r] & \Phi^*(T_{Y\times S}) \arrow[d] & & \\
 & & \mathcal{N} \arrow[d] & & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

Dabei deutet der gestrichelte Pfeil von p^*T_S nach $T_{\mathcal{X}}$ die differenzierbare Hochhebung von holomorphen Vektorfeldern auf S an. Eine genaue Inspektion liefert nun auch die Aussage der vorangegangenen Proposition und verschafft Klarheit und Übersicht über alle beteiligten Objekte.

3.5. Familien von Abbildungen zwischen Kähler-Mannigfaltikeiten

Wir betrachten nun spezieller eine Familie von nicht ausgearteten holomorphen Abbildungen $f_s : X_s \to Y$, bei denen die Fasern X_s kompakte Kähler-Mannigfaltigkeiten sind. Dann besitzt bekanntermaßen jede Dolbeault-Klasse in $H^1(X_s, T_{X_s})$ einen harmonischen Repräsentanten. Wir betrachten für $s_0 \in S$ eine feste Faser $X = X_{s_0}$ und die zugehörige Abbildung $f = f_{s_0}$. Der Garbenmonomorphismus $f_* : T_X \to f^*T_Y$ induziert einen Monomorphismus

$$f_* : A^{0,1}(T_X) \to A^{0,1}(f^*T_Y).$$

Vermöge dieser Abbildung f_* betrachten wir insbesondere die harmonischen $(0,1)$ Formen auf X mit Werten in T_X als $(0,1)$ Formen mit Werten in f^*T_Y. Die harmonischen Formen bezeichnen wir mit $\mathcal{H}^{0,1}(X, T_X)$. Dann bekommen wir

Proposition 3.24.

$$D'_{X/Y} \cong \frac{\{\chi \in A^{0,0}(f^*T_Y) \,:\, \bar\partial\chi \in f_*(\mathcal{H}^{0,1}(X,T_X))\}}{\{f_*(\zeta) \,:\, \zeta \in H^0(X,T_X)\}} =: H_{X/Y}$$

Beweis. Zunächt stellen wir fest, dass wir $D'_{X/Y}$ im nicht ausgearteten Fall schreiben können als

$$D'_{X/Y} \cong \frac{\{\xi \in A^{0,0}(X, f^*T_Y) \,:\, \bar\partial\xi \in f_*(A^{0,1}(T_X))\}}{\{f_*(\zeta) \,:\, \zeta \in A^{0,0}(T_X)\}} =: D''_{X/Y}$$

Dann haben wir eine natürliche Abbildung von $H_{X/Y}$ nach $D''_{X/Y}$. Wir zeigen, dass diese bijektiv ist. Sei dazu $\xi \in A^{0,0}(f^*T_Y)$ mit $\bar\partial\xi = f_*\vartheta$ für ein $\vartheta \in A^{0,1}(T_X)$. Es existiert ein $\zeta \in A^{0,0}(T_X)$, so dass $\vartheta' = \vartheta + \bar\partial\zeta$ harmonisch ist. Dann liegt aber $\chi = \xi + f_*\zeta$ in der gleichen Klasse wie ξ in $D''_{X/Y}$ und wir haben $\bar\partial\chi = f_*\vartheta'$. Sind nun $\chi, \chi' \in A^{0,0}(f^*T_Y)$ gegeben mit $\bar\partial\chi = f_*\vartheta$ und $\bar\partial\chi' = f_*\vartheta'$ für harmonische Formen $\vartheta, \vartheta' A^{0,1}(T_X)$ mit $\chi' = \chi + f_*\zeta$, so liefert $f_*\vartheta' = \bar\partial\chi' = \bar\partial(\chi + f_*\zeta) = f_*(\vartheta + \bar\partial\zeta)$ und die Injektivität von f_*, dass $\vartheta' = \vartheta + \bar\partial\zeta$ ist. Damit sind die beiden harmonischen Formen ϑ und ϑ' Dolbeault-äquivalent, stimmen also überein. Es folgt $\bar\partial\zeta = 0$, d.h. ζ ist ein global holomorphes Vektorfeld auf X. Die Vektorfelder χ und χ' bestimmen somit die gleiche Klasse in $H_{X/Y}$. □

Bemerkung 3.25. Wir betrachten nun den Fall $H^0(X, T_X) = 0$. Dann haben wir

$$D_{X/Y} \cong \{\chi \in A^{0,0}(f^*T_Y) \,:\, \bar\partial\chi \in f_*(\mathcal{H}^{0,1}(X, T_X))\} = H_{X/Y}$$

und die exakte Sequenz schreiben wir nun in der Form

$$0 \to H^0(X, f^*T_Y) \xrightarrow{\alpha} H_{X/Y} \xrightarrow{\beta} f_*(\mathcal{H}^{0,1}(X, T_X)) \xrightarrow{\gamma} H^1(X, f^*T_Y)$$

Die Abbildungen in dieser Sequenz haben nun alle eine einfache Beschreibung: α können wir als eine Inklusion lesen. Die Abbildung β ist die Operation $\bar\partial$ und γ ordnet einer Form $f_*(\vartheta) \in A^{0,1}(X, f^*T_Y)$ die Dolbeault-Klasse in $H^1(X, f^*T_Y)$ zu. Die Exaktheit ist damit auch unmittelbar klar.

Im Folgenden sei auch Y eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit mit der Kähler-Metrik h. Das zurückgezogene Tangentialbündel f^*T_Y zusammen mit der zurückgezogenen Metrik f^*h ist dann ein hermitesches Bündel auf X. Der zu $\bar\partial$ bezüglich f^*h adjungierte Operator auf dem Raum $A^{0,1}(X, f^*T_Y)$ bezeichnen wir mit $\bar\partial_h^*$. Weiter bezeichnen wir mit H und G die harmonische Projektion sowie den Green-Operator in $A^{0,0}(X, f^*T_Y)$ bzw. $A^{0,1}(X, f^*T_Y)$. Bekannterweise vertauscht G mit $\bar\partial$ und $\bar\partial_h^*$.

Proposition 3.26. *Es gelte $H^0(X, T_X) = 0 = H^1(X, f^*T_Y)$. Wir interpretieren die kurze exakte Sequenz*

$$0 \to H^0(X, f^*T_Y) \to H^0(X, N_f) \to H^1(X, T_X) \to 0$$

als

$$0 \to H^0(X, f^*T_Y) \xrightarrow{\iota} \{\chi \in A^{0,0}(f^*T_Y) \,:\, \bar\partial\chi \in f_*(\mathcal{H}^{0,1}(X, T_X))\} \xrightarrow{\bar\partial} f_*(\mathcal{H}^{0,1}(X, T_X)) \to 0.$$

Dann zerfällt die Sequenz gemäß folgender Abbildungen

$$0 \leftarrow H^0(X, f^*T_Y) \xleftarrow{H} H_{X/Y} \xleftarrow{G\bar\partial_h^*} f_*(\mathcal{H}^{0,1}(X, T_X)) \leftarrow 0$$

Beweis. Wir haben die Identität $\mathrm{id} = H + G\Box$ mit $\Box = \bar\partial_h^*\bar\partial$ für Elemente aus $A^{0,0}(X, f^*T_Y)$. □

Bemerkung 3.27. Wegen $H^1(X, f^*T_Y) = 0$ gibt es keine harmonische $(0,1)$-Formen mit Werten in f^*T_Y. Daher ist der Laplace-Operator $\Box = \bar\partial_h^*\bar\partial$ auf dem Raum $A^{0,1}(X, f^*T_Y)$ invertierbar

und der inverse Operator ist der Green-Operator auf $A^{0,1}(X, f^*T_Y)$. Damit gilt insbesondere auch $u = G\bar{\partial}\bar{\partial}_h^* u = \bar{\partial} G \bar{\partial}_h^* u$ für alle $u \in f_*(\mathcal{H}^{0,1}(X, T_X))$.

Proposition 3.28. *Es gelte $H^0(X, T_X) = 0 = H^0(X, f^*T_Y)$. Wir interpretieren die kurze exakte Sequenz*

$$0 \to H^0(X, N_f) \to H^1(X, T_X) \to H^1(X, f^*T_Y) \to 0$$

als

$$0 \to \{\chi \in A^{0,0}(f^*T_Y) \,:\, \bar{\partial}\chi \in F(\mathcal{H}^{0,1}(X, T_X))\} \xrightarrow{\bar{\partial}} f_*(\mathcal{H}^{0,1}(X, T_X)) \xrightarrow{H} \mathcal{H}^{0,1}(X, f^*T_Y) \to 0,$$

Dann zerfällt die Sequenz gemäß folgender Abbildungen

$$0 \leftarrow H_{X/Y} \xleftarrow{\bar{\partial}_h^* G} f_*(\mathcal{H}^{0,1}(X, T_X)) \xleftarrow{\iota} \mathcal{H}^{0,1}(X, f^*T_Y) \leftarrow 0$$

Beweis. Wir haben die Identität $\mathrm{id} = H + \Box G$ mit $\Box = \bar{\partial}\bar{\partial}_h^*$ für Elemente aus $A^{0,1}(f^*T_Y)$. $\Box$

Bemerkung 3.29. Die Proposition 3.26 besagt, dass man auf infinitesimaler Ebene einer Deformation der Abbildung $f : X \to Y$, also einem Element aus $H_{X/Y}$, ein Element aus $H^0(X, f^*T_Y)$ zuordnen kann, also eine Deformation, bei der die komplexe Struktur fest bleibt. Die zweite Proposition 3.28 sagt aus, dass man einer infinitesimalen Deformation von X stets eine infinitesimale Deformation von $f : X \to Y$ zuordnen kann.

3.6. Überlagerungen von Riemannschen Flächen

Wir schieben nun noch einen Abschnitt ein, der an einige grundlegende Begriffe und Aussagen aus der algebraischen Theorie der Überlagerungen von Riemannschen Flächen erinnern soll, die wir für alles Weitere benötigen werden. Dabei machen wir Gebrauch von der Korrespondenz zwischen kompakten Riemanschen Flächen und projektiven, nicht singulären Kurven über den komplexen Zahlen. Die Aussagen finden sich in [Mi95] beziehungsweise [Ha77].

Es sei $f : X \to Y$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung Riemannscher Flächen, $q \in Y$ ein Punkt. Der *Urbild-Divisor* $f^*(q)$ ist der Divisor

$$f^*(q) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \mathrm{mult}_p(f) \cdot p$$

Falls $D = \sum D(q) \cdot q$ ein Divisor auf Y ist, so setzen wir

$$f^*(D) = \sum D(q) \cdot f^*(q)$$

Lemma 3.30. *Sei $f : X \to Y$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung zwischen Riemannschen Flächen. Dann gilt*

(i) Der Pullback ist ein Gruppenhomomorphismus $f^* : \mathrm{Div}\, Y \to \mathrm{Div}\, X$.

(ii) Der Pullback eines Hauptdivisors ist wieder ein Hauptdivisor. Genauer gilt für eine meromorphe Funktion g auf Y: $f^*(\mathrm{div}(g)) = \mathrm{div}(g \circ f)$.

(iii) Für einen Divisor $D \in \mathrm{Div}(Y)$ *gilt:* $\deg(f^*(D)) = \deg(f)\deg(D)$.

Beweis. Siehe [Mi95]. □

Umgekehrt definieren wir einen Homomorphismus $f_* : \mathrm{Div}\, X \to \mathrm{Div}\, Y$ durch

$$f_*(\sum D(p) \cdot p) = \sum D(p) \cdot f(p).$$

Lemma 3.31. *f_*D hängt nur von der linearen Äquivalenzklasse von D ab, induziert also einen Homomorphismus $f_* : \mathrm{Pic}\, X \to \mathrm{Pic}\, Y$. Dabei ist die Verknüpfung $f_* \circ f^* : \mathrm{Pic}\, Y \to \mathrm{Pic}\, Y$ die Multiplikation mit* $\deg f$.

Beweis. Siehe [Ha77], S. 306, Aufg. 2.6. □

Definition 3.32. Der *Verzweigungs(punkte)-Divisor* von f ist definiert durch

$$R = \sum_{p \in X} [\mathrm{mult}_p(f) - 1] \cdot p$$

Der *Verzweigungswerte-Divisor* von f ist definiert durch

$$B = f_*R = \sum_{q \in Y} \left[\sum_{p \in f^{-1}(q)} (\mathrm{mult}_p(f) - 1) \right] \cdot q$$

Proposition 3.33. *Sei $f : X \to Y$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung Riemannscher Flächen. Dann haben wir auf X die kurze exakte Garbensequenz*

$$0 \to f^*\Omega_Y \to \Omega_X \to \Omega_{X/Y} \to 0. \tag{3.10}$$

Beweis. Siehe [Ha77], S. 300. □

Proposition 3.34. *Sei R der Verzweigungsdivisor einer nicht konstanten holomorphen Abbildung $f : X \to Y$ zwischen Riemannschen Flächen. Dann gilt $\mathcal{O}_R \cong \Omega_{X/Y}$ und $\Omega_X(-R) \cong f^*\Omega_Y$. Dabei ist $\mathcal{O}_R$ die Strukturgarbe von R, den wir als komplexen Unterraum von X auffassen.*

Beweis. Die erste Aussage folgt sofort aus der Definition. Die zweite Beziehung ergibt sich damit aus der Sequenz 3.10 und der Struktursequenz

$$0 \to \mathcal{O}(-R) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_R \to 0,$$

die tensoriert mit Ω_X die Sequenz

$$0 \to \Omega_X(-R) \to \Omega_X \to \mathcal{O}_R \to 0$$

liefert. Dabei bemerken wir, dass das Tensorieren der Skyline-Garbe $\mathcal{O}_R$ mit der lokal-freien Garbe Ω_X diese nicht verändert. □

Korollar 3.35. *Ist $f : X \to Y$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung zwischen Riemannschen Flächen, dann ist die Sequenz*

$$0 \to T_X \xrightarrow{df} f^*T_Y \to N_f \to 0$$

exakt. Dabei ist $N_f = f^*T_Y/T_X$ die Normalengarbe der Abbildung f. Ist R der Verzweigungsdivisor von f, so gilt $N_f \cong \mathcal{O}_R$ und $f^*T_Y \cong T_X(R)$.

Proposition 3.36. *Sei $f : X \to Y$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung Riemannscher Flächen. Seien K_X und K_Y kanonische Divisoren auf X bzw. Y. Dann gilt*

$$K_X \sim f^*K_Y + R.$$

Dabei steht das Zeichen $\sim$ für lineare Äquivalenz.

Beweis. Wir tensorieren die Sequenz 3.10 mit Ω_X^{-1} und erhalten die exakte Sequenz

$$0 \to f^*\Omega_Y \otimes \Omega_X^{-1} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_R \to 0.$$

Die Idealgarbe von R ist aber $\mathcal{O}(-R)$ und wir bekommen

$$f^*\Omega_Y \otimes \Omega_X^{-1} \cong \mathcal{O}(-R).$$

Umformuliert für Divisoren liefert dies die Aussage. □

Korollar 3.37 (Riemann-Hurwitz-Formel)**.** *Sei $f : X \to Y$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung Riemannscher Flächen vom Grad n. Dann gilt die Beziehung*

$$2g(X) - 2 = n \cdot (2g(Y) - 2) + \deg R.$$

Definition 3.38. Eine Überlagerung $f : X \to Y$ zwischen Riemannschen Flächen heißt *einfach*, falls der Verzweigungswerte-Divisor B reduziert ist.

Bei einer einfachen Überlagerung haben alle Verzweigungspunkte demnach die Ordnung 1 und in jeder Faser der Abbildung liegt höchstens ein Verzweigungspunkt. Dies ist natürlich äquivalent zur früheren Definition 2.16.

3.7. Die Dolbeault-Sequenz einer Abbildung von Geradenbündeln

In diesem Abschnitt bezeichnen E, F stets Geradenündel und D einen effektiven Divisor auf einer Riemannschen Fläche X. Das zu D gehörende Geradenbündel bezeichnen wir mit $[D]$. Die zu einem Geradenbündel E gehörende lokal freie Garbe von $\mathcal{O}_X$-Moduln bezeichnen wir mit $\mathcal{O}(E)$. Nur in diesem Abschnitt unterscheiden wir in in der Notation zwischen dem Bündel E und der Garbe $\mathcal{O}(E)$. Das Folgende findet sich in [NR11].

Definition 3.39. Sei D ein effektiver Divisor und E ein holomorphes Geradenbündel auf einer Riemannschen Fläche X. Die *Skyline-Garbe* von E entlang D ist die Garbe $\mathcal{Q}_D(E)$, welche durch die Schnitte auf nichtleern offenen Mengen $U \subset X$ folgerndermaßen definiert ist:
$\mathcal{Q}_D(E)(U) = 0$ falls $U \cap \operatorname{supp} D = \emptyset$ und sonst

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_D(E)(U) &= \bigoplus_{p \in U \cap \operatorname{supp} D} \mathcal{O}(E)_p / \mathcal{O}_{-D}(E)_p && (3.11) \\ &= \bigoplus_{p \in U \cap \operatorname{supp} D} \mathcal{O}(E)_p / \mathfrak{m}_p^{D(p)} \cdot \mathcal{O}(E)_p && (3.12) \\ &\cong \bigoplus_{p \in U \cap \operatorname{supp} D} \mathbb{C}^{D(p)} \cong \mathbb{C}^{\sum_{p \in U \cap \operatorname{supp} D}(D(p))} && (3.13) \end{aligned}$$

Sei nun E ein holomorphes Geradenbündel auf einer Riemannschen Fläche X. Haben wir weiter einen effektiven Divisor D auf X zusammen mit einem definierenden holomorphen Schnitt s mit $\operatorname{div}(s) = D$, so bekommen wir eine Bündelabbildung $\Psi : E \to E \otimes [D]$ gegeben durch $\xi \mapsto \xi \otimes s_P$ für $p \in X$ und $\xi \in E_p$. Der zugehörige Garbenmorphismus $\Psi_* : \mathcal{O}(E) \to \mathcal{O}(E \otimes [D])$ ist gegeben durch $\xi \mapsto \xi \otimes s$ für jeden lokalen holomorphen Schnitt ξ. Wir bekommen weiter den natürlichen Garbenmorphismus $\mathcal{O}(E \otimes [D]) \to \mathcal{Q}_D(E \otimes [D])$. Dies liefert die kurze exakte Garbensequenz

$$0 \to \mathcal{O}(E) \to \mathcal{O}(E \otimes [D]) \to \mathcal{Q}_D(E \otimes [D]) \to 0.$$

Sei nun allgemeiner ein Homomorphismus $\Psi : E \to F$ von Geradenbündeln auf X gegeben. Wir identifizieren F mit $E \otimes E^* \otimes F$. Dann existiert ein Schnitt s von $E^* \otimes F$, so dass wir Ψ mit der soeben beschriebenen Abbildung von E nach $E \otimes \operatorname{div}(s)$ identifizieren können. Wir setzen $D = \operatorname{div}(s)$. Dann bekommen wir die exakte Garbensequenz

$$0 \to \mathcal{O}(E) \to \mathcal{O}(F) \to \mathcal{Q}_D(F) \to 0.$$

Diese liefert die exakte Sequenz von Vektorräumen

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{O}(E)) \to \Gamma(X, \mathcal{O}(F)) \to \Gamma(X, \mathcal{Q}_D(F)) \to H^1(X, E) \to H^1(X, F) \to 0. \tag{3.14}$$

(Die Garbe $\mathcal{Q}_D(E)$ ist diskret, also verschwindet die Gruppe $H^1(X, \mathcal{Q}_D(E))$.) Wie wir schon gesehen haben, ist die zweite Abbildung $\Gamma(X, \mathcal{O}(E)) \to \Gamma(X, \mathcal{O}(F))$ gegeben durch $t \mapsto \Psi(t) \otimes s$. Die dritte Abbildung

$$\Gamma(X, \mathcal{O}(F)) \to \Gamma(X, \mathcal{Q}_D(F)) = \bigoplus_{p \in \operatorname{supp} D} \mathcal{O}(F)_p / \mathfrak{m}_p^{D(p)} \mathcal{O}(F)_p$$

ist gegeben durch

$$t \mapsto \{\operatorname{germ}_p t + \mathfrak{m}_p^{D(p)} \mathcal{O}(F)_p\}_{p \in \operatorname{supp} D}.$$

Dabei wird ein Schnitt t auf die 0 abgebildet, falls t mindestens zur Ordnung $D(p)$ in jedem Punkt $p \in \operatorname{supp} D$ verschwindet, also genau dann, wenn t/s ein holomorpher Schnitt von E ist. Für den verbindenden Homomorphismus $\Gamma(X, \mathcal{Q}_D(F)) \to H^1(X, E)$ betrachten wir ein Element $\xi \neq 0$ aus $\Gamma(X, \mathcal{Q}_D(F))$. Wir wählen einen C^∞-Schnitt t von $F = E \otimes [D]$, so dass t holomorph in

einer Umgebung U von $\operatorname{supp} D$ ist und $\xi = \{\operatorname{germ}_p t + \mathfrak{m}_p^{D(p)}\mathcal{O}(F)_p\}_{p\in\operatorname{supp} D}$ gilt. Dann ist $\bar\partial t$ eine C^∞-Form vom Typ $(0,1)$ mit Werten in $E\otimes[D]$, welche in einer Umgebung von $\operatorname{supp} D = \{s=0\}$ verschwindet. Daher setzt sich $\bar\partial s/t$ zu einer C^∞-Form θ vom Typ $(0,1)$ mit Werten in E auf X fort. Die zugehörige Dolbeault-Kohomologieklasse $\eta = [\theta]$ ist dann das Bild von ξ. Diese Zuordnung $\xi \mapsto \eta$ ist wohldefiniert. Ist nämlich $t' \in \mathcal{D}(F)(X)$ mit $t'|_{U'} \in \mathcal{O}(F)(U')$ ein weiterer solcher Schnitt, θ' die Fortsetzung von $\bar\partial t'/s$ und $\eta' = [\theta']$, dann lässt sich $(t-t')/s$ zu einem C^∞-Schnitt u von E auf X fortsetzen. Damit ist $\theta - \theta' = \bar\partial u$, also $\eta = \eta'$. Finden wir einen holomorphen Schnitt t für ξ auf X, so bekommen wir $\theta = \bar\partial t/s = 0$, daher auch $\eta = [\theta] = 0$. Haben wir umgekehrt $\xi \mapsto \eta = 0$ und t, θ wie oben, dann ist $\theta = \bar\partial v$ für ein C^∞-Schnitt v von E auf X und daher $((t/s) - v$ ein holomorpher Schnitt von E auf $X \setminus \operatorname{supp} D$. Da t in einer Umgebung von $\operatorname{supp} D$ holomorph ist, ist auch v in einer Umgebung von $\operatorname{supp} D$ holomorph und daher $t' = t - v \otimes s$ ein holomorpher Schnitt von F. Damit haben wir $t' \mapsto \xi$ und wir erhalten Exaktheit an dieser Stelle.

Definition 3.40. Wir nennen die Sequenz 3.14 die *Dolbeault exakte Sequenz* zur Bündelabbildung $\Psi : E \to F$.

Wir wenden die Dolbeault exakte Sequenz samt der Beschreibung ihrer zugehörigen Abbildungen auf eine einfache Überlagerung $f : X \to Y$ von Riemannschen Flächen an. Ist R der Verzweigungsdivisor von f, so haben wir die Bündelabbildung

$$df : T_X \to f^*T_Y = T_X(R).$$

Die zugehörige Dolbeault exakte Sequenz hat die Form

$$0 \to \Gamma(X, T_X) \to \Gamma(X, f^*T_Y) \to \Gamma(X, \mathcal{Q}_R(f^*T_Y)) \to H^1(X, T_X) \to H^1(X, f^*T_Y) \to 0.$$

Dies ist natürlich nicht anderes als die Sequenz

$$0 \to H^0(X, T_X) \to H^0(X, f^*T_Y) \to H^0(X, N_f) \to H^1(X, T_X) \to H^1(X, f^*T_Y) \to 0,$$

die wir schon kennen. Wir haben nun folgende Interpretation: Die holomorphen Vektorfelder auf X sind diejenigen holomorphen Schnitte des zurückgezogenen Bündels f^*T_Y, welche in den Verzweigungspunkten Nullstellen besitzen. Ein Element aus $H^0(X, N_f) = \Gamma(X, \mathcal{Q}_R(f^*T_Y))$ repräsentieren wir durch einen differenzierbaren Schnitt des zurückgezogenen Bündels f^*T_Y, der in einer Umgebung der Verzweigungspunkte holomorph ist. Dies ist dann ein differenzierbares Vektorfeld, welches in einer Umgebung der Verzweigungspunkte bis auf die Verzweigungspunkte selbst holomorph ist und in den Verzweigungspunkten selbst einfache Pole besitzt. Sind $z_1, \cdots, z_b$ lokale Koordinaten jeweils zentriert um die Verzeigungspunkte $x_1, \cdots, x_b$, so besitzt dieses Vektorfeld lokal um x_j die Gestalt

$$\sum_{\nu=-1}^{\infty} a_\nu^j z_j^\nu$$

Wir setzen $c_j = a_{-1}^j$ als das Residuum des Vektorfeldes an der Stelle x_j bezüglich der lokalen Koordinate z_j. Vermöge dieser Koordinaten identifizieren wir $H^0(X, \mathcal{O}_R)$ mit $\mathbb{C}^b$. Das Vektorfeld

repräsentiert dann den Wert $(c_1, c_2, \cdots, c_b)$. Die Bewegungsrichtungen, entlang derer die komplexe Struktur infinitesimal unverändert bleibt, ist dann gegeben durch Vektoren, deren Einträge die Residuen von holomorphen Vektorfeldern mit einfachen Polen in den Verzweigungspunkten sind. Das Residuum eines meromorphen Vektorfeldes ist jedoch nicht koordinatenunabhängig erklärt! Zumindest ist aber die Eigenschaft $c = 0$ bzw. $c \neq 0$ wohldefiniert.

3.8. Schiffer-Variationen

Nun nehmen wir wieder einen deformationstheoretischen Standpunkt ein und betrachten eine der beiden exakten Seqenzen von Vektorräumen aus dem vorigen Abschnitt. In dem Raum $H^1(X, T_X)$ erkennen wir die infinitesimalen Deformationen der Riemannschen Fläche X. Der verbindende Homomorphismus dieser Sequenz bildet demnach globale Schnitte der diskreten Garbe $\mathcal{O}_R$ auf solche Deformationen ab. Sei der Einfachheit halber $R = p$ und δ_p ein Erzeuger von

$$H^0(X, T_X(p) \otimes \mathbb{C}_p) \cong \mathbb{C}.$$

Das Bild dieses Erzeugers unter der Randabbildung von

$$0 \to T_X \to T_X(p) \to T_C(p) \otimes \mathbb{C}_p \to 0$$

bezeichnet man als *Schiffer-Variation*, siehe [ACG11] oder [HM98]. Ist U eine kleine Umgebung des Punktes p, z eine lokale Koordinate um p auf U und V das Komplement von p, dann ist die Kozykel-Gestalt des Bildes von δ_p bezüglich der Überdeckung $\{U, V\}$ gerade

$$\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Dies sind Deformationen, welche die komplexe Struktur nur lokal um den Punkt p ändern. Bis auf eine multiplikative Konstante gibt es für jeden Verzweigungspunkt eine solche Schiffer-Variation. Sind die Verzweigungspunkte nicht mehr einfach, so erhält man Schiffer-Variationen höherer Ordnung. Wir halten dies in folgender Proposition fest:

Proposition 3.41. *Ist $f : X \to Y$ eine einfache Überlagerung von Riemannschen Flächen, dann liefert das Bild der Abbildung*

$$H^0(X, \mathcal{O}_R) \to H^1(X, T_X)$$

gerade Schiffer-Variationen um die Verzweigungspunkte.

3.9. Infinitesimale Betrachtungen zum Hurwitz-Raum

Wir betrachten die universelle Familie $\mathcal{X} \to \mathbb{P}^1 \times \mathcal{H}^{n,b}$ über dem Hurwitz-Raum. Wie wir im ersten Kapitel gesehen haben, ist die komplexe Struktur von $\mathcal{H}^{n,b}$ durch die endliche, unverzweigte Überlagerung

$$br : \mathcal{H}^{n,b} \to \operatorname{Sym}^b \mathbb{P}^1 \setminus \Delta =: \mathbb{P}^1_b \setminus \Delta$$

gegeben. Diese ordnet einer Überlagerung die Verzweigungswerte in $\mathbb{P}^1$ zu, was wir als Divisor auffassen. Wir schreiben kurz $H = \mathcal{H}^{n,b}$ und betrachten einen beliebigen Punkt $s_0 \in H$ zusammen mit der zugehörigen Überlagerung $\beta = \beta_{s_0} : X = X_{s_0} \to \mathbb{P}^1$. Wir schreiben $B = br(s_0)$ für den Verzweigungswerte-Divisor. Dann ist die Tangentialabbildung

$$br_* : T_{s_0}(H) \to T_D(\mathbb{P}^1_b)$$

ein Isomorphismus. Es gibt einen intrinsischen Isomorphismus (siehe [ACGH85], S. 160)

$$T_D(\mathbb{P}^1_b) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_B(B))$$

Der Raum $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_B(B))$ ist auch als der Raum der infinitesimalen Deformationen des effektiven Divisor B auf $\mathbb{P}^1$ bekannt, siehe ([HM98], S.94). Wir nehmen nun den geometrischen Standpunkt ein und interpretieren Tangentialvektoren an dem Punkt $s_0 \in H$ als Äquivalenzklassen von glatten Kurven in H durch den Punkt s_0 unter der Äquivalenz der ersten Ordnung Approximation. Diese entsprechen unter der Abbildung br Kurven im Raum der Verzweigungswerte. Anders formuliert: Die Bewegung der b Verzweigungswerte in $\mathbb{P}^1_b$ entspricht einer infinitesimalen Deformation der Überlagerung $\beta : X \to \mathbb{P}^1$. Die infinitesimalen Deformationen werden beschrieben durch den Raum

$$T_{s_0}(H) \cong H^0(X, N_\beta) \cong H_{X/Y}$$

welcher als mittlerer Ausdruck in der Tangentialsequenz

$$0 \to H^0(X, \beta^* T_{\mathbb{P}^1}) \to H_{X/\mathbb{P}^1} \to H^1(X, T_X) \to 0$$

auftaucht. Der Unterraum $H^0(X, \beta^* T_{\mathbb{P}^1}) \subset H_{X/\mathbb{P}^1}$ beschreibt dabei die infinitesimalen Deformationen von $\beta : X \to \mathbb{P}^1$, bei denen die komplexe Struktur von X infinitesimal fest bleibt. Nun können wir die Frage stellen, welche Bewegungen der Verzweigungswerte die Fläche X fest lassen und welche nicht. Ein Resultat in dieser Richtung ist folgende Aussage:

Proposition 3.42. *Bewegt man weniger als $2g-2$ Verzweigungspunkte auf $\mathbb{P}^1$, so ändert sich die komplexe Struktur von X infinitesimal.*

Beweis. Sei

$$R = \sum_{i=1}^{b} p_i$$

der Verzweigungsdivisor von β auf X und

$$B = \sum_{i=1}^{b} q_i$$

der Verzweigungswerte-Divisor auf $\mathbb{P}^1$. Es gelte $\beta(p_i) = q_i$. Bei der einfachen Überlagerung $\beta : X \to \mathbb{P}^1$ haben wir eine $1:1$-Beziehung zwischen den Verzweigungspunkten auf X und den Verzweigungswerten auf $\mathbb{P}^1$. Eine (infinitesimale) Bewegung der Punkte $q_1, \ldots, q_b$ entspricht

einem Element aus $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_B(B))$. In Koordinaten z_i jeweils zentriert um die Punkte q_i kann ein solcher Schnitt lokal geschrieben werden als

$$\eta = \sum_{i=1}^{b} \eta_i$$

mit

$$\eta_i = a_i \frac{1}{z_i}$$

Falls der k-te Punkt nicht bewegt wird, so gilt (in allen Koordinaten) $a_k = 0$. Vermöge der Identifizierungen

$$H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_B(B)) \cong T_B(\mathbb{P}^1_b) \cong T_{s_0}(H) \cong H^0(X, \mathcal{O}_R(R)) \cong H^0(X, \mathcal{Q}_R(f^* T_{\mathbb{P}^1}))$$

liefert ein solcher Schnitt ein differenzierbares Vektorfeld auf X, welches in einer Umgebung der Verzweigungspunkte meromorph ist. Dabei haben wir genau dann einen Pol (d.h. das Residuum in zentrierten Koordinaten ist von Null verschieden), falls der entsprechende Verzweigungswert bewegt wird. Die Frage ist nun: Gibt es ein von Null verschiedenes meromorphes Vektorfelder auf X, welches nur einfache Pole in $r < b$ der insgesamt b Verzweigungspunkte hat? Für $r < 2g - 2$ ist die Antwort negativ, da das Bündel $T_X(R')$ für einem effektiven Divisor $R' < R$ (etwa $R' = \sum_{i=1}^{r} p_i$) einen negativen Grad aufweist, also keine nicht trivialen globalen holomorphen Schnitte besitzt. □

Bemerkung 3.43. Die Aussage der Proposition findet sich schon in der Notiz [Fr12]. Dort wird sie unter anderem mithilfe von Methoden aus der Teichmüller-Theorie bewiesen, indem jeder Bewegung von Verzweigungswerten ein Beltrami-Differential zugeordnet wird. Dies führt auf eine Riemann-Roch-Diskussion des Raums $H^0(X, K_X^2(-B))$, welcher Serre-dual zum Raum $H^1(X, T_X(B))$ ist.

3.10. Beispiele

Wir geben in diesem Abschnitt zur Illustration ein Paar konkrete Beipspiele von Familien von Überlagerungen. Dafür genügt uns der einfachste Fall von Überlagerungen der Riemannschen Zahlenkugel auf sich selbst, die sich konkret als rationale Funktionen schreiben lassen. Im Folgenden sei z eine lokale Koordinate auf $\mathbb{C} = \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$ und w eine loakle Koordinate auf $\mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$ mit $z = 1/w$. Weiter schreiben wir wieder Ram (ramification) für die Menge der Verzweigungspunkte und Br (branching) für die Menge der Verzweigungswerte. Die Unterscheidung von festen und varibalen Verzweigungspunkten bzw. -werten spielt eine Rolle für die Diskussion in Abschnitt 5.6. Sämtliche Beispiele sind vom Grad 2, also einfache Überlagerungen.

Beispiel 3.44 (Verzweigungspunkt s variiert,Verzweigungswert 0 bleibt fest)**.** Sei $\beta : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1$ definiert durch $\beta(z, s) = (z - s)^2$. Offenbar gilt: $\mathrm{Ram}(\beta_s) = \{s, \infty\}$ und $\mathrm{Br}(\beta_s) = \{0, \infty\}$. Weiter gilt:

$$\frac{\partial \beta}{\partial z}(z, s) = 2(z - s)$$

und

$$\frac{\partial \beta}{\partial s}(z,s) = -2(z-s),$$

also

$$\frac{\partial \beta}{\partial s} \Big/ \frac{\partial \beta}{\partial s} = -1.$$

Das Vektorfeld $(\partial_s \beta / \partial_z \beta)\partial_z = -\partial_z = w^2 \partial_w$ ist holomorph auf $\mathbb{P}^1$ und besitzt eine doppelte Nullstelle in $z = \infty$. Die Familie von Abbildungen $\beta_s(z)$ ist vermöge $(z,s) \mapsto (z-s)$ isomorph zur trivialen Familie von Abbildungen $\tilde{\beta}(z,s) = \beta(z,0) = \beta_0(z) = z^2$.

Bemerkung 3.45. Dieses einfache Beispiel illlustriert bereits die Tatsache, dass für eine holomorphe Abbildung $f : X \to Y$ die holomorphen Vektorfelder auf X Deformationen von f induzieren, bei denen die komplexe Struktur infinitesimal fest bleibt. Dies sagt uns die exakte Sequenz 3.25:

$$0 \to H^0(X, T_X) \xrightarrow{df} H^0(X, f^*T_Y) \to H^0(X, N_f) \to H^1(X, T_X) \to H^1(X, f^*T_Y) \to 0$$

(Hierbei verschwindet $H^1(X, N_f)$ im Falle einer disktreten Garbe N_f.) Diese induzierten infinitesimalen Deformationen verschwinden jedoch im Raum $H^0(X, N_f)$ aller Deformationen von f, da in dieser Kategorie alle Morphismen $\Psi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ mit $f' \circ \Phi = f$ und $\beta' \circ \Psi = \beta$ zugelassen sind (siehe [Na79], S.176). Hierbei bezeichnen $(\beta, f) : \mathcal{X} \to Y \times S$ und $(\beta', f') : \mathcal{X} \to Y \times S$ jeweils Familien über S. In der Kategorie der Familien von Überlagerungen $(\beta, f) : X \times S \to Y \times S$, bei denen die komplexe Struktur beider Räume fest bleibt, sind die Morphismen von der Form $\psi \times id : X \times S \to X \times S$ für eine feste holomorphe Abbildung $\psi : X \to X$.

Bemerkung 3.46. Das Beispiel 3.44 zeigt auch, dass die Proposition 4.9 im Falle, dass die X_s nicht mehr hyperbolisch sind, in dieser Formulierung nicht mehr korrekt ist. Wir sehen, dass auch holomorphe Vektorfelder u_s ohne Polstellen lokal triviale Familien beschreiben, obwohl diese nicht verschwinden. Dies ist im Einklang mit Proposition 3.24. Das Vektorfeld verschwindet erst wieder in den trivialisierenden Koordinaten $\tilde{z}(z,s) = z - s$.

Beispiel 3.47 (Verzweigungspunkt 0 bleibt fest, Verzweigungswert s variiert)**.** Sei $\beta : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C} \to \mathbb{P}^1$ mit $\beta(z,s) = z^2 + s$. Es gilt $\mathrm{Ram}(\beta_s) = \{0, \infty\}$ und $\mathrm{Br}(\beta_s) = \{s, \infty\}$. Wir haben $\partial\beta/\partial z = 2z$ und $\partial\beta/\partial s = 1$. Damit ist das Vektorfeld $(\partial_s \beta / \partial_z \beta)\partial_z = (1/2z)\partial_z$ nicht mehr holomorph, sondern besitzt eine Polstelle in $z = 0$. Die Familie β_s ist nicht mehr lokal trivial.

Bemerkung 3.48. Die beiden vorangegangenen Beispiele illustrieren die Tatsache, dass erst die Bewegung der Verzweigungswerte auf Y Deformationen von β_0 liefern (siehe [Se06], Seite 173).

Beispiel 3.49. (Verzweigungspunkt- und wert bleiben fest) Sei $\beta : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^* \to \mathbb{P}^1, \beta(z,s) = \frac{z^2}{4(z-s)}, s \neq 0$. Offenbar hat β_s für alle s eine doppelte Nullstelle in $z = 0$ und einen einfachen Pol in $z = \infty$. Zudem haben wir den einfachen Pol $z = s$. Somit ist der Grad von β_s für $s \neq 0$ stets 2. Wir bestimmen den zweiten Verzweigungspunkt:

$$\beta_s'(z) = \frac{2z(z-s) - z^2}{4(z-s)^2}$$

Dies führt auf $z = 0$ oder $z = 2s$. Wegen $f(2s) = s$ haben wir $\mathrm{Ram}(\beta_s) = \{0, 2s\}$ und $\mathrm{Br}(\beta_s) = \{0, s\}$. Weiter ist

$$\frac{\partial \beta}{\partial z}(z, s) = \frac{z(z-2s)}{4(z-s)^2}$$

und

$$\frac{\partial \beta}{\partial s}(z, s) = \frac{z^2}{4(z-s)^2}.$$

Damit gilt $(\partial\beta/\partial s)(0, s) = 0$ für alle $s \in S$, was natürlich auch direkt aus $\beta(0, s) = 0$ für alle $s \in S$ folgt. Schließlich ist

$$\frac{\partial \beta}{\partial s} \Big/ \frac{\partial \beta}{\partial z} = \frac{z^2}{z(z-2s)} = \frac{z}{z-2s}.$$

Das Vektorfeld $(\partial_s\beta/\partial_z\beta)\partial_z$ besitzt also eine einfache Nullstelle in $z = 0$ und eine einfache Polstelle in $z = 2s$.

Beispiel 3.50. (Zwei variable Verzweigungspunkte, ein variabler und ein fester Verzweigungswert) Sei $\beta(z, s) = \frac{(z-s)^2}{4z}, s \neq 0$. Der Wert $z = s$ ist eine doppelte Nullstelle, also ist β_s stets vom Grad 2. Die Werte $z = 0$ und $z = \infty$ sind die einfachen Polstellen. Wir bekommen für die Ableitungen

$$\frac{\partial \beta}{\partial z}(z, s) = \frac{2(z-s)z - (z-s)^2}{4z^2} = \frac{(z-s)(z+s)}{4z^2}.$$

Damit sind die Punkte $z = s$ und $z = -s$ die variablen Verzweigungspunkte mit den Werten $\beta(s, s) = 0$ und $\beta(-s, s) = s$. Ferner ist

$$\frac{\partial \beta}{\partial s}(z, s) = \frac{-2(z-s)}{4z},$$

also

$$\frac{\partial \beta}{\partial s} \Big/ \frac{\partial \beta}{\partial z} = \frac{-2z}{(z+s)}.$$

Das Vektorfeld $(\partial_s\beta/\partial_z\beta)\partial_z = -2z/(z+s)\partial_z$ hat also einen einfachen Pol in dem Verzweigungswert $z = -s$, welcher zum variablen Verzweigungswert s gehört, und besitzt eine Nullstelle in $z = 0$.

Bemerkung 3.51. Das Beispiel suggeriert, dass der Überlagerungsgrad einer Familie von holomorphen Abbildungen nicht konstant sein muss. Setzen wir die Familie im Punkt $s = 0$ fort, so besitzt die Abbildung $\beta_0(z) = z/4$ den Grad 1. Die Familie ist jedoch nicht stetig im Punkt $(0, 0)$. Für alle $s \neq 0$ ist $\beta(0, s) = \infty$, aber $\beta(0, 0) = 0$.

Beispiel 3.52 (Variable Verzweigungspunkte und - werte)**.** Sei $\beta(z, s) = \frac{z^2+s}{z}, s \neq 0$. Offenbar sind die Punkte $z = 0$ und $z = \infty$ einfache Polstellen. Wir bekommen

$$\frac{\partial \beta}{\partial z}(z, s) = \frac{2z \cdot z - (z^2+s)}{z^2} = \frac{z^2-s}{z^2}.$$

Damit sind $z = \sqrt{s}$ und $z = -\sqrt{s}$ die Verzweigungspunkte mit den Verzweigungswerten $2\sqrt{s}$ und $-2\sqrt{s}$. Es ist

$$\frac{\partial \beta}{\partial s}\partial_w = \frac{1}{z}\partial_w = \frac{z}{z^2 - s}\partial_z.$$

Wir haben also einen Pol in beiden Verzweigungspunkten.

4. Die Weil-Petersson-Metrik

Auf einer effektiv parametrisierten Familie von hyperbolischen Riemannschen Flächen oder allgemeiner von Kähler-Einstein-Mannigfalltigkeiten lässt sich auf der Basis eine Weil-Petersson-Metrik erklären (siehe [Sch93]). Diese ist mit Hilfe von hamonischen Repräsetanten der Kodaira-Spencer-Abbildung definiert, welche die infinitesimale Variation der komplexen Struktur auf den Fasern repräsentieren. In diesem Kapitel erklären wir eine Weil-Petersson-Metrik auf der Basis einer Familie von Überlagerungen von Riemannschen Flächen, die sowohl die Variation der komplexen Struktur auf den Fasern als auch die Variation der Überlagerungen selbst berücksichtigt (siehe [ABS15]). Wir führen einen direkten Beweis der Kähler-Eigenschaft dieser Metrik, welcher nicht die Faser-Integral-Formel aus [ABS15] verwendet. Danach studieren wir ihre Krümmung.

4.1. Familien von Überlagerungen Riemannscher Flächen

Wir wenden nun die im vorigen Kapitel entwickelte Deformationstheorie auf den Fall von Überlagerungen kompakter Riemannschen Flächen an. Dazu fixieren wir eine kompakte Riemannsche Fläche Y.

Definition 4.1. Eine *holomorphe Familie von Überlagerungen von Riemannschen Flächen* ist eine holomorphe Familie von Abbildungen $\Phi = (\beta, f) : \mathcal{X} \to Y \times S$, bei der jede Abbildung $\beta_s : \mathcal{X}_s \to Y$ eine holomorphe Überlagerung einer kompakten Riemannschen X_s nach Y ist.

Bemerkung 4.2. Eine holomorphe Familie von Überlagerungen von Riemannschen Flächen ist also nichts anderes als eine Familie von nicht konstanten holomorphen Abbildungen $\beta_s : X_s \to Y$ von kompakten Riemannschen Flächen, welche holomorph vom Parameter s abhängen. Nach dem Satz von Ehresmann ist das Geschlecht der Riemannschen Flächen X_s für eine solche Familie konstant (wir betrachten S als zusammenhängend). Auch der Grad der Überlagerung $\deg(\beta_s)$ ist als diskrete topologische Größe konstant. Setzen wir $g = g(X_s)$ und $n = \deg \beta_s$, so besagt die Riemann-Hurwitz-Formel, dass

$$2(g-2) = n(2g(Y)-2) + \deg(R_s),$$

wobei R_s der Verwzeigungsdivisor von $\beta_s : X_s \to Y$ ist. Daraus folgt, dass auch die totale Verzweigungsordnung $\deg(R_s)$ für eine holomorphe Familie von Überlagerungen konstant bleibt. Im Falle einer Familie von einfachen (n, b)-Überlagerungen $(\beta, f) : \mathcal{X} \to Y$ ist der Grad nach Definition b und $\deg(R_s)$ entspricht der festen Anzahl der Verzweigungspunkte (bzw -werte) b.

Es sei nun $(\beta, f) : \mathcal{X} \to Y \times S$ eine holomorphe Familie von Überlagerungen von kompakten Riemannschen Flächen X_s vom Geschlecht $g > 1$, d.h. alle X_s seien hyperbolisch. Wir fixieren einen Punkt $s_0 \in S$ mit zugehöriger Faser $X = X_{s_0}$ und der Abbildung $\beta_0 = \beta_{s_0} : X \to Y$. Sei z

eine lokale holomorphe Koordinate auf den Fasern und $s^1, \cdots, s^r$ lokal holomorphe Koordinaten auf S, die wir als lokale Koordinaten auf $\mathcal{X}$ benutzen mit $f(z,s) = s$. Dann besitzt jede Faser X_s eine eindeutige hyperbolische Metrik

$$\omega_{X_s} = \sqrt{-1} g(z,s) dz \wedge d\overline{z}$$

mit konstanter Ricci-Krümmung -1, welche von der Klasse C^∞ ist und C^∞-differenzierbar vom Parameter s abhängen. Es gilt die Beziehung

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} \log g(z,s) = g(z,s). \tag{4.1}$$

Die Kähler-Formen auf den Fasern von f liefern eine hermitesche Metrik $g^{-1}(z,s)$ auf dem relativen kanonischen Bündel $K_{\mathcal{X}/S}$. Wir bezeichnen seine Krümmungsform mit

$$\omega_{\mathcal{X}} = \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \log g(z,s).$$

Aufgrund von 4.1 gilt

$$\omega_{\mathcal{X}}|_{X_s} = \omega_{X_s}.$$

Sei

$$\rho_s : T_s S \to H^1(X_s, T_{X_s})$$

die Kodaira-Spencer-Abbildung zur Deformation $f : \mathcal{X} \to S$ an einer Stelle $s \in S$. Mit $\partial/\partial s = \partial_s$ bezeichnen wir einen beliebigen Tangentialvekor aus $T_s S$. Harmonische Repräsentanten von $\rho(\partial_s)$ bezüglich der hyperbolischen Metrik auf X_s sind harmonische Beltrami-Differentiale, die wir mit $\mu_s = \mu^z_{s\overline{z}} \partial_s d\overline{z}$ bezeichnen. Diese gewinnt man mittels *horizontaler* Hochhebungen von ∂_s, siehe [Sch93]. Wir bezeichen mit

$$v_s = \partial_s + a^z_s \partial_s \quad \text{wobei} \quad a^z_s = -g^{\overline{z}z} g_{s\overline{z}} \tag{4.2}$$

den horizontalen Lift von ∂_s, welcher bezüglich $\omega_{\mathcal{X}}$ senkrecht zur Faser steht. Dabei ist $g_{s\overline{z}}$ die Komponente von $\omega_{\mathcal{X}}$ in Richtung von z und s. Dann ist das harmonische Beltrami-Differential gegeben durch

$$\mu_s = (\bar{\partial} v_s)|_{X_s} = \partial_{\overline{z}}(a^z_s) \partial_z d\overline{z}.$$

Nun betrachten wir die charakteristische Abbildung

$$\tau_s : T_s S \to H^0(X_s, N_{\beta_s})$$

Da wir auf X_s eine Kählersche Metrik ω_{X_s} gewählt haben und bekanntlich keine nicht trivialen holomorphen Vektorfelder auf den Fasern X_s existieren, können wir $H^0(X_s, N_{\beta_s})$ mit $H_{X_s/Y} = \{\chi \in A^{0,0}(\beta_s^* T_Y) \,:\, \bar{\partial}\chi \in \beta_{s,*}(\mathcal{H}^{0,1}(X, T_X))\}$ identifizieren. Einen entsprechenden Repräsentanten von $\tau_s(\partial_s)$ erhält man auch in dieser Situation mittels des horizontalen Lifts v_s durch

$$u_s := \beta_* v_s = \beta_*(\partial_s + a^z_s \partial_z) = \frac{\partial \beta}{\partial s} \frac{\partial}{\partial w} + a^z_s \frac{\partial \beta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial w} = (\xi^w_s + a^z_s \zeta^w_z) \frac{\partial}{\partial w},$$

wobei wir die Bezeichnungen $\xi_z^w = \partial\beta/\partial s$ und $\zeta_z^w = \partial\beta/\partial z$ eingeführt haben. Dies ist ein differenzierbares Vektorfeld auf X_s mit Werten in $\beta_s^* T_Y$, so dass

$$\bar{\partial}(u_s) = \mu_s \zeta_z^w \partial_w d\overline{z} \in \beta_{s,\star}(\mathcal{H}^{0,1}(X_s, T_{X_s})).$$

Nach Proposition 3.23 und dem Beweis von Proposition 3.24 gilt $\tau_s(\partial_s) = u_s \in H_{X_s/Y}$. Wir werden im Folgenden die Elemente von $H_{X_s/Y}$ (in nicht ganz korrekter Weise) als *harmonische Repräsentanten* bezeichnen. Wir halten das Resultat noch in folgender Proposition fest:

Proposition 4.3. *Der Push-Forward von horizontalen Hochhebungen von Tangentialvektoren liefert harmonische Repräsentanten der charakteristischen Abbildung.*

Bemerkung 4.4. Man kann die Vektorfelder u_s auch noch auf eine andere Art und Weise erhalten: Zunächt induziert der Lift v_s als Vektorfeld mit Werten in $T_{\mathcal{X}}$ ein Vektorfeld $\tilde{v}_s = \partial_s + a_s^z \zeta_z^w \partial_w$ mit Werten in $\Phi^*(T_{Y\times S})$, wobei $\Phi = (\beta, f)$. Statten wir nun auch Y mit einer Metrik ω_Y von konstanter Krümmung aus, so können wir nach einem Lift von ∂_s fragen, welcher senkrecht zur Faser bezüglich der zurückgezogenen Metrik $\beta^*\omega_Y$ ist. Dies führt auf das holomorphe Vektorfeld $\partial_s - \xi_s^w/\zeta_z^w \partial_z = \partial_s - \xi_s^w \partial_w$, welches Polstellen in den Verzweigungspunkten besitzt. Bilden wir die Differenz beider Hohhebungen, so erhalten wir das Vektorfeld $u_s = (\xi_s^w + a_s^z \zeta_z^w)\partial_w$ mit Werten in $\beta^* T_Y$.

4.2. Definition der Metrik

Wir behalten die Bezeichnugen aus dem vorherigen Abschnitt bei. Mittels der kanonischen Repräsentanten der charakteristischen Abbildung können wir nun eine Metrik auf der Basis S einer effektiv parametrisierten Familie $(\beta, f) : \mathcal{X} \to Y \times S$ von Überlagerungen von Riemannschen Flächen erhalten. Seien $s = (s^1, \cdots, s^r)$ lokale holomorphe Koordinaten auf S, die wir zusammen mit einer weiteren lokalen holomorphen Koordinate z auf der Faser als Koordinaten auf $\mathcal{X}$ auffassen, so dass $f(z, s) = s$. Weiter sei w eine lokal holomorphe Koordinate auf Y, so dass $\beta(z, s) = w$. Die Kählersche Metrik auf Y von konstaner Krümmung (+1,0 oder -1, abhängig von $g(Y)$) schreiben wir als

$$\omega_Y = \sqrt{-1} h_{w\overline{w}}\, dw \wedge d\overline{w}.$$

Für die zurückgezogene Metrik erhaten wir

$$\beta^*\omega_Y = \sqrt{-1} h_{w\overline{w}}(\beta(z,s)) \left(\zeta_z^w \zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}}\, dz \wedge d\overline{z} + \zeta_z^w \xi_{\overline{\jmath}}^{\overline{w}} dz \wedge ds^{\overline{\jmath}} + \xi_i^w \zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}} ds^i \wedge d\overline{z} + \xi_i^w \xi_{\overline{\jmath}}^{\overline{w}} ds^i \wedge ds^{\overline{\jmath}}\right)$$

Hier und im Folgenden verwenden wir die Einsteinsche Summenkonvention. Für die Komponenten von $\omega_{\mathcal{X}} = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log g(z,s)$ schreiben wir

$$\omega_{\mathcal{X}} = \sqrt{-1}(g_{z\overline{z}} dz \wedge d\overline{z} + g_{z\overline{\jmath}} dz \wedge ds^{\overline{\jmath}} + g_{i\overline{z}} ds^i \wedge d\overline{z} + g_{i\overline{\jmath}} ds^i \wedge ds^{\overline{\jmath}}).$$

Ist $\partial_i = \partial/\partial s^i, 1 \leqslant i \leqslant r$ ein Tangentialvekor, so setzen wir $u_i := u_{\partial/\partial s^i}$. Für jeden Punkt $s \in S$ besitzt der Raum $H_{X_s/Y} \subset A^{0,0}(X_s, \beta_s^* T_Y)$ ein natürliches Skalarprodukt. Wir definieren daher

$$G_{1,i\overline{\jmath}}^{WP}(s) = \int_{X_s} u_i \cdot \overline{u_{\jmath}}\, g dA = \int_{X_s} (\xi_i^w + a_i^z \zeta_z^w)(\xi_{\overline{\jmath}}^{\overline{w}} + a_{\overline{\jmath}}^{\overline{z}} \zeta_{\overline{\jmath}}^{\overline{w}})\, h_{w\overline{w}}(\beta(z,s))\, \sqrt{-1}\, g_{z\overline{z}}(z,s)\, dz \wedge d\overline{z}.$$

Hierbei schreiben wir $g(z,s)dA = \sqrt{-1}g_{z\overline{z}}(z,s)dz \wedge d\overline{z}$ für das Flächenelement bezüglich der hyperbolischen Metrik auf der Faser X_s. Wie sich gleich zeigen wird, liefert dies schon eine hermitesche Metrik auf der Basis S, falls die Familie als Familie von Abbildungen effektiv parametrisiert ist. Um jedoch eine Kählersche Metrik zu erhalten, benötigen wird noch eine weiteren Term, siehe [ABS15]. Wir setzen

$$G^{WP}_{0,i\overline{j}} = \int_{X_s} \varphi_{i\overline{j}}\, \beta_s^* \omega_Y = \int_{X_s} \varphi_{i\overline{j}}(z,s) h_{w\overline{w}}(\beta(z,s))\zeta^w_z(z,s)\zeta^{\overline{w}}_{\overline{z}}(z,s)\sqrt{-1}dz \wedge d\overline{z}$$

Hierbei ist

$$\varphi_{i\overline{j}} = \langle v_i, v_j \rangle_{\omega_{\mathcal{X}}} = g_{i\overline{j}} - g_{i\overline{z}} g_{z\overline{j}} g^{\overline{z}z}$$

das Skalarprodukt der horizonatlen Hochhebungen in Richtung von i und j bezüglich der Form $\omega_{\mathcal{X}}$. Man vergleiche den Ausdruck für G^{WP}_0 mit dem einfacheren Ausdruck

$$\int_{X_s} \varphi_{i\overline{j}}\, g dA = \int_{X_s} \varphi_{i\overline{j}}\, \omega_{X_s}$$

für die Weil-Petersson-Metrik auf einer Familie von Riemannschen Flächen $f : \mathcal{X} \to S$ (siehe [Sch93]). Wir erklären nun das *Weil-Petersson-Skalarprodukt* zweier Tangentialvektoren $\partial/\partial s^i$ und $\partial/\partial s^j$ an der Stelle s als

$$\langle \partial/\partial s^i, \partial/\partial^j s \rangle_{WP} := G^{WP}_{i\overline{j}}(s) := G^{WP}_{0,i\overline{j}}(s) + G^{WP}_{1,i\overline{j}}(s).$$

4.3. Positivität der Metrik

Proposition 4.5. *Das Weil-Petersson-Skalarprodukt ist positiv-definit, falls die Familie*

$$(\beta, f) : \mathcal{X} \to Y \times S$$

effektiv parametrisiert ist.

Beweis. Wir prüfen die Eigenschaft an einer Stelle $s \in S$ und wählen einen Tangentialvektor $\partial_s \in T_sS$, so dass $G^{WP}_{s\overline{s}}(s)$ verschwindet. Zunächst betrachten wir

$$G^{WP}_{0,s\overline{s}}(s) = \int_{X_s} \varphi_{s\,\overline{s}}(z,s) h_{w\overline{w}}(\beta(z,s))\zeta^w_z(z,s)\zeta^{\overline{w}}_{\overline{z}}(z,s)\sqrt{-1}dz \wedge d\overline{z}.$$

Aus der Gleichung (siehe 4.13)

$$(\Box_{\omega_s} + 1)\varphi_{s\overline{s}} = ||\mu_s||^2$$

und der Tatsache, dass der Operator $\Box_{\omega_s} + 1$ strikt positiv ist (siehe [Sch12]) folgt, dass $\varphi_{s\overline{s}}$ nicht negativ ist. Da auch der zweite Term $G^{WP}_{1,s\overline{s}}(s)$ nicht negativ ist, muss somit schon

$$G^{WP}_{0,s\overline{s}}(s) = 0 = G^{WP}_{1,s\overline{s}}(s)$$

gelten. Aus

$$G^{WP}_{1,s\bar{s}}(s) = \int_{X_s} ||u_s||^2 \, g dA = 0$$

folgt, dass $u_s = 0$ als Element von $H_{X_s/Y} \subset A^{0,0}(X_s, \beta_s^*(T_Y))$ ist. Damit ist $\tau_s(\partial_s) = 0$ und da τ_s für eine effektiv parametrisierte Familie injektiv ist, bekommen wir schließlich $\partial_s = 0$. □

Korollar 4.6. *Sowohl $\sqrt{-1}G^{WP}_{i\bar{j}} ds^i \wedge ds^{\bar{j}}$ als auch $\sqrt{-1}G^{WP}_{1,i\bar{j}} ds^i \wedge ds^{\bar{j}}$ liefert eine hermitesche Metrik auf der Basis S einer effektiv parametrisierten Familie von Überlagerungen*

$$(\beta, f) : \mathcal{X} \to Y \times S.$$

Bemerkung 4.7. Aus der Gleichung $u_s = 0$ folgt in der lokalen Gestalt $\xi^w_s + a^z_s \zeta^w_z = 0$, also $a^z_s = -\xi^w_s/\zeta^w_z$. Da a^z_s jedoch differenziebar ist und somit keine Polstellen besitzt, muss a^z_s damit schon holomorph sein. Damit ist die Familie von komplexen Strukturen $f : \mathcal{X} \to S$ im Punkt s in Richtung von ∂_s infinitesimal trivial und u_s ein Element aus $H^0(X_s, \beta_s^* T_Y)$. Dieses ist aber Null, so dass die Familie von Überlagerungen $\beta : \mathcal{X} \to S$ an der Stelle s in Richtung von ∂_s infinitesimal trivial ist. Die Beschreibung der charakteritischen Abbildung durch den Raum $H_{X_s/Y}$ wird für den Beweis der Positiv-Definitheit also nicht benötigt. Diese Sichtweise verkürzt den Beweis an dieser Stelle nur ein wenig.

Bemerkung 4.8. Aus der Bedingung $u_s = \xi^w_s + a^z_s \zeta^w_z = 0$, also $a^z_s = -\xi^w_s/\zeta^w_z$ folgt, dass ξ^w_s dort Nullstellen haben muss, wo auch ζ^w_z Nullstellen besitzt. Dies ist aber genau in den Verzweigungspunkten der Fall. Hat nun β um einen solchen Verzweigungspunkt die lokale Gestalt $\beta(z, s) = (z - s)^2$, so ist dies erfüllt, da

$$\zeta^w_z = \frac{\partial \beta}{\partial z} = 2(z - s)$$

und

$$\xi^w_s = \frac{\partial \beta}{\partial s} = -2(z - s).$$

Führen wir nun die neue Koordinate $\tilde{z} = z - s$ ein, so schreibt sich β als $\beta(\tilde{z}, s) = \tilde{z}^2$, d.h. die Familie von Überlagerungen ist tatsächlich lokal trivial. Dies entspricht der Tatsache, dass erst die Bewegung der Verzweigungswerte die Überlagerung variiert. Im Falle von $\beta(z, s) = (z - s)^2$ ist der Verzweigungswert aber konstant.

4.4. Wahl der Koordinaten

Wir betrachten den Fall einer Familie von Überlagerungen $(\beta, f) : \mathcal{X} \to Y \times S$ von kompakten hyperbolischen Riemannschen Flächen X_s über einer eindimensionalen Basis $0 \in S \subset \mathbb{C}$. Wir wählen die Bezeichnungen wie in 4.1. Wir nehmen an, dass die horizontale Hochhebung

$$v_s = \partial_s + a^z_s \partial_z$$

des Koordinaten-Vektorfeldes ∂_s ein holomorphes Vektorfeld auf $\mathcal{X}$ liefert. Nach 3.15 können wir dieses Integrieren und erhalten (nach evtl. Verkleinerung von S) eine Trivialisierung

$$\Phi : X_0 \times S \to \mathcal{X},\ (\tilde{z}, s) \mapsto (z(\tilde{z}, s), s)$$

mit

$$\frac{\partial z}{\partial s}(\tilde{z}, s) = a_s^z(z(\tilde{z}, s), s).$$

Die Familie der metrischen Tensoren rechnen wir nun in den neuen lokalen Koordinaten $\tilde{z}, s$ aus:

$$g(z, s) = g(z(\tilde{z}, s), s) =: \tilde{g}(\tilde{z}, s).$$

Für die Ableitungen von $\log \tilde{g}$ gilt nun

$$\frac{\partial \log \tilde{g}}{\partial s} = \frac{\partial \log g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial \log g}{\partial s}$$

und weiter

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{s\bar{\tilde{z}}} = \frac{\partial^2 \log \tilde{g}}{\partial \bar{\tilde{z}} \partial s} &= \frac{\partial^2 \log g}{\partial \tilde{z} \partial z}\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\tilde{z}}}\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial \log g}{\partial \bar{\tilde{z}} \partial s}\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\tilde{z}}} \\ &= (g_{z\bar{z}} a_s^z + g_{s\bar{z}})\partial \bar{z}/\partial \bar{\tilde{z}} \\ &= 0, \end{aligned}$$

da

$$a_s^z = -g^{\bar{z}z} g_{s\bar{z}}.$$

Damit gilt in den neuen lokalen Koordinaten $a_s^{\tilde{z}} = 0$, d.h. $v_s = \partial_s$. Weiter berechnen wir nun auch u_s in den lokal trivialisierenden Koodinaten. Wir setzen

$$\beta(z, s) = \beta(z(\tilde{z}, s), s) =: \tilde{\beta}(\tilde{z}, s) =: \tilde{w}(\tilde{z}, s).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_s^{\tilde{w}} &= \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial s} = \frac{\partial \beta}{\partial s} + \frac{\partial \beta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \\ &= \xi_s^w + \zeta_z^w a_s^z \end{aligned}$$

und $u_s = \tilde{\xi}_s^{\tilde{w}} \partial_{\tilde{w}}$. Daran erkennen wir

Proposition 4.9. *Eine Familie $(\beta, f) : \mathcal{X} \to Y \times S$ ist ganau dann lokal trivial als Familie von Überlagerungen in einem Punkt $s_0 \in S$, d.h. die Einschränkung der Familie auf eine Umgebung $s_0 \in S' \subset S$ ist isomorph zu $(\beta_{s_0} \times \mathrm{pr}_2) : X_0 \times S' \to Y \times S'$, falls $u_s(z, s) = 0$ auf ganz $\mathcal{X}|_{S'}$ gilt.*

4.5. Vorbereitungen zur Berechnung der Krümmung

In diesem Abschnitt erinnern wir an den Kalkül der kovarianten Ableitungen, den wir auf globale Schnitte des hermiteschen Bündels $(\beta^* T_Y, \beta^* h)$ anwenden. Außerdem erinnern wir an einige nützliche Formeln, die bereits bei der Berechnung der Krümmung der Weil-Petersson-Metrik auf dem Teichmüller-Raum auftauchen.

Wir behalten alle Bezeichungen aus den vorherigen Abschnitten dieses Kapitels bei. Ferner verwenden wir das Symbol $|$ für gewöhnliche und $;$ für kovariante Ableitungen. Wir setzen $\partial_z = \partial/\partial z$ sowie $\partial_{\overline{z}} = \partial/\partial \overline{z}$ und $\partial_k = \partial/\partial s^k$ sowie $\partial_{\overline{l}} = \partial/\partial s^{\overline{l}}$ für Koordinatenrichtungen $1 \leqslant k, l \leqslant r$ auf der Basis S. Seien $u = u^w(z,s)\partial_w$ und $v = v^w(z,s)\partial_w$ Vektorfelder entlang der Fasern von $\mathcal{X} \to S$, d.h. $u_s := u(z,s)$ und $v_s = v(z,s)$ sind differenzierbare Familien von Vektorfeldern auf $\mathcal{X}_s$ mit Werten in $\beta_s^*(T_Y)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\partial_z(u,v) &= \partial_z(u \cdot \overline{v}) \\
&= \partial_z(u^w v^{\overline{w}} h_{w\overline{w}}) \\
&= u^w_{|z} v^{\overline{w}} h_{w\overline{w}} + u^w v^{\overline{w}}_{|z} h_{w\overline{w}} + u^w v^{\overline{w}} h_{w\overline{w}|z} \\
&= u^w_{|z} v^{\overline{w}} h_{w\overline{w}} + u^w v^{\overline{w}}_{|z} h_{w\overline{w}} + u^w v^{\overline{w}} \Gamma_w \zeta^w_z h_{w\overline{w}} \\
&= u^w_{;z} \overline{v} h_{w\overline{w}} + u^w \overline{v}_{,z} h_{w\overline{w}} \\
&= \nabla_z(u) \cdot \overline{v} + u \cdot \nabla_z(\overline{v}) \\
&= (\nabla_z(u), v) + (u, \partial_{\overline{z}}(v)),
\end{aligned}$$

wobei wir

$$\nabla_z(u) = (u^w_{|z} + \Gamma_w \zeta^w_z u^w)\partial_w$$

und

$$\nabla_z(\overline{v}) = (v^{\overline{w}}_{|z})\partial_w$$

schreiben. Hierbei ist

$$\Gamma_w = \Gamma_w(\beta(z,s)) = (h(\beta(z,s)))^{-1}(\partial_w h)(\beta(z,s)).$$

Analog ist für ein $1 \leqslant k \leqslant r$

$$\partial_k(u,v) = (\nabla_k(u), v) + (u, \partial_{\overline{k}}(v)),$$

wobei

$$\nabla_k(u) = (u^w_{|k} + \Gamma_w \xi^w_k u^w)\partial_w$$

ist. Weiter haben wir

Lemma 4.10. $\nabla_z(h_{w\overline{w}}) = \nabla_k(h_{w\overline{w}}) = 0.$

Beweis. Wir berechnen

$$h_{w\overline{w};z} = h_{w\overline{w}|z} - \Gamma_w \zeta_z^w h_{w\overline{w}} = \Gamma_w \zeta_z^w h_{w\overline{w}} - \Gamma_w \zeta_z^w h_{w\overline{w}} = 0.$$

Analog ist

$$h_{w\overline{w};k} = h_{w\overline{w}|k} - \Gamma_w \xi_k^w h_{w\overline{w}} = \Gamma_w \xi_k^w h_{w\overline{w}} - \Gamma_w \xi_k^w h_{w\overline{w}} = 0.$$

□

Ferner benötigen wir für den nächsten Abschnitt auch noch einige nützliche Formeln, die auch schon bei der Weil-Petersson-Metrik auf dem Teichmüller-Raum auftauchen:

Lemma 4.11. *Es gelten folgende Gleichungen (siehe [LSY04], Beweis von Lemma 3.3):*

$$\partial_z a_i = -\Gamma_z a_i - \partial_i \log g \tag{4.3}$$
$$\partial_{\overline{z}} a_{\overline{\jmath}} = -\Gamma_{\overline{z}} a_{\overline{\jmath}} - \partial_{\overline{\jmath}} \log g \tag{4.4}$$
$$\partial_{\overline{l}} a_i = -A_i a_{\overline{l}} - g^{-1} \partial_{\overline{z}} \varphi_{i\overline{l}} \tag{4.5}$$
$$\partial_k a_{\overline{\jmath}} = -A_{\overline{\jmath}} a_k - g^{-1} \partial_z \varphi_{k\overline{\jmath}} \tag{4.6}$$

Hierbei ist $\Gamma_z = g^{-1}\partial_z g$.

Weiter haben wir folgende Resultate (siehe [Sch93]):

Lemma 4.12. $L_k(g_{z\overline{z}}\, dz \wedge d\overline{z}) = 0$

Hierbei bezeichnet $L_k := L_{v_k}$ die Lie-Ableitung bezüglich des Vektorfeldes v_k auf $\mathcal{X}$ (s. 4.2).

Lemma 4.13. $(\Box + 1)\varphi_{i\overline{\jmath}} = A_i \cdot A_{\overline{\jmath}}$,

Hierbei bezeichnet $A_{i\overline{z}}^z(z,s)\partial_z d\overline{z} = \bar{\partial} v_i|_{X_s}$ den harmonischen Repräsentanten der Kodaira-Spencer-Klasse von $\rho(\partial_i)$.

Die Tatsache, dass $(\Box + 1)$ invertierbar ist, liefert nun folgendes

Korollar 4.14. *Eine Deformation $f : \mathcal{X} \to S$ ist an der Stelle $s_0 \in S$ genau dann infinitesimal trivial in Richtung $1 \leqslant i \leqslant r$ oder in Richtung $1 \leqslant j \leqslant r$, falls $\varphi_{i\overline{\jmath}}(z, s_0) = 0$ für alle $z \in X_{s_0}$.*

Bemerkung 4.15. Der Einfachheit halber betrachten wir nun eine eindimensionale Basis S mit der lokalen Koordinate s. Aus Gleichung (4.5) von Lemma 4.11 und dem vorhergehenden Korrollar folgt sogar: Ist $f : \mathcal{X} \to S$ an einer Stelle $s_0 \in S$ infinitesimal trivial, so gilt $\partial_{\overline{z}} a_s = 0 = \partial_{\overline{s}} a_s$. Damit ist aber der horizontale Lift $v_s = \partial_s + a_s^z \partial_z$ holomorph bezüglich z und s, falls die Familie $f : \mathcal{X} \to S$ auf ganz S infinitesimal trivial ist. Nach Lemma 3.15 ist die Familie $f : \mathcal{X} \to S$ also schon lokal trivial, falls sie überall infinitesimal trivial ist.

Das Vektorfeld v_k ist ein horizontaler Lift von ∂_k bezüglich der Form $\omega_{\mathcal{X}}$. Nun fragen wir nach einem horizontalen Lift bezüglich der Form $\beta^*\omega_Y$. Da diese entlang der Fasern Nullstellen besitzt, erhalten wir Vektorfelder mit Polstellen:

Proposition 4.16. *Der horizontale Lift $\tilde{v}_k$ von ∂_k bezüglich der Form $\beta^*\omega_Y$ ist*

$$\tilde{v}_k = \partial_k - (\xi_k^w / \zeta_z^w)\partial_z = \partial_k - \xi_k^w \partial_w.$$

Beweis. Der Ansatz

$$\tilde{v}_k = \partial_k + b_k^z \partial_z$$

und die Bedingung

$$\langle \partial_k + b_k^z \partial_z, \partial_z \rangle_{\beta^* \omega_Y} = 0$$

führt auf $b_k^z = -\xi_k^w / \zeta_z^w$. □

Analog zu Lemma 4.12 bekommen wir

Lemma 4.17. $L_{\tilde{v}_k}(h_{w\overline{w}} \zeta_z^w \zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}} \, dz \wedge d\overline{z}) = 0$.

Beweis. Wir schreiben $h_{z\overline{z}} = h_{w\overline{w}} \zeta_z^w \zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}}$ und $|$ für eine gewöhnliche Ableitung. Dann ist

$$\begin{aligned}
L_{\tilde{v}_k}(h_{z\overline{z}})_{z\overline{z}} &= [\partial_k - (\xi_k^w / \zeta_z^w), h_{z\overline{z}}]_{z\overline{z}} \\
&= h_{z\overline{z}|k} - (\xi_k^w / \zeta_z^w) h_{z\overline{z}|z} - (\xi_k^w / \zeta_z^w)_{|z} h_{z\overline{z}} \\
&= \xi_k^w h_{w\overline{w}} \Gamma_w \zeta_z^w \zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}} + h_{w\overline{w}} \zeta_{z|k}^w \zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}} \\
&- \xi_k^w h_{w\overline{w}} \Gamma_w \zeta_z^w \zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}} - (\xi_k^w / \zeta_z^w) h_{w\overline{w}} \zeta_{z|z}^w \zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}} \\
&+ \xi_{k|z}^w h_{w\overline{w}} \zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}} + (\xi_k^w / \zeta_z^w) h_{w\overline{w}} \zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}} \zeta_{z|z}^w \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

4.6. Kähler-Eigenschaft der Weil-Petersson-Metrik

Die Kähler-Eigenschaft der Weil-Petersson-Metrik folgt aus einer Faser-Integral-Formel (siehe [ABS15]), da das äußere Differential mit dem Faserintegral vertauscht. Wir rechnen die Kähler-Symmetrie hier nun direkt nach, was uns die Erkenntnis bringt, dass G_1^{WP} allein keine Kähler-Metrik auf dem Hurwitz-Raum liefert. Die Kähler-Eigenschaft besagt, dass $d\omega_{WP} = 0$ ist. Dies ist äquivalent zur Kähler-Symmetrie (siehe z.B. [MK71])

$$\partial_k G_{i\overline{j}}^{WP}(s) = \partial_i G_{k\overline{j}}^{WP}(s)$$

für alle $1 \leqslant i, j, k \leqslant r$ und alle $s \in S$. Wir berechnen unter Berücksichtigung von Lemma 4.12:

$$\begin{aligned}
\partial_k G^{WP}_{i\bar{j}}(s) &= \partial_k G^{WP}_{0,i\bar{j}}(s) + \partial_k G^{WP}_{0,i\bar{j}}(s) \\
&= \partial_k \int_{X_s} \varphi_{i\bar{j}} \beta_s^*(\omega_Y) + \partial_k \int_{X_s} u_i \cdot u_{\bar{j}} g dA \\
&= \int_{X_s} L_k(\varphi_{i\bar{j}}) \beta_s^*(\omega_Y) + \int_{X_s} \varphi_{i\bar{j}} L_k(\beta_s^*(\omega_Y)) \\
&+ \int_{X_s} L_k(u_i \cdot u_{\bar{j}}) g dA + \int_{X_s} u_i \cdot u_{\bar{j}} L_k(g dA) \\
&= \int_{X_s} L_k(\varphi_{i\bar{j}}) \beta_s^*(\omega_Y) + \int_{X_s} \varphi_{i\bar{j}} L_k(\beta_s^*(\omega_Y)) \\
&+ \int_{X_s} D_k(u_i) \cdot u_{\bar{j}} g dA + \int_{X_s} u_i \cdot D_k(u_{\bar{j}}) g dA,
\end{aligned}$$

wobei wir an dieser Stelle die Schreibweise

$$D_k(u_i) := (\nabla_k + a_k^z \nabla_z)(u_i)$$

eingeführt haben. Nun gilt: $L_k(\varphi_{i\bar{j}}) = v_k(\varphi_{i\bar{j}}) = v_i(\varphi_{k\bar{j}}) = L_i(\varphi_{k\bar{j}})$ (siehe [LSY04], Lemma 3.2). Weiter ist auch der dritte Summand für sich genommen schon symmetrisch in i und k, denn:

$$\begin{aligned}
D_k(u_i) &= (\nabla_k + a_k^z \nabla_z)(\xi_i^w + a_i^z \zeta_z^w) \\
&= \xi_{i|k}^k + \Gamma_w \xi_k^w \xi_i^w + a_k^z \xi_{i|z}^w + a_k^z \Gamma_w \zeta_z^w \xi_i^k + a_{i|k}^z \zeta_z^w + a_i^z \zeta_{z|k}^w + \Gamma_w \xi_k^w a_i \zeta_z^w \\
&+ a_k^z a_{i|z} \zeta_z^w + a_k^z a_i^z \zeta_{z|z}^w + a_k^z \Gamma_w \zeta_z^w a_i \zeta_z^w
\end{aligned}$$

Wegen $a_k^z a_{i|z}^z - a_i^z a_{k|z}^z = \partial_k \log(g) a_i - \partial_i \log(g) a_k$ und $a_{i|k}^z - a_{k|i}^z = \partial_i \log(g) a_k - \partial_k \log(g) a_i$ folgt die Behauptung. Für den zweiten und vierten Summanden zeigen wir folgende

Proposition 4.18.

$$\int_{X_s} \varphi_{i\bar{j}} L_k(\beta_s^*(\omega_Y)) = \int_{X_s} u_k \cdot D_i(u_{\bar{j}}) g dA$$

Beweis. Wir schreiben

$$h_{z\bar{z}} = h_{w\overline{w}} \zeta_z^w \zeta_{\bar{z}}^{\overline{w}}.$$

Es ist

$$\begin{aligned}
L_k(\beta_s^*(\omega_Y))_{z\bar{z}} &= [\partial_k + a_k^z \partial_z, h_{z\bar{z}}] = h_{z\bar{z}|k} + a_k^z h_{z\bar{z}|z} + a_{k|z}^z h_{z\bar{z}} \\
&= h_{w\overline{w}|k} \zeta_z^w \zeta_{\bar{z}}^{\overline{w}} + h_{w\overline{w}} \zeta_{z|k}^w \zeta_{\bar{z}}^{\overline{w}} + a_k^z h_{w\overline{w}|z} \zeta_z^w \zeta_{\bar{z}}^{\overline{w}} + a_k^z h_{w\overline{w}} \zeta_{z|z}^w \zeta_{\bar{z}}^{\overline{w}} + a_{k|z}^z h_{z\bar{z}} \\
&= \Gamma_w h_{w\overline{w}} \xi_k^w \zeta_z^w \zeta_{\bar{z}}^{\overline{w}} + h_{w\overline{w}} \zeta_{z|k}^w \zeta_{\bar{z}}^{\overline{w}} + a_k^z \Gamma_w h_{w\overline{w}} \zeta_z^w \zeta_z^w \zeta_{\bar{z}}^{\overline{w}} \\
&+ a_k^z h_{w\overline{w}} \zeta_{z|z}^w \zeta_{\bar{z}}^{\overline{w}} + a_{k|z}^z h_{z\bar{z}}.
\end{aligned}$$

Zudem ist

$$D_i(u_{\overline{j}}) = (\nabla_i + a_i^z \nabla_z)(\xi_{\overline{j}}^{\overline{w}} + a_{\overline{j}}^{\overline{z}} \zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}}) = a_{\overline{j}|i}^{\overline{z}} \zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}} + a_i A_{\overline{j}z}^{\overline{z}} \zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}} = -g^{\overline{z}z} \partial_z \varphi_{i\overline{j}} \zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}}.$$

Wir schreiben die Form $h_{w\overline{w}} \zeta_z^w \zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}} dz \wedge d\overline{z}$ als $h_{w\overline{w}} \zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}} dw \wedge d\overline{z}$ und setzen das Vektorfeld $(\xi_k^w + a_k^z \zeta_z^w)\partial_w$ darin ein. Wir erhalten damit, dass der Tenor $\zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}}(\xi_k^w + a_k^z \zeta_z^w) h_{w\overline{w}}$ und damit auch $\varphi_{i\overline{j}} \zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}}(\xi_k^w + a_k^z \zeta_z^w) h_{w\overline{w}}$ wohldefiniert ist. Der Satz von Stokes angewandt auf diese global erklärte $(0,1)$-Form $\varphi_{i\overline{j}} \zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}}(\xi_k^w + a_k^z \zeta_z^w) h_{w\overline{w}}$ liefert

$$\int \nabla_z (\varphi_{i\overline{j}} \zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}}(\xi_k^w + a_k^z \zeta_z^w) h_{w\overline{w}}) dA = 0$$

und damit

$$-\int \partial_z \varphi_{i\overline{j}} \zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}}(\xi_k^w + a_k^z \zeta_z^w) h_{w\overline{w}} dA = \int \varphi_{i\overline{j}} \zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}}(\xi_k^w + a_k^z \zeta_z^w)_{;z} h_{w\overline{w}} dA.$$

Nun ist aber

$$(\xi_k^w + a_k^z \zeta_z^w)_{;z} = \xi_{k|z}^w + \Gamma_w \zeta_z^w \xi_k^w + a_{k|z}^z \zeta_z^w + a_k^z \zeta_{z|z}^w + \Gamma_w \zeta_z^w a_k^z \zeta_z^w,$$

also

$$\begin{aligned}
(\xi_k^w + a_k^z \zeta_z^w)_{;z} \zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}} h_{w\overline{w}} &= \xi_{k|z}^w \zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}} h_{w\overline{w}} + \Gamma_w \zeta_z^w \xi_k^w \zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}} h_{w\overline{w}} \\
&+ a_k^z \Gamma_w \zeta_z^w h_{w\overline{w}} \zeta_z^w \zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}} + a_k^z h_{w\overline{w}} \zeta_{z|z}^w \zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}} + a_{k|z}^z \zeta_z^w \zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}} h_{w\overline{w}} \\
&= L_k (h_{w\overline{w}} \zeta_z^w \zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}})_{z\overline{z}}.
\end{aligned}$$

Damit ist die Proposition bewiesen. □

4.7. Berechnung der Krümmung

Die Berechnung der Krümmung der Weil-Petersson-Metrik auf der Basis einer allgemeinen, effektiv parametrisierten Familie $(\beta, f) : \mathcal{X} \to Y \times S$ von Überlagerungen kompakter Riemannscher Flächen erweist sich als sehr schwierig. Grund dafür ist, dass die hyberbolischen Metriken auf den Fasern X_s für verzweigte Überlagerungen im Allgemeinen in keiner direkten Beziehung zur Metrik auf Y stehen. Beide Metriken spielen aber in der Definition der Weil-Petersson-Metrik eine Rolle, da diese sowohl die Variation der komplexen Struktur auf den Fasern X_s als auch die Variation der Überlagerung $\beta_s : X_s \to Y$ berücksichtigt. Der Term G_0^{WP} erweist sich dabei als besonders unhandlich. Dieser Term verschwindet jedoch in dem Fall, dass die Familie komplexer Strukturen lokal trivial ist. Für solche Familien können wir die Krümmung berechnen. Dies beinhaltet insbesondere komplexe Unterräume des Hurwitz-Raumes $\mathcal{H}^{n,b}$, die Familien von Überlagerungen $\beta_s : X_s \to Y$ parametrisieren, bei denen die komplexe Struktur von X_s fest bleibt. Ferner können wir eine Krümmungsformel des Bündels $f_* \beta^* T_Y$ angeben. Dies ist dann wieder ein Bündel auf dem kompletten Raum.

4.7.1. Die Krümmung für einen Unterraum

Wir betrachten die universelle Familie $(\beta, f) : \mathcal{X} = (X_s) \to \mathbb{P}^1 \times \mathcal{H}^{n,b}$ über dem Hurwitz-Raum. Es gelte $b > 4g - 4$. Wegen Serre-Dualität und $\deg(K_{X_s} \otimes (\beta_s^* T_Y)^*) < 0$ verschwindet dann der Raum $H^1(X_s, \beta_s^* T_Y)$. Damit bekommen wir die kurze exakte Sequenz

$$0 \to H^0(X_s, \beta_s^* T_{\mathbb{P}^1}) \to H^0(X_s, N_{\beta_s}) \to H^1(X_s, T_{X_s}) \to 0.$$

Dies ist die Tangentialsequenz, welche zur natürlichen Abbildung $\mathcal{H}^{n,b} \to \mathcal{M}_g$ gehört. Dabei müssen wir uns auf den offenen Teil $\mathcal{M}_g^0$ beschränken, welcher den Kurven mit trivialer Automorphismengruppe entspricht. Bezeichnen wir das zugehörige Urbild mit $\mathcal{H}_0^{n,b}$, dann ist $\mathcal{H}_0^{n,b} \to \mathcal{M}_g^0$ also eine Submersion. Alternativ können wir auch zur universellen Überlagerung $\tilde{\mathcal{H}}^{n,b}$ übergehen und erhalten eine Submersion $\tilde{\mathcal{H}}^{n,b} \to \mathcal{T}_g$ auf den Teichmüller-Raum.

Wir betrachten nun eine feste Riemannsche Fläche X vom Geschlecht g ohne nicht triviale Automorphismen, die eine Isomorphieklasse $[X]$ einer komplexen Struktur, d.h. einen Punkt in $\mathcal{M}_g^0$, repräsentiert. Die zugehörige Faser unter der Submersion $\mathcal{H}_0^{n,b} \to \mathcal{M}_g^0$ bezeichnen wir mit $\mathcal{H}_X$. Dieser Unterraum ist somit eine (ggf. nicht zusammenhängende) komplexe Untermannigfaltigkeit der Dimension $r := b - (3g - 3) = 2n - (g - 1)$. Nach Konstruktion sind die Fasern der eingeschränkten Familie

$$f|_{f^{-1}(\mathcal{H}_X)} \to \mathcal{H}_X$$

allesamt isomorph und nach einem Resultat von Grauert und Fischer (siehe z.B. [MK71], S. 39) ist die Familie komplex-analytisch lokal trivial. Die Punkte dieses Unterraums parametrisieren Isomorphieklassen von einfach verzweigten (n, b)-Überlagerungen, bei denen die Fläche X (also ihre komplexe Struktur) fest bleibt. Sei $s_0 \in \mathcal{H}_X$ gegeben durch eine Überlagerung $\beta_0 : X \to Y$. Wir wählen Koordianten $s_1, \ldots, s_b$, so dass der Unterraum $\mathcal{H}_X$ lokal um s_0 gegeben ist durch

$$\left\{ s \in \mathcal{H}^{n,b} \mid s_{r+1} = \cdots = s_b = 0 \right\}.$$

Damit sind $s^1, \ldots, s^r$ lokal holomorphe Koordinaten um den Punkt $s_0 \in \mathcal{H}_X$ auf $\mathcal{H}_X$.

Wir betrachten nun allgemeiner eine effektiv parametrisierte Familie

$$(\beta, f) : \mathcal{X} \to Y \times S$$

von Überlagerungen mit kompakten hyperbolischen Riemannschen Flächen X_s, so dass die Familie komplexer Strukturen $f : \mathcal{X} \to S$ lokal trivial ist. Falls S zusammenhängend ist (was wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen), sind alle Fasern X_s isomorph zu einer festen Riemannschen Fläche X. Die infinitesimalen Deformationen solcher Überlagerungen liegen im Raum $H^0(X, \beta_s^* T_Y)$. Die Repräsentanten der charakteristischen Abbildung sind also holomorphe Schnitte des Bündels $\beta_s^* T_Y$, was die Berechnung der Krümmung erheblich erleichtert. Damit solche effektive Familien aber überhaupt existieren, darf das Bündel $\beta_s^* T_Y$ keinen negativen Grad besitzen. Die Fläche Y ist somit die Riemannsche Zahlenkugel $\mathbb{P}^1$ oder ein Torus T.

Da unsere Berechnungen lokal in der Basis S sind, können wir zunächst annehmen, dass $\mathcal{X} = X \times S$ global trivial ist. Wir studieren den metrischen Tensor $G_{i\bar{j}}^{WP}$ für die Basis S der Familie $(\beta, f) : X \times S \to Y \times S$. Seien wieder $s^1, \ldots, s^r$ lokale holomorphe Koordinaten um

einen festen Punkt $s_0 \in S$ mit zugehöriger Überlagerung $\beta_0 : X \to Y$. Die Familie komplexer Strukturen ist trivial, also insbesondere in jeder Richtung infinitesimal trivial. Daher ist nach Korollar 4.14 $\varphi_{i\bar{j}}(z,s) = 0$ auf ganz $X \times S$ für $1 \leqslant i, j \leqslant r$ und der erste Summand $G^{WP}_{0,i\bar{j}}$ trägt nicht zur Metrik bei. Weiter haben wir auf $X \times S$ die konstante Familie von metrischen Tensoren $g(z,s) = g(z)$, wobei g die hyperbolische Metrik von konstanter Ricci-Krümmung -1 auf X ist. Die Koordinaten-Vektorfelder $(\partial_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ existieren somit auch auf $X \times S$ und stimmen mit ihren horizontalen Hochhebungen (v_i) überein (d.h. $a_i = 0$ für alle $1 \leqslant i \leqslant r$). Der Ausdruck für den metrischen Tensor reduziert sich damit insgesamt auf

$$G_{i\bar{j}}(s_0) = \int_X \xi_i^w \xi_{\bar{j}}^{\overline{w}} h_{w\overline{w}} \, gdA.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \partial_k G_{i\bar{j}}(s_0) &= \int_X L_k(\xi_i^w \xi_{\bar{j}}^{\overline{w}} h_{w\overline{w}} \, gdA) \\ &= \int \partial_k(\xi_i^w \xi_{\bar{j}}^{\overline{w}} h_{w\overline{w}}) \, gdA \end{aligned}$$

Da

$$\partial_k(\xi_i^w \xi_{\bar{j}}^{\overline{w}} h_{w\overline{w}}) = \xi_{i|k}^w \xi_{\bar{j}}^{\overline{w}} h_{w\overline{w}} + \xi_i^w \xi_{\bar{j}}^{\overline{w}} \partial_k(h(\beta(z,s))) \tag{4.7}$$

und

$$\begin{aligned} \partial_k(h(\beta(z,s))) &= \frac{\partial h}{\partial w}(\beta(z,s)) \cdot \frac{\partial \beta}{\partial s^k} \\ &= (\partial_w h)(\beta(z,s))\xi_k^w \\ &= (h(\beta(z,s)))^{-1}(\partial_w h)(\beta(z,s))\xi_k^w(z,s)h(\beta(z,s)) \\ &= \Gamma_w \xi_k^w h_{w\overline{w}} \end{aligned}$$

falls wir $\Gamma_w = \beta^* \Gamma_h$ mit $\Gamma_h = \partial_w \log(h) = (\partial_w h)h^{-1}$ setzen, erkennen wir in 4.7 eine kovariante Ableitung und schreiben

$$\partial_k(\xi_i^w \xi_{\bar{j}}^{\overline{w}} h_{w\overline{w}}) = (\nabla_k \xi_i^w)\xi_{\bar{j}}^{\overline{w}} h_{w\overline{w}}.$$

Damit haben wir als Zwischenresultat

Lemma 4.19.

$$\partial_k G_{i\bar{j}}(s_0) = \int_X (\nabla_k \xi_i^w)\xi_{\bar{j}}^{\overline{w}} h_{w\overline{w}} \, gdA$$

Wir berechnen weiter

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{l}} \partial_k G_{i\bar{j}}(s_0) &= \partial_{\bar{l}} \int_X (\nabla_k \xi_i^w)\xi_{\bar{j}}^{\overline{w}} h_{w\overline{w}} \, gdA \\ &= \int_X \partial_{\bar{l}} \left((\nabla_k \xi_i^w)\xi_{\bar{j}}^{\overline{w}} h_{w\overline{w}}\right) gdA \end{aligned}$$

Analog zu oben bekommen wir

$$\partial_{\bar{l}}\left((\nabla_k \xi_i^w)\xi_{\bar{j}}^{\overline{w}} h_{w\overline{w}}\right) = \partial_{\bar{l}}(\nabla_k \xi_i^w)\xi_{\bar{j}}^{\overline{w}} h_{w\overline{w}} + \nabla_k \xi_i^w \nabla_{\bar{l}}(\xi_{\bar{j}}^{\overline{w}}) h_{w\overline{w}}$$

mit

$$\begin{aligned}\partial_{\bar{j}}(\nabla_k \xi_i^w) &= \partial_{\bar{l}}\left(\xi_{i|k}^w + \Gamma_w \xi_k^w \xi_i^w\right)\\ &= \partial_{\bar{l}}\Gamma_w \xi_k^w \xi_i^w\end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}\partial_{\bar{l}}\Gamma_w &= \partial_{\bar{l}}\left(h(\beta(z,s))^{-1}(\partial_w h)(\beta(z,s))\right)\\ &= -(\partial_{\overline{w}} h)\,(\beta(z,s))\,\xi_{\bar{l}}^{\overline{w}}(\partial_w h)(\beta(z,s))h(\beta(z,s))^{-2}\\ &+ h(\beta(z,s))^{-1}(\partial_{\overline{w}}\partial_w h)(\beta(z,s))\xi_{\bar{l}}^{\overline{w}}.\end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned}\partial_{\overline{w}}\partial_w \log h &= \partial_{\overline{w}}\left((\partial_w h)h^{-1}\right)\\ &= (\partial_{\overline{w}}\partial_w h)h^{-1} - (\partial_w h)(\partial_{\overline{w}})h^{-2}\\ &= -K_h,\end{aligned}$$

ist $\partial_{\bar{l}}\Gamma_w = -K_{w\overline{w}}\xi_{\bar{l}}^{\overline{w}}$, wobei wir

$$K_{w\overline{w}} := \beta^*(K_h) = \beta^*(-\partial_{\overline{w}}\partial_w \log h) = K_Y h_{w\overline{w}}$$

setzen. Insgesamt erhalten wir damit

Lemma 4.20.

$$\partial_{\bar{l}}\partial_k G_{i\bar{j}}^{WP}(s_0) = \int_X (\nabla_k \xi_i^w)(\nabla_{\bar{l}}\xi_{\bar{j}}^{\overline{w}})h_{w\overline{w}}\, gdA - K_Y \int_X \xi_i^w \xi_{\bar{j}}^{\overline{w}} \xi_k^w \xi_{\bar{l}}^{\overline{w}} h_{w\overline{w}}^2\, gdA$$

Wir wählen nun Normalkoordinaten um den Punkt s_0, d.h. Koordinaten, so dass

$$\partial_k G_{i\bar{j}}(s_0) = 0 = \partial_{\bar{l}} G_{i\bar{j}}(s_0),$$

also

$$\int_X (\nabla_k \xi_i^w)\xi_{\bar{j}}^{\overline{w}})h_{w\overline{w}}\, gdA = 0.$$

Bilden nun die Vektorfelder $\{\xi_k^w\}\partial_w$ für $1 \leqslant k \leqslant r$ eine Basis von $H^0(X, \beta_0^*(T_Y))$, so bedeutet dies, dass

$$(\nabla_k \xi_i^w) \perp H^0(X, \beta_0^*(T_Y)),$$

das heißt

$$\nabla_k \xi_i^w \partial_w = \bar{\partial}^*(\nu)$$

für eine $(0,1)$-Form ν bzw.

$$\nabla_k \xi_i^w \partial_w = \partial^*(\mu)$$

für eine $(1,0)$-Form μ, wobei die adjungierten Operatoren bezüglich der Metrik $\beta_0^* h$ zu bilden sind. Wegen $\Box_{\bar\partial} = \bar\partial^* \bar\partial$ im Raum der differenzierbaren Vektorfelder mit Werten in $\beta_0^*(T_Y)$ und der Identität $\mathrm{id} = H_{\bar\partial} + G_{\bar\partial}\Box_{\bar\partial}$ können wir nun weiter schreiben

$$\begin{aligned}
\int_X (\nabla_k \xi_i^w)(\nabla_{\bar l} \xi_{\bar j}^{\overline{w}}) h_{w\overline{w}}\, gdA &= \left\langle \nabla_k \xi_i^w, \nabla_l \xi_j^w \right\rangle \\
&= \left\langle G_{\bar\partial} \Box_{\bar\partial} \left(\nabla_k \xi_i^w\right), \nabla_l \xi_j^w \right\rangle \\
&= \left\langle \bar\partial^* G_{\bar\partial} \bar\partial \left(\nabla_k \xi_i^w\right), \nabla_l \xi_j^w \right\rangle \\
&= \left\langle G_{\bar\partial} \bar\partial \left(\nabla_k \xi_i^w\right), \bar\partial \nabla_l \xi_j^w \right\rangle
\end{aligned}$$

Wegen

$$\nabla_k \xi_i^w = \xi_{i|k}^w + \Gamma_w \xi_k^w \xi_i^w$$

ist aber

$$\bar\partial \left(\nabla_k \xi_i^w\right) = -K_{w\overline{w}} \xi_k^w \xi_i^w \zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}} d\overline{z},$$

also

$$\begin{aligned}
\int_X (\nabla_k \xi_i^w)(\nabla_{\bar l} \xi_{\bar j}^{\overline{w}}) h_{w\overline{w}}\, gdA &= \left\langle G_{\bar\partial} \bar\partial \left(\nabla_k \xi_i^w\right), \bar\partial \nabla_l \xi_j^w \right\rangle && (4.8) \\
&= K_Y^2 \left\langle G_{\bar\partial} (\xi_i^w \xi_k^w \zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}} h_{w\overline{w}} d\overline{z}), \xi_j^w \xi_l^w \zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}} h_{w\overline{w}} d\overline{z} \right\rangle && (4.9)
\end{aligned}$$

Schreiben wir abkürzend

$$\psi_{ik} d\overline{z} \otimes \partial_w := \left(\xi_i^w \xi_k^w \zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}} h_{w\overline{w}}\right) d\overline{z} \otimes \partial_w,$$

so bekommen wir weiter

$$\begin{aligned}
\int_X (\nabla_k \xi_i^w)(\nabla_{\bar l} \xi_{\bar j}^{\overline{w}}) h_{w\overline{w}}\, gdA &= K_Y^2 \int_X G_{\bar\partial} \left(\psi_{ik}\right)_{\overline{z}}^{w} \left(\psi_{\bar j \bar l}\right)_{z}^{\overline{w}} h_{w\overline{w}}\, dz \wedge d\overline{z} \\
&= K_Y^2 \int G_{\bar\partial} \left(\psi_{ik}\right) \cdot \psi_{\bar j \bar l}\, gdA.
\end{aligned}$$

Wir erhalten daher

Theorem 4.21. *Die Krümmung der Weil-Petersson-Metrik für eine effektive Familie von Überlagerungen $(\beta, f) : X \times S \to Y \times S$ ist*

$$\begin{aligned}
R_{i\bar j k \bar l}(s_0) = &- K_Y^2 \int G_{\bar\partial} \left(\psi_{ik}\right) \cdot \psi_{\bar j \bar l}\, gdA \\
&+ K_Y \int \left(\xi_i \cdot \xi_{\bar j}\right) \left(\xi_k \cdot \xi_{\bar l}\right) gdA
\end{aligned}$$

Korollar 4.22. *Es sei T ein eindimensionaler Torus, X eine hyperbolische Riemannsche Fläche vom Geschlecht g und S eine weitere kompakte Riemansche Fläche. Für eine effektiv parametrisierte eindimensionale Familie von Überlagerungen $(\beta, f) : X \times S \to T \times S$ gilt $g(S) = 1$.*

Beweis. Im Falle $Y = T$ ist das Tangentialbündel T_Y trivial. Damit ist auch $\beta_s^*(T_Y)$ für jedes $s \in S$ trivial. Wir bekommen folgende Tangentialsequenz

$$0 \to H^0(X, \mathcal{O}) \to H^0(X, N_{\beta_s}) \to H^1(X, T_X) \to H^1(X, \mathcal{O}) \to 0$$

mit $\dim H^0(X, \mathcal{O}) = 1, \dim H^1(X, \mathcal{O}) = g, \dim H^1(X, T_X) = 3g - 3$ und $\dim H^0(X, N_{\beta_s}) = 2g - 2 = b$. Daher existieren effektiv parametrisierte Familien $X \times S \to T \times S$ nur über einer eindimensionalen Basis S. Die Krümmung für die Weil-Petersson-Metrik auf der Basis S verschwindet nach Theorem 4.21 identisch. Damit besitzt die kompakte Riemannsche Fläche S eine flache Kählersche Metrik und hat damit das Geschlecht 1. Da das Tangentialbündel auf einem Torus trivial ist, sieht man aber auch direkt, dass $T_S \cong f_*\beta^*\mathcal{O}_T \cong \mathcal{O}_S$ und S damit schon ein Torus ist. □

Die Krümmungsformel aus Theorem 4.21 suggeriert, dass man negative Krümmung erhalten kann, falls $K_Y < 0$ ist. Der Fall $K_Y = -1$ existiert in diesem Sinne jedoch nicht, da für eine hyperbolische Riemannschen Fläche Y der Raum $H^0(X, \beta_s^* T_Y)$ trivial ist. Im Fall $K_Y = 0$, d.h. Y ist ein Torus, ist der Raum $H^0(X, \beta_s^*(T_Y))$ eindimensional, d.h. effektive Familien existieren dann nur über Kurven und diese haben verschwindende Krümmung.

Bemerkung 4.23. In der Krümmungsformel erkennen wir die Griffiths-Formel (siehe z.B. [Be09])

$$(\Theta^E_{j\bar{k}} u, v) = (\pi_\perp(D^F_{s_j} u), \pi_\perp(D^F_{s_k} v)) - (\Theta^F_{j\bar{k}} u, v)$$

für die Krümmung eines Unterbündels $E \subset F$. Hierbei sind u, v Schnitte von E und D^F der Zusammenhang auf F. Ferner ist $\pi_\perp$ die faserwesie orthogonale Projektion von F auf das orthogonale Komplement von E. In unserer Situation ist F das Bündel aller differenzierbaren (bzw. L^2)-Schnitte und E darin das Unterbündel der holomorphen Schnitte von $\beta_s^* T_Y$. Der zweite Summand steht also für die Krümmung des Bündels F.

Bemerkung 4.24. Bei der Berechnung der Krümmung kann man auch anders vorgehen. Man schreibt zunächst

$$\begin{aligned} G_{i\bar{j}}(s) &= \int_X \xi_i^w \xi_{\bar{j}}^{\overline{w}} h_{w\overline{w}} \, g dA \\ &= \int_X (\xi_i^w / \zeta_z^w)(\xi_{\bar{j}}^{\overline{w}} / \zeta_{\bar{z}}^{\overline{w}}) g_{z\bar{z}} \, h_{w\overline{w}} \zeta_z^w \zeta_{\bar{z}}^{\overline{w}} dA \\ &= \int_X (\xi_i^w / \zeta_z^w)(\xi_{\bar{j}}^{\overline{w}} / \zeta_{\bar{z}}^{\overline{w}}) g_{z\bar{z}} \, \beta_s^*(\omega_Y). \end{aligned}$$

Dabei ist $(\xi_i^w/\zeta_z^w)\partial_z$ ein meromorphes Vektorfeld mit Polstellen in den Verzweigungspunkten von β_s. Nun berechnen wir die Ableitung in eine Basis-Richtung wie folgt:

$$\begin{aligned}
\partial_k(G_{i\bar{j}})(s) &= \partial_k \int_X (\xi_i^w/\zeta_z^w)(\xi_{\bar{j}}^{\overline{w}}/\zeta_{\bar{z}}^{\overline{w}}) g_{z\bar{z}}\, \beta_s^*(\omega_Y) \\
&= \int_X L_k((\xi_i^w/\zeta_z^w)(\xi_{\bar{j}}^{\overline{w}}/\zeta_{\bar{z}}^{\overline{w}}) g_{z\bar{z}}\, \beta_s^*(\omega_Y)) \\
&= \int_X L_k(\xi_i^w/\zeta_z^w)(\xi_{\bar{j}}^{\overline{w}}/\zeta_{\bar{z}}^{\overline{w}}) g_{z\bar{z}}\, \beta_s^*(\omega_Y) + \int_X (\xi_i^w/\zeta_z^w) L_k(\xi_{\bar{j}}^{\overline{w}}/\zeta_{\bar{z}}^{\overline{w}}) g_{z\bar{z}}\, \beta_s^*(\omega_Y) \\
&+ \int_X \xi_i^w/\zeta_z^w)(\xi_{\bar{j}}^{\overline{w}}/\zeta_{\bar{z}}^{\overline{w}}) g_{z\bar{z}}\, L_k(\beta_s^*(\omega_Y).
\end{aligned}$$

Dabei haben wir $L_k(g) = 0$ verwendet (siehe Lemma 4.12). Eine formale Rechnung führt auf das gleiche Ergebnis wie in Lemma 4.19.

Den wichtigen Spezialfall von Theorem 4.21 für einen Unterraum $\mathcal{H}_X \subset \mathcal{H}^{n,b}$ und $Y = \mathbb{P}^1$ halten wir separat fest:

Theorem 4.25. *Die Krümmung der Weil-Petersson-Metrik für einen Unterraum $\mathcal{H}_X$ ist*

$$\begin{aligned}
R_{i\bar{j}k\bar{l}}(s_0) = &- \int G_{\bar{\partial}}(\psi_{ik}) \cdot \psi_{\bar{j}\bar{l}}\, gdA \\
&+ \int (\xi_i \cdot \xi_{\bar{j}})(\xi_k \cdot \xi_{\bar{l}})\, gdA
\end{aligned}$$

4.7.2. Die Krümmung des Bündels $f_*\beta^*T_Y$

Wir betrachten in diesem Abschnitt Familien von Überlagerungen $(\beta, f) : \mathcal{X} \to Y \times S$, für die $f_*\beta^*T_Y$ ein Vektorbündel auf der Basis S liefert. Dieses trägt dann eine natürliche Metrik, deren Krümmung wir berechnen können.

Definition 4.26. Eine Familie von Überlagerungen $(\beta, f) : \mathcal{X} \to Y \times S$ heißt *zulässig*, falls Folgendes erfüllt ist:

(i) X_s ist eine kompakte hyperbolische Riemannsche Fläche von festem Geschlecht $g > 1$.

(ii) Y ist der projektive Raum $\mathbb{P}^1$.

(iii) Für den Grad des Verzweigungsdivisors R_s von β_s gilt $\deg(R_s) > 4g - 4$.

Insbesondere erfüllt die universelle Familie über dem Hurwitz-Raum $\mathcal{H}^{n,b}$ mit $b > 4g - 4$ die geforderten Eigenschaften. Nach Bedingung (iii) ist $h^1(X_s, \beta_s^*T_Y) = 0$ für alle $s \in S$ und nach dem Satz von Riemann-Roch ist die Dimension $h^0(X_s, \beta_s^*T_Y)$ konstant auf S und von 0 verschieden. Daher ist die Garbe $f_*\beta^*T_Y$ lokal frei auf S, also ein Vektorbündel. Wir bezeichnen dessen Rang mit r. Die Faser dieses Bündels in einem Punkt $s \in S$ ist dann gerade der Raum $H^0(X_s, \beta_s^*T_Y)$. Für eine Umgebung $U \subset S$ identifizieren wir den Raum der lokalen holomorphen Schnitte $\Gamma(U, f_*\beta^*T_Y)$ mit $\Gamma(f^{-1}(U), \beta^*T_Y)$, also den lokalen holomorphen Vektorfeldern auf

$f^{-1}(U) = \mathcal{X}_U$ mit Weten im zurückgezogenen Tangential-Bündel $\beta^* T_Y$. Ist $s \in U \subset S$ eine offene Umgebung und $u_1, \ldots, u_r \in H^0(\mathcal{X}_U, \beta^* T_Y)$ eine Basis von lokalen holomorphen Schnitten, so ist die natürliche Metrik auf $f_* \beta^* T_Y$ gerade gegeben durch

$$G_{i\bar{j}}(s) = \int_{X_s} u_i(z,s)\overline{u_j(z,s)} h(\beta(z,s)) g(z,s) dA.$$

Für die universelle Familie über dem Hurwitz-Raum $\mathcal{H}^{n,b}$ ist dies also gerade die induzierte Weil-Petersson-Metrik G_1^{WP} auf dem Unterbündel $f_* \beta^* T_Y \subset T_{\mathcal{H}^{n,b}}$. Weiter haben wir

$$f_* \beta^* T_{\mathbb{P}^1}|_{\mathcal{H}_X} = T_{\mathcal{H}_X},$$

wobei die Familie komplexer Strukturen in diesem Fall über $\mathcal{H}_X$ lokal trivial ist.

Bemerkung 4.27. Das Bündel $f_* \beta^* T_Y$ und die zugehörige Metrik sind auch für den Fall erklärt, dass Y ein Torus ist. Dann ist aber das Tangentialbündel T_Y trivial. Somit ist auch $\beta^* T_Y$ trivial auf $\mathcal{X}$ und damit $f_* \beta^* T_Y$ das triviale Geradenbündel $\mathcal{O}_S$ auf S, da f zusammenhängende Fasern besitzt. Nehmen wir einen trivialisierenden Schnitt $u \equiv 1$ auf ganz S, so erhalten wir eine konstante Metrik auf dem Bündel $S \times \mathbb{C}$. Für $g(Y) > 1$ ist $h^0(X_s, \beta_s^* T_Y) = 0$ wegen $\deg \beta^* T_Y < 0$. Damit ist in diesem Fall $R^1 f_* \beta^* T_Y$ stets ein Vektorbündel auf S.

Wir berechnen nun die Krümmung des Bündels $f_* \beta^* T_Y$ auf der Basis S der Dimension b (wir denken an $S = \mathcal{H}^{n,b}$) für eine zulässige Familie $(\beta, f) : \mathcal{X} \to Y \times S$. Dazu wählen wir zu den lokalen Koordinaten $s_1, \ldots, s_b$ auf S um einen festen Punkt s einen orthogonalen Rahmen $u_1, \ldots, u_r$ aus lokalen holomorphen Schnitten mit

$$G_{i\bar{j}}(s) = \delta_{i\bar{j}}$$

und

$$\partial_k G_{i\bar{j}}(s) = 0$$

für alle $1 \leqslant k \leqslant b$ und $1 \leqslant i, j \leqslant r$.

Wir bekommen zunächst

$$\partial_k G_{i\bar{j}}(s) = \int_{X_s} L_k(u_i^w u_{\bar{j}}^{\overline{w}} h_{w\overline{w}}\, g dA) = \int_{X_s} D_k(u_i^w) u_{\bar{j}}^{\overline{w}} h_{w\overline{w}}\, g dA$$

mit $D_k = \nabla_k + a_k^z \nabla_z$, wobei a_k^z diesmal i.A. nur differenzierbar ist. Dabei haben wir $L_k(g\, dA) = 0$ verwendet (siehe Lemma 4.12). Weiter ist

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{l}} \partial_k G_{i\bar{j}}(s) &= \int_{X_s} D_k(u_i^w) D_{\bar{l}}(u_{\bar{j}}^{\overline{w}}) h_{w\overline{w}}\, g dA \\ &+ \int_{X_s} D_{\bar{l}} D_k(u_i^w) u_{\bar{j}}^{\overline{w}} h_{w\overline{w}}\, g dA \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} D_k(u_i) &= u_{i;k} + a_k^z u_{i;z} \\ &= u_{i,k} + \Gamma_w \xi_k^w u_i + a_k^z (u_{i,z} + \Gamma_w \zeta_z^w u_i) \end{aligned}$$

Da a_k nun i.A. nicht holomorph ist, bekommen wir in dieser Situation

$$\begin{aligned} D_{\bar{l}} D_k(u_i) &= (\partial_{\bar{l}} + a_{\bar{l}}^{\bar{z}} \partial_{\bar{z}}) D_k u_i \\ &= -K_{w\overline{w}} \xi_{\bar{l}}^{\overline{w}} \xi_k^w u_i - a_{\bar{l}}^{\bar{z}} K_{w\overline{w}} \zeta_{\bar{z}}^{\overline{w}} \xi_k^w u_i \\ &- (A_{k\bar{z}}^z a_{\bar{l}}^{\bar{z}} + g^{-1} \partial_{\bar{z}} \varphi_{k\bar{l}}) u_{i;z} \\ &+ a_{\bar{l}}^{\bar{z}} A_{k\bar{z}}^z u_{i;z} \\ &- a_k^z K_{w\overline{w}} \xi_{\bar{l}}^{\overline{w}} \zeta_z^w u_i - a_{\bar{l}}^{\bar{z}} a_k^z K_{w\overline{w}} \zeta_{\bar{z}}^{\overline{w}} \zeta_z^w u_i \\ &= -K_{w\overline{w}} (\xi_{\bar{l}}^{\overline{w}} + a_{\bar{l}}^{\bar{z}} \zeta_{\bar{z}}^{\overline{w}}) (\xi_k^w + a_k^z \zeta_z^w) u_i \\ &- g^{-1} \partial_{\bar{z}} \varphi_{k\bar{l}} u_{i;z}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir Gleichung 4.5 von Lemma 4.11 verwendet. Wir erhalten damit insgesamt

$$\begin{aligned} -\partial_{\bar{l}} \partial_k G_{i\bar{\jmath}}^{WP,1}(s) = &- \int_{X_s} D_k(u_i^w) D_{\bar{l}}(u_{\bar{\jmath}}^{\overline{w}}) h_{w\overline{w}} \, g dA \\ &+ K_Y \int_{X_s} (\xi_k^w + a_k^z \zeta_z^w)(\xi_{\bar{l}}^{\overline{w}} + a_{\bar{l}}^{\bar{z}} \zeta_{\bar{z}}^{\overline{w}}) u_i^w u_{\bar{\jmath}}^{\overline{w}} h_{w\overline{w}}^2 \, g dA \\ &+ \int_{X_s} g^{-1} \partial_{\bar{z}} \varphi_{k\bar{l}} u_{i;z}^w u_{\bar{\jmath}}^{\overline{w}} h_{w\overline{w}} \, g dA. \end{aligned}$$

Der dritte Term lässt sich mit dem Stoke'schen Satz umformen zu

$$\begin{aligned} &\int_{X_s} g^{-1} \partial_{\bar{z}} \varphi_{k\bar{l}} u_{i;z}^w u_{\bar{\jmath}}^{\overline{w}} h_{w\overline{w}} \, g dA \\ = &- \int_{X_s} g^{-1} \partial_z \partial_{\bar{z}} \varphi_{k\bar{l}} u_i^w u_{\bar{\jmath}}^{\overline{w}} h_{w\overline{w}} \, g dA \\ = &\int_{X_s} \Box \varphi_{k\bar{l}} u_i^w u_{\bar{\jmath}}^{\overline{w}} h_{w\overline{w}} \, g dA \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}
& \int_{X_s} g^{-1}\partial_{\overline{z}}\varphi_{k\overline{l}}u^w_{i;z}u^{\overline{w}}_{\overline{j}}h_{w\overline{w}}\ gdA \\
= & \int_{X_s} g^{-1}\varphi_{k\overline{l}}K_{w\overline{w}}\zeta^w_z\zeta^{\overline{w}}_{\overline{z}}u^w_i u^{\overline{w}}_{\overline{j}}h_{w\overline{w}}\ gdA \\
- & \int_{X_s} g^{-1}\varphi_{k\overline{l}}u^w_{i;z}u^{\overline{w}}_{\overline{j};\overline{z}}h_{w\overline{w}}\ gdA \\
= & K_Y\int_{X_s}\varphi_{k\overline{l}}u^w_i u^{\overline{w}}_{\overline{j}}h_{w\overline{w}}\ \beta^*_s(\omega_Y) \\
- & \int_{X_s}\varphi_{k\overline{l}}(u^w_{i;z}/\zeta^w_z)(u^{\overline{w}}_{\overline{j};\overline{z}}/\zeta^{\overline{w}}_{\overline{z}})\ \beta^*_s(\omega_Y)
\end{aligned}$$

Theorem 4.28. *Für eine zulässige Familie von Überlagerungen $(\beta, f) : \mathcal{X} \to Y \times S$ besitzt die auf $f_*\beta^*T_Y$ induzierte Metrik die Krümmung*

$$\begin{aligned}
R_{i\overline{j}k\overline{l}}(s) = & - \int_{X_s} D_k(u^w_i)D_{\overline{l}}(u^{\overline{w}}_{\overline{j}})h_{w\overline{w}}\ gdA \\
& + K_Y\int_{X_s} u^w_i u^{\overline{w}}_{\overline{j}}(\xi^w_k + a^z_k\zeta^w_z)(\xi^{\overline{w}}_{\overline{l}} + a^{\overline{z}}_{\overline{l}}\zeta^{\overline{w}}_{\overline{z}})h^2_{w\overline{w}}\ gdA \\
& + K_Y\int_{X_s}\varphi_{k\overline{l}}u^w_i u^{\overline{w}}_{\overline{j}}h_{w\overline{w}}\ \beta^*_s(\omega_Y) \\
& - \int_{X_s}\varphi_{k\overline{l}}(u^w_{i;z}/\zeta^w_z)(u^{\overline{w}}_{\overline{j};\overline{z}}/\zeta^{\overline{w}}_{\overline{z}})\ \beta^*_s(\omega_Y)
\end{aligned}$$

Dabei schreiben sich die beiden letzten Terme mittels Stokes noch als

$$\begin{aligned}
& K_Y\int\varphi_{k\overline{l}}u^w_i u^{\overline{w}}_{\overline{j}}h_{w\overline{w}}\ \beta^*_s(\omega_Y) - \int\varphi_{k\overline{l}}(u^w_{i;z}/\zeta^w_z)(u^{\overline{w}}_{\overline{j};\overline{z}}/\zeta^{\overline{w}}_{\overline{z}})\ \beta^*_s(\omega_Y) \\
= & \int g^{-1}\varphi_{k\overline{l}}K_{w\overline{w}}\zeta^w_z\zeta^{\overline{w}}_{\overline{z}}u^w_i u^{\overline{w}}_{\overline{j}}h_{w\overline{w}}\ gdA - \int g^{-1}\varphi_{k\overline{l}}u^w_{i;z}u^{\overline{w}}_{\overline{j};\overline{z}}h_{w\overline{w}}\ gdA \\
= & \int g^{-1}\partial_{\overline{z}}\varphi_{k\overline{l}}u^w_{i;z}u^{\overline{w}}_{\overline{j}}h_{w\overline{w}}\ gdA \\
= & -\int g^{-1}\partial_z\partial_{\overline{z}}\varphi_{k\overline{l}}u^w_i u^{\overline{w}}_{\overline{j}}h_{w\overline{w}}\ gdA \\
= & \int\Box\varphi_{k\overline{l}}u^w_i u^{\overline{w}}_{\overline{j}}h_{w\overline{w}}\ gdA
\end{aligned}$$

Der erste Term schreibt sich mit der Identität $\mathrm{id} = H + \Box_{\bar\partial} G_{\bar\partial} = \bar\partial^* G_{\bar\partial} \bar\partial$ als

$$\begin{aligned}
& - \int D_k(u_i^w) D_{\bar l}(u_{\bar j}^{\overline{w}}) h_{w\overline{w}}\, g dA \\
= & - K_Y^2 \int G_{\bar\partial}(u_i^w(\xi_k^w + a_k^z \zeta_z^w)\zeta_{\bar z}^{\overline{w}} h_{w\overline{w}})(u_{\bar j}^{\overline{w}}(\xi_{\bar l}^{\overline{w}} + a_{\bar l}^{\bar z}\zeta_{\bar z}^{\overline{w}})\zeta_z^w h_{w\overline{w}}) h_{w\overline{w}}\, dA \\
& - K_Y \int G_{\bar\partial}(u_{i;z}^w A_{k\bar z}^z)(u_{\bar j}^{\overline{w}}(\xi_{\bar l}^{\overline{w}} + a_{\bar l}^{\bar z}\zeta_{\bar z}^{\overline{w}})\zeta_z^w h_{w\overline{w}}) h_{w\overline{w}}\, dA \\
& - K_Y \int G_{\bar\partial}(u_i^w(\xi_k^w + a_k^z \zeta_z^w)\zeta_{\bar z}^{\overline{w}} h_{w\overline{w}})(u_{\bar j;\bar z}^{\overline{w}} A_{\bar l z}^{\bar z}) h_{w\overline{w}}\, dA \\
& - \int G_{\bar\partial}(u_{i;z}^w A_{k\bar z}^z)(u_{\bar j;\bar z}^{\overline{w}} A_{\bar l z}^{\bar z}) h_{w\overline{w}}\, dA
\end{aligned}$$

Als wichtigen Spezielfall formulieren wir

Theorem 4.29. *Die Weil-Petersson-Metrik besitzt auf dem Unterbündel $f_*\beta^* T_{\mathbb{P}^1} \subset T_{\mathcal{H}^{n,b}}$ die Krümmung*

$$\begin{aligned}
R_{i\bar j k \bar l}^{WP}(s) = & - \int_{X_s} D_k(u_i^w) D_{\bar l}(u_{\bar j}^{\overline{w}}) h_{w\overline{w}}\, g dA \\
& + \int_{X_s} u_i^w u_{\bar j}^{\overline{w}} (\xi_k^w + a_k^z \zeta_z^w)(\xi_{\bar l}^{\overline{w}} + a_{\bar l}^{\bar z}\zeta_{\bar z}^{\overline{w}}) h_{w\overline{w}}^2\, g dA \\
& + \int_{X_s} \Box \varphi_{k\bar l} u_i^w u_{\bar j}^{\overline{w}} h_{w\overline{w}}\, g dA
\end{aligned}$$

Bemerkung 4.30. Man erhält das Theorem 4.25 aus dem Theorem 4.29 durch Einschränken des Bündels $f_*\beta^* T_{\mathbb{P}^1}$ auf einen Unterraum $\mathcal{H}_X$.

Bemerkung 4.31. In der Arbeit [Be09] berechnet Berndtsson ganz allgemein die Krümmung des Bündels $f_*(L \otimes K_{\mathcal{X}/S})$ für eine holomorphe Faserung $f : \mathcal{X} \to S$ und ein Geradenbündel L auf einer Kähler-Mannigfaltigkeit $\mathcal{X}$. Er beweist, dass das direkte Bild $f_*(L \otimes K_{\mathcal{X}/S})$ Nakano-(semi)-positiv ist, falls L auf ganz $\mathcal{X}$ (semi)-positiv ist. Für den Hurwitz-Raum $\mathcal{H}^{n,b}$ ist das Bündel $L := \beta^* T_{\mathbb{P}^1} \otimes K_{\mathcal{X}/S}^{-1}$ unter der Bedingung $b > 4g - 4$ zumindest auf jeder Faser positiv. Die Metrik $\beta^* h \cdot g$ auf dem Gerdadenbündel $\beta^* T_{\mathbb{P}^1} \otimes K_{\mathcal{X}/S}^{-1}$ besitzt jedoch auch faserweise nicht überall positive Krümmung, da sie in den Verzweigungspunkten negative Werte annimmt.

5. Weitere Aspekte

5.1. Das relative kanonische Bündel $K_{\mathcal{H}_0^{n,b}/\mathcal{M}_g^0}$

Wir betrachten die universelle Familie $(\beta, f) : \mathcal{X} = (X_s) \to \mathbb{P}^1 \times \mathcal{H}^{n,b}$ über dem Hurwitz-Raum. Es gelte $b > 4g - 4$. Dann haben wir die kurze exakte Sequenz

$$0 \to H^0(X_s, \beta_s^* T_{\mathbb{P}^1}) \to H^0(X_s, N_{\beta_s}) \to H^1(X_s, T_{X_s}) \to 0. \tag{5.1}$$

Dies ist die Tangentialsequenz, welche zur Abbildung $\mathcal{H}_0^{n,b} \to \mathcal{M}_g^0$ gehört. Auf einer Faser $\mathcal{H}_X$ dieser Submersion hat die Weil-Petersson-Metrik die Form

$$G_{i\bar{j}} = \int_X (\xi_i^w + a_i^z \zeta_z^w)(\xi_{\bar{j}}^{\overline{w}} + a_{\bar{j}}^{\bar{z}} \zeta_{\bar{z}}^{\overline{w}}) h_{w\overline{w}} \, g dA,$$

wobei $u_j = \xi_j^w + a_j^z \zeta_z^w$ holomorph in der z und den s Koordinaten ist, da sich die komplexe Struktur von X entlang $\mathcal{H}_X$ nicht ändert. Diese Familie von Metriken induziert eine hermitesche Metrik $G = \det(G_{i\bar{j}})_{i,j=1,\dots,r}$ auf dem relativen anti-kanonischen Bündel

$$K^{-1}_{\mathcal{H}_0^{n,b}/\mathcal{M}_g^0}.$$

Somit ist G^{-1} eine Metrik auf $K_{\mathcal{H}_0^{n,b}/\mathcal{M}_g^0}$. Das negative seiner Ricci-Form ist bis auf den Faktor 2π die Krümmungsform dieses Bündels. Sei $s_0 \in \mathcal{H}_X$ gegeben durch eine Überlagerung $\beta_0 : X \to \mathbb{P}^1$.Wir wählen nun lokale Koordianten $s_1, \dots, s_b$ auf dem Hurwitz-Raum, so dass der Unterraum $\mathcal{H}_X$ lokal um s_0 gegeben ist durch

$$\left\{ s \in \mathcal{H}^{n,b} \mid s_{r+1} = \dots = s_b = 0 \right\}.$$

Hierbei ist $r := b - (3g - 3) = 2n - (g - 1)$ die komplexe Dimension des Unterraums $\mathcal{H}_X$. Dann gilt für die Krümmungsform von $K_{\mathcal{H}_0^{n,b}/\mathcal{M}_g^0}$ auf dem Hurwitz-Raum

$$c_1(K_{\mathcal{H}_0^{n,b}/\mathcal{M}_g^0}, G^{-1}) = \frac{1}{2\pi i} R_{k\bar{l}} \, ds^k \wedge ds^{\bar{l}}$$

mit

$$R_{k\bar{l}} = -\frac{\partial^2 \log \det(G_{i\bar{j}})}{\partial s^k \partial s^{\bar{l}}} \quad \text{für } 1 \leqslant k, l \leqslant b.$$

Nun ist

$$\partial_k G = \frac{\partial G}{\partial G_{i\bar{j}}} \frac{\partial G_{i\bar{j}}}{\partial s^k},$$

wobei wir ab jetzt die die Einsteinsche Summenkonvention verwenden. Bezeichnen wir mit $A_{i\bar{j}}$ den Kofaktor von $G_{i\bar{j}}$, so ist

$$G^{\bar{j}i} = \frac{A_{i\bar{j}}}{G},$$

also weiter

$$\frac{\partial G}{\partial G_{i\bar{j}}} = A_{i\bar{j}} = GG^{\bar{j}i}.$$

Hierbei ist $(G^{\bar{j}i})$ die Inverse von $(G_{i\bar{j}})_{i,j=1,\dots,r}$. Damit bekommen wir

$$\partial_k G = GG^{\bar{j}i}\partial_k(G_{i\bar{j}}),$$

oder äquivalent

$$\partial_k \log G = G^{\bar{j}i}\partial_k(G_{i\bar{j}}).$$

Wir berechnen den Ricci-Tensor zu

$$\begin{aligned} -R_{k\bar{l}} &= \partial_{\bar{l}}\partial_k \log G \\ &= \partial_{\bar{l}}G^{\bar{j}i}\partial_k(G_{i\bar{j}}) + G^{\bar{j}i}\partial_{\bar{l}}\partial_k(G_{i\bar{j}}) \end{aligned}$$

Wegen

$$G_{p\bar{q}}G^{\bar{q}i} = \delta_p^i$$

gilt

$$\partial_{\bar{l}}G_{p\bar{q}}G^{\bar{q}i} = -G_{p\bar{q}}\partial_{\bar{l}}G^{\bar{q}i}$$

und damit

$$\partial_{\bar{l}}G^{\bar{j}i} = G^{\bar{j}p}G_{p\bar{q}}\partial_{\bar{l}}G^{\bar{q}i} = -G^{\bar{j}p}\partial_{\bar{l}}G_{p\bar{q}}G^{\bar{q}i}.$$

Wir erhalten somit insgesamt

$$R_{k\bar{l}} = -G^{\bar{j}i}\partial_{\bar{l}}\partial_k G_{i\bar{j}} + G^{\bar{j}p}\partial_{\bar{l}}G_{p\bar{q}}G^{\bar{q}i}\partial_k G_{i\bar{j}}.$$

Daran erkennen wir, dass wir für die Krümmungsform des Bündels $\mathcal{K}_{\mathcal{H}_0^{n,b}/\mathcal{M}_g^0}$ nur die Ableitungen von $G^{WP}_{1,i\bar{j}}$ in sämtliche Koordinatenrichtungen zu kennen brauchen. Diese haben wir aber im letzten Abschnitt des vorigen Kapitels berechnet. Genauer liefert die Sequenz 5.1 den Zusammenhang

$$\mathcal{K}^{-1}_{\mathcal{H}_0^{n,b}/\mathcal{M}_g^0} \cong \det(f_*\beta^* T_{\mathbb{P}^1})$$

und damit

$$c_1(\mathcal{K}_{\mathcal{H}_0^{n,b}/\mathcal{M}_g^0}, G^{-1}) = \frac{1}{2\pi i}R_{k\bar{l}}\, ds^k \wedge ds^{\bar{l}}$$

mit

$$R_{k\bar{l}} = G^{\bar{j}i}R_{i\bar{j}k\bar{l}} = \sum_{i=1}^{r} R_{i\bar{i}k\bar{l}},$$

falls wir Normalkoordinaten wählen. Hierbei ist $R_{i\bar{j}k\bar{l}}$ die Krümmung des Bündels $f_*\beta^* T_{\mathbb{P}^1}$. Der Ausdruck für $R_{i\bar{j}k\bar{l}} = -\partial_{\bar{l}}\partial_k G_{i\bar{j}}$ aus Theorem 4.29 ist in dieser Form jedoch noch indefinit.

5.2. Vergleich der Metriken ω_X und $\beta^*\omega_Y$ und das Lemma von Ahlfors-Schwarz

Es sei $\beta : X \to Y$ eine Überlagerung von kompakten Riemannschen Flächen. Ist ω eine $(1,1)$-Form auf Y, so gilt

$$\int_X \beta^*\omega = \deg(\beta) \int_Y \omega.$$

Wenden wir dies auf die Chern-Form eines Geradenbündels L auf Y an, so bekommen wir

$$\deg(\beta^* L) = \int_X c_1(\beta^* L) = \int_X \beta^* c_1(L) = \deg(\beta) \int_Y (c_1(L)) = \deg(\beta)\deg(L).$$

Es sei nun X hyperbolisch, d.h. $g(X) > 1$ und $\omega_X = \sqrt{-1} g\, dz \wedge d\overline{z}$ eine Metrik von konstanter Krümmung -1 auf X. Dann ist die Krümmugsform (Chern-Form) von T_X gerade gegeben durch $-(1/2\pi)\omega_X$, also

$$\int_X \omega_X = 2\pi \deg(K_X) = 2\pi(2g-2) > 0,$$

da $\deg(K_X) = 2g-2$. Sei $Y = \mathbb{P}^1$ und $\omega_Y = \sqrt{-1} h\, dw \wedge d\overline{w}$ eine Metrik von konstanter Krümmung 1 auf $\mathbb{P}^1$. Dann ist

$$\int_Y \omega_Y = 4\pi = 2\pi \deg(T_X) > 0,$$

da $T_{\mathbb{P}^1} = \mathcal{O}(2)$. Wir setzen $\deg(\beta) = n$. $\beta^* h$ ist eine Metrik im zurückgezogenen Bündel $\beta^* T_X$ mit der Krümmugsform $\beta^*\omega_Y$ und daher

$$\int_X \beta^*(\omega_Y) = 2\pi n \deg(T_{\mathbb{P}^1}) = 4n\pi > 0.$$

Unter der Voraussetzung $b > 4g(X) - 4$ ist das Bündel $L := \beta^* T_Y \otimes T_X = T_X^2(B)$ positiv. (Das ist gerade die Bedingung, dass $H^1(X, \beta^* T_Y)$ verschwindet.) Nun ist aber $\beta^* h \cdot g$ eine Metrik in L mit zugehöriger Krümmungsform $\beta^*\omega_Y - \omega_X$. Es folgt

$$\int_X \beta^*\omega_Y - \omega_X = 2\pi \deg(L) > 0,$$

also

$$\int_X \beta^*\omega_Y > \int_X \omega_X.$$

Leider ist $\beta^*\omega_Y - \omega_X$ aber sicherlich keine positive Metrik auf L, da $\beta^*\omega_Y$ in den Verzweigungspunkten von β verschwindet. Wir sehen aber, dass $\beta^*\omega_Y$ im Mittel größer ist als ω_X (unter der Voraussetzung $b > 4g - 4$).

Wir betrachten nun den Fall, dass auch die Riemannsche Fläche Y hyperbolisch ist. Wir wählen dazu auf Y eine Metrik ω_Y von konstanter Krümmung -1. Nach dem verallgemeinerten Schwarz-Lemma (siehe z.B. [Ko70]) gilt bekanntlich

$$\chi = \frac{h_{w\overline{w}}\zeta_z^w\zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}}}{g_{z\overline{z}}} \leqslant 1$$

auf ganz X. Wegen $\beta^*\omega_Y = \sqrt{-1}h_{w\overline{w}}(\beta(z))\zeta_z^w\zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}}\, dz \wedge d\overline{z}$ ist deswegen

$$\int_X \beta^*\omega_Y = \int_X \chi \cdot \omega_X \leqslant \int_X \omega_X.$$

Nun ist aber χ gleichzeitig eine Metrik des positiven Bündels $\beta^*T_Y \otimes K_X = \mathcal{O}(B)$ mit der Krümmungsform

$$\frac{1}{2\pi i}\partial\bar{\partial}\log\chi = \frac{1}{2\pi}(\omega_X - \beta^*\omega_Y).$$

Damit gilt aber

$$\int_X (\omega_X - \beta^*\omega_Y) > 0,$$

also

$$\int_X \beta^*\omega_Y < \int_X \omega_X.$$

Die Funktion χ muss damit auf einer offenen, nicht leeren Teilmenge von X echt kleiner als 1 sein. Des Weiteren ist χ im Mittel umso kleiner, je mehr Verzweigungspunkte die Überlagerung β besitzt. Dies folgt natürlich auch aus der Tatsache, dass χ in den Verzweigungspunkten Nullstellen besitzt, da ζ_z^w dort verschwindet und insgesamt stetig ist.

5.3. Eine Anwendung der Bochner-Kodaira-Nakano Formel

Aus der Berechnung der Krümmung für die Weil-Petersson-Metrik auf dem Teichmüller-Raum ist bekannt, dass die Lie-Ableitung L_k des metrischen Tensors $g(z,s)$ in eine beliebige Koordinatenrichting der Basis verschwindet, d.h.

$$L_k(g) = 0.$$

Hierbei bedeutet die Lie-Ableitung L_k die Lie-Ableitung nach dem Vektorfeld $v_k = \partial_k + a_k^z\partial_z$. Im Falle des Hurwitz-Raums haben wir gesehen, dass stets gilt

$$L_{\tilde{v}_k}(\beta^*(\omega_Y)) = 0,$$

wobei $\tilde{v}_k = \partial_k - \xi_k^w\partial_w = \partial_k - \xi_k^w/\zeta_z^w\partial_z$. Beim Nachweis der Kähler-Eigenschaft ist auch der Ausdruck $L_k(\beta^*(\omega_Y)) = L_{v_k}(\beta^*(\omega_Y))$ aufgetreten. Wegen

$$\int_{X_s} \beta^*(\omega_Y) = 2\pi\deg(\beta^*(T_Y))$$

für $g(Y) \leqslant 1$ beziehungsweise

$$\int_{X_s} \beta^*(\omega_Y) = 2\pi \deg(\beta^*(K_Y))$$

für $g(Y) > 1$ gilt sicherlich

$$\partial_k \int_{X_s} \beta^*(\omega_Y) = \int_{X_s} L_k(\beta^*(\omega_Y)) = 0.$$

Weiter haben wir dort auch gesehen, dass

$$L_k(\beta^*(\omega_Y))_{z\overline{z}} = L_k(h_{w\overline{w}}\zeta_z^w\zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}})_{z\overline{z}} = (\xi_k^w + a_k^z\zeta_z^w)_{;z}\zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}}h_{w\overline{w}} = (u_k^w\zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}}h_{w\overline{w}})_{;z}$$

gilt, was dann aufgrund des Stoke'schen Theorems auch das Verschwinden von $\int L_k(\beta^*(\omega_Y))$ erklärt. Weiter erkennen wir, dass $L_k(\beta^*(\omega_Y))$ auf ganz X_s genau dann verschwindet, falls $(u_k)_{;z}$ auf ganz X_s verschwindet, d.h. $\partial(u_k) = 0$ gilt. Hierbei steht ∂ für den $(1,0)$-Anteil des Zusammenhangs. Diesen Ausdruck können wir nun mittels der Formel von Bochner-Kodaira-Nakano untersuchen, welche wir an dieser Stelle zitieren (siehe z.B. [MM07]):

Theorem 5.1. *Es sei (X, g) eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit mit der Kähler-Form ω und Λ_g der adjungierte Operator zum Lefschetzoperator $L = \omega\wedge$. Weiter sei (E, h) ein hermitesches Geradenbündel mit der Krümmungsform $\sqrt{-1}\Theta(E) = \sqrt{-1}\bar{\partial}\partial\log(h)$. Dann gilt*

$$\Box_{\bar{\partial}} = \Box_{\partial} + [\mathrm{i}\Theta(E), \Lambda_g].$$

Wir wenden diesen Satz auf unsere Kähler-Mannigfaltigkeit (X_s, g) zusammen mit dem hermiteschen Geradenbündel $(\beta^*(T_Y), \beta^*(h))$ an. Dann besitzt dieses Bündel die auf X im Falle von $Y = \mathbb{P}^1$ semi-positive Krümmungsform

$$\beta^*\omega_{\mathbb{P}^1} = \mathrm{i}h_{w\overline{w}}(\beta(z,s))\zeta_z^w\zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}}\, dz \wedge d\overline{z}.$$

Im Falle von $g(Y) > 1$ besitzt das Bündel $(\beta^*(T_Y), \beta^*(h))$ die semi-negative Krümmungsform

$$-\beta^*\omega_Y = -\mathrm{i}h_{w\overline{w}}(\beta(z,s))\zeta_z^w\zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}}\, dz \wedge d\overline{z}.$$

Der Fall $g(Y) = 0$ kann nicht über das Bündel $(\beta^*(T_Y), \beta^*(h))$ diskutiert werden, da die Krümmungsform dann verschwindet. Für eine Form $\eta \in \mathcal{A}^{1,1}(X, \beta^*T_Y)$ haben wir

$$\Lambda_g(\eta) = -\mathrm{i}g^{-1}\eta.$$

Daher gilt für $u \in \mathcal{A}^{0,0}(X, \beta^*T_Y)$ im Fall $Y = \mathbb{P}^1$:

$$[\mathrm{i}\Theta(\beta^*T_Y), \Lambda_g](u) = -\Lambda_g\mathrm{i}\Theta(\beta^*T_Y)(u) = -\frac{h_{w\overline{w}}\zeta_z^w\overline{z}}{g_{z\overline{z}}} \cdot u = -\chi \cdot u.$$

und entsprechend im Fall $g(Y) > 1$:

$$[\mathrm{i}\Theta(\beta^* T_Y), \Lambda_g](u) = -\Lambda_g \mathrm{i}\Theta(\beta^* T_Y)(u) = \frac{h_{w\overline{w}} \zeta_z^w \zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}}}{g_{z\overline{z}}} \cdot u = \chi \cdot u.$$

mit

$$\chi = \frac{h_{w\overline{w}} \zeta_z^w \zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}}}{g_{z\overline{z}}}.$$

Wir berachnen nun im Fall von $Y = \mathbb{P}^1$ den Ausdruck

$$\begin{aligned} ||\partial u||^2 &= ||\partial u||^2 + ||\partial^* u||^2 = \langle \Box_\partial u, u\rangle = \langle \Box_{\bar\partial} u, u\rangle - \langle [\mathrm{i}\Theta(\beta^* T_Y), \Lambda_g] u, u\rangle \\ &= ||\bar\partial u||^2 + ||\bar\partial^* u||^2 + \int_X \chi \cdot u^w u^{\overline{w}} h_{w\overline{w}}\, g dA \\ &= ||\bar\partial u||^2 + \int u^w u^{\overline{w}} h_{w\overline{w}}\, \beta^* \omega_Y. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $L_v(\beta^*\omega_Y)$ mit $v = v_s = \partial_s + a_s^z \partial_z$ genau dann verschwindet, falls das zugehörige Vektorfeld $u = u_s = (\xi_s^w + a_s^z \zeta_z^w)\partial_w$ verschwindet. Damit muss also bereits die gesamte Deformation der Abbildung β in die Richtung s infinitesimal trivial sein. Im Falle des Hurwitz-Raums bildet die Menge der Tangentialvekoren (∂_k) eine Basis und die Familien sind (als Familien von Abbildungen) stets effektiv parametrisiert, so dass man in keiner der Richtungen ∂_k infinitesimal trivial ist. Es gilt also sets, dass $L_k(\beta^*\omega_Y)$ nicht auf ganz X verschwindet.

Der Fall $g(Y) > 1$ sieht etwas anders aus. Hier bekommen wir

$$||\partial u||^2 = ||\bar\partial u||^2 - \int u^w u^{\overline{w}} h_{w\overline{w}}\, \beta^* \omega_Y.$$

Es kann demnach $L_k(\beta^*\omega_Y)$ verschwinden, falls für das Vektorsfeld u_k die Gleichung

$$||\bar\partial u||^2 = \int u^w u^{\overline{w}} h_{w\overline{w}}\, \beta^* \omega_Y$$

beziehungsweise die Gleichung

$$\int \Box_{\bar\partial}(u) \overline{u} h_{w\overline{w}}\, g dA = \int_X \chi \cdot u^w u^{\overline{w}} h_{w\overline{w}}\, g dA$$

gilt.

5.4. A priori Resultate und induzierte Metriken

Zunächst erinnern wir an die Konzepte für Positivität von Vektorbündeln. Es sei dazu (E, h) ein hermitesches holomorphes Vektorbündel über einer kompakten Kähler-Mannigfaltigkeit (X, ω). Weiter seien $(z^i)_{i=1}^n$ lokale holomorphe Koordinaten auf X und $(e_\alpha)_{\alpha=1}^r$ eine Basis von lokalen

holomorphen Schnitten von E. Dann hat der Krümmungstensor $\Theta(E) \in \mathcal{A}^{1,1}(X, \mathrm{End}(E))$ die Form

$$\Theta(E) = R^{\gamma}_{i\bar{j}\alpha} dz^i \wedge dz^{\bar{j}} \otimes e^{\alpha} \otimes e_{\gamma},$$

mit $R^{\gamma}_{i\bar{j}\alpha} = h^{\bar{\beta}\gamma} R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}}$ und

$$R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}} = -\frac{\partial^2 h_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial z^i \partial z^{\bar{j}}} + h^{\bar{\delta}\gamma} \frac{\partial h_{\alpha\bar{\delta}}}{\partial z^i} \frac{\partial h_{\gamma\bar{\beta}}}{\partial z^{\bar{j}}}.$$

Definition 5.2. Ein hermitesches Vektorbündel (E, h) heißt *Griffiths-positiv*, falls für alle von Null verschiedenen Vektoren $u = u^i \partial/\partial z^i$ und $v = v^{\alpha} e_{\alpha}$ gilt

$$\sum_{i,j,\alpha,\beta} R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}} u^i u^{\bar{j}} v^{\alpha} v^{\bar{\beta}} > 0.$$

(E, h) heißt *Nakano-positiv*, falls für jeden von Null verschiedenen Vektor $u = u^{i\alpha} \partial/\partial z^i \otimes e_{\alpha}$ gilt

$$\sum_{i,j,\alpha,\beta} R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}} u^{i\alpha} u^{\bar{j}\bar{\beta}} > 0.$$

Die Begriffe semi-positiv, negativ und semi-negativ sind entsprechend definiert. Wir bezeichnen ein Bündel E als Griffths-(Nakano-)positiv, falls eine Griffiths-(Nakano-)positive Metrik auf E existiert.

Offenbar ist ein Nakano-positives Bündel auch Griffiths-positiv. Ferner stimmen beide Konzepte im Fall von Geradenbündeln überein. Weiter gilt folgende

Proposition 5.3. *Es sei $0 \to S \to E \to Q \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von hermiteschen Vektorbündeln. Dann gilt jeweils für die von E induzierten Metriken auf Q und S:*

(i) Ist E Griffiths-positiv, so ist Q Griffiths-positiv.

(ii) Ist E Griffiths-negativ, so ist S Griffiths-negativ.

(iii) Ist E Nakano-negativ, so ist S Nakano-negativ.

Beweis. Siehe [De12]. □

Wir wenden dies zunächst auf die natürliche Abbildung $s : \mathcal{H}_0^{n,b} \to \mathcal{M}_g^0$ an, welche im Falle von $b > 4g(X_s) - 4$ eine Submersion ist, so dass wir die exakte Bündelsequenz

$$0 \to f_*(\beta^* T_{\mathbb{P}^1}) \to T_{\mathcal{H}_0^{n,b}} \to R^1 f_* T_{\mathcal{X}/\mathcal{H}_0^{n,b}} \to 0$$

erhalten, wobei $(\beta, f) : \mathcal{X} \to \mathbb{P}^1 \times \mathcal{H}_0^{n,b}$ die eingeschränkte Familie bezeichnet. Da $R^1 f_* T_{\mathcal{X}/\mathcal{H}_0^{n,b}} = s^* T_{\mathcal{M}_g^0}$ und $T_{\mathcal{M}_g^0}$ negativ ist, so ist das Bündel $R^1 f_* T_{\mathcal{X}/\mathcal{H}_0^{n,b}}$ semi-negativ. Damit kann $T_{\mathcal{H}_0^{n,b}}$ zumindest schon mal nicht (semi)-positiv sein. Die Krümmung des Bündels $f_*(\beta^* T_{\mathbb{P}^1})$ haben wir berechnet und gesehen, dass diese sowohl positive als auch negative Beiträge enthält. Die Einschränkung dieses Bündels auf einen Unterraum $\mathcal{H}_X$ ist gleich dem Tangentialraum an diesen

Unterraum. Da aber die Automorphismengruppe des $\mathbb{P}^1$ auf diesem operiert, kann $\mathcal{H}_X$ auch nicht hyperbolisch sein (vgl. Proposition 2.24). Somit kann nach Proposition 5.3 (ii) das Bündel $T_{\mathcal{H}_0^{n,b}}$ aber auch nicht (semi)-negativ sein.

Wir betrachten nun eine Familie von einfachen (n,b)-Überlagerungen $(\beta, f) : \mathcal{X} \to \mathbb{P}^1 \times S$. Wir setzen die Fasern X_s stets als hyperbolisch voraus. Unter der Vorausetzung $b > 4g(X_s) - 4$ haben wir die kurze exakte Sequenz

$$0 \to H^0(X_s, \beta_s^* T_{\mathbb{P}^1}) \to H^0(X_s, N_{\beta_s}) \to H^1(X_s, T_{X_s}) \to 0,$$

die richtig interpretiert gemäß Proposition 3.26 folgendermaßen zerfällt:

$$0 \leftarrow H^0(X_s, \beta_s^* T_{\mathbb{P}^1}) \xleftarrow{H} H_{X_s/\mathbb{P}^1} \xleftarrow{G\bar{\partial}_h^*} F(\mathcal{H}^{0,1}(X_s, T_{X_s})) \leftarrow 0.$$

Die beiden direkten Summanden von $H^0(X_s, N_{\beta_s})$, die sich daraus ergeben, sind offenbar orthogonal bezüglich der Weil-Petersson-Metrik. Das Bündel $\big(H^0(X_s, N_{\beta_s})\big)_{s\in S}$ zerfällt damit als differenzierbares komplexes Vektorbündel in

$$f_* \beta^* T_{\mathbb{P}^1} \oplus R^1 f_* T_{\mathcal{X}/S}.$$

Wir vergleichen nun unsere Weil-Petersson-Metrik ω^{WP} auf dem Raum $H^0(X_s, N_{\beta_s})$ mit den natürlichen Metriken auf $H^0(X_s, \beta_s^* T_{\mathbb{P}^1})$ und $F(\mathcal{H}^{0,1}(X_s, T_{X_s}))$. Für ein harmonisches Beltrami-Differential $\mu_s = \mu^z_{s\bar{z}}\, \partial_z \otimes d\bar{z} = \mu^z_{s\bar{z}} \zeta^w_z\, \partial_w \otimes d\bar{z} \in F(\mathcal{H}^{0,1}(X_s, T_{X_s})$ ist die natürliche Norm gegeben durch

$$\int_{X_s} (\mu^z_{s\bar{z}} \zeta^w_z)(\mu^{\bar{z}}_{\bar{s}z} \zeta^{\overline{w}}_{\bar{z}}) h_{w\overline{w}} g^{\bar{z}z}\, gdA = \int_{X_s} |\mu^z_{s\bar{z}}|^2\, \beta_s^*(\omega_{\mathbb{P}^1}).$$

Die von $H^0(X_s, N_{\beta_s})$ induzierte Metrik/Norm ist jedoch gegeben durch

$$\int_{X_s} \varphi_{s\bar{s}}\, \beta_s^* \omega_{\mathbb{P}^1} + \int_{X_s} \Box^{-1}(\mu^z_{s\bar{z}} \zeta^w_z) \mu^{\bar{z}}_{\bar{s}z} \zeta^{\overline{w}}_{\bar{z}} h_{w\overline{w}} g^{\bar{z}z}\, gdA$$

mit $(\Box + 1)\varphi_{s\bar{s}} = |\mu_s|^2$, da

$$\begin{aligned} \langle \bar{\partial}^* G(\mu_s), \bar{\partial}^* G(\mu_s) \rangle & \\ &= \langle G(\mu_s), \Box G \mu_s \rangle \\ &= \langle \Box^{-1}(\mu_s), \mu_s \rangle \\ &= \int_{X_s} \Box^{-1}(\mu^z_{s\bar{z}} \zeta^w_z)(\mu^{\bar{z}}_{\bar{s}z} \zeta^{\overline{w}}_{\bar{z}}) h_{w\overline{w}} g^{\bar{z}z}\, gdA \end{aligned}$$

wegen $\mathcal{H}^{0,1}(X_s, \beta_s^* T_{\mathbb{P}^1}) = 0$. Umgekert ist die Weil-Petersson-Metrik auf $H^0(X_s, N_{\beta_s})$ auch nicht die Produktmetrik der natürlichen Metriken auf $H^0(X_s, \beta_s^* T_{\mathbb{P}^1})$ und $F(\mathcal{H}^{0,1}(X_s, T_{X_s}))$. Diese wäre gegeben durch

$$\int_{X_s} H(u_s)^w \overline{H(u_s)^w} h_{w\overline{w}}\, gdA + \int_{X_s} \Box(u_s)^w u^{\overline{w}}_{\bar{s}} h_{w\overline{w}}\, gdA$$

für einen Element $u_s \in H_{X_s/\mathbb{P}^1}$, da

$$\langle \bar{\partial}(u_s), \bar{\partial}(u_s)) \rangle = \langle \Box(u_s), u_s \rangle.$$

Wir nehmen nun ferner an, dass $(\beta, f) : \mathcal{X} \to \mathbb{P}^1 \times S$ sowohl als Familie von Abbildungen als auch als Familie von Riemannschen Flächen effektiv parametrisiert ist. Dann haben wir auf S die gewöhnliche Weil-Petersson-Metrik aus der Teichmüller-Theorie (siehe [Sch93])

$$G^{WP}_{i\bar{j},T}(s) = \int_{X_s} \varphi_{i\bar{j}} \, gdA = \int_{X_s} |\mu_s|^2 \, gdA$$

und unsere verallgemeinerte Weil-Petersson-Metrik, welche auch die Variation der Überlagerungen β_s berücksichtigt:

$$G^{WP}_{i\bar{j},H}(s) = G^{WP}_{0,i\bar{j}}(s) + G^{WP}_{1,i\bar{j}}(s) = \int_{X_s} \varphi_{i\bar{j}} \, \beta_s^*(\omega_{\mathbb{P}^1}) + \int_{X_s} u_i^w u_{\bar{j}}^{\overline{w}} h_{w\overline{w}} \, gdA.$$

Diesen Metriken entsprechen die Metriken auf $H^1(X_s, T_{X_s})$ bzw. $H^0(X_s, N_{\beta_s})$, welche durch die Monomorphismen $\rho_s : T_{S,s} \to H^1(X_s, T_{X_s})$ und $\tau_s : T_{S,s} \to H^0(X_s, N_{\beta_s})$ die jeweilige Weil-Petersson-Metrik auf $T_{S,s}$ induziert. Bekanntlich ist T_S negativ gekrümmt bezüglich G^{WP}_T. Wie wir soeben gesehen haben, wird G^{WP}_T aber nicht von G^{WP}_H induziert.

Wir diskutieren nun noch kurz den Fall einer hyperbolischen Basis Y und einer effektiven Familie von Überlagerungen $(\beta, f) : \mathcal{X} \to Y \times S$. Dann haben wir die kurze exakte Sequenz

$$0 \to H^0(X_s, N_{\beta_s}) \xrightarrow{\bar{\partial}} F(\mathcal{H}^{0,1}(X_s, T_{X_s})) \xrightarrow{H} \mathcal{H}^{0,1}(X_s, \beta_s^* T_Y) \to 0.$$

Die effektive Familie von Überlagerungen $(\beta, f) : \mathcal{X} \to \mathbb{P}^1 \times S$ ist somit auch effektiv als Familie von komplexen Strukturen und T_S damit negativ gekrümmt bezüglich der Weil-Petersson-Metrik auf $H^1(X_s, T_{X_s}) \cong F(\mathcal{H}^{0,1}(X_s, T_{X_s}))$. Zudem zerfällt die kurze exakte Sequenz gemäß Proposition 3.28 zu

$$0 \leftarrow H_{X_s/Y} \xleftarrow{\bar{\partial}_h^* G} F(\mathcal{H}^{0,1}(X_s, T_{X_s})) \xleftarrow{\iota} \mathcal{H}^{0,1}(X_s, f^* T_Y) \leftarrow 0.$$

5.5. Hörmanders L^2-Abschätzung

Wir betrachten eine effektive Familie von Überlagerungen $(\beta, f) : X \times S \to \mathbb{P}^1 \times S$. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Basis S eindimensional ist. Dann besitzt die Krümmungsformel für die Weil-Petersson-Metrik die Gestalt

$$R_{s\bar{s}s\bar{s}} = -\int_X (\nabla_s \xi_s^w)(\nabla_{\bar{s}} \xi_{\bar{s}}^{\overline{w}}) h_{w\overline{w}} \, gdA + \int_X \xi_s^w \xi_{\bar{s}}^{\overline{w}} \xi_s^w \xi_{\bar{s}}^{\overline{w}} h_{w\overline{w}}^2 \, gdA.$$

Wir wählen einen festen Punkt $s \in S$ und betrachten die Kähler-Mannigfaltigkeit (X, g) zusammen mit dem hermiteschen Bündel $(\beta_s^*(T_{\mathbb{P}^1}), \beta_s^*(h))$. Dieses Bündel besitzt die auf X semipositive Krümmungsform

$$\beta_s^*(\omega_{\mathbb{P}^1}) = \sqrt{-1} h_{w\overline{w}}(\beta_s(z)) \zeta_z^w \zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}} \, dz \wedge d\overline{z}.$$

Um den positiven Term der Krümmungsformel mit dem negativen Term zu vergleichen, bietet sich folgende Version der Hörmanderschen L^2-Abschätzung an (siehe [MM07], S. 365):

Theorem 5.4. *(Hörmander-Andreotti-Vesentini) Es sei (X, g) eine vollständige Kähler-Mannigfaltigkeit der Dimension n und (E, h) ein hermitesches Vektorbündel auf X. Das Volumenelement von (X, g) sei mit dV bezeichnet. Für en Paar (r, q) mit $q \geqslant 1$ gebe es eine stetige Funktion $\psi : X \to [0, \infty)$, so dass punktweise gilt*

$$([\mathrm{i}\Theta(E), \Lambda_g]s, s)_{\Lambda^{r,q} \otimes E} \geqslant \psi |s|^2 \quad \textit{für alle } s \in \mathcal{A}_0^{r,q}(X, E).$$

Dann existiert für jede Form $v \in L^2_{r,q}(X, E)$ mit $\bar{\partial} v = 0$ und $\int \psi^{-1} |v|^2 dV < \infty$ eine Form $u \in L^2_{r,q-1}(X, E)$ mit $\bar{\partial} u = v$ und

$$\int_X |u|^2_{L^2_{r,q-1}} dV \leqslant \int_X \psi^{-1} |v|^2_{L^2_{r,q}} dV.$$

Wir möchten den Satz auf die $(0, 0)$-Form

$$u = \nabla_s \xi_s^w = (\partial_s + \Gamma_w \xi_s^w) \xi_s^w \in \mathcal{A}^{0,0}(X, \beta_s^*(T_{\mathbb{P}^1}))$$

und die $(0, 1)$-Form

$$v = \bar{\partial}(u) = -h_{w\overline{w}} \xi_s^w \xi_s^w \zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}} \, d\overline{z} \in \mathcal{A}^{0,1}(X, \beta_s^*(T_{\mathbb{P}^1}))$$

anwenden. In Normalkoordinaten gilt

$$u \perp H^0(X, \beta_s^*(T_{\mathbb{P}^1}),$$

so dass u eine minimale Lösung bezüglich der L^2-Norm darstellt. Es ist

$$\int_X |u|_h^2 \, dV = \int_X |(\nabla_s \xi_s^w)|^2 h_{w\overline{w}} \, g dA$$

und

$$\int_X |v|^2_{g^{-1}h} \, dV = \int_X |\xi_s^w|^4 h^2_{w\overline{w}} \zeta_z^w \zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}} g^{-1} h_{w\overline{w}} \, g dA = \int_X |\xi_s^w|^4 h^2_{w\overline{w}} \, \beta_s^*(\omega_Y).$$

Die Norm von u entspricht somit dem positiven Beitrag der Krümmung. Die Norm von v unterscheidet sich von dem negativen Beitrag der Krümmung durch die Tatsache, dass sich die Volumenform auf X ändert. Man könnte nach der Hörmanderschen L^2-Abschätzung somit den negativen Term gegen den positiven Term abschätzen, falls

$$([\mathrm{i}\Theta(\beta_s^*(T_{\mathbb{P}^1})), \Lambda_g]s, s) \geqslant \chi |s|^2 \quad \text{für alle } s \in \mathcal{A}_0^{0,1}(X, \beta_s^*(T_{\mathbb{P}^1})),$$

wobei

$$\chi = \frac{h_{w\overline{w}}\zeta_z^w\zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}}}{g_{z\overline{z}}} = \frac{h_{z\overline{z}}}{g_{z\overline{z}}}.$$

Nun gilt jedoch für jede $(0,1)$-Form mit Werten in $\beta_s^*(T_{\mathbb{P}^1})$, dass

$$[\mathrm{i}\Theta(\beta_s^*(T_{\mathbb{P}^1})), \Lambda_g]s = 0$$

aus Gründen des Grades. (Für jede $(1,1)$-Form w gilt $[\mathrm{i}\Theta(\beta_s^*(T_{\mathbb{P}^1})), \Lambda_g]w = \chi \cdot w$.) Somit liefert dieser Ansatz in unserem Fall keine positive Krümmung. In anderen Situationen führt eine Hörmandersche L^2-Abschätzung zum Ziel (siehe [Be09] und [LSY13]).

5.6. Die Metrik im punktierten Fall

Wir erinnern zunächst an die Krümmungsformel für den Unterraum $\mathcal{H}_X \subset \mathcal{H}^{n,b}$:

$$R_{i\bar{j}k\bar{l}} = - \int_X D_k(\xi_i^w) D_{\bar{l}}(\xi_{\overline{j}}^{\overline{w}}) h_{w\overline{w}}\, gdA \tag{5.2}$$

$$+ K_Y \int_X \xi_i^w \xi_{\overline{j}}^{\overline{w}} \xi_k^w \xi_{\overline{l}}^{\overline{w}} h_{w\overline{w}}^2\, gdA \tag{5.3}$$

bzw. an die Krümmung des gesamten Bündels $f_*\beta^*T_Y$ (wobei $Y = \mathbb{P}^1$) auf $\mathcal{H}^{n,b}$:

$$\begin{aligned} -\partial_{\bar{l}}\partial_k G_{i\bar{j}}^{WP,1} = & - \int_{X_s} D_k(u_i^w) D_{\bar{l}}(u_{\overline{j}}^{\overline{w}}) h_{w\overline{w}}\, gdA \\ & + K_Y \int_{X_s} u_i^w u_{\overline{j}}^{\overline{w}} (\xi_k^w + a_k^z \zeta_z^w)(\xi_{\overline{l}}^{\overline{w}} + a_{\overline{l}}^{\overline{z}} \zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}}) h_{w\overline{w}}^2\, gdA \\ & + K_Y \int_{X_s} \varphi_{k\bar{l}} u_i^w u_{\overline{j}}^{\overline{w}} h_{w\overline{w}}\, \beta_s^*(\omega_Y) \\ & - \int_{X_s} \varphi_{k\bar{l}} (u_{i;z}^w/\zeta_z^w)(u_{\overline{j};\overline{z}}^{\overline{w}}/\zeta_{\overline{z}}^{\overline{w}})\, \beta_s^*(\omega_Y). \end{aligned}$$

An der Krümmungsformel erkennen wir, dass wir negative Krümmung erreichen können, falls $K_Y < 0$ ist. Der Fall $K_Y = -1$ existiert in diesem Sinne jedoch nicht, da für eine hyperbolische Riemannschen Fläche Y der Raum $H^0(X, \beta_0^*T_Y)$ trivial ist.

Um jedoch negative Krümmung im Falle des $\mathbb{P}^1$ für den Unterraum zu erreichen, verfolgen wir nun eine andere Strategie. Wir wissen, dass $\mathbb{P}^1$ weniger drei Punkte hyperbolisch ist. Daher setzen wir jeweils drei der Verzweigungswerte auf $0, 1$ und ∞. Dadurch eliminieren wir die Wirkung der Automorphismengruppe $PGL(2)$ von $\mathbb{P}^1$ auf die Basis unserer Familie und haben wieder die Hoffnung auf Hyperbolizität (siehe die Überlegungen in Abschnitt 2.5). Nach dem Uniformisierungssatz existiert auf $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ eine Metrik von konstanter Krümmung -1. Für eine Überlagerung $\beta_0 : X \to Y = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ können wir diese nur auf den offenen Teil von X zurückziehen, welcher die Fasern von $0, 1$ und ∞ nicht enthält. Dadurch bekommen wir uneigentliche Integrale. Unsere Berechnung der Krümmung ist auch für diesen Fall gerechtfertigt, falls wir zeigen können, dass sämtliche vorkommenden Intergrale existieren, d.h. die Integranden

stets L_1 sind. Ein Versuch dazu ist dieser Abschnitt.

Wir betrachten eine Familie von einfachen Überlagerungen $\beta : X \times S \to \mathbb{P}^1$, bei der wir drei der insgesamt $b > 3$ Verzweigungswerte auf $0, 1$ und ∞ setzen. Der Einfachheit halber sei die Basis S eindimensional. In lokalen Koordinaten gelte $\beta(z, s) = w$. Die offene Riemannsche Fläche $Y := \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ trägt eine hyperbolische Metrik h_{hyp} mit konstanter Krümmung -1. Wir arbeiten an dieser Stelle mit einer vollständigen hermiteschen Metrik h auf $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$, deren Krümmung nach oben durch eine negative Konstante begrenzt wird. Lokal um die Punkte $0, 1, \infty$ besitzt diese die Gestalt

$$\frac{dw\, d\overline{w}}{|w|^2(\log |w|^2)^2}.$$

Es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass gilt (siehe [La97]):

$$C^{-1}h < h_{hyp} < Ch.$$

Damit ist eine Funktion f auf Y genau dann bezüglich h_{hyp} integrierbar, falls sie bezüglich h ingerierbar ist. Beim Überprüfen der Ingerabilität hat h den Vorteil, dass wir die lokale Gestalt in den Polstellen kennen. Die Metrik sei aber bezüglich h_{hyp} erklärt:

$$G^{WP}_{s\overline{s}}(s_0) = \int_X \frac{\partial \beta}{\partial s}(z, s_0)\overline{\frac{\partial \beta}{\partial s}}(z, s_0) h_{hyp}(\beta(z, s_0)) g(z)\, dA \tag{5.4}$$

Hierbei handelt es sich um ein uneigentliches Integral. Wir integrieren nur über den offenen Teil $X^0 := X \setminus \beta_{s_0}^{-1}(\{0, 1, \infty\})$, wo wir die Metrik h_{hyp}, welche nur auf $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ erklärt ist, auch zurückziehen können. Die Metrik g sei die Einschränkung der hyperbolischen Metrik auf X, (und nicht die von s abhängige vollständige hyperbolische Metrik auf X^0). Wir diskutieren nun, wann das Integral 5.4 erklärt ist. Wir testen dazu die Integrabilität bezüglich h. Da $X^0 \subset X$ quasi-kompakt ist, reicht es, die lokale Integrierbarkeit um die Punkte auf den Fasern von $0, 1$ und ∞ zu zeigen. Wegen der gleichen lokalen Gestalt, reicht es die Faser $\beta_{s_0}^{-1}(0)$ zu betrachten. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: Keine Verzweigung in $p_0 \in \beta_0^{-1}(0)$. Da $\beta_0(z) = \beta(z, s_0)$ im Punkt p nicht verzweigt ist, besitzt diese lokal um p_0 die Gestalt $z \mapsto w = z$, wobei z eine lokal um p_0 zentrierte holomorphe Koordinate sei. Damit schreibt sich das Integral in einer Umgebung $B(p_0)$ von p_0 als

$$\begin{aligned} &\int_{B^*(p_0)} \frac{\partial \beta}{\partial s}(z, s_0)\overline{\frac{\partial \beta}{\partial s}}(z, s_0) h(\beta(z, s_0)) g(z)\sqrt{-1} dz \wedge d\overline{z} \\ = &\int_{B^*(0)} \frac{\partial \beta}{\partial s}(z, s_0)\overline{\frac{\partial \beta}{\partial s}}(z, s_0) \frac{1}{|z|^2 \log^2 |z|^2} g(z)\sqrt{-1} dz \wedge d\overline{z}. \end{aligned}$$

Der Stern deutet dabei stets an, dass der Mittelpunkt weggelassen wird, da der Integrand dort nicht definiert ist. Dieses Integral existiert, da $\partial\beta_0/\partial s$ und g (auf ganz X) differenzierbar und insbesondere lokal beschränkt sind.

Fall 2: Verzweigung in $p_0 \in \beta_{s_0}^{-1}(0)$. Nun besitzt $\beta_0(z) = \beta(z, s_0)$ um den Punkt p_0 die lokale Gestalt $z \mapsto w = z^2$. Nun schreibt sich das Integral in einer Umgebung $B(p_0)$ von p_0 als

$$\begin{aligned}
&\int_{B^*(p_0)} \frac{\partial \beta}{\partial s}(z, s_0) \overline{\frac{\partial \beta}{\partial s}}(z, s_0) h(\beta(z, s_0)) g(z) \sqrt{-1} dz \wedge d\overline{z} \\
= &\int_{B^*(0)} \frac{\partial \beta}{\partial s}(z, s_0) \overline{\frac{\partial \beta}{\partial s}}(z, s_0) \frac{1}{|z|^4 \log^2 |z|^4} g(z) \sqrt{-1} dz \wedge d\overline{z}
\end{aligned}$$

Dieses Integral existiert nur dann, falls der Term $(\partial\beta/\partial s)(z, s_0)$ eine Nullstelle im Punkt p_0 aufweist. Dies ist erfüllt, falls

$$\beta(p_0, s) = 0$$

für alle $s \in S$ gilt, d.h. falls wir auch die Verzweigungspunkte über den festen Verzweigungswerten $0, 1$ und ∞ fixieren. Dann ist nämlich

$$\frac{\partial \beta}{\partial s}(p_0, s) = 0$$

für alle $s \in S$, d.h. $(\partial\beta/\partial s)(z, s)$ besitzt stets eine Nullstelle in $z = p_0$. Damit gewährleisten wir die lokale Integrierbarkeit um den Punkt p_0. Die Metrik definiert durch das Integral 5.4 ist somit wohldefiniert.

Wir möchten nun die Krümmung wie im vorigen Abschnitt berechnen. Jedoch müssen wir dazu in jedem Schritt die Integrabilität prüfen und insbesondere die Vertauschung von Ingetration und Differentiation rechtfertigen. Dies geschieht mit dem folgenden allgemeinen Resultat, welches wir hier zitieren (siehe [NR11]):

Proposition 5.5. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n, (X, \mu)$ ein Maßraum und u eine komplex-wertige Funktion auf $\Omega \times X$. Die Funktion $u(t, \cdot)$ sei für jedes feste $t \in \Omega$ über X integrierbar und wir setzen*

$$v(t) = \int_X u(t, x) d\mu(x) \quad \forall\, t \in \Omega.$$

Dann gelten folgende Aussagen:

a) Ist $u(\cdot, x)$ stetig in $t_0 \in \Omega$ für jedes feste $x \in X$ und existiert eine nicht negative integrierbare Funktion g auf X mit $|u(t, x)| \leqslant g(x)$ für jeden Punkt $(t, x) \in \Omega \times X$, so ist v stetig in t_0.

b) Ist Ω offen, $\partial u/\partial t^j$ auf $\Omega \times X$ erklärt für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ und existiert eine nicht negative integrierbare Funktion g auf X mit $|(\partial u/\partial t_j)(t, x)| < g(x)$ für jeden Punkt $(t, x) \in \Omega \times X$, so ist $\partial v/\partial t_j$ auf Ω erklärt mit

$$\frac{\partial v}{\partial t_j}(t) = \int_X \frac{\partial u}{\partial t_j}(t, x) d\mu(x) \quad \forall\, t = (t_1, \ldots, t_n) \in \Omega.$$

Es ist

$$\frac{\partial}{\partial s} h(\beta(z, s)) = \frac{\partial \beta}{\partial s}(z, s) \frac{\partial h}{\partial w}(\beta(z, s)).$$

Mit

$$h(w) = \frac{1}{|w|^2 \log^2 |w|^2}$$

ist

$$\frac{\partial h}{\partial w}(w) = \frac{-1}{w|w|^2 \log^2 |w|^2} - \frac{2}{w|w|^2 \log^3 |w|^2} = O\left(\frac{1}{|w|^3 \log^2 |w|^2}\right)$$

Nun ist aber die Funktion

$$\frac{1}{|w|^\alpha \log^2 |w|^2}$$

nicht lokal um den Punkt 0 integrierbar, falls $\alpha > 2$. Damit schließen wir weiter: Falls sich die erste Ableitung $\partial_s G^{WP}_{s\bar{s}}$ des metrischen Tensors mittels der Proposition 5.5 durch die Ableitung des Integranden berechnen lassen soll, muss Folgendes gelten:

1) In den $3(n-1)$ Punkten $p \in \beta_0^{-1}(\{0, 1, \infty\})$, in denen keine Verzweigung vorliegt, muss das Vektorfeld $(\partial\beta/\partial s)(z, s_0)$ eine Nullstelle in p aufweisen.

2) In den 3 Punkten $p \in \beta_0^{-1}(\{0, 1, \infty\})$, in denen eine einfache Verzweigung vorliegt, muss das Vektofeld $(\partial\beta/\partial s)(z, s_0)$ sogar eine doppelte Nullstelle in p besitzen.

Nun ist aber $\xi^w_s(z, s_0) = (\partial\beta/\partial s)(z, s_0) \in H^0(X, \beta_0^* T_{\mathbb{P}^1})$ mit $\deg(\beta_0^* T_{\mathbb{P}^1}) = 2n$. Falls ξ^w_s noch den Bedingungen 1) und 2) genügt, wäre es ein Element aus $H^0(X, \beta_0^* T_{\mathbb{P}^1}(-D))$ mit $\deg(D) = 3n$. Wegen $\deg(\beta_0^* T_{\mathbb{P}^1}(-D)) < 0$ gibt es aber keine solchen nicht trivialen Vektorfelder.

Literaturverzeichnis

[ABS15] R. Axelsson, I. Biswas, G. Schumacher: *Kähler Structure on Hurwitz spaces*, Manuscripta Math. **147**, 63-79 (2015).

[Ac94] R.D.M.. Accola: *Topics in the theory of Riemann surfaces*, Lecture Notes in Math., Vol. 1595, (1994).

[ACGH85] E. Arbarello, M. Cornalba, P.A. Griffiths, J. Harris: *Geometry of Algebraic Curves*, Vol. I, Grundlehren der math. Wiss., 267, Springer-verlag, New York (1985).

[ACG11] E. Arbarello, M. Cornalba, P.A. Griffiths: *Geometry of Algebraic Curves*, Vol.II, Grundlehren der math. Wiss., 268, Berlin: Springer (2011).

[Be09] B. Berndtsson: *Curvature of vector bundles associated to holomorphic fibrations*, Ann. Math. **169**, 531-560 (2009).

[BF02] P. Bailey, M. Fried: *Hurwitz monodromy, spin separation and higher levels of modular tower*, Proc. of Symp. in Pure Math., Vol 70, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 79-220 (2002).

[Ca08] A. Cadoret: *Lifting results for rational points on Hurwitz moduli spaces*, Israel Journal of Math. **164**, 19-59 (2008).

[Cl72] A. Clebsch: *Zur Theorie der Riemannschen Flächen*, Math. Ann. **6**, 216-230 (1872).

[De12] J.-P. Demailly: *Complex Analytic and Differential Geometry*, https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ demailly/manuscripts/agbook.pdf, Grenoble (2012).

[DF99] P. Dèbes, M. Fried: *Integral specialization of families of rational functions*, PJM **190**, 45-85 (1999).

[Fo77] O. Forster: *Riemannsche Flächen*, Berlin: Springer (1977).

[Fr12] S. Francaviglia: *Relations between the complex structure of Hurwitz spaces, the cut-and-paste topology, and the complex structure induced by a BPS* http://www.dm.unibo.it/ francavi/lavori/cstrbps.pdf (2012).

[Fri77] M. Fried: *Fields of definition of function fields and Hurwitz families - groups as Galois groups*, Comm. Alg. **5**, 17-82 (1977).

[Fu69] W. Fulton: *Hurwitz schemes and irreducibility of moduli of algebraic curves*, Ann. Math. **90**, 542-575 (1969).

[FV91] M. Fried, H. Völklein: *The inverse Galois problem and rational points on moduli spaces*, Math. Ann. **90**, 771-800 (1991).

[Ha77] R. Hartshorne: *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math., Vol. 52, New York: Springer (1977).

[Hat02] A. Hatcher: *Algebraic Topology*, Cambridge: Cambridge University Press (2002).

[HM98] J. Harris, I. Morrison: *Moduli of curves*, Graduate Texts in Math., Vol 187, New York: Springer (1998).

[HM82] J. Harris, D. Mumford: *On the Kodaira Dimension of the Moduli Space of Curves*, Invent. Math. **67**, 23-86 (1982).

[HGS02] J. Harris, T. Graber, J. Starr,: *A note on Hurwitz schemes of covers of a positive genus curve*, arxiv:math/0205056v1 (2002).

[Ho73] E. Horikawa: *On deformations of holomorphic maps I*, J. Math. Soc. Japan **25**, 372-396 (1973).

[Ho74] E. Horikawa: *On deformations of holomorphic maps II*, J. Math. Soc. Japan **26**, 647-667 (1974).

[Hu91] A. Hurwitz: *Über Riemannsche'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten*, Math. Ann. **39**, 1-61 (1891).

[Kl82] F. Klein: *Über Riemanns Theorie der Algebraischen Functionen*, Teubner (1882).

[Ko70] S. Kobayashi: *Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings*, Dekker (1970).

[La97] M. Laubrock: *Die Petersson-Weil-Metrik auf dem Teichmüller-Raum punktierter Riemannscher Flächen*, Dissertation, Bochum (1997).

[LSY04] K. Liu, X. Sun, S.-T. Yau: *Canonical metrics on the moduli space of Riemann surfaces I*, J. Differential Geom. **68**, No. 3, 571-637 (2004).

[LSY13] K. Liu, X. Sun, S.-X. Yang: *Vanishing theorems for ample vector bundles*, J. Algebraic Geom. **22**, 303-331 (2013).

[Ma05] M. Manetti: *Lectures on deformations of complex manifolds*, arXiv:math/0507286v1 (2005).

[Mat91] B. Matzat: *Zöpfe und Galoissche Gruppen*, J. Reine Angew. Math. **420**, 99-159 (1991).

[Mi95] R. Miranda: *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 5, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1995).

[MK71] J. Morrow, K. Kodaira: *Complex Manifolds*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York (1971).

[MM07] X. Ma, G. Marinescu: *Holomorphic Morse Inequalities and Bergman Kernels*, Birkhäuser, Basel -Boston - Berlin (2007).

[Mo95] S. Mochizuki: *The geometry of the compactification of the Hurwitz scheme*, Publ. RIMS **31, No. 3**, 355-441 (1995).

[Mu99] D. Mumford: *The red book of varieties and schemes: includes the Michigan lectures (1974) on curves and their Jacobians*, Lecture Notes in Math., Vol. 1358, Berlin: Springer (1999).

[Na79] M. Namba: *Families of Meromorphic Functions on Compact Riemann Surfaces*, Lecture Notes in Math., Vol. 767, Springer (1979).

[NR11] T. Napier, M. Ramachandran: *An Introduction to Riemann Surfaces*, Springer (2011).

[Pa13] A.P. Patel: *The geometry of the Hurwitz space*, Dissertation, Harvard (2013).

[Ri57] B. Riemann: *Theorie der Abel'schen Functionen*, Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd 54 (1857).

[RW06] M. Romagny, S. Wewers: *Hurwitz spaces*, Groupes de arithmétiques et différentiels. Séminaires et Congrès 13, Soc. Math. France, Paris, 313-341 (2006).

[Sch93] G. Schumacher: *The curvature of the Petersson-Weil metric on the moduli space of Kähler-Einstein manifolds*, Ancona, V. (ed.) et al., Complex analysis and geometry. New York: Plenum Press. The University Series in Math., 339-354 (1993).

[Sch12] G. Schumacher: *Positivity of relative canonical bundles and applications*, Invent. Math. **190**, 1-56 (2012).

[Se06] E. Sernesi: *Deformations of Algebraic Schemes*, Grundlehren der math. Wiss., Vol. 334, Berlin: Springer (2006).

[Sev21] F. Severi: *Vorlesungen über algebraische Geometrie*, Teubner-Verlag (1921).

[Vö96] H. Völklein: *Groups as Galois groups*, Cambridge Studies in Adv. Math., No. 53, Cambridge Univ. Press (1996).

[We98] S. Wewers: *Construction of Hurwitz spaces*, Dissertation, Essen (1998).

A. Englische Zusammenfassung

Hurwitz spaces are moduli spaces for branched coverings of compact Riemann surfaces, which first appeared in the works of Clebsch [Cl72] and Hurwitz [Hu91]. Further investigations using the language of modern algebraic geometry where made by Fulton [Fu69] as well as Harris and Mumford [HM82]. Its importance for arithmetic problems was first realized by M. Fried in [Fri77]. This thesis investigates the geometry of Hurwitz spaces using methods of complex differential geometry and shall be a contribution to the field of complex geometry.

It is very common to study compact Riemann surfaces by branched coverings of the Riemann sphere. The generic case is one of a *simple* branched covering with only two sheets meeting over each branch point. The number b of branch points for a simple covering of degree n with total space of genus g is given by the Riemann-Hurwitz formula

$$b = 2n + 2g - 2.$$

The classical *Hurwitz space* $\mathcal{H}^{n,b}$ is the set of (equivalence classes) of simple branched coverings $f : X \to \mathbb{P}^1$ of compact Riemann surfaces X of degree n with b branch points. The Riemann surface X is considered to be hyperbolic, that means of genus at least two. One such covering is given by the b - tuple of its branch points and a finite number of certain monodromy data. This gives a topological covering

$$\mathcal{H}^{n,b} \to \mathrm{Sym}^b\mathbb{P}^1 \setminus \Delta = \mathbb{P}^b \setminus \Delta.$$

For that reason, $\mathcal{H}^{n,b}$ can be equipped with a complex structure, so that the Hurwitz space becomes a quasi-projective complex manifold of dimension b. Mapping each simple covering $f : X \to \mathbb{P}^1$ to the isomorphism class of X, we obtain a map to the moduli space $\mathcal{M}_g$ of curves of genus g:

$$\mathcal{H}^{n,b} \to \mathcal{M}_g.$$

We want to describe the fibers of this projection. A covering $f : X \to \mathbb{P}^1$ is given by the polar divisor $D = (f)_\infty$ and the element of the linear sytem $H^0(X, D)$ which corresponds to the meromorphic function f. Clearly, D depends on n parameters. If $n > 2g - 2$, then $h^1(X, D) = 0$ and by Riemann-Roch we have

$$h^0(X, D) = n - g + 1,$$

so we get $n - g + 1$ additional parameters for the choice of $f \in H^0(X, D)$. Altogether, the family of coverings $f : X \to \mathbb{P}^1$ with fixed X has dimension

$$n + (n - g + 1) = 2n - g + 1.$$

Thus, we arrive at

$$\dim \mathcal{M}_g = b - (2n - g + 1) = (2n + 2g - 2) - (2n - g + 1) = 3g - 3.$$

This is the famous Riemann's count for the number of parameters which are needed to describe a compact Riemann surface of genus g [Ri57].

Hurwitz spaces first appeared in the works of Clebsch [Cl72] and Hurwitz [Hu91], where they were used as an auxiliary object to study the moduli space of curves. Using a combinatorial description of Clebsch, Hurwitz was able to show that the space $\mathcal{H}^{n,b}$ is connected. Furthermore, it was Hurwitz who has already realized that the space $\mathcal{H}^{n,b}$ carries the structure of a complex manifold. Later, Severi [Sev21] showed that if $n > g$, every curve of genus g may be represented as a n-shetted simple covering $f : X \to \mathbb{P}^1$. Hence, the map $\mathcal{H}^{n,b} \to \mathcal{M}_g$ is surjective for $n > g$. Using this fact together with the result of Hurwitz, Severi could come to the conclusion that the moduli space $\mathcal{M}_g$ is connected as well. In his fundamental work [Fu69], Fulton gave an algebraic construction of the Hurwitz space as a scheme of finite type over $\mathbb{Z}$, which represents some moduli functor. This allows him to show that some reductions of the Hurwitz scheme to certain prime numbers are irreducible. This on the other hand implies the irreducibility of $\mathcal{M}_g \otimes \mathbb{F}_p$ for $p < g+1$. Harris and Mumford constructed a compactification $\overline{\mathcal{H}^{n,b}}$ of $\mathcal{H}^{n,b}$ in [HM82]. Points on the boundary correspond to so called *admissable covers* of singular curves which are in general not simple any more. The map $\mathcal{H}^{n,b} \to \mathcal{M}_g$ extends to a map $\overline{\mathcal{H}^{n,b}} \to \overline{\mathcal{M}_g}$, where $\overline{\mathcal{M}_g}$ is the Deligne-Mumford compactification of the moduli space.

Apart from the moduli of curves, Hurwitz spaces play a prominent role in Galois theory. In the framework of the inverse Galois problem one studies Galois coverings $f : X \to \mathbb{P}^1$ with fixed Galois group G. It was first M. Fried who pointed out in [Fri77] that the geometry of the moduli space of branched Galois coverings has importent arithmetic consequences. Using these ideas, Matzat was able to give some concrete applications to the regular inverse Galois problem in [Mat91]. Eventually, Fried and Völklein construct in [FV91] a more general type of Hurwitz space, which describe the connection between geometry and arithmetic more precisely. The realization of a fixed group G as a Galois group of a regular extension of $\mathbb{Q}(t)$ is equivalent to the existence of rational points on a certain Hurwitz space (see also [Vö96] for a more precise statement). Generalisations of the results achieved by Fried and Völklein as well as constructions of generalized Hurwitz stacks could be found in [We98]. The work [Mo95], in which the author studies the Harris-Mumford compactification of the Hurwitz scheme, gives some overview over the zoo of all these various Hurwitz schems and stacks. A nice access to the arithmetic theory of Hurwitz spaces is given by the survey article of Romagny and Wewers [RW06].

The geometric study of the Hurwitz space using methods of differential geometry starts with the work of Axelsson, Biswas and Schumacher in [ABS15]. From the point of view of deformation theory, the authors define a hermitian metric on $\mathcal{H}^{n,b}$ which turns out to be Kähler. They call it a *generalized Weil-Petersson metric* in analogy to the Weil-Petersson metric on the Teichmüller space. This metric reflects the variation of the complex structure on the Riemann surface as well as the variation of the covering itself. Moreover, they consider *generalized Hurwitz spaces* $\mathcal{H}^{n,b}(Y)$ which parametrize simple branched coverings $f : X \to Y$ of degree n with b branch points of a general compact Riemann surface Y. These spaces exist as connected, smooth Deligne-Mumford stacks of finite type over $\mathbb{C}$ according to [HGS02]. The generalized Weil-Petersson metric can be

defined on any base of an effective family of simple branched coverings and the construction is functorial, so the metric decends on the corresponding moduli stack of $\mathcal{H}^{n,b}(Y)$ as an orbifold metric. In the classical case of $\mathcal{H}^{n,b}$, there exists a universal family $(\beta, f) : \mathcal{X} \to \mathbb{P}^1 \times \mathcal{H}^{n,b}$ of simple branched coverings and therefore realizes $\mathcal{H}^{n,b}$ as a fine moduli space. The article [ABS15] contains further results on the generalized Weil-Petersson form: The form turns out to be the curvature form of the hermitian metric on the Deligne pairing of the relative canonical bundle and the pullback of the (anti-)canonical line bundle on Y. Alternatively, its the curvature form of a Quillen metric on a determinant line bundle. Due to a result in [Sch12], the determinant line bundle extends to a compactification of the generalized Hurwitz space as a line bundle and the Quillen metric yields a singular hermitian metric on this extension. Then a power of the extended determinant line bundle provides an embedding of the Hurwitz space in a projective space.

Now we describe the content of the present thesis starting from [ABS15]. We will focus mainly on the classical Hurwitz space $\mathcal{H}^{n,b}$. The generalized Hurwitz spaces $\mathcal{H}^{n,b}(Y)$ are treated in form of effective families of simple coverings $(\beta, f) : \mathcal{X} \to Y \times S$. We would like to study the generalized Weil-Petersson metric from [ABS15] and are especially interested in its curvature. It would be nice to have an expression of the full curvature tensor which contains only instrinsic data given by the infinitesimal deformation of the complex structure and the covering itself. This means technically, to express all derivatives in the base direction in derivaties in the fiber direction. The quite compact expression for the curvature of the Weil-Petersson metric on the Teichmüller space is exemplary in this context (see for example [LSY04]). This allows to prove the facts that the holomorphic sectional curvature as well as the Ricci curvature are bounded from above by a negative constant ([Sch93]). This yields the hyperbolicity of the Teichmüller space.

The content of this thesis is organized as follows: After the introduction (chapter 1) we recall some basic facts about the theory of branched coverings between Riemann surfaces. The central statement is the *Riemann existence theorem* in this context. Making use of this result, we give an analytic construction of the classical Hurwitz space $\mathcal{H}^{n,b}$ as a complex quasi-projective manifold of dimension b together with an universal family $(\beta, f) : \mathcal{X} \to \mathbb{P}^1 \times \mathcal{H}^{n,b}$ of simple branched coverings of degree n and b branch points. This uses the fact, that there are no non-trivial automorphisms of a simple covering $X \to \mathbb{P}^1$, which fails in the general situation $X \to Y$. Directly from the construction, we state some basic properties of the space $\mathcal{H}^{n,b}$. The fact that the automorphism group of $\mathbb{P}^1$ is still operating on the Hurwitz space gives

Theorem A.1. *The Hurwitz space $\mathcal{H}^{n,b}$ is not hyperbolic.*

In order to eliminate the operation of PGL(2), we order the branch points and fix three of them on $0, 1, \infty$. We arrive at the *reduced Hurwitz space* $\mathcal{H}^{n,b}_{red}$. This space lies unbranched over the moduli space of b-pointed rational curves $\mathcal{M}_{0,b}$, which can be identified with the set $[\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}]^{b-3} \setminus \{\text{all diagonals}\}$ (see [Mu99], p. 243). This gives

Theorem A.2. *The reduced Hurwitz space $\mathcal{H}^{n,b}_{red}$ is hyperbolic.*

In chapter 3, we develop the deformation theory of holomorphic maps on the basis of Horikawa's articles [Ho73, Ho74]. For a holomorphic map $f : X \to Y$, the space of infinitesimal deformations of f with fixed target Y is given by $H^0(X, N_f)$, where N_f is the *normal sheaf*

of the map f. In case of a branched covering between Riemann surfaces, the normal sheaf N_f can be identified with the structure sheaf $\mathcal{O}_R$ of the ramification divisor R on X. However, the holomorphic sections of the discrete sheaf N_f are not well suited for defining an inner product on the space of infinitesimal deformations $H^0(X, N_f)$. Fortunately, this space has a Dolbeault-type description due to Horikawa

Proposition A.3 ([Ho74])**.** *For a non-degenerate holomorphic map $f : X \to Y$, there is an isomorphism*

$$H^0(X, N_f) \cong \frac{\{(\xi, \vartheta) \in A^{0,0}(X, f^*T_Y) \times A^{0,1}(T_X) \,:\, \bar\partial\xi = f_*\vartheta, \bar\partial\vartheta = 0\}}{\{(f_*\zeta, \bar\partial\zeta) : \zeta \in A^{0,0}(X, T_X)\}} =: D'_{X/Y}$$

At this point, we start to refine the theory of Horikawa. To give the statemants, we first introduce some notation. Let $(F, p) : \mathcal{X} \to Y \times S$ be a family of non-degenerate holomorphic maps to Y. For a point $s_0 \in S$ we set $X = X_{s_0}$ and $f = F|_X : X \to Y$. We write $\tau_{s_0} : T_{S,s_0} \to D'_{X/Y}$ for the characteristic map (Kodaira-Spencer map for deformations of maps) at the point $s_0 \in S$. Then we have

Proposition A.4. *Let $\partial/\partial s \in T_{S,s_0}$ be a tangent vector. Extend this vector to a local holomorphic vector field in a neighbourhood $V \subset S$ of $s_0 \in S$. Let $\chi \in \Gamma(p^{-1}(V), \mathcal{A}^{0,0}(T_{\mathcal{X}}))$ be a differentiable lift of this vector field. The class $\tau_{s_0}(\partial/\partial s)$ is then represented in $D'_{X/Y}$ by the pair $(F_*(\chi)|_X, \bar\partial(\chi)|_X)$.*

Next, we consider more specifically families of non-degenerate holomorphic maps $f_s : X_s \to Y$, where the fibers are compact Kähler manifolds. In this setting, there is a unique hamonic representative in each Dolbeault class $H^1(X_s, T_{X_s})$. Again, we fix a fiber $X = X_{s_0}$ and the corresponding map $f = f_{s_0}$. The sheaf monomorphism $f_* : T_X \to f^*T_Y$ induces a monomorphism $f_* : A^{0,1}(T_X) \to A^{0,1}(f^*T_Y)$ on the level of global $(0,1)$-forms. We write $\mathcal{H}^{0,1}(X, T_X)$ for the space of harmonic forms. Under the assumption $H^0(X, T_X) = 0$ we get

Proposition A.5.

$$D'_{X/Y} \cong \{\chi \in A^{0,0}(f^*T_Y) \,:\, \bar\partial\chi \in f_*(\mathcal{H}^{0,1}(X, T_X))\} =: H_{X/Y}$$

We call the elements of $H_{X/Y}$ (although not completely correct) *harmonic representatives.* This description has further consequences for the study of infinitesimal deformations of such mappings.

The subject of chapter 4 is the generalized Weil-Petersson metric. First, we remind the reader on the so called *horizontal lifts* introduced by Schumacher in [Sch93]. This simplifies the computation of the curvature for the Weil-Petersson metric on the Teichmüller space in a significant way. In analagy to this situation, the propositions A.4 and A.5 give rise to

Proposition A.6. *The pushforward of horizontal lifts of tangent vectors yield harmonic representatives of the characteristic map.*

This clarifies the meaning of the objects in [ABS15], which are used to define the Weil-Petersson metric. At this point, it would be quite natural to define the Weil-Petersson inner

product to be the inner product of the differentiable vector fields from proposition A.6. Unfortunately, this does not give a Kähler metric on the Hurwitz space. The Kähler property is not established until adding a second summand to this inner product similiar to the term in the Teichmüller case (see [ABS15]). This fact indicates the preferation of the description of the characeristic map in virtue of the pairs in $D'_{X/Y}$. We define the Weil-Petersson metric slighty more general than in [ABS15] for effective families of branched coverings $\beta_s : X_s \to Y$ between compact Riemann surfaces X_s and Y, where X_s is always hyperbolic. The simplicity of the coverings is not needed here. The Kähler property (symmetry) is proven by a direct calculation instead of making use of the fiber integral formula like in [ABS15].

In the rest of chapter 4, we concentrate on the computation of curvatures. Compared to the Weil-Petersson metric on the Teichmüller space, the expression for the generalized Weil-Petersson metric on the Hurwitz space is much more complicated. For a branched covering $X \to Y$, the hyperbolic metric on X and the pullback of a metric with constant Ricci curvature on Y are not intimately related. But both expressions are ingredients of the metric on the Hurwitz space. Moreover, a tangent vector on the Hurwitz space neither is represented by a holomorphic object nor by a genuine harmonic form. Both of these aspects seem to make it impossible to give a reasonable formula for the curvature of the Weil-Petersson metric on the entire Hurwitz space. Instead, we compute the curvature of the bundle $f_*\beta^*T_{\mathbb{P}^1}$ for the universal family $(\beta, f) : \mathcal{X} \to \mathbb{P}^1 \times \mathcal{H}^{n,b}$. Assuming that $b > 4g - 4$, this gives a subbundle of the tangent bundle on the Hurwitz space. The metric on $f_*\beta^*T_{\mathbb{P}^1}$ induced by the generalized Weil-Petersson metric is fiberwise given by the natural L^2 metric on $H^0(X_s, \beta_s^*T_{\mathbb{P}^1})$. The formula for the curvature reads as

Theorem A.7.

$$\begin{aligned} R^{WP}_{i\bar{j}k\bar{l}}(s) = \; & - \int_{X_s} D_k(u_i^w) D_{\bar{l}}(u_{\bar{j}}^{\overline{w}}) h_{w\overline{w}} \, gdA \\ & + \int_{X_s} u_i^w u_{\bar{j}}^{\overline{w}} (\xi_k^w + a_k^z \zeta_z^w)(\xi_{\bar{l}}^{\overline{w}} + a_{\bar{l}}^{\bar{z}} \zeta_{\bar{z}}^{\overline{w}}) h^2_{w\overline{w}} \, gdA \\ & + \int_{X_s} \Box \varphi_{k\bar{l}} u_i^w u_{\bar{j}}^{\overline{w}} h_{w\overline{w}} \, gdA \end{aligned}$$

The first summand of this expression can be splitted up into four terms such that the explicit derivatives in base direction completely disappear. You may look at chapter 4 for an explanation of the involved objects above and equivalent expressions for the curvature. In the situation $b > 4g - 4$, the canonical map $\mathcal{H}^{n,b} \to \mathcal{M}_g$ is a submersion onto the smooth open subset of the moduli space belonging to curves having trivial autotomorphism group. Writing $\mathcal{M}_g^0$ for this part and replacing $\mathcal{H}^{n,b}$ by the open subset $\mathcal{H}_0^{n,b}$ lying over $\mathcal{M}_g^0$, we have the relation

$$\mathcal{K}^{-1}_{\mathcal{H}_0^{n,b}/\mathcal{M}_g^0} \cong \det(f_*\beta^*T_{\mathbb{P}^1}).$$

(Here, we consider the restricted family $(\beta, f) : \mathcal{X}|_{f^{-1}(\mathcal{H}_0^{n,b})} \to \mathbb{P}^1 \times \mathcal{H}_0^{n,b}$.) For that reason, the formula for the curvature of $f_*\beta^*T_{\mathbb{P}^1}$ gives a formula for the curvature of the relative canonical bundle. We denote the fiber of an isomorphism class of a compact Riemann surface X without

non-trivial automorphisms under the projection $\mathcal{H}_0^{n,b} \to \mathcal{M}_g^0$ by $\mathcal{H}_X$. This is a complex submanifold of $\mathcal{H}^{n,b}$ of dimension $(2n-g+1)$ already met at the beginning of this introduction. The restriction of the bundle $f_*\beta^* T_{\mathbb{P}^1}$ to a subspace $\mathcal{H}_X$ gives the tangent bundle on this subspace:

$$f_*\beta^* T_{\mathbb{P}^1}|_{\mathcal{H}_X} = T_{\mathcal{H}_X}.$$

We obtain a formula for the curvature of these subspaces with the restricted Weil-Petersson metric:

Theorem A.8.

$$\begin{aligned} R_{i\bar{j}k\bar{l}}(s_0) = & \quad - \int G_{\bar{\partial}}\left(\psi_{ik}\right) \cdot \psi_{\bar{j}\bar{l}}\, gdA \\ & \quad + \int \left(\xi_i \cdot \xi_{\bar{j}}\right)\left(\xi_k \cdot \xi_{\bar{l}}\right) gdA \end{aligned}$$

The positive sign of the second integral is caused by the positively curved metric on $\mathbb{P}^1$. We know from the theorems A.1 and A.2 that there is a chance for negative curvature only for families with three fixed branch points at $0, 1$ and ∞. This allows to use a negatively curved metric on the complete hyperbolic space $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ instead of the positively curved metric on $\mathbb{P}^1$. The integrals defining the metric tensor become improper integrals and one has to take care for the integrability in every step of the computation. However, the integrability conditions, which would allow a curvature formula in the form of theorem A.8 with a negative sign in front of the second integral, lead to unsatisfiable restrictions for the involved objects. These and further aspects are discussed in chapter 5.

B. Danksagung

Zunächst möchte ich mich besonders bei meinem Betreuer Herrn Prof. Dr. Georg Schumacher bedanken, der mir in den letzten Jahren mit viel Geduld stets für Diskussionen zur Seite stand.

Ich bedanke mich bei Herrn Prof. Dr. Nicholas Buchdahl für den inspirierenden Aufenthalt an der University of Adelaide, der sich sehr positiv auf meine Arbeit ausgewirkt hat.

Herrn Prof. Dr. Reynir Axelsson danke ich herzlich für die Übernahme des Zweitgutachtens.

Weiter gilt mein Dank auch allen Teilnehmern des Seminars *Komplexe Geometrie* für die vielen interessanten Diskussionen und die besonders angenehme Arbeitsatmosphäre.

An dieser Stelle möchte ich mich auch bei meiner Familie bedanken, die mir während der gesamten Arbeitszeit immer eine Stütze war und stets an mich geglaubt hat.

Ich bedanke mich bei meiner Freundin Natalie für ihre verständnisvolle Art und ihre ermutigenden Worte. Mein Dank richtet sich auch an ihre Familie für die fortwährende Unterstützung beim Anfertigen dieser Arbeit.

C. Erklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Dissertation

Kählersche Geometrie auf Hurwitz-Räumen

selbständig und ohne fremde Hilfe verfasst habe. Alle verwendeten Quellen und Hilfsmittel habe ich explizit angegeben und wörtliche oder sinngemäße Zitate als solche gekennzeichnet.

Diese Dissertation wurde bislang weder in der vorliegenden noch in einer ähnlichen Form bei einer in- oder ausländischen Hochschule anlässlich eines Promotionsgesuchs oder zu anderen Prüfungszwecken eingereicht.

Ich erkläre, dass dies mein erster Versuch einer Promotion ist.

Marburg, den 15.03.2016

Die Seite 101 (Lebenslauf) enthält persönliche Daten. Sie ist deshalb nicht Bestandteil der Online-Veröffentlichung.