# Positivität relativer kanonischer Bündel und Krümmung höherer direkter Bildgarben auf Familien von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten

Philipps Universität Marburg

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

dem
Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
vorgelegt von

Diplom-Mathematiker
Matthias Braun
aus Frankenberg (Eder)

Marburg (Lahn), August 2015

Vom Fachbereich Mathematik und Informatik der Philipps-Universität Marburg (Hochschulkennziffer: 1180) als Dissertation angenommen am: 28.10.2015

Erstgutachter: Prof. Dr. G. Schumacher
Zweitgutachter: Prof. Dr. G. Heier

Tag der mündlichen Prüfung: 06.11.2015

# Inhaltsverzeichnis

# 1. Einleitung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit dem Studium von Familien kompakter Ricci-flacher Kähler-Mannigfaltigkeiten und soll einen Beitrag zum Gebiet der Komplexen Geometrie leisten.

Eine Kähler-Metrik $g$ auf einer komplexen Mannigfaltigkeit $X$ mit Kähler-Form $\omega$ und Ricci-Form $\mathrm{Ric}(X, g)$ heißt *Kähler-Einstein-Metrik*, falls ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert mit $\mathrm{Ric}(X, g) = \lambda \cdot \omega$. Eine komplexe Mannigfaltigkeit, auf der eine Kähler-Einstein-Metrik existiert, heißt *Kähler-Einstein-Mannigfaltigkeit*. Durch Skalierung der Metrik kann stets $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$ angenommen werden. Im Fall $\lambda = 0$ spricht man von Ricci-flachen Kähler-Mannigfaltigkeiten. Obige Trichotomie lässt sich durch die erste reelle Chern-Klasse $c_1(X)_\mathbb{R} \in H^{1,1}(X) \cap H^2(X, \mathbb{R})$ ausdrücken, denn es gilt $c_1(X)_\mathbb{R} = \frac{1}{2\pi}[\mathrm{Ric}(X, g)] = \frac{\lambda}{2\pi}[\omega]$. Da $[\omega]$ als Kähler-Klasse positiv ist, ergeben sich die drei Alternativen $-c_1(X)_\mathbb{R} > 0$, $c_1(X)_\mathbb{R} = 0$ und $c_1(X)_\mathbb{R} > 0$. Es ist eine grundlegende Frage (Calabi-Vermutung [Ca54, Ca57]), ob eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit $X$ in diesen Fällen umgekehrt eine Kähler-Einstein-Metrik besitzt. Diese Frage wird im Fall $-c_1(X)_\mathbb{R} > 0$ durch die Arbeiten von Aubin ([Au70, Au76, Au78]) und Yau ([Yau77, Yau78]) und im Fall $c_1(X)_\mathbb{R} = 0$ durch die Arbeiten von Yau ([Yau77, Yau78]) positiv beantwortet. Im ersten Fall ist eine Kähler-Einstein-Metrik bis auf einen positiven Faktor eindeutig bestimmt und im zweiten Fall wurde schon zuvor von Calabi ([Ca57]) gezeigt, dass innerhalb jeder Kohomologieklasse höchstens eine Kähler-Einstein-Metrik existiert. Im Fall $c_1(X)_\mathbb{R} > 0$ gibt es Beispiele, in denen eine Kähler-Einstein-Metrik nicht existiert und eine vollständige Charakterisierung der Situation ist Gegenstand der sogenannten Yau-Tian-Donaldson-Vermutung (vgl. [CDS15a, CDS15b, CDS15c]).

Es bezeichne $K_X$ das kanonische Bündel von $X$, dann ist $c_1(X)_\mathbb{R} = -c_1(K_X)_\mathbb{R}$. Damit sind die Bedingungen $-c_1(X)_\mathbb{R} > 0$ und $c_1(X)_\mathbb{R} > 0$ äquivalent dazu, dass $K_X$ bzw. $K_X^*$ ample sind. Außerdem liegt die Bedingung $c_1(X)_\mathbb{R} = 0$ genau dann vor, wenn $K_X$ ein Torsionselement der Picardgruppe $\mathrm{Pic}(X)$ ist. Bei kompakten Kähler-Mannigfaltigkeiten mit amplem kanonischen bzw. antikanonischen Bündel spricht man von *kanonisch polarisierten Varietäten* bzw. von *Fano-Varietäten*. Eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit mit $c_1(X)_\mathbb{R} = 0$ besitzt nach dem Struktursatz von Bogomolov-Kobayashi-Beauville ([Bo74a, Bo74b, Ko81, Be83]) eine endliche Überlagerung, welche isometrisch faktorisiert in ein Produkt von komplexen Tori und einfach-zusammenhängenden Ricci-flachen Kähler-Mannigfaltigkeiten mit trivialem kanonischen Bündel. Deshalb betrachtet man in dieser Situation einfach-zusammenhängende Mannigfaltigkeiten mit trivialem kanonischen Bündel. Es ist üblich, wie etwa innerhalb des Mori-Programms, anstatt der Trivialität der Fundamentalgruppe nur die Regularität von $X$ zu fordern. Diese schwächere Bedingung stellt sich auch in unserem Kontext als hinreichend heraus. Wir definieren daher eine *Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit* $X$ als eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit mit $K_X \cong \mathcal{O}_X$ und $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

Ein wesentlicher Schritt bei der Klassifikation einer Klasse komplexer Mannigfaltigkeiten ist die Konstruktion eines Modulraums innerhalb der Kategorie (reduzierter) komplexer Räume. Im Fall von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten zeigen Beispiele, dass es notwendig ist, Polarisierungen einzuführen, um einen Hausdorff'schen Modulraum zu erhalten. Eine *Polarisierung* auf einer Kähler-Mannigfaltigkeit ist eine Kähler-Klasse $\lambda_X \in H^{1,1}(X) \cap H^2(X, \mathbb{R})$ und eine *polarisierte Kähler-Mannigfaltigkeit* ist ein Paar $(X, \lambda_X)$, bestehend aus einer Kähler-Mannigfaltigkeit $X$ und einer Polarisierung $\lambda_X$. Die Existenz eines groben Modulraums polarisierter Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten wurde von Fujiki ([Fu84]) und Schumacher ([Sch84, Sch86]) gezeigt. Um die Konstruktion nachzuvollziehen, ist es zunächst notwendig den Begriff der Polarisierung auf holomorphe Familien von komplexen Mannigfaltigkeiten zu erweitern. Dabei ist eine *holomorphe Familie* (kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten) $\{\mathcal{X}_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ eine surjektive, eigentliche, glatte holomorphe Abbildung $f : \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ reduzierter komplexer Räume mit zusammenhängenden Fasern $\mathcal{X}_s = f^{-1}(s)$ für alle $s \in \mathcal{S}$. Eine *Familie polarisierter Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten* ist dann ein Paar $(f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}, \lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$, bestehend aus einer holomorphen Familie $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ und einem holomorphen Schnitt $\lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}} \in R^1 f_* \Omega_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(\mathcal{S})$, so dass $(\mathcal{X}_s, \lambda_{\mathcal{X}_s})$ mit $\lambda_{\mathcal{X}_s} := \lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}|_{\mathcal{X}_s}$ für alle $s \in \mathcal{S}$ eine polarisierte Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit ist. Der Schnitt $\lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ wird *Polarisierung* genannt. Die Begriffe der Deformationstheorie kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten übertragen sich auf Familien von polarisierten Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten. Durch eine Polarisierung wird eine *relative Kähler-Form*, das heißt eine faserweise Kähler'sche, lokal $\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}$-exakte, reelle $(1,1)$-Form auf $\mathcal{X}$, induziert. Man spricht hier auch von Kähler-Deformationen. Die Konstruktion des Modulraums erfolgt dann in vier Schritten. Im ersten Schritt zeigt man die Existenz verseller Kähler-Deformationen. Dies liefert eine Topologie auf der Menge der Isomorphieklassen polarisierter Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten. (Isomorphismen sind hierbei biholomorphe Abbildungen, welche mit den gegebenen Polarisierungen verträglich sind.) Im zweiten Schritt beweist man, dass verselle Deformationen universell sind. Dies impliziert, dass die obige Topologie Hausdorff'sch ist. Im dritten Schritt zeigt man, dass die Identifikation isomorpher Fasern als Quotientenbildung bezüglich der Automorphismengruppe der zentralen Faser durchgeführt werden kann. Dies liefert lokal eine komplexe Struktur, welche die gegebene Topologie induziert. Im vierten Schritt verklebt man die so erhaltenen „lokalen

Modulräume“ zu einem komplexen Raum und verifiziert für diesen die Eigenschaften eines groben Modulraums. Da der betrachtete Modulraum lokal durch Familien von Mannigfaltigkeiten beschrieben wird, ist das Studium solcher Familien grundlegend für das Verständnis seiner geometrischen Eigenschaften.

Eine wichtige Methode zum Studium der Modulräume von Kähler-Einstein-Mannigfaltigkeiten ist die Konstruktion einer Kähler-Metrik auf diesen Räumen. Die Idee hierzu stammt aus der klassischen Teichmüller-Theorie, wo man Krümmungseigenschaften der Weil-Petersson-Metrik auf dem Teichmüller-Raum der Riemann'schen Flächen vom Geschlecht $g \geqslant 2$ untersucht. Ein zentrales Resultat ist die Negativität der (Schnitt-)Krümmungen der Weil-Petersson-Metrik, welche von Wolpert ([Wo85]) und Tromba ([Tr86]) gezeigt wurde. Diese Arbeiten geben Anlass dazu, die verwendeten Methoden in einem differentialgeometrischen Kontext zu betrachten. Hierauf basierend wurde von Schumacher in [Sch85] eine verallgemeinerte Weil-Petersson-Metrik für Familien von (höherdimensionalen) Kähler-Einstein-Mannigfaltigkeiten erklärt (vgl. auch [FS90]). Eine erste Betrachtung der Krümmungseigenschaften dieser Metrik wurde im Fall von kanonisch polarisierten Varietäten von Siu ([Siu86]) und im Fall von Ricci-flachen Mannigfaltigkeiten von Nannicini ([Na86]) durchgeführt. Eine weiterführende Berechnung der Krümmung im Fall von kanonisch polarisierten Varietäten wurde in [Sch93] mittels einer Verfeinerung der Methode der *kanonischen Lifts* aus [Siu86] vorgenommen. Ein entsprechendes Resultat für Ricci-flache Mannigfaltigkeiten findet sich ebenfalls in [Sch93] (vgl. auch [To89, Wa03, LS04, LS06]).

Es gibt zahlreiche aktuelle Arbeiten über die Krümmungseigenschaften von relativen holomorphen Bündeln auf Familien kompakter Kähler-Mannigfaltigkeiten (vgl. etwa [MT08, Ber11, Pa12, Sch12]). In [Sch12] werden Familien von kanonisch polarisierten Varietäten betrachtet. Genauer wird dort gezeigt, dass in dieser Situation für effektive Familien das relative kanonische Bündel $\mathcal{K}_{\mathcal{X}/S}$ positiv ist. Außerdem wird dort eine Krümmungsformel für höhere direkte Bildgarben bewiesen. Hierbei handelt es sich um eine weitreichende Verallgemeinerung der Krümmungsformel in [Sch93]. Diese Ergebnisse finden Anwendung bei der Untersuchung des Modulraums kanonisch polarisierter Varietäten. Etwa wird in [Sch12] ein komplex-differentialgeometrischer Beweis der Quasi-Projektiviät des Modulraums kanonisch polarisierter Varietäten gegeben sowie eine Finsler-Metrik mit negativer Krümmung auf diesem Modulraum konstruiert. Schließlich wird darauf basierend in [Sch14] die Kobayashi-Hyperbolizität des Modulraums kanonisch polarisierter Varietäten gezeigt, woraus sich insbesondere ein Beweis der Hyperbolizitätsvermutung von Schafarewitsch ergibt (vgl. [Kov03, VZ03]).

Wir untersuchen geometrische Eigenschaften des Modulraums polarisierter Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten mit Methoden der komplex-analytischen Differentialgeometrie. Genauer betrachten wir die im vorigen Absatz angesprochenen Fragestellungen in der Situation von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten.

Für eine gegebene Familie $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten mit Polarisierung $\lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ ist jedes Paar $(\mathcal{X}_s, \lambda_{\mathcal{X}_s})$ über $s \in \mathcal{S}$ eine polarisierte Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit. Bezeichne $\omega_s$ die eindeutige Ricci-flache Kähler-Metrik auf $\mathcal{X}_s$ mit Dolbeault-Kohomologieklasse $\lambda_{\mathcal{X}_s}$, welche gegeben ist durch den Beweis der Calabi-Vermutung. Diese Metriken hängen glatt vom Parameter $s \in \mathcal{S}$ ab, das heißt, es gibt eine relative $(1,1)$-Form $\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ auf $\mathcal{X}$ mit $\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}|_{\mathcal{X}_s} = \omega_s$ für alle $s \in \mathcal{S}$. Diese relative Form induziert eine Hermite'sche Metrik $h$ auf dem relativen kanonischen Bündel $\mathcal{K}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$. Das erste Resultat behandelt die Krümmung dieser Metrik.

**Satz 1.** *Sei $(f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}, \lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ eine Familie polarisierter Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten über einer komplexen Mannigfaltigkeit $\mathcal{S}$. Bezeichne $h$ die Hermite'sche Metrik auf dem relativen kanonischen Bündel $\mathcal{K}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$, welche durch die Ricci-flachen Kähler-Metriken auf den Fasern (bezüglich der Polarisierung $\lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$) induziert wird. Dann ist das relative kanonische Bündel $\mathcal{K}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ mit der Metrik $h$ semi-positiv und positiv in horizontalen Richtungen, in denen die Familie nicht infinitesimal-trivial ist.*

Als direkte Anwendung von Satz 1 ergibt sich mit [MT08] die folgende Aussage über die Positivität höherer direkter Bildgarben.

**Korollar 2.** *Sei $(f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}, \lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ eine Familie polarisierter Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten über einer komplexen Mannigfaltigkeit $\mathcal{S}$. Dann sind die höheren direkten Bildgarben $R^q f_* \mathcal{K}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}^{\otimes m}$ lokal-frei und semi-positiv im Sinne von Nakano für alle natürlichen Zahlen $m \geqslant 2$ und $q \geqslant 0$.*

Nach [Sch12, Main Theorem] wird für effektiv parametrisierte Familien kanonisch polarisierter Varietäten durch die Krümmungsform des relativen kanonischen Bündels eine Kähler-Metrik auf dem Totalraum gegeben, welche die Kähler-Einstein-Metriken auf den Fasern induziert. Für Familien von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten lässt sich auf diese Weise keine entsprechende Kähler-Form auf dem Totalraum konstruieren. Es ist eine natürliche Fragestellung, ob die Ricci-flachen Metriken auf den Fasern dennoch von einer Kähler-Metrik induziert werden. Der folgende Satz beantwortet diese Frage in Form eines hinreichenden Kriteriums für die Existenz einer solchen Kähler-Metrik. Dabei heißt eine Familie von polarisierten Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten *effektiv parametrisiert*, falls die Kodaira-Spencer-Abbildung der unterliegenden holomorphen Familie injektiv ist (vgl. Abschnitt 2.1). Eine geschlossene, reelle $(1,1)$-Form auf dem Totalraum, welche die Ricci-flachen Kähler-Metriken auf den Fasern induziert, nennen wir entsprechend [SW13] *semi-Ricci-flach*. (In [ST07] und [Tos10] wird eine solche Form als *semi-flach* bezeichnet.) Eine explizite Abschätzung der Green'schen Funktion des Laplace-Operators auf den Fasern setzt die Existenz einer semi-Ricci-flachen Kähler-Form in Beziehung zur Beschränktheit des Durchmessers der Fasern.

**Satz 3.** *Sei* $(f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}, \lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ *eine effektiv parametrisierte Familie* $n$*-dimensionaler polarisierter Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten über einer komplexen Mannigfaltigkeit* $\mathcal{S}$*. Für* $s \in \mathcal{S}$ *bezeichne* $\omega_s$ *die Ricci-flache Kähler-Metrik auf der Faser* $\mathcal{X}_s$ *mit Dolbeault-Kohomologieklasse* $\lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}|_{\mathcal{X}_s}$*. Es gebe eine Konstante* $C = C(n) > 0$ *derart, dass* $\operatorname{diam}(\mathcal{X}_s, \omega_s) \leqslant C$ *für alle* $s \in \mathcal{S}$*, wobei* $\operatorname{diam}(\mathcal{X}_s, \omega_s)$ *den Durchmesser von* $\mathcal{X}_s$ *bezüglich der Metrik* $\omega_s$ *bezeichnet. Dann existiert eine Kähler-Form* $\omega_{SRF}$ *auf* $\mathcal{X}$ *mit* $\omega_{SRF}|_{\mathcal{X}_s} = \omega_s$ *für alle* $s \in \mathcal{S}$*. Außerdem kann* $\omega_{SRF}$ *so gewählt werden, dass es eine Konstante* $C' = C'(n) > 0$ *derart gibt, dass die Faserintegralformel*

$$\int\limits_{\mathcal{X}/\mathcal{S}} \omega_{SRF}^{n+1} = C' \cdot \omega_{WP} \tag{1.1}$$

*erfüllt ist, wobei* $\omega_{WP}$ *die Weil-Petersson-Metrik auf* $\mathcal{S}$ *bezeichnet (vgl. Abschnitt 2.4).*

Satz 3 liefert eine semi-Ricci-flache Kähler-Form auf einer Familie über einem kompakten Parameterraum. Im Fall von nicht-kompakten Parameterräumen beschränken wir uns auf Familien über Kurven. Genauer betrachten wir eine *projektive Degeneration* $f\colon \mathcal{X} \to \Delta$ von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten, das heißt eine surjektive holomorphe Abbildung $f$ von einer quasi-projektiven Varietät $\mathcal{X}$ auf die Einheitskreisscheibe $\Delta \subset \mathbb{C}$, welche sich über $\Delta^* := \Delta \setminus \{0\}$ zu einer Familie von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten einschränkt. Eine solche Degeneration ist *log-kanonisch*, falls $\mathcal{X}$ normal und das Paar $(\mathcal{X}, \mathcal{X}_0)$ log-kanonisch ist, wobei $\mathcal{X}_0 := f^*(0)$ die zentrale Faser bezeichnet (vgl. [KM98]). Mittels aktueller Resultate aus [Ta14, Tos15, RZ11] folgt unmittelbar das nächste Korollar.

**Korollar 4.** *Sei* $f\colon \mathcal{X} \to \Delta$ *eine log-kanonische projektive Degeneration von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten mit* $\mathcal{K}_{\mathcal{X}/\Delta} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$*. Es gelte eine der folgenden Aussagen.*

(a) *Der Punkt* $0$ *liegt in endlicher Weil-Petersson-Distanz von* $\Delta^*$*.*

(b) *Die zentrale Faser* $\mathcal{X}_0$ *hat höchstens kanonische Singularitäten und* $K_{\mathcal{X}_0} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0}$*.*

*Dann existiert eine semi-positive semi-Ricci-flache Form auf* $\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_0$*.*

Das obige Korollar lässt sich beispielsweise auf Kulikov-Modelle vom Typ I semi-stabiler projektiver Degenerationen von K3-Flächen anwenden. Allgemeiner treten die oben betrachteten Degenerationen nach [Fuj11] als minimale Modelle semi-stabiler projektiver Degenerationen von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten auf. Korollar 4 liefert ein Kriterium für die Existenz einer natürlichen (Pseudo-)Metrik auf diesen minimalen Modellen. Außerdem steht dieses Korollar in Bezug zur Weil-Petersson-Vervollständigung des Modulraums polarisierter Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten nach [Zh15].

Schließlich untersuchen wir die höheren direkten Bildgarben $R^{n-p}f_*\Omega^p_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(\mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$, wobei $n$ die Faserdimension ist und $p, m$ ganze Zahlen mit $0 \leqslant p \leqslant n$ sowie $m \geqslant 0$ sind. Diese Garben sind lokal-frei vom Rang $r(n,p) = \dim H^{p,n-p}(\mathcal{X}_s)$ für eine beliebige Faser $\mathcal{X}_s$ und besitzen natürliche Metriken, welche durch die $L^2$-Produkte faserweise harmonischer Repräsentanten erklärt sind. (Der Bündelanteil $\mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ sorgt hierbei dafür, dass wir abhängig von $m$ verschiedene Metriken auf $R^{n-p}f_*\Omega^p_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(\mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ betrachten.)

Das nächste Resultat ist in lokalen Koordinaten formuliert und verwendet harmonische Repräsentanten $\{A_i \,|\, 1 \leqslant i \leqslant \dim \mathcal{S}\}$ der Kodaira-Spencer-Klassen von Koordinatenvekorfeldern $\{\partial_i \,|\, 1 \leqslant i \leqslant \dim \mathcal{S}\}$ (vgl. Abschnitt 2.4). Diese Repräsentanten induzieren Abbildungen

$$\begin{aligned} A_i \cup \_ &: \mathcal{A}^{0,n-p}\left(\mathcal{X}_s, \Omega^p_{\mathcal{X}_s}\left(\mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}_s}\right)\right) \to \mathcal{A}^{0,n-p+1}\left(\mathcal{X}_s, \Omega^{p-1}_{\mathcal{X}_s}\left(\mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}_s}\right)\right) \text{ und} \\ A_{\bar{\jmath}} \cup \_ &: \mathcal{A}^{0,n-p}\left(\mathcal{X}_s, \Omega^p_{\mathcal{X}_s}\left(\mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}_s}\right)\right) \to \mathcal{A}^{0,n-p-1}\left(\mathcal{X}_s, \Omega^{p+1}_{\mathcal{X}_s}\left(\mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}_s}\right)\right), \end{aligned}$$

welche gegeben sind durch Cup-Produkt und Kontraktion von (bündelwertigen) Differentialformen (vgl. Kapitel 5). Außerdem wählen wir harmonische Repräsentanten $\left\{\psi^k \,\middle|\, 1 \leqslant k \leqslant r(n,p)\right\}$ einer lokalen Basis von $R^{n-p}f_*\Omega^p_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(\mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ (vgl. Lemma 2.4.5). Des Weiteren bezeichne H die harmonische Projektion von Tensoren auf den Fasern und $\mathrm{d}V_\omega$ die relative Volumenform zu $\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$. Der folgende Satz drückt die Krümmung der $L^2$-Metrik auf $R^{n-p}f_*\Omega^p_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(\mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ in den oben beschriebenen „linearen Daten" aus.

**Satz 5.** *Sei $(f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}, \lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ eine Familie n-dimensionaler polarisierter Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten über einer komplexen Mannigfaltigkeit $\mathcal{S}$. Dann gilt mit den obigen Bezeichnungen für den Krümmungstensor der $L^2$-Metrik auf $R^{n-p}f_*\Omega^p_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(\mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ im Punkt $s \in \mathcal{S}$ in geeigneten Koordinaten*

$$\begin{aligned} R_{i\bar{\jmath}}{}^{\bar{\ell}k}(s) = m &\int_{\mathcal{X}_s} \mathrm{H}(A_i \cdot A_{\bar{\jmath}}) \cdot \mathrm{H}(\psi^k \cdot \psi^{\bar{\ell}}) \,\mathrm{d}V_\omega \\ &+ \int_{\mathcal{X}_s} \mathrm{H}(A_i \cup \psi^k) \cdot \mathrm{H}(A_{\bar{\jmath}} \cup \psi^{\bar{\ell}}) \,\mathrm{d}V_\omega \\ &- \int_{\mathcal{X}_s} \mathrm{H}(A_i \cup \psi^{\bar{\ell}}) \cdot \mathrm{H}(A_{\bar{\jmath}} \cup \psi^k) \,\mathrm{d}V_\omega \,. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Satz 5 überträgt die Krümmungsformel aus [Sch12] auf Familien von polarisierten Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten. Die obige Krümmungsformel stimmt nach [Gri70] für $m = 0$ mit der Krümmung der Hodge-Metrik auf dem Bündel $R^{n-p}f_*\Omega^p_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ überein. Lediglich der dritte Summand ergibt einen negativen Beitrag. Da dieser Term für $p = n$ nicht auftritt, erhalten wir die folgende Ergänzung zu Korollar 2. (Hierbei ist zu beachten, dass die Hermite'schen Metriken auf den direkten Bildgarben in Korollar 2 und Korollar 6 verschieden sind.)

**Korollar 6.** *Sei $(f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}, \lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ eine effektiv parametrisierte Familie polarisierter Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten über einer komplexen Mannigfaltigkeit $\mathcal{S}$. Dann sind die direkten Bildgarben $f_*\mathcal{K}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}^{\otimes m}$ für alle ganzen Zahlen $m \geqslant 2$ positiv.*

Mittels relativer Serre-Dualität (vgl. (2.2)) liefert Satz 5 die Krümmung der (dualen) $L^2$-Metrik auf dem Bündel $R^p f_*\Lambda^p\mathcal{T}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$. Dazu bezeichne $\{\nu_k \mid 1 \leqslant k \leqslant r(n,p)\}$ faserweise harmonische Repräsentanten einer lokalen Basis von $R^p f_*\Lambda^p\mathcal{T}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$. Für weitere Details sei auf Kapitel 5 verwiesen.

**Satz 7.** *Sei $(f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}, \lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ eine Familie polarisierter Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten über einer komplexen Mannigfaltigkeit $\mathcal{S}$. Dann gilt mit den obigen Bezeichnungen für den Krümmungstensor der $L^2$-Metrik auf $R^p f_*\Lambda^p\mathcal{T}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ im Punkt $s \in \mathcal{S}$ in geeigneten Koordinaten*

$$\begin{aligned} R_{i\bar{\jmath}k\bar{\ell}}(s) = &- \int_{\mathcal{X}_s} \mathrm{H}(A_i \cdot A_{\bar{\jmath}}) \cdot \mathrm{H}(\nu_k \cdot \nu_{\bar{\ell}})\, \mathrm{d}V_\omega \\ &- \int_{\mathcal{X}_s} \mathrm{H}(A_i \wedge \nu_{\bar{\ell}}) \cdot \mathrm{H}(A_{\bar{\jmath}} \wedge \nu_k)\, \mathrm{d}V_\omega \\ &+ \int_{\mathcal{X}_s} \mathrm{H}(A_i \wedge \nu_k) \cdot \mathrm{H}(A_{\bar{\jmath}} \wedge \nu_{\bar{\ell}})\, \mathrm{d}V_\omega\,. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Im Fall $p = 1$ reproduziert Gleichung (1.3) für effektiv parametrisierte Familien die bekannte Krümmungsformel der Weil-Petersson-Metrik auf dem Modulraum polarisierter Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten. (vgl. [Na86], [Sch93], [Wa03]). Außerdem ergibt sich mittels obiger Krümmungsformel ein alternativer Beweis der Kobayashi-Hyperbolizität des Modulraums polarisierter Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten, welcher ohne die hierbei sonst übliche Verwendung von Torelli-Sätzen auskommt. Genauer ist jeder komplexe Unterraum des Modulstacks polarisierter Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten Kobayashi-hyperbolisch.

*Bemerkung* 8. Alle obigen Resultate gelten entsprechend für Familien polarisierter Kähler-Mannigfaltigkeiten mit trivialer erster reeller Chern-Klasse und verschwindender erster Betti-Zahl. Dabei benötigt man für Satz 5, Korollar 6 und Satz 7 die zusätzliche Voraussetzung, dass die betrachteten Bildgarben lokal-frei sind. Die Beweise gelten analog in dieser allgemeineren Situation.

Diese Arbeit gliedert sich in sechs Kapitel. Nach der Einleitung (Kapitel 1) folgen die benötigten Grundlagen (Kapitel 2). Zunächst werden die verwendeten Notationen eingeführt (Abschnitt 2.1) und elementare Eigenschaften von Faserintegralen besprochen (Abschnitt 2.2). Des Weiteren werden polarisierte Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten definiert (Abschnitt 2.3) und Familien von diesen betrachtet (Abschnitt 2.4). Anschließend wird die Positivität des relativen kanonischen Bündels analysiert (Kapitel 3).

Dafür werden zunächst horizontale Lifts von Vektorfeldern im Kontext von Familien von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten eingeführt (Abschnitt 3.1). Es folgt der Beweis von Satz 1 und Korollar 2 mittels horizontaler Lifts (Abschnitt 3.2). Nachfolgend wird die Existenz semi-Ricci-flacher Metriken untersucht (Kapitel 4). Dazu erfolgt zunächst eine Auflistung benötigter Eigenschaften von Green'schen Funktionen auf kompakten Kähler-Mannigfaltigkeiten (Abschnitt 4.1). Hierauf basierend wird Satz 3 mit Hilfe einer Hodge-Zerlegung aus Kapitel 3 bewiesen. Außerdem ergibt sich Korollar 4 als direkte Folgerung (Abschnitt 4.2). Als Nächstes wird die Krümmung höherer direkter Bildgarben betrachtet (Kapitel 5). Dabei werden vorab weitere Notationen eingeführt und Anwendungen der Krümmungsformel, wie der Beweis von Korollar 6 und Satz 7, behandelt (Abschnitt 5.1). Schließlich erfolgt der Beweis von Satz 5, wofür zuerst die entsprechenden Vorbereitungen geleistet und Resultate der Kapitel 2 und 3 verwendet werden (Abschnitt 5.2). Abschließend werden einige weiterführende Fragestellungen diskutiert (Kapitel 6).

# 2. Grundlagen

Wir verwenden Grundlagen aus der Theorie der komplexen Räume wie sie in [Gr94, Chapter I, II, III] zu finden sind. Für Details über Differentialformen auf komplexen Räumen siehe [FS90]. Für eine umfassende Einführung zur Kähler'schen Geometrie und zur Hodge-Theorie sei auf [Hu05] sowie [We08] verwiesen. Zunächst führen wir Notationen ein und erläutern anschließend den Begriff des Faserintegrals. Danach gehen wir auf polarisierte Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten sowie Familien von diesen ein.

## 2.1. Notationen

Wir führen, zumeist wohlbekannte, Notationen ein, die wir im Folgenden verwenden.

*Komplexe Mannigfaltigkeiten* seien per Definition nicht-leer und zusammanhängend. Sei $X$ eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension $n$. Bezeichne $T_X^{\mathbb{C}}$ das komplexifizierte Tangentialbündel der unterliegenden glatten Mannigfaltigkeit. Die komplexe Struktur auf $X$ induziert eine Zerlegung $T_X^{\mathbb{C}} = T_X^{1,0} \oplus T_X^{0,1}$ in komplexe Vektorbündel $T_X^{1,0}$ und $T_X^{0,1}$ mit $T_X^{0,1} \cong \overline{T_X^{0,1}}$. Außerdem identifiziert sich $T_X^{1,0}$ in natürlicher Weise mit dem unterliegenden komplexen Vektorbündel des *holomorphen Tangentialbündels* $\mathcal{T}_X$ auf $X$. Des Weiteren ist $\Omega_X = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{T}_X, \mathcal{O}_X)$ das *holomorphe Kotangentialbündel* und $\Omega_X^p = \Lambda^p \Omega_X$ das *Bündel der holomorphen p-Formen* auf $X$. Es bezeichne $\mathcal{A}_X^{p,q} = \Lambda^p T_X^{1,0} \otimes \Lambda^q T_X^{0,1}$ das *Bündel der $\mathcal{C}^\infty$-$(p,q)$-Formen* und $\mathcal{E}_X^k = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{A}_X^{p,q}$ das *Bündel der $\mathcal{C}^\infty$-$k$-Formen* auf $X$. Hierbei ist $\mathcal{A}_X^{0,0} = \mathcal{E}_X^0$ das Bündel der $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen auf $X$ mit Werten in $\mathbb{C}$. (Das Prädikat $\mathcal{C}^\infty$ werden wir von nun an nur dann explizit anführen, wenn wir besonders auf diese Eigenschaft aufmerksam machen wollen.) Wir haben die üblichen Differentialoperatoren

$$\mathrm{d}\colon \mathcal{E}_X^k \to \mathcal{E}_X^{k+1}, \quad \partial\colon \mathcal{A}_X^{p,q} \to \mathcal{A}_X^{p+1,q}, \quad \overline{\partial}\colon \mathcal{A}_X^{p,q} \to \mathcal{A}_X^{p,q+1}$$

mit $\mathrm{d} = \partial + \overline{\partial}$. Ist $E$ ein holomorphes Vektorbündel auf $X$, dann sei $\mathcal{A}_X^{p,q}(E) = \mathcal{A}_X^{p,q} \otimes E$ das *Bündel der $(p,q)$-Formen mit Werten in $E$* und es gibt einen entsprechenden Operator $\overline{\partial}_E\colon \mathcal{A}_X^{p,q}(E) \to \mathcal{A}_X^{p,q+1}(E)$. Ist zusätzlich eine *Hermite'sche Metrik* $h$ auf $E$ gegeben, dann notieren wir den *Chern-Zusammenhang* als $\nabla_h\colon \mathcal{E}_X^0(E) \to \mathcal{E}_X^1(E)$. Die Projektion von $\nabla_h$ auf $\mathcal{A}_X^{1,0}(E)$ bezeichnen wir mit $\partial_h$, das heißt, es ist $\nabla_h = \partial_h + \overline{\partial}_E$. Die *Krümmung* von $h$ ist definiert als $F_h = \nabla_h \circ \nabla_h$. Diese lässt sich mit der

*Krümmungsform* $\Theta(E,h) \in \mathcal{E}^2_X(E^* \otimes E)$ ausdrücken als $F_h\nu = \Theta(E,h) \wedge \nu$ für alle lokalen $\mathcal{C}^\infty$-Schnitte $\nu$ von $E$. Hierbei bezeichnet $E^*$ das *duale Bündel* zu $E$ und $\wedge$ ist im Bündelanteil als Evaluation zu verstehen.

Ist $(X,\omega)$ eine Kähler-Mannigfaltigkeit, dann bezeichne $\mathrm{d}V_\omega$ deren *Volumenform.* Ist zusätzlich ein Hermite'sches Vektorbündel $(E,h)$ auf $X$ gegeben, dann tragen die Bündel $\mathcal{A}^{p,q}_X(E)$ eine induzierte Hermite'sche Metrik, die wir mit $(\ ,\ )$ oder auch durch einen Punkt notieren. Falls $X$ kompakt ist, dann wird durch

$$\langle\varphi,\psi\rangle := \langle\varphi,\psi\rangle_{L^2} := \int_X (\varphi,\psi)\,\mathrm{d}V_\omega$$

ein Skalarprodukt auf $\mathcal{A}^{p,q}(X,E) := \mathcal{A}^{p,q}_X(E)(X)$ definiert, welches wir als *$L^2$-Metrik* bezeichnen. In diesem Fall existieren *formal-adjungierte Operatoren* $\overline{\partial}^*_E$ und $\partial^*_h$ zu $\overline{\partial}_E$ bzw. $\partial_h$. Falls das Hermite'sche holomorphe Vektorbündel $(E,h)$ aus dem Kontext hervorgeht, dann unterdrücken wir die explizite Abhängigkeit der obigen Operatoren sowie Bündel von Differentialformen von $E$ und $h$ in unserer Notation. Gleiches gilt bezüglich der betrachteten Mannigfaltigkeit $X$.

Eine *Kähler-Form* $\omega$ auf $X$ schreiben wir in lokalen Koordinaten $(z^1,\ldots,z^n)$ als

$$\sqrt{-1}\sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\overline{\beta}}\,\mathrm{d}z^\alpha \wedge \mathrm{d}z^{\overline{\beta}}\,.$$

Die Inverse der Koeffizientenmatrix $(g_{\alpha\overline{\beta}})$ notieren wir mit $(g^{\overline{\beta}\alpha})$. Das Indexziehen von Tensoren auf $X$ ist bezüglich der gegeben Kähler-Metrik zu verstehen. Kovariante Ableitungen in Koordinatenrichtungen kennzeichnen wir mit einem Semikolon, beispielsweise notieren wir $\nabla_\gamma g_{\alpha\overline{\beta}}$ als $g_{\alpha\overline{\beta};\gamma}$. Außerdem verwenden wir die Einstein'sche Summenkonvention, das heißt, in Gleichungen von Tensoren wird über gleiche Indizes implizit summiert, wenn einer von diesen ko- und der andere kontravariant ist. Ist zusätzlich ein Hermite'sches holomorphes Vektorbündel $(E,h)$ auf $X$ gegeben, dann notieren wir die Koeffizientenmatrix von $h$ bezüglich einer lokalen Basis von $E$ als $(h_{k\overline{\ell}})$ und deren Inverse als $(h^{\overline{\ell}k})$. Mit diesen Konventionen ergeben sich die Koeffizienten der Krümmungsform $\Theta(E,h)$ in lokalen Koordinaten durch

$$R_{\alpha\overline{\beta}k\overline{\ell}} = -\frac{\partial^2 h_{k\overline{\ell}}}{\partial z^\alpha \partial z^{\overline{\beta}}} + h^{\overline{q}p}\frac{\partial h_{k\overline{q}}}{\partial z^\alpha}\frac{\partial h_{p\overline{\ell}}}{\partial z^{\overline{\beta}}}\,,$$

wobei $R_{\alpha\overline{\beta}k\overline{\ell}}$ als *Krümmungstensor* bezeichnet wird. Da die Metrik $g$ Kähler'sch ist, identifiziert sich der Chern-Zusammenhang auf $X$ mit dem Levi-Civita-Zusammenhang der durch $\omega$ gegebenen Riemann'schen Metrik und wir erhalten als Spezialfall den *(kovarianten) Riemann'schen Krümmungstensor* $R_{\alpha\overline{\beta}\gamma\overline{\delta}}$. Für weitere Details zur Kähler'schen Geometrie mittels lokaler Koordinaten sei auf [MK06] verwiesen.

Für eine glatte holomorphe Abbildung $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ zwischen komplexen Mannigfaltigkeiten sind die *relativen Bündel* $\mathcal{T}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$, $\Omega^p_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$, $\mathcal{A}^{p,q}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ und $\mathcal{E}^k_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ analog zum absoluten Fall erklärt. Gleiches gilt für die *relativen Differentialoperatoren* $\mathrm{d}_{/\mathcal{S}}$, $\partial_{/\mathcal{S}}$ und $\overline{\partial}_{/\mathcal{S}}$. Dies ist auch für singuläres $\mathcal{S}$ möglich (vgl. [FS90, §1]). Ist $f$ zudem eigentlich, so existieren faserweise *formal-adjungierte Operatoren.* Wir verwenden alle bisherigen Notationen sinngemäß auch im relativen Kontext.

Eine *holomorphe Familie (kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten)* ist eine surjektive, eigentliche, glatte holomorphe Abbildung $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ reduzierter komplexer Räume mit zusammenhängenden *Fasern* $\mathcal{X}_s := f^{-1}(s) = \mathcal{X} \times_{\mathcal{S}} \{s\}$ für alle $s \in \mathcal{S}$. Die Räume $\mathcal{X}$ und $\mathcal{S}$ werden *Totalraum* bzw. *Parameterraum* (oder *Basis*) der Familie genannt. Da $f$ eine Submersion ist, existieren zu jedem Punkt von $\mathcal{X}$ eine offene Umgebung $V$ sowie offene Mengen $U \subset \mathcal{S}$ und $W \subset \mathbb{C}^n$ zusammen mit einer biholomorphen Abbildung $W \times U \xrightarrow{\sim} V$ derart, dass $f(V) \subset U$ ist und das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "f"'] & W \times U \arrow[l, "\sim"'] \arrow[dl, "\mathrm{pr}_2"] \\ U & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Ist $\mathcal{S}$ nicht-singulär, dann wählen wir nach eventueller Verkleinerung von $U$ und $V$ holomorphe Koordinaten $s = (s^1, \dots, s^{\dim \mathcal{S}})$ auf $U$ sowie holomorphe Koordinaten $z = (z^1, \dots, z^n)$ auf $W$, wobei wir die Koordinaten auf $W$ als lokale Koordinaten auf einer Faser $\mathcal{X}_s$ über $s \in U$ auffassen. Für singuläres $\mathcal{S}$ lässt sich die Situation auf den obigen Fall zurückführen, indem man $\mathcal{S}$ in einen minimalen, nicht-singulären umgebenden Raum einbettet. Die somit erhaltenen lokalen Koordinaten auf $\mathcal{X}$ schreiben wir als $(z, s)$. Wir verwenden die Konvention Koordinaten auf der Basis mit lateinischen und auf der Faser mit griechischen Indizes zu notieren, das heißt, wir schreiben $s = (s^i)$ und $z = (z^\alpha)$, wobei sich die Dimensionen stets aus dem Kontext ergeben. Die zugehörigen Koordinatenvektorfelder bezeichnen wir mit $\partial_i$ und $\partial_\alpha$. Wir können meist $\dim \mathcal{S} = 1$ annehmen. In diesem Fall vereinfachen wir die Notation, indem wir $s$ anstatt von $s^1$ schreiben. Auftretende Indizes $1$ und $\overline{1}$ ersetzen wir entsprechend durch $s$ und $\overline{s}$, etwa notieren wir $\partial_1$ als $\partial_s$. Ist $\{\omega_s\}_{s \in U}$ eine $\mathcal{C}^\infty$*-Familie von Kähler-Formen* auf den Fasern $\{\mathcal{X}_s\}_{s \in U}$, dann verwenden wir die Bezeichnungen des vorletzten Absatzes entsprechend faserweise. So ist etwa das Indexziehen von relativen Tensoren faserweise zu verstehen. Lokal bezüglich $\mathcal{S}$ genügt es dann, Rechnungen auf einer zentralen Faser durchzuführen, um entsprechende relative Aussagen zu erhalten.

Schließlich führen wir die *Kodaira-Spencer-Abbildung* einer holomorphen Familie $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten ein. Da $f$ glatt ist, haben wir die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{X}} \longrightarrow f^*\mathcal{T}_{\mathcal{S}} \longrightarrow 0\,.$$

Diese induziert einen Morphismus

$$\rho\colon \mathcal{T}_{\mathcal{S}} \longrightarrow R^1 f_* \mathcal{T}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$$

mit Einschränkungen

$$\rho_s\colon \mathcal{T}_{\mathcal{S},s} \longrightarrow H^1(\mathcal{X}_s, \mathcal{T}_{\mathcal{X}_s})\,.$$

Der Morphismus $\rho$ wird *Kodaira-Spencer-Abbildung* zur Familie $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ genannt. Die Familie heißt *effektiv parametrisiert*, falls $\rho$ injektiv ist, das heißt, falls $\rho_s$ für alle $s \in \mathcal{S}$ injektiv ist.

## 2.2. Faserintegrale

In diesem Abschnitt besprechen wir den Begriff des Faserintegrals. Eine ausführliche Betrachtung im Fall von orientierbaren $\mathcal{C}^\infty$-Faserbündeln findet sich in [GHP72, Chapter 8]. Wir geben eine kurze Zusammenfassung der Konstruktion und einiger Eigenschaften angelehnt an [Sch12, Section 2.1].

Sei $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ eine holomorphe Familie kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten der Faserdimension $n$ über einer komplexen Mannigfaltigkeit $\mathcal{S}$. Weiter setzen wir $\mathcal{A}^*(\mathcal{X}) = \bigoplus_{p,q} \mathcal{A}^{p,q}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$ und analog $\mathcal{A}^*(\mathcal{S}) = \bigoplus_{p,q} \mathcal{A}^{p,q}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S})$. Dann ist das *Faserintegral* eine homogene $\mathbb{C}$-lineare Abbildung

$$\int_{\mathcal{X}/\mathcal{S}} : \mathcal{A}^*(\mathcal{X}) \to \mathcal{A}^*(\mathcal{S})$$

vom Grad $(-n,-n)$. Wir führen lokale Koordinaten nahe eines Punkts $0 \in \mathcal{S}$ ein und setzen dazu $X := \mathcal{X}_0$. Nach einem Satz von Ehresmann existiert eine $\mathcal{C}^\infty$- Trivialisierung $(U, \Phi)$ nahe 0, das heißt eine offene Umgebung $U \subset \mathcal{S}$ von 0 zusammen mit einem $\mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismus $\Phi\colon X \times U \to f^{-1}(U)$ derart, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(U) \arrow[d, "f"'] & X \times U \arrow[l, "\Phi"'] \arrow[dl, "\mathrm{pr}_2"] \\ U & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Nach eventueller Verkleinerung von $U$ wählen wir holomorphe Koordinaten $s = (s^1, \dots, s^{\dim \mathcal{S}})$ auf $U$ sowie lokale holomorphe Koordinaten $z = (z^1, \dots, z^n)$ auf $X$. Somit erhalten wir die Koordinaten $(z, s)$ auf $X \times U$. Diese zerlegen wir in Real- und Imaginärteil gemäß $z = z' + \sqrt{-1}z''$ sowie $s = s' + \sqrt{-1}s''$ und notieren die reellen Koordinaten $(z', z'', s', s'')$ als $\xi = (\xi^j)$ mit $1 \leqslant j \leqslant \dim S + n$. Sei $\psi$ eine $(p,q)$-Form auf $\mathcal{X}$ mit $r := p + q - n \geqslant 0$. Dann besitzt die zurückgezogene Form $\Phi^*\psi$ den 'faserweise maximalen' Summanden

$$\frac{1}{p!q!} \sum_{j_1,\dots,j_r} \psi_{j_1,\dots,j_r}(\xi)\, \mathrm{d}V \wedge \mathrm{d}\xi^{j_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\xi^{j_r}\,,$$

wobei $\xi^j$ nur über Komponenten von $s'$ und $s''$ variiert und $\mathrm{d}V$ die Euklid'sche Volumenform auf $X$ bezeichnet. Das *Faserintegral* von $\psi$ ist nun lokal gegeben durch

$$\int\limits_{X\times U/U} \Phi^*\psi := \frac{1}{p!q!} \sum_{j_1,\dots,j_r} \left( \int\limits_X \psi_{j_1,\dots,j_r}(\xi)\,\mathrm{d}V \right) \mathrm{d}\xi^{j_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\xi^{j_r} \,.$$

Die Konstruktion ist unabähngig von den Koordinaten $(z,s)$ und definiert eine $\mathcal{C}^\infty$-Form über $U$. Diese lokal bezüglich $\mathcal{S}$ gegebene Form hängt außerdem nicht von der Trivialisierung $(U,\Phi)$ ab und liefert folglich eine wohldefinierte $\mathcal{C}^\infty$-Form vom Grad $r$ auf $\mathcal{S}$, welche wir mit

$$\int\limits_{\mathcal{X}/\mathcal{S}} \psi$$

notieren. Das Faserintegral entspricht dem Pushforward im Sinne von Strömen und respektiert die Typzerlegung, woraus sich die Homogenität vom Grad $(-n,-n)$ ergibt. Eine grundlegende Eigenschaft des Faserintegrals ist die Vertauschbarkeit mit äußeren Ableitungen, genauer zeigt man durch Rechnung in lokalen Koordinaten, dass

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_{\mathcal{X}} \int\limits_{\mathcal{X}/\mathcal{S}} \psi &= \int\limits_{\mathcal{X}/\mathcal{S}} \mathrm{d}_{\mathcal{S}}\psi \,,\\
\partial_{\mathcal{X}} \int\limits_{\mathcal{X}/\mathcal{S}} \psi &= \int\limits_{\mathcal{X}/\mathcal{S}} \partial_{\mathcal{S}}\psi \,,\\
\overline{\partial}_{\mathcal{X}} \int\limits_{\mathcal{X}/\mathcal{S}} \psi &= \int\limits_{\mathcal{X}/\mathcal{S}} \overline{\partial}_{\mathcal{S}}\psi \,.
\end{aligned}$$

Schließlich betrachten wir das Verhalten des Faserintegrals unter Lie-Ableitungen. Dazu sei $u$ ein (lokales) $\mathcal{C}^\infty$-Vektorfeld auf $\mathcal{S}$ und $v$ ein *Lift* von $u$, das heißt ein (lokales) $\mathcal{C}^\infty$-Vektorfeld auf $\mathcal{X}$ mit $f_*v = u$, wobei $f_*$ den durch das Differential von $f$ gegebenen Pushforward von Vektorfeldern bezeichnet. Außerdem notieren wir Lie-Ableitungen mit dem Symbol $L$. In dieser Situation gilt (vgl. [Sch12, Lemma 1])

$$L_u \int\limits_{\mathcal{X}/\mathcal{S}} \psi = \int\limits_{\mathcal{X}/\mathcal{S}} L_v\psi \,, \tag{2.1}$$

wobei die Lie-Ableitung innerhalb des Integrals entlang der Fasern zu verstehen ist.

*Bemerkung* 2.2.1. Sowohl die Konstruktion, als auch die angeführten Eigenschaften des Faserintegrals lassen sich auf den Fall eines singulären Parameterraums übertragen.

## 2.3. Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt führen wir den Begriff der polarisierten Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit ein. Für Details siehe etwa [Hu05, 4.B].

Wir beginnen mit der Definition einer Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit. Es sei darauf hingewiesen, dass es in der Literatur sowohl allgemeinere als auch strengere Definition dieses Begriffs gibt.

**Definition 2.3.1.** Eine *Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit* ist eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit $X$ mit trivialem kanonischen Bündel $K_X \cong \mathcal{O}_X$ und verschwindender erster Kohomologie $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

Im Kontext von Modulräumen ist es natürlich polarisierte Mannigfaltigkeiten zu betrachten.

**Definition 2.3.2.** Eine *polarisierte Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit* ist ein Paar $(X, \lambda_X)$, bestehend aus einer Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit $X$ und einer Kähler-Klasse $\lambda_X \in H^2(X, \mathbb{R}) \cap H^{1,1}(X)$. Die Kähler-Klasse $\lambda_X$ wird *Polarisierung* auf $X$ genannt.

Ein grundlegendes Resultat über polarisierte Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten ist die Existenz einer Kähler-Einstein-Metrik.

**Satz 2.3.3** (Calabi-Yau, [Ca57], [Yau78])**.** *Sei $(X, \lambda_X)$ eine polarisierte Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit. Dann existiert genau eine Ricci-flache Kähler-Metrik auf $X$ mit Kähler-Klasse $\lambda_X$.*

Für die Metrik aus obigem Satz vereinbaren wir eine abkürzende Sprechweise.

**Definition 2.3.4.** Sei $(X, \lambda_X)$ eine polarisierte Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit. Dann bezeichnen wir die eindeutige Ricci-flache Kähler-Metrik auf $X$ innerhalb der Kähler-Klasse $\lambda_X$ als *Calabi-Yau-Metrik* auf $(X, \lambda_X)$.

## 2.4. Familien von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten

Wir definieren Familien polarisierter Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten und betrachten die für die folgenden Kapitel wesentlichen Eigenschaften (vgl. [FS90]).

Als Erstes übertragen wir den Begriff der Polarisierung auf Familien von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten. Dazu bemerken wir zunächst, dass die beiden naheliegenden Definitionen gleichwertig sind.

*Bemerkung* 2.4.1. Ist $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ eine holomorphe Familie kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten, dann existiert nach [FS90, Proposition 3.1] eine kanonische Bijektion der Mengen $\{\lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}} \in R^1 f_* \Omega_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(S) \mid \lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}|_{\mathcal{X}_s}$ ist Kähler-Klasse für alle $s \in \mathcal{S}\}$ und $\{\widetilde{\lambda}_{\mathcal{X}} \in R^2 f_* \mathbb{R}(S) \mid \widetilde{\lambda}_{\mathcal{X}}|_{\mathcal{X}_s}$ ist Kähler-Klasse für alle $s \in \mathcal{S}\}$.

Wir erheben die erste Möglichkeit zur Definition einer Polarisierung.

**Definition 2.4.2.** Eine *Familie polarisierter Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten* ist ein Paar $(f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}, \lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$, bestehend aus einer holomorphen Familie $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ und einem holomorphen Schnitt $\lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}} \in R^1 f_* \Omega_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(\mathcal{S})$, so dass $(\mathcal{X}_s, \lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}|_{\mathcal{X}_s})$ für alle $s \in \mathcal{S}$ eine polarisierte Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit ist. Der Schnitt $\lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ wird *Polarisierung* auf der Familie $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ genannt und wir setzten $\lambda_{\mathcal{X}_s} := \lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}|_{\mathcal{X}_s}$ für alle $s \in \mathcal{S}$.

*Bemerkung* 2.4.3. Falls die betrachtete Familie eine offenene Teilmenge des Modulraums polarisierter Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten beschreibt, dann ist der Parameterraum nach dem Satz von Bogomolov-Tian-Todorov ([Bo78], [Ti87], [To89]) nicht-singulär.

*Bemerkung* 2.4.4. Wenn wir ausschließlich an Eigenschaften interessiert sind, welche lokal bezüglich des Parameterraums $\mathcal{S}$ sind, dann können wir annehmen, dass $\mathcal{S}$ zusammenhängend ist. Mittels Deformationstheorie kann $\mathcal{S}$ außerdem lokal in einen minimalen, nicht-singulären umgebenden Raum eingebettet werden, womit sich die Situation auf den nicht-singulären Fall zurückführen lässt.

Ist $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ eine Familie von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten und $\lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ eine Polarisierung auf $f$, dann ist das Paar $(\mathcal{X}_s, \lambda_{\mathcal{X}_s})$ für jedes $s \in \mathcal{S}$ eine polarisierte Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit. Bezeichne $\omega_s$ die Calabi-Yau-Metrik auf $(\mathcal{X}_s, \lambda_{\mathcal{X}_s})$. Die Metriken $\omega_s$ sind gegeben als Lösung einer Monge-Ampère-Gleichung auf den Fasern, wobei alle Daten glatt vom Parameter $s \in \mathcal{S}$ abhängen. Eine Anwendung des Satzes über implizite Funktionen liefert nun, dass die Metriken $\omega_s$ ebenfalls $\mathcal{C}^\infty$ bezüglich $s$ variieren (vgl. [Koi83, Beweis von Theorem 10.1]). Folglich gibt es eine relative $(1,1)$-Form $\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ auf $\mathcal{X}$ mit der Eigenschaft $\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}|_{\mathcal{X}_s} = \omega_s$ für alle $s \in \mathcal{S}$. Diese relative Form induziert eine Hermite'sche Metrik $h$ auf dem relativen kanonischen Bündel $\mathcal{K}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$. Die Glattheit der Metriken $\omega_s$ bezüglich des Parameters $s$ überträgt sich auch auf faserweise harmonische Repräsentanten höherer direkter Bildgarben, wie das folgende Lemma zeigt. Dabei nehmen wir zusätzlich an, dass $\mathcal{S}$ eine komplexe Mannigfaltigkeit ist.

**Lemma 2.4.5.** *Sei $\widetilde{\psi} \in R^{n-p} f_* \Omega^p_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(\mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ ein holomorpher Schnitt. Für $s \in \mathcal{S}$ bezeichne $\psi_s \in \mathcal{A}^{p,n-p}(\mathcal{X}_s, \mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}_s})$ den harmonischen Repräsentanten der Kohomologieklasse $\widetilde{\psi}|_{\mathcal{X}_s}$. Dann existiert lokal bezüglich $\mathcal{S}$ ein $\overline{\partial}$-geschlossener Repräsentant $\psi \in \mathcal{A}^{p,n-p}(\mathcal{X}, \mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ von $\widetilde{\psi}$ dessen Einschränkung auf jede Faser $\mathcal{X}_s$ gleich $\psi_s$ ist.*

*Beweis.* Die relative $(1,1)$-Form $\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ induziert eine Hermite'sche Metrik auf $\Omega^p_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$. Somit ist $\Omega^p_{\mathcal{X}/\mathcal{S}} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{X}} \mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ ein Hermite'sches holomorphes Vektorbündel auf $\mathcal{X}$. Die $(n-p)$-te Kohomologie von $\Omega^p_{\mathcal{X}/\mathcal{S}} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{X}} \mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ auf der Faser $\mathcal{X}_s$ ist isomorph zu $H^{p,n-p}(\mathcal{X}_s)$. Da die Fasern der gegebenen Familie Kähler'sch sind, entartet die Hodge-Frölicher-Spektralsequenz im $E_1$-Term. Damit sind die Hodge-Zahlen $\dim H^{p,n-p}(\mathcal{X}_s)$ konstant und folglich ist die Bildgarbe $R^{n-p} f_* \Omega^p_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(\mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ lokal-frei. Die Behauptung ergibt sich nun mit [Sch12, Lemma 2]. □

*Bemerkung* 2.4.6. Der Isomorphismus $\mathcal{A}^{p,q}(\mathcal{X}_s, \mathcal{K}_{\mathcal{X}_s}^{\otimes m}) \cong \mathcal{A}^{p,q}(\mathcal{X}_s, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_s})$ führt an dieser Stelle zu keiner Vereinfachung.

*Bemerkung* 2.4.7. Das obige Lemma gilt nach [Sch12, Section 2.2] allgemeiner etwa für höhere direkte Bildgarben $R^q f_* \mathcal{E}$ eines Hermite'schen holomorphen Vektorbündels $\mathcal{E}$ auf $\mathcal{X}$, dessen faserweise Kohomologie $H^q(\mathcal{X}_s, \mathcal{E}|_{\mathcal{X}_s})$ konstante Dimension besitzt.

*Bemerkung* 2.4.8. Wir können eine relative Serre-Dualität mittels Differentialformen formulieren. Dazu stellen wir zunächst fest, dass die Aussage des obigen Lemmas nach der vorigen Bemerkung entsprechend für die Bildgarben $R^p f_* \Lambda^p \mathcal{T}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ gilt. Damit ergibt sich eine Paarung

$$R^p f_* \Lambda^p \mathcal{T}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{S}} R^{n-p} f_* \Omega^p_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(\mathcal{K}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}) \longrightarrow \mathcal{O}_\mathcal{S}\,, \tag{2.2}$$

welche durch Faserintegration der äußeren Produkte (Evaluation im Bündelanteil) faserweise harmonischer Repräsentanten gegeben ist. Da der $\overline{\partial}$-Operator mit Faserintegration vertauscht, ist das Ergebnis tatsächlich eine holomorphe Funktion auf $\mathcal{S}$. Außerdem schränkt sich (2.2) auf den Fasern zur üblichen Serre-Dualität ein, was die Perfektheit impliziert.

In der nächsten Definition legen wir eine Bezeichnungsweise für die faserweise harmonischen Repräsentanten von Kodaira-Spencer-Klassen fest.

**Definition 2.4.9.** Sei $(f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}, \lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ eine Familie polarisierter Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten über einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{S}$. Weiter sei $s^i$ eine lokale Koordinate auf $\mathcal{S}$ mit zugehörigem Koordinatenvektorfeld $\partial_i$. Dann notieren wir einen durch Lemma 2.4.5 und Bemerkung 2.4.7 lokal bezüglich $\mathcal{S}$ gegebenen faserweise harmonischen, $\overline{\partial}$-geschlossenen Repräsentanten der (lokalen) Kodaira-Spencer-Klasse $\rho(\partial_i)$ mit $A_i$.

Mittels der Kodaira-Spencer-Abbildung lässt sich eine natürliche Hermite'sche Metrik auf der Basis einer Familie polarisierter Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten erklären.

**Definition 2.4.10.** Sei $(f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}, \lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ eine Familie $n$-dimensionaler polarisierter Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten über einer komplexen Mannigfaltigkeit $\mathcal{S}$. Dann ist die *Weil-Petersson-Metrik* (lokal bezüglich $\mathcal{S}$) definiert durch

$$G^{WP}_{i\bar{\jmath}}(s) := \int\limits_{\mathcal{X}/\mathcal{S}} A_i \cdot A_{\bar{\jmath}}\, \mathrm{d}V_\omega\,,$$

wobei $A_i \cdot A_{\bar{\jmath}} = (A_i, A_j)$ das faserweise Produkt von Tensoren bezüglich der Calabi-Yau-Metriken und $\mathrm{d}V_\omega := \omega^n_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}/n!$ die relative Volumenform bezüglich $\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ bezeichnet. Die reelle $(1,1)$-Form

$$\omega_{WP} := \sqrt{-1} G^{WP}_{i\bar{\jmath}}\, \mathrm{d}s^i \wedge \mathrm{d}s^{\bar{\jmath}}$$

heißt *Weil-Petersson-Form* auf $\mathcal{S}$.

*Bemerkung* 2.4.11. Das Faserintegral einer relativen $\mathcal{C}^\infty$-Form auf $\mathcal{X}$ liefert eine $\mathcal{C}^\infty$-Form auf $\mathcal{S}$ (vgl. Abschnitt 2.2). Damit ist die Weil-Petersson-Metrik eine Hermite'sche Pseudometrik auf $\mathcal{S}$ und eine Hermite'sche Metrik für effektiv parametrisierte Familien. Außerdem ist bekannt, dass die Weil-Petersson-Form $\omega_{WP}$ d-geschlossen ist und somit für effektiv parametrisierte Familien eine Kähler-Form darstellt (vgl. [Sch85]).

*Bemerkung* 2.4.12. Der Fall eines singulären Paramterraums $\mathcal{S}$ tritt nach Bemerkung 2.4.3 in „modultheoretischen Situationen“ nicht auf und kann mittels Bemerkung 2.4.4 behandelt werden.

Für Familien kanonisch polarisierter Mannigfaltigkeiten liefert die erste Chern-Form von $(\mathcal{K}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}, h)$ eine lokal $\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}$-exakte, reelle $(1,1)$-Form auf $\mathcal{X}$, welche die Kähler-Einstein-Metriken auf den Fasern induziert. Im Fall von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten besitzt die erste Chern-Form des relativen kanonischen Bündels offensichtlich nicht diese Eigenschaft. Es lässt sich aber dennoch eine entsprechende Form auf $\mathcal{X}$ konstruieren, die wir stattdessen verwenden werden.

**Proposition 2.4.13.** *Sei $(f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}, \lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ eine Familie $n$-dimensionaler polarisierter Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten. Für alle $s \in \mathcal{S}$ bezeichne $\omega_s$ die Ricci-flache Kähler-Metrik auf der Faser $\mathcal{X}_s$ mit Dolbeault-Kohomologieklasse $\lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}|_{\mathcal{X}_s}$. Dann gibt es eine eindeutige lokal $\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}$-exakte, reelle $(1,1)$-Form $\omega_{\mathcal{X}}$ auf $\mathcal{X}$ derart, dass $\omega_{\mathcal{X}}|_{\mathcal{X}_s} = \omega_s$ für alle $s \in \mathcal{S}$ und*

$$\int_{\mathcal{X}/\mathcal{S}} \omega_{\mathcal{X}}^{n+1} = 0\,. \tag{2.3}$$

*Beweis.* Lokal bezüglich $\mathcal{S}$ folgt die Existenz einer Form $\omega_{\mathcal{X}}$ mit den gewünschten Eigenschaften aus [FS90, Lemma 3.2]. Da die erste Betti-Zahl der Fasern verschwindet, sind diese lokal gegebenen Formen nach [FS90, Corollary 3.7] eindeutig und verkleben somit zu einer globalen Form auf $\mathcal{X}$. □

Schließlich fixieren wir noch weitere Notationen, wobei wir lokale Koordinaten $(z,s)$ auf $\mathcal{X}$ gemäß Abschnit 2.1 verwenden. Die Form $\omega_{\mathcal{X}}$ (vgl. Proposition 2.4.13) und die Krümmungsform $\sqrt{-1}\Theta(\mathcal{K}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}, h)$ des relativen kanonischen Bündels definieren Produkte von Vektorfeldern auf $\mathcal{X}$, welche wir mit $\langle -\,,-\rangle_{\omega_{\mathcal{X}}}$ bzw. $\langle -\,,-\rangle_{\Theta}$ bezeichnen. Nach eventueller Verkleinerung der Koordinatenumgebungen wählen wir ein lokales $\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}$-Potential $g$ von $\omega_{\mathcal{X}}$, das heißt, in lokalen Koordinaten $(z,s)$ ist $\omega_{\mathcal{X}}$ gegeben durch

$$\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}g = \sqrt{-1}\left(g_{i\overline{\jmath}}\, ds^i \wedge ds^{\overline{\jmath}} + g_{i\overline{\beta}}\, ds^i \wedge dz^{\overline{\beta}} + g_{\alpha\overline{\jmath}}\, dz^\alpha \wedge ds^{\overline{\jmath}} + g_{\alpha\overline{\beta}}\, dz^\alpha \wedge dz^{\overline{\beta}}\right)\,,$$

wobei $g_{\alpha\overline{\beta}}$ die Koeffizienten der Calabi-Yau-Metriken auf den Fasern sind und die weiteren Koeffizienten $g_{i\overline{\jmath}}$, $g_{i\overline{\beta}}$ und $g_{\alpha\overline{\jmath}}$ durch diese Beziehung definiert seien. Wir setzen

$\widetilde{g} := \det(g_{\alpha\overline{\beta}})$, dann stimmt die Metrik $h$ mit $\widetilde{g}^{-1}$ überein und die erste Chern-Form $c_1(\mathcal{K}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}, \widetilde{g}^{-1}) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta(\mathcal{K}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}, h)$ ist in lokalen Koordinaten $(z, s)$ gegeben durch

$$-\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log\widetilde{g} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\left(\Theta_{i\overline{\jmath}}\,ds^i \wedge ds^{\overline{\jmath}} + \Theta_{i\overline{\beta}}\,ds^i \wedge dz^{\overline{\beta}} + \Theta_{\alpha\overline{\jmath}}\,dz^\alpha \wedge ds^{\overline{\jmath}} + \Theta_{\alpha\overline{\beta}}\,dz^\alpha \wedge dz^{\overline{\beta}}\right),$$

wobei die Koeffizienten $\Theta_{i\overline{\jmath}}$, $\Theta_{i\overline{\beta}}$, $\Theta_{\alpha\overline{\jmath}}$ und $\Theta_{\alpha\overline{\beta}}$ durch diese Beziehung definiert seien.

# 3. Semi-Positivität des relativen kanonischen Bündels

In diesem Kapitel betrachten wir das relative kanonische Bündel $\mathcal{K}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ einer Familie $(f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}, \lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ polarisierter Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten zusammen mit der durch $\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ induzierten Hermite'schen Metrik $h$. Da die Fasern Ricci-flach sind, ist die Krümmung dieses Bündels faserweise trivial und kann damit nicht positiv sein. Wir zeigen, dass dies das einzige Hindernis für die Posivität des Bündels ist. Genauer beweisen wir, dass das Bündel semi-positiv ist und positiv in horizontalen Richtungen, in denen die Familie nicht infinitesimal-trivial ist. Dazu berechnen wir die verschiedenen Komponenten der Krümmungsform und drücken diese durch die Weil-Petersson-Metrik auf der Basis $\mathcal{S}$ aus. Dabei verwenden wir die Bezeichnungen aus Kapitel 2.

## 3.1. Horizontale Lifts von Vektorfeldern

Wir besprechen zunächst die Methode der horizontalen Lifts in der Situation von Familien von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten (vgl. [FS90, §4] und [Sch12, Section 4]).

Sei $v_i = \partial_i + a_i^\alpha \partial_\alpha$ ein differenzierbarer Lift des lokalen Koordinatenvektorfelds $\partial_i$. Dann repräsentiert $\overline{\partial} v_i|_{\mathcal{X}_s}$ die Kodaira-Spencer-Klasse von $\partial_i$ im Punkt $s$, das heißt, es ist

$$a^\alpha_{i;\overline{\beta}}\, \partial_\alpha \, \mathrm{d}z^{\overline{\beta}} \in \rho_s\left(\partial_i|_s\right) . \tag{3.1}$$

In [Siu86] werden *kanonische Lifts* von Vektorfeldern eingeführt als differenzierbare Lifts, welche im Sinne von Gleichung (3.1) den harmonischen Repräsentanten der Kodaira-Spencer-Klasse induzieren. Dieser Begriff wurde in [FS90] und [Sch93] verfeinert, indem dort *horizontale Lifts* betrachtet werden, das heißt differenzierbare Lifts, die bezüglich des Produkts $\langle - \,, - \rangle_{\omega_{\mathcal{X}}}$ senkrecht zur Faserrichtung sind.

Das folgende Lemma ergibt sich unmittelbar.

**Lemma 3.1.1.** *Sei $v_i = \partial_i + a_i^\alpha \partial_\alpha$ ein horizontaler Lift des Koordinatenvektorfelds $\partial_i$. Dann gilt*

$$a_i^\alpha = -g^{\overline{\beta}\alpha} g_{i\overline{\beta}} \,.$$

Wir definieren nun einen wichtigen Tensor, mit dem wir fortan arbeiten. Dabei sei $s \in \mathcal{S}$ ein fester Punkt innerhalb einer gegebenen Koordinatenumgebung. (Diese zweckmäßige Notation sollte hier zu keinen Verwechslungen mit Koordinaten führen.)

**Definition 3.1.2.** Sei $v_i = \partial_i + a_i^\alpha \partial_\alpha$ der horizontale Lift des Koordinatenvektorfelds $\partial_i$. Dann sei $A_i \in H^1(\mathcal{X}_s, \mathcal{T}_{\mathcal{X}_s})$ definiert durch

$$A_i{}^\alpha{}_{\overline{\beta}}\, \partial_\alpha \, \mathrm{d}z^{\overline{\beta}} := \overline{\partial} v_i|_{\mathcal{X}_s} = a^\alpha_{i;\overline{\beta}}\, \partial_\alpha \, \mathrm{d}z^{\overline{\beta}} \,.$$

*Bemerkung* 3.1.3. Wir zeigen in Proposition 3.1.6, dass die obige Definition von $A_i$ mit Definition 2.4.9 konsistent ist.

Eine elementare Eigenschaft ist die folgende Symmetrie.

**Lemma 3.1.4.** *Der Tensor* $A_{i\overline{\delta}\overline{\beta}} = g_{\alpha\overline{\delta}} A_i{}^\alpha{}_{\overline{\beta}}$ *ist symmetrisch, das heißt, es gilt*

$$A_{i\overline{\beta}\overline{\delta}} = A_{i\overline{\delta}\overline{\beta}} \,.$$

*Beweis.* Mit Lemma 3.1.1 folgt

$$\begin{aligned} A_{i\overline{\beta}\overline{\delta}} &= g_{\alpha\overline{\beta}} A_i{}^\alpha{}_{\overline{\delta}} = g_{\alpha\overline{\beta}} a^\alpha_{i;\overline{\delta}} \\ &= -g_{i\overline{\beta};\overline{\delta}} = -g_{i\overline{\delta};\overline{\beta}} \\ &= A_{i\overline{\delta}\overline{\beta}} \,. \end{aligned}$$

□

*Bemerkung* 3.1.5. Das obige Lemma korrespondiert zu der Tatsache, dass die gegebene Familie eine Deformation des *Paars* $(\mathcal{X}_s, \lambda_{\mathcal{X}_s})$ ist und $\rho_s$ somit Werte im Unterraum $H^1(\mathcal{X}_s, \mathcal{T}_{\mathcal{X}_s})_{\lambda_{\mathcal{X}_s}} = \mathrm{Ker}(H^1(\mathcal{X}_s, \mathcal{T}_{\mathcal{X}_s}) \xrightarrow{\cup \lambda_{\mathcal{X}_s}} H^2(\mathcal{X}_s, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_s}))$ annimmt.

Wir zeigen nun, dass $A_i$ harmonisch ist.

**Proposition 3.1.6.** *Der Tensor* $A_{i\overline{\delta}\overline{\beta}} = g_{\alpha\overline{\delta}} A_i{}^\alpha{}_{\overline{\beta}}$ *ist harmonisch, das heißt, es gilt*

$$A_{i\overline{\beta}\overline{\delta};\gamma} g^{\overline{\delta}\gamma} = 0 \,. \tag{3.2}$$

*Beweis.* Nach Definition ist $A_i$ offensichtlich $\overline{\partial}$-geschlossen. Die $\overline{\partial}^*$-Geschlossenheit von $A_i$ ist äquivalent zu Gleichung (3.2). Eine direkte Rechnung liefert

$$\begin{aligned} A_{i\overline{\beta}\overline{\delta};\gamma} g^{\overline{\delta}\gamma} &= A_i{}^\alpha{}_{\overline{\beta};\alpha} = a^\alpha_{i;\overline{\beta}\alpha} = a^\alpha_{i;\alpha\overline{\beta}} - a^\gamma_i R_\gamma{}^\alpha{}_{\overline{\beta}\alpha} \\ &= -g^{\overline{\delta}\alpha} g_{i\overline{\delta};\alpha\overline{\beta}} - a^\gamma_i R_{\gamma\overline{\beta}} = -(g^{\overline{\delta}\alpha} \partial_i g_{\alpha\overline{\delta}})_{;\overline{\beta}} \\ &= -(\partial_i \log \widetilde{g})_{;\overline{\beta}} \,. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Die Behauptung folgt nun aus dem nachfolgenden Lemma 3.1.7. □

Zum Beweis des nächsten Lemmas nutzen wir, dass es nach Voraussetzung keine nicht-trivialen harmonischen $(0,1)$-Formen auf $\mathcal{X}_s$ gibt.

**Lemma 3.1.7.** *Es gilt*

$$(\partial_i \log \widetilde{g})_{;\overline{\beta}} = 0\,.$$

*Beweis.* Wir betrachten auf $\mathcal{X}_s$ die $(0,1)$-Form $\eta_i$, welche lokal gegeben ist durch $\eta_i := A_{i\ \overline{\beta};\alpha}^{\ \alpha} \,\mathrm{d}z^{\overline{\beta}} \overset{(3.3)}{=} -(\partial_i \log \widetilde{g})_{;\overline{\beta}}\,\mathrm{d}z^{\overline{\beta}}$ und zeigen, dass diese harmonisch ist. Zunächst gilt

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}\eta_i &= A_{i\ \overline{\beta};\alpha\overline{\delta}}^{\ \alpha}\,\mathrm{d}z^{\overline{\delta}} \wedge \mathrm{d}z^{\overline{\beta}} \\
&= -A_{i\ \overline{\beta};\alpha\overline{\delta}}^{\ \alpha}\,\mathrm{d}z^{\overline{\beta}} \wedge \mathrm{d}z^{\overline{\delta}} \\
&= -\overline{\partial}\eta_i = 0
\end{aligned}$$

wegen

$$\begin{aligned}
A_{i\ \overline{\beta};\alpha\overline{\delta}}^{\ \alpha} &= a^{\alpha}_{i;\overline{\beta}\alpha\overline{\delta}} = a^{\alpha}_{i;\alpha\overline{\beta}\overline{\delta}} - (a^{\sigma}_{i} R_{\sigma\ \overline{\beta}\alpha}^{\ \alpha})_{;\overline{\delta}} \\
&= a^{\alpha}_{i;\alpha\overline{\delta}\overline{\beta}} = a^{\alpha}_{i;\overline{\delta}\alpha\overline{\beta}} - (a^{\sigma}_{i} R_{\sigma\ \alpha\overline{\delta}}^{\ \alpha})_{;\overline{\beta}} \\
&= A_{i\ \overline{\delta};\alpha\overline{\beta}}^{\ \alpha}\,.
\end{aligned}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}^{*}\eta_i &= -(\partial_i \log \widetilde{g})_{;\overline{\beta}\alpha} g^{\overline{\beta}\alpha} \\
&= -g^{\overline{\beta}\alpha}\partial_i (\log \widetilde{g})_{;\overline{\beta}\alpha} \\
&= -g^{\overline{\beta}\alpha}\partial_i R_{\alpha\overline{\beta}} = 0\,.
\end{aligned}$$

Folglich haben wir gezeigt, dass $\eta_i$ eine harmonische $(0,1)$-Form auf $\mathcal{X}_s$ ist. Da aber $H^1(\mathcal{X}_s, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_s}) = 0$ gilt, folgt die Behauptung. $\square$

## 3.2. Berechnung der Krümmungsform

Wir beweisen nun das Hauptresultat dieses Kapitels.

**Satz 3.2.1** (vgl. Satz 1)**.** *Sei $(f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}, \lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ eine Familie polarisierter Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten über einer komplexen Mannigfaltigkeit $\mathcal{S}$. Bezeichne $h$ die Hermite'sche Metrik auf dem relativen kanonischen Bündel $\mathcal{K}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$, welche durch die Ricci-flachen Kähler-Metriken auf den Fasern (bezüglich der Polarisierung $\lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$) induziert wird. Dann ist das relative kanonische Bündel $\mathcal{K}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ mit der Metrik $h$ semi-positiv und positiv in horizontalen Richtungen, in denen die Familie nicht infinitesimal-trivial ist. Genauer gilt für die Krümmungsform*

$$\sqrt{-1}\Theta(\mathcal{K}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}, h) = \tfrac{1}{V}\cdot f^{*}\omega_{WP}\,, \tag{3.4}$$

*wobei $V = (\lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}|_{\mathcal{X}_s})^n/n!$ mit $n = \dim(\mathcal{X}_s)$ das (von $s$ unabhängige) Volumen einer Faser $\mathcal{X}_s$ ist und $\omega_{WP}$ die Weil-Petersson-Form auf $\mathcal{S}$ bezeichnet.*

*Bemerkung* 3.2.2. Der obige Satz lässt sich auch für singuläres $\mathcal{S}$ formulieren. Der Beweis verläuft in diesem Fall analog, da sich $\mathcal{S}$, wie in Bemerkung 2.4.4, lokal in einen nicht-singulären, minimalen umgebenden Raum einbetten lässt und Differentialformen auf $\mathcal{S}$ definitionsgemäß lokal auf einem solchen umgebenden Raum zu betrachten sind.

Wir können ohne Einschränkung $\dim \mathcal{S} = 1$ annehmen und verwenden die vereinfachenden Notationen aus Abschnitt 2.1. Das heißt, wir verwenden Abkürzungen der Art $ds := ds^1$, $\partial_s := \partial_1$ und $g_{s\overline{\beta}} := g_{1\overline{\beta}}$. Zunächst haben wir die folgende Beobachtung.

**Lemma 3.2.3.** *Die Krümmung des relativen kanonischen Bündels besitzt ausschließlich horizontale Komponenten.*

*Beweis.* Zunächst gilt

$$\begin{aligned} \Theta_{\alpha\overline{\beta}} &= (\log \widetilde{g})_{;\alpha\overline{\beta}} \\ &= R_{\alpha\overline{\beta}} = 0\,. \end{aligned}$$

Außerdem ist mit Lemma 3.1.7

$$\Theta_{s\overline{\beta}} = (\partial_s \log \widetilde{g})_{;\overline{\beta}} = 0$$

und analog $\Theta_{\alpha\overline{s}} = 0$. □

Um die horizontalen Komponenten der Krümmungsform zu berechnen, benötigen wir die Hodge-Zerlegung (des Quadrats) der faserweisen Norm des Tensors $A_s$. Hierfür ist es sinnvoll, zwei Funktionen auf $\mathcal{X}$ einzuführen.

**Definition 3.2.4.** Sei $\varphi$ die $\mathcal{C}^\infty$-Funktion auf $\mathcal{X}$, welche in lokalen Koordinaten definiert ist durch

$$\varphi = \langle \partial_s + a_s^\alpha \partial_\alpha, \partial_s + a_s^\beta \partial_\beta \rangle_{\omega_{\mathcal{X}}}\,.$$

**Lemma 3.2.5.** *Es gilt (in lokalen Koordinaten)*

$$\varphi = g_{s\overline{s}} - g_{\alpha\overline{s}} g_{s\overline{\beta}} g^{\overline{\beta}\alpha}\,.$$

*Beweis.* Dies ergibt sich unmittelbar aus Lemma 3.1.1. □

*Bemerkung* 3.2.6. Das obige Lemma impliziert

$$\omega_{\mathcal{X}}^{n+1} = (n+1)\varphi\, \mathrm{d}V_\omega \sqrt{-1}\, \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}\overline{s} \tag{3.5}$$

und mit Gleichung (2.3) folgt durch Integration entlang der Fasern

$$\int_{\mathcal{X}_s} \varphi\, \mathrm{d}V_\omega = 0\,. \tag{3.6}$$

**Definition 3.2.7.** Sei $\chi$ die $\mathcal{C}^\infty$-Funktion auf $\mathcal{X}$, welche in lokalen Koordinaten definiert ist duch

$$\chi = \langle \partial_s + a_s^\alpha \partial_\alpha, \partial_s + a_s^\beta \partial_\beta \rangle_\Theta \,.$$

**Lemma 3.2.8.** *Es gilt (in lokalen Koordinaten)*

$$\chi = \partial_s \partial_{\overline{s}} \log \widetilde{g}$$

*und $\chi$ ist konstant auf jeder Faser.*

*Beweis.* Lemma 3.2.3 liefert lokal $\chi = \Theta_{s\overline{s}} = \partial_s \partial_{\overline{s}} \log \widetilde{g}$. Außerdem ist $\chi$ harmonisch auf der Faser $\mathcal{X}_s$, denn

$$\begin{aligned}
\Box\chi &= -g^{\overline{\delta}\gamma} \chi_{;\gamma\overline{\delta}} \\
&= -g^{\overline{\delta}\gamma} (\partial_s \partial_{\overline{s}} \log \widetilde{g})_{;\gamma\overline{\delta}} \\
&= -g^{\overline{\delta}\gamma} \partial_s \partial_{\overline{s}} R_{\gamma\overline{\delta}} = 0 \,.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. $\square$

Nun fahren wir fort mit der Berechnung der Hodge-Zerlegung, welche als Analogon zu [Sch12, Proposition 3] zu sehen ist.

**Proposition 3.2.9.** *Auf jeder Faser gilt*

$$A_s \cdot A_{\overline{s}} = \chi + \Box\varphi \,. \tag{3.7}$$

*Beweis.* Nach Lemma 3.2.5 und Lemma 3.1.1 ist $\varphi = g_{s\overline{s}} - a_s^\alpha a_{\overline{s}\alpha}$. Die Behauptung folgt durch direkte Berechnung des faserweisen Laplace-Operators $\Box\varphi = -g^{\overline{\delta}\gamma} \varphi_{;\gamma\overline{\delta}}$. Zunächst gilt

$$\begin{aligned}
g^{\overline{\delta}\gamma} g_{s\overline{s};\gamma\overline{\delta}} &= g^{\overline{\delta}\gamma} \partial_s \partial_{\overline{s}} g_{\gamma\overline{\delta}} \\
&= \partial_s (g^{\overline{\delta}\gamma} \partial_{\overline{s}} g_{\gamma\overline{\delta}}) - (\partial_s g^{\overline{\delta}\gamma})(\partial_{\overline{s}} g_{\gamma\overline{\delta}}) \\
&= \partial_s \partial_{\overline{s}} \log \widetilde{g} - a_s^{\gamma;\overline{\delta}} g_{\gamma\overline{s};\overline{\delta}} \\
&= \chi + a_s^{\gamma;\overline{\delta}} a_{\overline{s}\gamma;\overline{\delta}} \,.
\end{aligned}$$

Nun folgt

$$\begin{aligned}
g^{\overline{\delta}\gamma} (a_s^\alpha a_{\overline{s}\alpha})_{;\gamma\overline{\delta}} &= g^{\overline{\delta}\gamma} (a^\alpha_{s;\gamma\overline{\delta}} a_{\overline{s}\alpha} + a^\alpha_{s;\overline{\delta}} a_{\overline{s}\alpha;\gamma} + a^\alpha_{s;\gamma} a_{\overline{s}\alpha;\overline{\delta}} + a_s^\alpha a_{\overline{s}\alpha;\gamma\overline{\delta}}) \\
&= g^{\overline{\delta}\gamma} A_s{}^\alpha{}_{\overline{\delta}} A_{\overline{s}\alpha\gamma} + a_s^{\alpha;\overline{\delta}} a_{\overline{s}\alpha;\overline{\delta}} \,,
\end{aligned}$$

da der erste und vierte Summand verschwinden. In der Tat gilt

$$\begin{aligned}
g^{\overline{\delta}\gamma} a^\alpha_{s;\gamma\overline{\delta}} &= a^\alpha_{s;\overline{\delta}\gamma} g^{\overline{\delta}\gamma} + a_s^\sigma R^\alpha{}_{\sigma\gamma\overline{\delta}} g^{\overline{\delta}\gamma} \\
&= A_s{}^\alpha{}_{\overline{\delta}\gamma} g^{\overline{\delta}\gamma} - a_s^\sigma R^\alpha{}_\sigma = 0
\end{aligned}$$

und

$$g^{\bar{\delta}\gamma} a_{\bar{s}\alpha;\gamma\bar{\delta}} = A_{\bar{s}\alpha\gamma;\bar{\delta}} g^{\bar{\delta}\gamma} = 0\,,$$

wegen der Harmonizität von $A_s$ (Proposition 3.1.6). Das schließt den Beweis ab. □

**Korollar 3.2.10.** *Es gilt*

$$\chi = \mathrm{vol}(\mathcal{X}_s)^{-1} G^{WP}_{s\bar{s}}\,. \tag{3.8}$$

*Beweis.* Dies folgt aus Gleichung 3.7 durch Integration über die Faser $\mathcal{X}_s$. □

Schließlich ergibt sich der

*Beweis von Satz* 3.2.1. Lemma 3.2.3 zusammen mit Korollar 3.2.10 impliziert

$$\sqrt{-1}\Theta(\mathcal{K}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}, h) = \mathrm{vol}(\mathcal{X}_s)^{-1} G^{WP}_{s\bar{s}} \sqrt{-1}\, \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}\bar{s}\,. \tag{3.9}$$

Damit ist die Krümmungsform semi-positiv und strikt positiv in horizontalen Richtungen, in denen die Kodaira-Spencer-Abbildung injektiv ist. Für höherdimensionale Basen erfolgt der Beweis analog. (Um die Semi-Positivität einzusehen, genügt es gegebene Familien eingeschränkt auf hinreichend allgemeine Kreisscheiben zu betrachten.) □

Als direkte Anwendung von Satz 3.2.1 erhalten wir mit [MT08] das folgende Korollar.

**Korollar 3.2.11** (vgl. Korollar 2)**.** *Sei* $(f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}, \lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ *eine Familie polarisierter Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten über einer Mannigfaltigkeit* $\mathcal{S}$*. Dann sind die direkten Bildgarben* $R^q f_* \mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ *lokal-frei und Nakano-semi-positiv für alle* $m \geqslant 2$ *und* $q \geqslant 0$.

*Beweis.* Seien $m$ und $q$ ganze Zahlen mit $m \geqslant 2$ und $q \geqslant 0$. Es ist $\mathcal{S}$ nicht-singulär sowie $f$ glatt und surjektiv, das heißt, $\mathcal{X}$ ist ebenfalls nicht-singulär. Weiter ist $\omega_{\mathcal{X}}$ (vgl. Proposition 2.4.13) eine relative Kähler-Form im Sinne von [MT08]. Daher können wir [MT08, Theorem 1.1] auf das semi-positive Geradenbündel $\mathcal{K}^{\otimes(m-1)}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ anwenden, was die Behauptung impliziert. □

# 4. Semi-Ricci-flache Metriken

In diesem Kapitel untersuchen wir die Fragestellung, wann die Ricci-flachen Kähler-Metriken auf den Fasern einer Familie polarisierter Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten von einer Kähler-Form auf dem Totalraum induziert werden. Wir geben ein Kriterium für die Existenz einer solchen Kähler-Form an. Dabei verwenden wir die Bezeichnungen aus Kapitel 2 und 3.

## 4.1. Green'sche Funktionen auf kompakten Kähler-Mannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt sei $X$ eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit mit einer Kähler-Metrik $g$ auf $X$. Dann gibt es eine *Green'sche Funktion* $G\colon X \times X \to \mathbb{R}$ bezüglich des Laplace-Operators $\Box = \Box_g$ (mit nicht-negativen Eigenwerten), welche die folgenden Eigenschaften besitzt.

(i) Es gilt $G|_{(X\times X)\setminus\Gamma} \in \mathcal{C}^\infty((X \times X) \setminus \Gamma)$, wobei $\Gamma$ die Diagonale in $X \times X$ ist.

(ii) Für alle $z, w \in X$ gilt $G(z, w) = G(w, z)$.

(iii) Für jede Funktion $\xi \in \mathcal{C}^2(X)$ gilt

$$\xi(z) = \operatorname{vol}(X)^{-1} \int\limits_X \xi(w)\, \mathrm{d}V_\omega(w) + \int\limits_X G(z, w)\Box\xi(w)\, \mathrm{d}V_\omega(w).$$

(iv) Für alle $z \in X$ gilt $\int\limits_X G(z, w)\, \mathrm{d}V_\omega(w) = 0$.

(v) Es existiert eine Konstante $C_1 > 0$, sodass $G(z, w) > -C_1 \operatorname{diam}(X, g)^2 \operatorname{vol}(X)^{-1}$ für alle $z, w \in X$. Falls $(X, g)$ Ricci-flach ist, dann kann $C_1$ so gewählt werden, dass dies nur von der Dimension von $X$ abhängt.

Bis auf den zweiten Teil von (v) ergeben sich alle Eigenschaften direkt aus der Konstruktion der Green'schen Funktion als Integral des Wärmeleitungskerns. Ein Beweis (im Fall von Riemann'schen Mannigfaltigkeiten) findet sich in [Au98, Chapter 4, § 2.3]. Die verbleibende Aussage basiert auf Abschätzungen des Wärmeleitungskerns aus [CL81] und findet sich in [Siu87, Chapter 3, Appendix A].

## 4.2. Existenz semi-Ricci-flacher Metriken

Wir verwenden die obigen Eigenschaften der Green'schen Funktion, um das folgende Hauptresultat dieses Kapitels zu beweisen.

**Satz 4.2.1** (vgl. Satz 3)**.** *Sei* $(f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}, \lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ *eine effektiv parametrisierte Familie n-dimensionaler polarisierter Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten über einer komplexen Mannigfaltigkeit* $\mathcal{S}$*. Für* $s \in \mathcal{S}$ *bezeichne* $\omega_s$ *die Ricci-flache Kähler-Metrik auf der Faser* $\mathcal{X}_s$ *mit Dolbeault-Kohomologieklasse* $\lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}|_{\mathcal{X}_s}$*. Es gebe eine Konstante* $C = C(n) > 0$ *mit* $\operatorname{diam}(\mathcal{X}_s, \omega_s) \leqslant C$ *für alle* $s \in \mathcal{S}$*, wobei* $\operatorname{diam}(\mathcal{X}_s, \omega_s)$ *den Durchmesser von* $\mathcal{X}_s$ *bezüglich der Metrik* $\omega_s$ *bezeichnet. Dann existiert eine Kähler-Form* $\omega_{SRF}$ *auf* $\mathcal{X}$ *mit* $\omega_{SRF}|_{\mathcal{X}_s} = \omega_s$ *für alle* $s \in \mathcal{S}$*. Außerdem kann* $\omega_{SRF}$ *so gewählt werden, dass es eine Konstante* $C' = C'(n) > 0$ *derart gibt, dass die Faserintegralformel*

$$\int_{\mathcal{X}/\mathcal{S}} \omega_{SRF}^{n+1} = C' \cdot \omega_{WP} \tag{4.1}$$

*erfüllt ist, wobei* $\omega_{WP}$ *die Weil-Petersson-Metrik auf* $\mathcal{S}$ *bezeichnet.*

*Bemerkung* 4.2.2. Eine geschlossene, reelle $(1,1)$-Form auf $\mathcal{X}$, welche die Ricci-flachen Metriken auf den Fasern induziert, wird in [ST07, Lemma 3.1] und [Tos10, Chapter 4] *semi-flach* genannt. Wir verwenden stattdessen die Bezeichnung *semi-Ricci-flach* aus [SW13, Section 3.6.3].

*Beweis.* Ohne Einschränkung nehmen wir $\dim \mathcal{S} = 1$ an. Sei $C = C(n) > 0$ eine Konstante mit $\operatorname{diam}(\mathcal{X}_s, \omega_s) \leqslant C$ für alle $s \in \mathcal{S}$. Wir definieren $\omega_{SRF}$ als

$$\omega_{SRF} := \omega_{\mathcal{X}} + C_1 C^2 \sqrt{-1}\Theta(\mathcal{K}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})\,.$$

Dann ist $\omega_{SRF}$ eine geschlossene, reelle $(1,1)$-Form auf $\mathcal{X}$. Außerdem ist die Einschränkung von $\omega_{SRF}$ auf jede Faser $\mathcal{X}_s$ indentisch mit der Calabi-Yau-Metrik $\omega_s$. Es bleibt noch zu zeigen, dass $\omega_{SRF}$ positiv ist. Dazu stellen wir fest, dass $\omega$ in lokalen Koordinaten gegeben ist durch die Koeffizientenmatrix (vgl. (3.9))

$$\begin{pmatrix} g_{s\bar{s}} + C_1 C^2 \chi & g_{s\overline{\beta}} \\ g_{\alpha\bar{s}} & g_{\alpha\overline{\beta}} \end{pmatrix}.$$

Der Block $(g_{\alpha\overline{\beta}})$ ist offensichtlich positiv definit und die Determinante der obigen Matrix berechnet sich zu

$$\widetilde{g}(g_{s\bar{s}} + C_1 C^2 \chi - g^{\overline{\beta}s} g^{\bar{s}\alpha} g_{\alpha\overline{\beta}}) = \widetilde{g}(\varphi + C_1 C^2 \chi)\,. \tag{4.2}$$

Um die Determinante abzuschätzen, genügt es, den zweiten Faktor zu betrachten, da $\widetilde{g} = \det(g_{\alpha\overline{\beta}})$ positiv ist. Dazu sei $s_0 \in \mathcal{S}$ fixiert und $\varphi(z) := \varphi(z, s_0)$ sowie $X := \mathcal{X}_{s_0}$.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\varphi(z) &\overset{(3.6)}{=} -\operatorname{vol}(X)^{-1}\int_X \varphi(w)\,\mathrm{d}V_\omega(w) + \varphi(z) \\
&\overset{\text{(iii)}}{=} \int_X G(z,w)\Box\varphi(w)\,\mathrm{d}V_\omega(w) \\
&\overset{(3.7)}{=} \int_X G(z,w)(A_s(w)\cdot A_{\overline{s}}(w))\,\mathrm{d}V_\omega(w) - \chi\underbrace{\int_X G(z,w)\,\mathrm{d}V_\omega(w)}_{=0\ \text{(iv)}} \\
&\overset{\text{(v)}}{>} -C_1\operatorname{diam}(X)^2\operatorname{vol}(X)^{-1}\int_X (A_s(w)\cdot A_{\overline{s}}(w))\,\mathrm{d}V_\omega(w) \\
&\overset{(3.8)}{=} -C_1\operatorname{diam}(X)^2\,\chi \geqslant -C_1C^2\,\chi
\end{aligned}$$

und somit ist die Form $\omega_{SRF}$ positiv.

Die Faserintegralformel (4.1) folgt aus den Gleichungen (3.4), (3.5), (3.6) und (4.2). □

*Bemerkung* 4.2.3. Im Fall eines kompakten Parameterraums folgt mit einem Argument aus [Tos10, Section 3] umgekehrt aus der Existenz einer semi-Ricci-flachen Kähler-Metrik die gleichmäßige Beschränktheit des Durchmessers der Fasern.

Die gleichmäßige Beschränktheit des Durchmessers tritt auf bei Degenerationen von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten (vgl. [RZ11, Tos15, Ta14]). Um hierauf näher eingehen zu könnnen, führen wir weitere Notationen ein. Eine *projektive Degeneration* von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten ist eine surjektive holomorphe Abbildung $f\colon \mathcal{X} \to \Delta$ von einer quasi-projektiven Varietät $\mathcal{X}$ auf die Einheitskreisscheibe $\Delta \subset \mathbb{C}$, welche sich über der punktierten Kreisscheibe $\Delta^* := \Delta \setminus \{0\}$ zu einer Familie von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten einschränkt. Nach [Fuj11] lässt sich jede solche Degeneration durch endlichen Basiswechsel und birationale Modifikation entlang der zentralen Faser in ein minimales Modell mit trivialem relativen kanonischen Bündel überführen. Ein solches minimales Modell $f\colon \mathcal{X} \to \Delta$ ist insbesondere *log-kanonisch*, das heißt, $\mathcal{X}$ ist normal und das Paar $(\mathcal{X}, \mathcal{X}_0)$ ist log-kanonisch, wobei $\mathcal{X}_0 := f^*(0)$ die zentrale Faser bezeichnet. Anstatt an dieser Stelle die Singularitäten des Mori-Programms zu diskutieren, verweisen wir auf [KM98, Section 2.3]. Satz 4.2.1 liefert nun eine natürliche (Pseudo-)Metrik auf den minimalen Modellen projektiver Degenerationen von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten. Da die gleichmäßige Beschränktheit der Durchmesser nach [Ta14] auch durch die Weil-Petersson-Distanz charakterisiert werden kann, steht die Existenz einer semi-Ricci-flachen (Pseudo-)Metrik zudem im Zusammenhang mit der Vervollständigung des Modulraums polarisierter Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten nach [Zh15]. Wir fassen diese beiden Aspekte in dem folgenden Korollar zusammen.

**Korollar 4.2.4** (vgl. Korollar 4)**.** *Sei $f\colon \mathcal{X} \to \Delta$ eine log-kanonische projektive Degeneration von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten mit $\mathcal{K}_{\mathcal{X}/\Delta} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$. Es gelte eine der folgenden äquivalenten Aussagen.*

(a) *Der Punkt* 0 *liegt in endlicher Weil-Petersson-Distanz von $\Delta^*$.*

(b) *Die zentrale Faser $\mathcal{X}_0$ hat höchstens kanonische Singularitäten und $K_{\mathcal{X}_0} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0}$.*

*Dann existiert eine semi-positive semi-Ricci-flache Form auf $\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_0$.*

*Beweis.* Wir betrachten die weitere Aussage (c):

Es gibt eine Konstante $C = C(n) > 0$ mit $\operatorname{diam}(\mathcal{X}_t, \omega_t) \leqslant C$ für alle $t \in \Delta^*$.

Dann sind (a), (b) und (c) äquivalent nach [Ta14, Corollary 1.5]. Nun ergibt sich die Behauptung aus dem Beweis von Satz 4.2.1, denn die dortige Argumentation gilt unabhängig davon, ob die betrachtete Familie effektiv parametrisiert ist. □

# 5. Krümmung höherer direkter Bildgarben

In diesem Kapitel untersuchen wir die Bildgarben $R^{n-p}f_*\Omega^p_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(\mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$. Zunächst führen wir weitere Notationen ein, mit denen wir dann eine Krümmungsformel formulieren. Anschließend betrachten wir Anwendungen, wie etwa die Kobayashi-Hyperbolizität des Modulraums polarisierter Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten. Schließlich folgt der Beweis der oben genannten Krümmungsformel.

Es sei $(f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}, \lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ eine Familie polarisierter Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten der Faserdimension $n$ über einer komplexen Mannigfaltigkeit $\mathcal{S}$. Weiter seien $p$ und $m$ ganze Zahlen mit $0 \leqslant p \leqslant n$ und $m \geqslant 0$ sowie $s_0 \in \mathcal{S}$ ein fixierter Punkt. Die Garbe $R^{n-p}f_*\Omega^p_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(\mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ ist aufgrund der Deformationsinvarianz der Hodge-Zahlen lokalfrei vom Rang $r(n,p) = \dim H^{p,n-p}(\mathcal{X}_{s_0})$. Neben den Bezeichnungen aus Kapitel 2 verwenden wir die Konvention, dass Tensoren, welche Differentialformen darstellen, stets antisymmetrisch seien und dabei auftretende Normierungsfaktoren unterdrückt werden. Gemäß Kapitel 2 trägt das relative plurikanonische Bündel $\mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ die Hermite'sche Metrik $\widetilde{g}^{-m}$. Wir bemerken, dass der durch $\widetilde{g}^{-m}$ induzierte Chern-Zusammenhang auf $\mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ kompatibel mit der kovarianten Ableitung bezüglich der Ricci-flachen Kähler-Metriken auf den Fasern ist.

Wir führen weitere Notationen analog zu [Sch12] ein. Sei $s = s^i$ eine Koordinate auf einer offenen Umgebung von $s_0$. Weiter sei $v$ der horizontale Lift des Koordinatenvektorfelds $\partial_s = \partial_{s^i}$ und $A$ der faserweise harmonische Repräsentant der zugehörigen Kodaira-Spencer-Klasse. In diesem Kapitel bezeichne $\psi$ stets einen $\overline{\partial}$-geschlossenen, faserweise harmonischen Repräsentanten eines lokalen Schnitts von $R^{n-p}f_*\Omega^p_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(\mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ nach Lemma 2.4.5. In lokalen Koordinaten notieren wir die Einschränkung von $\psi$ auf die Faser $\mathcal{X}_s$ als

$$\begin{aligned}\psi|_{\mathcal{X}_s} &= \psi_{\alpha_1\dots\alpha_p\overline{\beta}_{p+1}\dots\overline{\beta}_n}\,\mathrm{d}z^{\alpha_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}z^{\alpha_p}\wedge\mathrm{d}z^{\overline{\beta}_{p+1}}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}z^{\overline{\beta}_n}\\ &= \psi_{A_p\overline{B}_{n-p}}\,\mathrm{d}z^{A_p}\wedge\mathrm{d}z^{\overline{B}_{n-p}}\,,\end{aligned}$$

wobei wir die Abkürzungen $A_p = (\alpha_1\dots\alpha_p)$ und $\overline{B}_{n-p} = (\overline{\beta}_{p+1}\dots\overline{\beta}_n)$ einführen. Als grundlegende Eigenschaft ergibt sich aus der $\overline{\partial}$-Geschlossenheit die Identität

$$\partial_{\overline{s}}\psi_{\alpha_1\dots\alpha_p\overline{\beta}_{p+1}\dots\overline{\beta}_n} = \sum_{j=p+1}^{n}(-1)^{n-j}\psi_{\alpha_1\dots\alpha_p\overline{\beta}_{p+1}\dots\widehat{\overline{\beta}_j}\dots\overline{\beta}_n\overline{s};\overline{\beta}_j}\,. \tag{5.1}$$

Hierbei ist $\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p \overline{\beta}_{p+1} \dots \widehat{\overline{\beta}_j} \dots \overline{\beta}_n \overline{s}}$ die

$$\mathrm{d}z^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}z^{\alpha_p} \wedge \mathrm{d}z^{\overline{\beta}_{p+1}} \wedge \dots \wedge \widehat{\mathrm{d}z^{\overline{\beta}_j}} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}z^{\overline{\beta}_n} \wedge \mathrm{d}s\text{-Komponente}$$

von $\psi$, wobei der Index $\overline{\beta}_j$ ausgelassen wird. Wir definieren nun ein faserweises Cup-Produkt auf $\mathcal{X}$. Dazu sei $\xi$ eine $\mathcal{T}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$-wertige $(a,b)$-Form, welche auf den Fasern gegeben ist als

$$\xi^{\sigma}{}_{\gamma_1 \dots \gamma_a \overline{\delta}_1 \dots \overline{\delta}_b} \partial_\sigma \, \mathrm{d}z^{\gamma_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}z^{\gamma_a} \wedge \mathrm{d}z^{\overline{\delta}_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}z^{\overline{\delta}_b} \, .$$

Dann sei das *Cup-Produkt* $\xi \cup \psi$ in lokalen Koordinaten definiert durch

$$\begin{aligned} &\xi^{\sigma}{}_{\gamma_1 \dots \gamma_a \overline{\delta}_1 \dots \overline{\delta}_b} \psi_{\sigma \alpha_2 \dots \alpha_p \overline{\beta}_{p+1} \dots \overline{\beta}_n} \\ &\mathrm{d}z^{\gamma_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}z^{\gamma_a} \wedge \mathrm{d}z^{\overline{\delta}_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}z^{\overline{\delta}_b} \wedge \mathrm{d}z^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}z^{\alpha_p} \wedge \mathrm{d}z^{\overline{\beta}_{p+1}} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}z^{\overline{\beta}_n} \, . \end{aligned} \tag{5.2}$$

Analog definieren wir $\overline{\xi} \cup \psi$. Insbesondere erhalten wir Abbildungen

$$A \cup \_ : \mathcal{A}^{0,n-p}\left(\mathcal{X}_s, \Omega^p_{\mathcal{X}_s}\left(\mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}_s}\right)\right) \to \mathcal{A}^{0,n-p+1}\left(\mathcal{X}_s, \Omega^{p-1}_{\mathcal{X}_s}\left(\mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}_s}\right)\right) \text{ und} \tag{5.3}$$

$$\overline{A} \cup \_ : \mathcal{A}^{0,n-p}\left(\mathcal{X}_s, \Omega^p_{\mathcal{X}_s}\left(\mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}_s}\right)\right) \to \mathcal{A}^{0,n-p-1}\left(\mathcal{X}_s, \Omega^{p+1}_{\mathcal{X}_s}\left(\mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}_s}\right)\right) . \tag{5.4}$$

(Für $p = 0$ ist die erste und für $p = n$ die zweite Abbildung identisch Null.)

Wir wählen eine lokale Basis $\left\{\widetilde{\psi}^k \,\middle|\, 1 \leqslant k \leqslant r(n,p)\right\}$ von $R^{n-p} f_* \Omega^p_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(\mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ über einer Stein'schen offenen Koordinatenumgebung $U$ von $s_0$. Nach Lemma 2.4.5 existiert über $U$ (nach eventueller Verkleinerung) für jedes $\widetilde{\psi}^k$ ein $\overline{\partial}$-geschlossener Repräsentant $\psi^k \in \mathcal{A}^{p,n-p}(\mathcal{X}, \mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ derart, dass die Einschränkung von $\psi^k$ auf jede Faser über $U$ harmonisch ist. Das Produkt von bündelwertigen Diffenrentialformen auf den Fasern berechnet sich als

$$\psi^k \cdot \psi^{\overline{\ell}} \, \mathrm{d}V_\omega = (\sqrt{-1})^n (-1)^{n(n-p)} \frac{1}{\widetilde{g}^m} \psi^k \wedge \psi^{\overline{\ell}} \tag{5.5}$$

und wir definieren die *$L^2$-Metrik* auf $R^{n-p} f_* \Omega^p_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(\mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ durch

$$h^{\overline{\ell}k}(s) := \langle \psi^k, \psi^\ell \rangle := \int_{\mathcal{X}_s} \psi^k \cdot \psi^{\overline{\ell}} \, \mathrm{d}V_\omega \, . \tag{5.6}$$

Dabei bezeichne $\mathrm{d}V_\omega$ die relative Volumenform zu $\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$. Mit den Eigenschaften des Faserintegrals ergibt sich, dass $h^{\overline{\ell}k}$ glatt vom Parameter $s$ abhängt und somit tatsächlich eine Hermite'sche Metrik definiert. (An dieser Stelle ist es zweckmäßig die Metrik mit oberen Indizes zu notieren.) Die induzierten Normen notieren wir mit $\|\cdot\|$.

Nun können wir das Hauptresultat dieses Kapitels formulieren. Dabei bezeichne H die harmonische Projektion von Tensoren auf den Fasern. Den Beweis führen wir in Abschnitt 5.2.

**Satz 5.0.1** (vgl. Satz 5)**.** *Sei* $(f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}, \lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ *eine Familie n-dimensionaler polarisierter Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten über einer komplexen Mannigfaltigkeit* $\mathcal{S}$*. Dann gilt mit den obigen Bezeichnungen für den Krümmungstensor der* $L^2$*-Metrik auf* $R^{n-p}f_*\Omega^p_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(\mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ *im Punkt* $s_0 \in \mathcal{S}$ *in geeigneten Koordinaten*

$$\begin{aligned} R_{i\overline{\jmath}}{}^{\overline{\ell}k}(s_0) = m & \int\limits_{\mathcal{X}_{s_0}} \mathrm{H}(A_i \cdot A_{\overline{\jmath}}) \cdot \mathrm{H}(\psi^k \cdot \psi^{\overline{\ell}}) \,\mathrm{d}V_\omega \\ & + \int\limits_{\mathcal{X}_{s_0}} \mathrm{H}(A_i \cup \psi^k) \cdot \mathrm{H}(A_{\overline{\jmath}} \cup \psi^{\overline{\ell}}) \,\mathrm{d}V_\omega \\ & - \int\limits_{\mathcal{X}_{s_0}} \mathrm{H}(A_i \cup \psi^{\overline{\ell}}) \cdot \mathrm{H}(A_{\overline{\jmath}} \cup \psi^k) \,\mathrm{d}V_\omega \,. \end{aligned} \tag{5.7}$$

*Bemerkung* 5.0.2. Gleichung (5.7) liefert für den Krümmungstensor

$$\begin{aligned} R(A, \overline{A}, \psi, \overline{\psi}) &= \tfrac{m}{V}\|A\|^2\|\psi\|^2 + \|A \cup \psi\|^2 - \|A \cup \overline{\psi}\|^2 && (5.8)\\ &= \tfrac{m}{V}\|A\|^2\|\psi\|^2 + \|A \cup \psi\|^2 - \|\overline{A} \cup \psi\|^2 \,, && (5.9) \end{aligned}$$

wobei die Normen von den entsprechenden $L^2$-Metriken induziert seien und $V$ das Faservolumen bezeichnet. Die erste Gleichung ergibt sich aus (5.10) und für die zweite Gleichung siehe [Sch14, Remark 1]. Nach [Gri70, (5.4)] sind für $m = 0$ die letzten beiden Summanden in (5.9) identisch mit der Krümmung der Hodge-Metrik auf dem Bündel $R^{n-p}f_*\Omega^p_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$.

## 5.1. Anwendungen der Krümmungsformel

In diesem Abschnitt besprechen wir zwei Anwendungen der Krümmungsformel (5.7). Wir erhalten eine Positivitätsaussage für direkte Bildgarben. Außerdem gehen wir kurz auf die Kobayashi-Hyperbolizität des Modulraums ein.

Nach Korollar 2 sind die (höheren) direkten Bildgarben $R^q f_*\mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ semi-positiv im Sinne von Nakano für alle $m \geqslant 2$ und $q \geqslant 0$. Im Fall einer effektiv parametrisierten Familie liefert Satz 5.0.1 für $q = 0$ eine stärkere Aussage.

**Korollar 5.1.1** (vgl. Korollar 6)**.** *Sei* $(f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}, \lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ *eine effektiv parametrisierte Familie polarisierter Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten über einer komplexen Mannigfaltigkeit* $\mathcal{S}$*. Dann sind die Bildgarben* $f_*\mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ *positive Geradenbündel für alle* $m \geqslant 2$*.*

*Beweis.* Für $0 \leqslant p \leqslant n$ und $m \geqslant 1$ ist der erste Summand in (5.7) darstellbar als

$$\begin{aligned} & m \int\limits_{\mathcal{X}_{s_0}} \mathrm{H}(A_i \cdot A_{\overline{\jmath}}) \cdot \mathrm{H}(\psi^k \cdot \psi^{\overline{\ell}}) \,\mathrm{d}V_\omega = m\,\mathrm{H}(A_i \cdot A_{\overline{\jmath}}) \int\limits_{\mathcal{X}_{s_0}} \mathrm{H}(\psi^k \cdot \psi^{\overline{\ell}}) \,\mathrm{d}V_\omega \\ &= m \operatorname{vol}(\mathcal{X}_{s_0})^{-1} \int\limits_{\mathcal{X}_{s_0}} \mathrm{H}(A_i \cdot A_{\overline{\jmath}}) \,\mathrm{d}V_\omega \int\limits_{\mathcal{X}_{s_0}} \mathrm{H}(\psi^k \cdot \psi^{\overline{\ell}}) \,\mathrm{d}V_\omega = m \operatorname{vol}(\mathcal{X}_{s_0})^{-1} G^{WP}_{i\overline{\jmath}} h^{\overline{\ell}k} \,. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Für $p = n$ ist die betrachtete Garbe $f_*\mathcal{K}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}^{\otimes(m+1)}$ ein Geradenbündel, da das kanonische Bündel der Fasern trivial ist. (Diese Feststellung ist hier nicht entscheidend.) In diesem Fall verschwindet der Term $A_{\bar{\jmath}} \cup \psi^k$, das heißt, in (5.7) treten lediglich die ersten beiden Summanden auf. Der erste Summand ist nach (5.10) positiv definit und der zweite Summand liefert keinen negativen Beitrag, denn mit $(\xi^i) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ und $\psi = \psi^1$ gilt

$$\xi^i \xi^{\bar{\jmath}} \int_{\mathcal{X}_{s_0}} \mathrm{H}(A_i \cup \psi) \cdot \mathrm{H}(A_{\bar{\jmath}} \cup \psi) \, \mathrm{d}V_\omega = \|\mathrm{H}(\xi^i A_i \cup \psi)\|^2 \geqslant 0 \,.$$

Damit ist $f_*\mathcal{K}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}^{\otimes m'}$ für alle $m' \geqslant 2$ ein positives Geradenbündel. □

Auf $R^p f_* \Lambda^p \mathcal{T}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ ist eine $L^2$-Metrik analog zu (5.6) definiert. Durch relative Serre-Dualität (vgl. (2.2)) geht die $L^2$-Metrik auf $R^{n-p} f_* \Omega^p_{\mathcal{X}/\mathcal{X}}(\mathcal{K}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ über in die $L^2$-Metrik auf $R^p f_* \Lambda^p \mathcal{T}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$. (Dies folgt aus der entsprechenden faserweisen Aussage.) Die Abbildungen (5.3) und (5.4) besitzen duale Abbildungen

$$A \wedge \_ : \mathcal{A}^{0,p}(\mathcal{X}_s, \Lambda^p \mathcal{T}_{\mathcal{X}_s}) \to \mathcal{A}^{0,p+1}\left(\mathcal{X}_s, \Lambda^{p+1} \mathcal{T}_{\mathcal{X}_s}\right) \text{ und} \tag{5.11}$$

$$\overline{A} \wedge \_ : \mathcal{A}^{0,p}(\mathcal{X}_s, \Lambda^p \mathcal{T}_{\mathcal{X}_s}) \to \mathcal{A}^{0,p-1}\left(\mathcal{X}_s, \Lambda^{p-1} \mathcal{T}_{\mathcal{X}_s}\right) , \tag{5.12}$$

wobei sich (5.11) durch äußeres Produkt (im Bündel- sowie im Formanteil) und (5.12) durch Kontraktion ergibt. Wir erhalten eine duale Version von Satz 5.0.1. Dazu seien $\{\nu_k \mid 1 \leqslant k \leqslant r(n,p)\}$ faserweise harmonische, $\overline{\partial}$-geschlossene Repräsentanten einer lokalen Basis von $R^p f_* \Lambda^p \mathcal{T}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ über einer Stein'schen Koordinatenumgebung von $s_0 \in \mathcal{S}$.

**Satz 5.1.2** (vgl. Satz 7)**.** *Sei $(f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}, \lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ eine Familie polarisierter Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten über einer komplexen Mannigfaltigkeit $\mathcal{S}$. Dann gilt mit den obigen Bezeichnungen für den Krümmungstensor der $L^2$-Metrik auf $R^p f_* \Lambda^p \mathcal{T}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ im Punkt $s_0 \in \mathcal{S}$ in geeigneten Koordinaten*

$$\begin{aligned} R_{i\bar{\jmath}k\bar{\ell}}(s_0) = &- \int_{\mathcal{X}_{s_0}} \mathrm{H}(A_i \cdot A_{\bar{\jmath}}) \cdot \mathrm{H}(\nu_k \cdot \nu_{\bar{\ell}}) \, \mathrm{d}V_\omega \\ &- \int_{\mathcal{X}_{s_0}} \mathrm{H}(A_i \wedge \nu_{\bar{\ell}}) \cdot \mathrm{H}(A_{\bar{\jmath}} \wedge \nu_k) \, \mathrm{d}V_\omega \\ &+ \int_{\mathcal{X}_{s_0}} \mathrm{H}(A_i \wedge \nu_k) \cdot \mathrm{H}(A_{\bar{\jmath}} \wedge \nu_{\bar{\ell}}) \, \mathrm{d}V_\omega \,. \end{aligned} \tag{5.13}$$

*Beweis.* Der Beweis folgt mit den obigen Vorbemerkungen unmittelbar aus Satz 5.0.1. □

Es ist bekannt, dass der Modulraum polarisierter Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten Kobayashi-hyperbolisch ist. Um dies zu beweisen, verwendet man üblicherweise Torelli-Sätze. Wir gehen nun darauf ein, wie sich die Kobayashi-Hyperbolizität mittels des obigen Satzes einsehen lässt. Dazu formulieren wir zunächst das folgende Korollar.

**Korollar 5.1.3.** *Sei $(f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}, \lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ eine Familie polarisierter Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten über einer komplexen Mannigfaltigkeit $\mathcal{S}$. Weiter sei $\nu$ eine $\overline{\partial}$-geschlossene, faserweise harmonische, $\Lambda^p\mathcal{T}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$-wertige $(0,p)$-Form auf einer offenen Umgebung von $s_0 \in \mathcal{S}$. Außerdem sei $V$ das Volumen der Faser $\mathcal{X}_{s_0}$. Dann gilt für den Krümmungstensor der $L^2$-Metrik auf $R^p f_*\Lambda^p\mathcal{T}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ im Punkt $s_0$*

$$R(A,\overline{A},\nu,\overline{\nu}) = -V^{-1}\|A\|^2\|\nu\|^2 - \|\mathrm{H}(A\wedge\nu)\|^2 + \|\mathrm{H}(A\wedge\overline{\nu})\|^2\,. \tag{5.14}$$

*Beweis.* Dies folgt durch Einsetzen in Gleichung (5.13) (vgl. auch (5.8)). □

Gleichung (5.14) impliziert

$$R(A,\overline{A},\nu,\overline{\nu}) \leqslant -\|\mathrm{H}(A\wedge\nu)\|^2 + \|\mathrm{H}(A\wedge\overline{\nu})\|^2\,. \tag{5.15}$$

In [Sch12] wurde eine entsprechende Abschätzung in der Situation kanonisch polarisierter Varietäten gezeigt. Darauf basierend wird in [Sch14] eine Finsler-Metrik auf dem Parameterraum effektiv parametrisierter Familien konstruiert, deren Krümmung durch eine negative Konstante nach oben beschränkt ist. Für Familien polarisierter Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten kann durch analoge Argumentation eine Finsler-Metrik auf $\mathcal{S}$ konstruiert werden, deren Krümmung ebenfalls durch eine negative Konstante nach oben beschränkt ist. (Die Konstruktion ist identisch, man vergleiche (5.15) mit [Sch14, (11)].) Hieraus folgt die Kobayashi-Hyperbolizität von $\mathcal{S}$ (siehe etwa [Ko98]). Dies zeigt, dass jeder komplexe Unterraum des Modulstacks polarisierter Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten Kobayashi-hyperbolisch ist.

## 5.2. Berechnung des Krümmungstensors

In diesem Abschnitt beweisen wir die Krümmungsformel (5.7). Dazu benötigen wir einige Vorarbeit und orientieren uns an [Sch12]. Wir konzentrieren uns insbesondere auf die Stellen, an denen sich die Berechnung vom Fall kanonisch polarisierter Varietäten unterscheidet und nehmen ohne Einschränkung $\dim\mathcal{S} = 1$ an.

Es sind die ersten beiden Ableitungen von $h^{\overline{\ell}k}$ zu berechnen. Dabei verwenden wir die Eigenschaften des Faserintegrals.

**Lemma 5.2.1** ([Sch12, Lemma 9])**.** *Es gilt*

$$\partial_s h^{\overline{\ell}k} = \langle L_v\psi^k, \psi^\ell\rangle + \langle \psi^k, L_{\overline{v}}\psi^\ell\rangle\,. \tag{5.16}$$

*Beweis.* Nach (5.6) und (5.5) sowie (2.1) genügt es, die Gleichung $L_v\widetilde{g} = 0$ zu zeigen. Die $(1,1)$-Komponente von $L_v g_{\alpha\overline{\beta}}$ berechnet sich als

$$\begin{aligned}&\partial_s g_{\alpha\overline{\beta}} + a_s^\gamma g_{\alpha\overline{\beta};\gamma} + g_{\gamma\overline{\beta}} a^\gamma_{s;\alpha}\\ &\qquad = -a_{s\overline{\beta};\alpha} + a_{s\overline{\beta};\alpha} = 0\end{aligned}$$

und hieraus folgt

$$L_v \widetilde{g} = L_v \det(g_{\alpha\overline{\beta}}) = 0\,. \tag{5.17}$$

□

Das nächste Lemma ersetzt [Sch12, Lemma 13] in der hier vorliegenden Situation.

**Lemma 5.2.2.** *Für die Laplace-Operatoren* $\Box_\partial$ *und* $\Box_{\overline{\partial}}$ *auf* $\mathcal{A}^{p,q}(\mathcal{K}_{\mathcal{X}_s}^{\otimes m})$ *gilt die Identität*

$$\Box_\partial = \Box_{\overline{\partial}}\,. \tag{5.18}$$

*Beweis.* Wir bemerken, dass die von $\omega_s$ auf dem Bündel $\mathcal{K}_{\mathcal{X}_s}^{\otimes m}$ induzierte Metrik flach ist. Bezeichne $\Lambda$ den zugehörigen Lefschetz-Operator. Dann folgt mit der Akizuki-Nakano-Identität

$$\Box_{\overline{\partial}} - \Box_\partial = \left[\sqrt{-1}\Theta(\mathcal{K}_{\mathcal{X}_s}^{\otimes m}), \Lambda\right] = 0\,.$$

□

Im Folgenden ist zu beachten, dass Lie-Ableitungen den Typ von Differentialformen nicht erhalten. Daher führen wir Bezeichnungen für die auftretenden Komponenten ein. Dabei sei $\psi$ ein faserweise harmonischer, $\overline{\partial}$-geschlossener Repräsentant eines lokalen Schnitts von $R^{n-p} f_* \Omega^p_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(\mathcal{K}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}^{\otimes m})$ und $v = \partial_i + a_s^\alpha \partial_\alpha$ der horizontale Lift des Koordinatenvektorfelds $\partial_s$. Dann besitzt $L_v\psi$ Summanden vom Typ $(p, n-p)$ sowie vom Typ $(p-1, n-p+1)$, die wir mit $(L_v\psi)'$ bzw. $(L_v\psi)''$ bezeichnen. Das heißt, es ist $L_v\psi = (L_v\psi)' + (L_v\psi)''$ mit

$$(L_v\psi)' = (\psi_{;s} + a_s^\alpha \psi_{;\alpha} + \sum_{j=1}^{p} a^\alpha_{s;\alpha_j} \psi_{\alpha_1 \ldots \underset{j}{\underset{|}{\alpha}} \ldots \alpha_p \overline{B}_{n-p}})\, \mathrm{d}z^{A_p} \wedge \mathrm{d}z^{\overline{B}_{n-p}} \quad \text{und} \tag{5.19}$$

$$(L_v\psi)'' = \sum_{j=1}^{p} A_s{}^\alpha{}_{\overline{\beta}_p} \psi_{\alpha_1 \ldots \underset{j}{\underset{|}{\alpha}} \ldots \alpha_p \overline{B}_{n-p}}\, \mathrm{d}z^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \underset{j}{\underset{|}{\mathrm{d}z^{\overline{\beta}_p}}} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z^{\alpha_p} \wedge \mathrm{d}z^{\overline{\beta}_{p+1}} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z^{\overline{\beta}_n}\,. \tag{5.20}$$

Entsprechend schreiben wir $L_{\overline{v}}\psi = (L_{\overline{v}}\psi)' + (L_{\overline{v}}\psi)''$ mit

$$(L_{\overline{v}}\psi)' = (\psi_{;\overline{s}} + a_{\overline{s}}^{\overline{\beta}} \psi_{;\overline{\beta}} + \sum_{j=p+1}^{n} a^{\overline{\beta}}_{\overline{s};\overline{\beta}_j} \psi_{A_p \overline{\beta}_{p+1} \ldots \underset{j}{\underset{|}{\overline{\beta}}} \ldots \overline{\beta}_n})\, \mathrm{d}z^{A_p} \wedge \mathrm{d}z^{\overline{B}_{n-p}} \quad \text{und} \tag{5.21}$$

$$(L_{\overline{v}}\psi)'' = \sum_{j=p+1}^{n} A_{\overline{s}}{}^{\overline{\beta}}{}_{\alpha_{p+1}} \psi_{A_p \overline{\beta}_{p+1} \ldots \underset{j}{\underset{|}{\overline{\beta}}} \ldots \overline{\beta}_n}\, \mathrm{d}z^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z^{\alpha_p} \wedge \mathrm{d}z^{\overline{\beta}_1} \wedge \ldots \wedge \underset{j}{\underset{|}{\mathrm{d}z^{\alpha_{p+1}}}} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z^{\overline{\beta}_n}\,. \tag{5.22}$$

Mit diesen Bezeichnungen und der Definition des Cup-Produkts (5.2) ergibt sich unmittelbar das nachfolgende Lemma.

**Lemma 5.2.3** ([Sch12, Lemma 10]). *Es gilt*

$$(L_v\psi)'' = A_s \cup \psi\,, \tag{5.23}$$
$$(L_{\overline{v}}\psi)'' = (-1)^p A_{\overline{s}} \cup \psi\,. \tag{5.24}$$

Wie in der Situation kanonisch polarisierter Varietäten lässt sich wegen Lemma 2.4.5 eine weitere Lie-Ableitung unmittelbar angeben. Dazu notieren wir mit $\overline{v}\cup\psi$ das durch Kontraktion gegebene Cup-Produkt

$$\psi_{A_p\overline{s}\overline{\beta}_{p+1}\dots\overline{\beta}_{n-1}} + a_{\overline{s}}^{\overline{\beta}}\psi_{A_p\overline{\beta}\overline{\beta}_{p+1}\dots\overline{\beta}_{n-1}}$$

auf dem Totalraum.

**Lemma 5.2.4** ([Sch12, Lemma 11]). *Es gilt*

$$(L_{\overline{v}}\psi)' = (-1)^p\overline{\partial}(\overline{v}\cup\psi)\,. \tag{5.25}$$

Nun können wir die Auswertung der ersten Ableitung der Metrik fortsetzen.

**Lemma 5.2.5.** *Es gilt*

$$\langle\psi^k, (L_{\overline{v}}\psi^\ell)'\rangle = 0\,. \tag{5.26}$$

*Beweis.* Die Behauptung folgt aus Gleichung (5.25) und der Harmonizität von $\psi^k|_{\mathcal{X}_s}$. □

**Lemma 5.2.6.** *Es gilt*

$$\partial_s h^{\overline{\ell}k} = \langle L_v\psi^k, \psi^\ell\rangle\,. \tag{5.27}$$

*Beweis.* Die Behauptung folgt aus Gleichung (5.16) und (5.26). □

Im Folgenden wählen wir Normalkoordinaten bezüglich der Metrik $h^{\overline{\ell}k}$ im Punkt $s_0 \in \mathcal{S}$, das heißt, wir haben $\partial_s h^{\overline{\ell}k}|_{s_0} = 0$. Damit ergibt sich sofort, dass der einfach gestrichene Anteil obiger Lie-Ableitung im Kern der harmonischen Projektion liegt.

**Lemma 5.2.7.** *Der harmonische Anteil von $(L_v\psi^k)'$ verschwindet im Punkt $s_0$, das heißt, es gilt*

$$\mathrm{H}(L_v\psi^k)'|_{s_0} = 0\,. \tag{5.28}$$

*Beweis.* Die Einschränkungen $\psi^\ell|_{\mathcal{X}_s}$ bilden eine Basis des Raums der harmonischen Formen $\mathcal{H}^{p,n-p}(\mathcal{K}_{\mathcal{X}_s}^{\otimes m})$, daher folgt die Behauptung aus Gleichung (5.27). □

Wir fahren nun fort mit der Berechnung der zweiten Ableitung der Metrik $h^{\overline{\ell}k}$.

**Lemma 5.2.8.** *Es gilt*

$$\partial_{\overline{s}}\partial_s h^{\overline{\ell}k} = \langle L_{[\overline{v},v]}\psi^k, \psi^\ell\rangle + \langle L_v\psi^k, L_v\psi^\ell\rangle - \langle L_{\overline{v}}\psi^k, L_{\overline{v}}\psi^\ell\rangle\,. \tag{5.29}$$

*Beweis.* Es ist

$$\begin{aligned}
\partial_{\overline{s}}\partial_s h^{\overline{\ell}k} &\overset{(5.27)}{=} \frac{\partial}{\partial \overline{s}}\langle L_v \psi^k, \psi^\ell\rangle \\
&\overset{(5.17)}{=} \langle L_{\overline{v}} L_v \psi^k, \psi^\ell\rangle + \langle L_v \psi^k, L_v \psi^\ell\rangle \\
&= \langle L_{[\overline{v},v]} \psi^k, \psi^\ell\rangle + \langle L_v L_{\overline{v}} \psi^k, \psi^\ell\rangle + \langle L_v \psi^k, L_v \psi^\ell\rangle \\
&\overset{(5.17)}{=} \langle L_{[\overline{v},v]} \psi^k, \psi^\ell\rangle + \partial_s \langle L_{\overline{v}} \psi^k, \psi^\ell\rangle - \langle L_{\overline{v}} \psi^k, L_{\overline{v}} \psi^\ell\rangle + \langle L_v \psi^k, L_v \psi^\ell\rangle \\
&\overset{(5.26)}{=} \langle L_{[\overline{v},v]} \psi^k, \psi^\ell\rangle - \langle L_{\overline{v}} \psi^k, L_{\overline{v}} \psi^\ell\rangle + \langle L_v \psi^k, L_v \psi^\ell\rangle\,.
\end{aligned}$$

□

Der Rest dieses Abschnitts widmet sich der Auswertung der Terme in Gleichung (5.29). Wir beginnen mit dem ersten Summanden. Die folgende Aussage korrespondiert zu [Sch12, Lemma 14].

**Lemma 5.2.9.** *Auf den Fasern $\mathcal{X}_s$ gilt die Identität*

$$L_{[\overline{v},v]}\psi^k = \left[-\varphi^{;\alpha}\partial_\alpha + \varphi^{;\overline{\beta}}\partial_{\overline{\beta}}, \psi^k\right] - m\cdot\chi\cdot\psi^k\,,$$

*wobei der erste Summand als Lie-Ableitung im Formanteil von $\psi^k$ zu verstehen ist.*

*Beweis.* Der Kommutator der Vektorfelder $\overline{v}$ und $v$ liefert den Beitrag

$$(\partial_{\overline{s}} a_s^\alpha + a_{\overline{s}}^{\overline{\delta}} a^\alpha_{s;\overline{\delta}})\partial_\alpha - (\partial_s a_{\overline{s}}^{\overline{\beta}} + a_s^\gamma a^{\overline{\beta}}_{\overline{s};\gamma})\partial_{\overline{\beta}}\,.$$

Mit Lemma 3.1.1 vereinfacht sich die erste Klammer zu $-\varphi^{;\alpha}$ und entsprechend die zweite Klammer zu $-\varphi^{;\overline{\beta}}$. In der Bündelkomponente wirkt die Lie-Ableitung durch kovariante Ableitung. Dieser Anteil liefert den Beitrag

$$-m\sqrt{-1}\Theta(v,\overline{v}) = -m\chi\,,$$

denn für den (graduierten) Kommutator der beiden Komponenten $\partial$ und $\overline{\partial}$ des Chern-Zusammenhangs auf $\mathcal{K}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ gilt $[\overline{\partial},\partial] = \overline{\partial}\partial + \partial\overline{\partial} = (\partial+\overline{\partial})^2 = \Theta(\mathcal{K}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})\wedge \_$. □

Das nächste Lemma schließt die Auswertung des ersten Summanden ab und ist die entsprechende Version von [Sch12, Lemma 15] in unserem Ricci-flachen Fall.

**Lemma 5.2.10.** *Es gilt*

$$\langle L_{[\overline{v},v]}\psi^k, \psi^\ell\rangle = -m\langle \mathrm{H}(A_s\cdot A_{\overline{s}}), \mathrm{H}(\psi^{\overline{k}}\cdot\psi^\ell)\rangle\,. \tag{5.30}$$

*Beweis.* Analog zum Beweis von [Sch12, Proposition 15] ist

$$\langle\left[\varphi^{;\alpha}\partial_\alpha, \psi^k\right], \psi^\ell\rangle = 0$$

und

$$\langle\left[\varphi^{;\overline{\beta}}\partial_{\overline{\beta}}, \psi^k\right], \psi^\ell\rangle = 0\,.$$

Nun folgt die Behauptung aus Lemma 5.2.9 und Proposition 3.2.9. □

Für die Auswertung der letzten beiden Summanden ist die folgende Beobachtung nützlich.

**Lemma 5.2.11.** *Es gilt*

$$\langle L_v\psi^k, L_v\psi^\ell\rangle = (\langle L_v\psi^k)', (L_v\psi^\ell)'\rangle - \langle A_s \cup \psi^k, A_s \cup \psi^\ell\rangle\,, \tag{5.31}$$
$$\langle L_{\overline{v}}\psi^k, L_{\overline{v}}\psi^\ell\rangle = \langle (L_{\overline{v}}\psi^k)', (L_{\overline{v}}\psi^\ell)'\rangle - \langle A_{\overline{s}} \cup \psi^k, A_{\overline{s}} \cup \psi^\ell\rangle\,. \tag{5.32}$$

*Beweis.* Aus der Definition der einfach und zweifach gestrichenen Anteile sowie des faserweisen inneren Produkts (5.5) folgt

$$\langle L_v\psi^k, L_v\psi^\ell\rangle = \langle (L_v\psi^k)', (L_v\psi^\ell)'\rangle - \langle (L_v\psi^k)'', (L_v\psi^\ell)''\rangle\,,$$
$$\langle L_{\overline{v}}\psi^k, L_{\overline{v}}\psi^\ell\rangle = \langle (L_{\overline{v}}\psi^k)', (L_{\overline{v}}\psi^\ell)'\rangle - \langle (L_{\overline{v}}\psi^k)'', (L_{\overline{v}}\psi^\ell)''\rangle\,.$$

(Hier ist zu beachten, dass bei den Subtrahenden das Produkt von Formen des Typs $(p-1, n-p+1)$ bzw. $(p+1, n-p-1)$ gebildet wird.) Die Behauptung ergibt sich nun aus den Gleichungen (5.23) und (5.24). □

Die nächste Proposition stellt einen Zusammenhang zwischen einfach gestrichenen Anteilen von Lie-Ableitungen und harmonischen Repräsentanten von Kodaira-Spencer-Klassen her. Dabei wird insbesondere von Gleichung (5.1) Gebrauch gemacht.

**Proposition 5.2.12** ([Sch12, Proposition 16])**.** *Es gelten die folgenden Gleichungen:*

$$\overline{\partial}(L_v\psi^k)' = \partial(A_s \cup \psi^k) \tag{5.33}$$
$$\overline{\partial}^*(L_v\psi^k)' = 0 \tag{5.34}$$
$$\partial^*(A_s \cup \psi^k) = 0 \tag{5.35}$$
$$\overline{\partial}^*(L_{\overline{v}}\psi^k)' = \partial^*(A_{\overline{s}} \cup \psi^k) \tag{5.36}$$
$$\overline{\partial}(L_{\overline{v}}\psi^k)' = 0 \tag{5.37}$$
$$\partial(A_{\overline{s}} \cup \psi^k) = 0\,. \tag{5.38}$$

*Beweis.* Die Rechnungen im Beweis von [Sch12, Proposition 16] sind unabhängig vom konkreten Wert der Einstein-Konstanten und gelten daher auch für Ricci-flache Mannigfaltigkeiten. □

Nach diesen Vorarbeiten können wir nun die letzten beiden Summanden in (5.29) mittels Hodge-Theorie auswerten.

**Lemma 5.2.13.** *Es gilt*

$$\langle (L_v\psi^k)', (L_v\psi^\ell)'\rangle = \langle A_s \cup \psi^k, A_s \cup \psi^\ell\rangle - \langle \mathrm{H}(A_s \cup \psi^k), \mathrm{H}(A_s \cup \psi^\ell)\rangle\,, \tag{5.39}$$
$$\langle (L_{\overline{v}}\psi^k)', (L_{\overline{v}}\psi^\ell)'\rangle = \langle A_{\overline{s}} \cup \psi^k, A_{\overline{s}} \cup \psi^\ell\rangle - \langle \mathrm{H}(A_{\overline{s}} \cup \psi^k), \mathrm{H}(A_{\overline{s}} \cup \psi^\ell)\rangle\,. \tag{5.40}$$

*Beweis.* Es bezeichne $\mathrm{G}_\partial$ und $\mathrm{G}_{\overline{\partial}}$ die Green'schen Operatoren zu $\partial$ bzw. $\overline{\partial}$. Nach Lemma 5.2.2 gilt $\Box = \Box_\partial = \Box_{\overline{\partial}}$ sowie $\mathrm{G} = \mathrm{G}_\partial = \mathrm{G}_{\overline{\partial}}$. Damit ist

$$\begin{aligned}(L_v\psi^k)' &\overset{(5.28)}{=} \mathrm{G}\,\Box(L_v\psi^k)' \\ &\overset{(5.34)}{=} \mathrm{G}\,\overline{\partial}^*\overline{\partial}(L_v\psi^k)' \\ &\overset{(5.33)}{=} \mathrm{G}\,\overline{\partial}^*\partial(A_s \cup \psi^k)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\langle (L_v\psi^k)', (L_v\psi^\ell)' \rangle &= \langle \mathrm{G}\,\partial(A_s \cup \psi^k), \overline{\partial}(L_v\psi^\ell)' \rangle \\ &\overset{(5.33)}{=} \langle \mathrm{G}\,\partial(A_s \cup \psi^k), \partial(A_s \cup \psi^\ell) \rangle \\ &\overset{(5.35)}{=} \langle \mathrm{G}\,\Box(A_s \cup \psi^k), A_s \cup \psi^\ell \rangle \\ &= \langle A_s \cup \psi^k, A_s \cup \psi^\ell \rangle - \langle \mathrm{H}(A_s \cup \psi^k), \mathrm{H}(A_s \cup \psi^\ell) \rangle\,.\end{aligned}$$

Dies zeigt Gleichung (5.39). Gleichung (5.40) folgt analog aus (5.26), (5.36), (5.37) und (5.38). □

Die obigen Rechnungen führen schließlich zum

*Beweis von Satz* 5.0.1. Einsetzen von (5.30), (5.31), (5.32), (5.39) und (5.40) in (5.29) ergibt

$$\begin{aligned}&\partial_{\overline{s}}\partial_s h^{\overline{\ell}k}|_{s_0} = \\ &-m\langle \mathrm{H}(A_s \cdot A_{\overline{s}}), \mathrm{H}(\psi^{\overline{k}} \cdot \psi^\ell)\rangle - \langle \mathrm{H}(A_s \cup \psi^k), \mathrm{H}(A_s \cup \psi^\ell)\rangle + \langle \mathrm{H}(A_{\overline{s}} \cup \psi^k), \mathrm{H}(A_{\overline{s}} \cup \psi^\ell)\rangle\,.\end{aligned}$$

Dies liefert die Krümmungsformel (5.7) im Fall eines eindimensionalen Parameterraums. Der allgemeine Fall ergibt sich nun mittels Polarisierung. □

# 6. Ausblick

In diesem letzten Kapitel diskutieren wir in aller Kürze mögliche Fortführungen der Resultate dieser Arbeit. Dabei sei eine Familie $(f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}, \lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ polarisierter Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten gegeben.

In Satz 1 wird die Positivität des relativen kanonischen Bündels untersucht und in Satz 3 ein Kriterium für die Existenz einer semi-Ricci-flachen Kähler-Metrik gegeben. Es ist naheliegend, insbesondere im Hinblick auf Korollar 4, als Verallgemeinerung degenerierte Familien zu betrachten, bei denen Fasern mit einer vorgegebenen Klasse von Singularitäten erlaubt sind. Hinsichtlich einer Vervollständigung des Modulraums (vgl. [Zh15]) bietet es sich an, Varietäten mit höchstens kanonischen Singularitäten zu betrachten. Es stellt sich die Frage, welche Positivitätseigenschaften das relative kanonische Bündel auf einer solchen degenerierten Familie besitzt. Ein möglicher Ansatz hierzu ist, die Beschränktheit lokaler Potentiale der Krümmungsform nachzuweisen. Dies würde zunächst zu einer lokalen und in einem weiteren Schritt zu einer globalen Fortsetzung der Krümmungsform als geschlossenem, positivem Strom führen. Analog stellt sich die Frage, wann auf einer degenerierten Familie ein positiver, *semi-Ricci-flacher Strom* existiert, das heißt ein geschlossener, positiver Strom vom Typ $(1,1)$, der sich über dem regulären Teil der Familie zu einer semi-Ricci-flachen Form einschränkt. Auch hierzu scheint der vielversprechendste Ansatz zu sein, lokale Potentiale einer semi-Ricci-flachen Form abzuschätzen. Ein solcher positiver, semi-Ricci-flacher Strom könnte möglicherweise innerhalb des Mori-Programms verwendet werden, um eine natürliche Metrik auf den Iitaka-Faserungen von minimalen Modellen zu konstruieren (vgl. [ST07]).

Außerdem könnte man versuchen die Sätze 5 und 7 auf degenerierte Familien zu erweitern, um etwa Positivitätsaussagen analog zu Korollar 6 im Sinne von Strömen zu erhalten. Es scheint jedoch zweckmäßiger zu sein, wie etwa beim Studium der Kobayashi-Hyperbolizität des Modulraums, direkt mit den Krümmungsformeln (1.2) sowie (1.3) zu arbeiten und geeignete Abschätzungen in konkreten Situationen zu suchen.

# Literaturverzeichnis


[Au70] Aubin, T.: *Métriques riemanniennes et courbure*, J. Differ. Geom. **4** (1970) 383–424.

[Au76] Aubin, T.: *Equations du type Monge-Ampère sur les variétés kähleriennes compactes*, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A **283** (1976) 119–121.

[Au78] Aubin, T.: *Equations du type Monge-Ampère sur les variétés Kähleriennes compactes*, Bull. Sci. Math., II. Sér. **102** (1978) 63–95.

[Au98] Aubin, T.: *Some nonlinear problems in Riemannian geometry*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Berlin, 1998.

[Be83] Beauville, A: *Variétés kähleriennes dont la premiére classe de Chern est nulle*, J. Differ. Geom. **18** (1983) 775–782.

[Ber09] Berndtsson, Bo: *Curvature of vector bundles associated to holomorphic fibrations*, Ann. Math. (2) **169** (2009) 531–560.

[Ber11] Berndtsson, Bo: *Strict and nonstrict positivity of direct image bundles*, Math. Z. **269** (2011) 1201–1218.

[Bo74a] Bogomolov, F. B.: *On the decomposition of Kähler manifolds with trivial cononical class*, Math. USSR Sbornik **22** (1974) 580–583.

[Bo74b] Bogomolov, F. B.: *Kähler manifolds with trivial cononical class*, Izvestija Akad. Nauk **38** (1974) 11–24.

[Bo78] Bogomolov, F. B.: *Hamiltonian Kähler manifolds*, Sov. Math., Dokl. **19** (1978) 1462–1465.

[Ca54] Calabi, E.: *The space of Kähler metrics*, Proc. Internat. Congress Math. Amsterdam **2** (1954) 206–207.

[Ca57] Calabi, E.: *On Kähler manifolds with vanishing canonical class*, Algebraic geometry and topology. A symposium in honor of S. Lefschetz, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957, pp. 78–89.

[CDS15a] Chen, X., Donaldson, S. und Sun, S.: *Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. I: Approximation of metrics with cone singularities*, J. Am. Math. Soc. **28** (2015) 183–197.

[CDS15b] Chen, X., Donaldson, S. und Sun, S.: *Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. II: Limits with cone angle less than $2\pi$*, J. Am. Math. Soc. **28** (2015) 199–234.

[CDS15c] Chen, X., Donaldson, S. und Sun, S.: *Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. III: Limits as cone angle approaches $2\pi$ and completion of the main proof*, J. Am. Math. Soc. **28** (2015) 235–278.

[CL81] Cheng, S.-Y. und Li, P.: *Heat kernel estimates and lower bound of eigenvalues*, Comment. Math. Helv. **56** (1981) 327–338.

[Fu84] Fujiki, A.: *Coarse moduli space for polarized compact Kähler manifolds*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **20** (1984) 977–1005.

[Fuj11] Fujino, O.: *Semi-stable minimal model program for varieties with trivial canonical divisor*, Proc. Japan Acad., Ser. A **87** (2011) 25–30.

[FS90] Fujiki, A. und Schumacher, G.: *The moduli space of extremal compact Kähler manifolds and generalized Weil-Petersson metrics*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **26** (1990) 101–183.

[GHP72] Greub, H., Halperin, S. und Vanstone, R.: *Connections, curvature, and cohomology. Vol. I: De Rham cohomology of manifolds and vector bundles*, Pure and Applied Mathematics 47, Academic Press, New York-London, 1972.

[Gr94] Grauert, H. (ed.) et al.: *Several complex variables VII. Sheaf-theoretical methods in complex analysis*, Encycl. Math. Sci. 74, Springer, Berlin, 1994.

[Gri70] Griffiths, P. A.: *Periods of integrals on algebraic manifolds. III: Some global differential-geometric properties of the period mapping*, Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **38** (1970) 125–180.

[Hu05] Huybrechts, D.: *Complex geometry. An introduction*, Springer, Berlin, 2005.

[Ko81] Kobayashi, S.: *Recent results in complex differential geometry*, Jahresber. Dtsch. Math.-Verein. **83** (1981) 147–158.

[Ko98] KOBAYASHI, S.: *Hyperbolic complex spaces*, Springer, Berlin, 1998.

[Koi83] KOISO, N.: *Einstein metrics and complex structures*, Invent. Math. **73** (1983) 71–106.

[Kov03] KOVÁCS, S. J.: *Families of varieties of general type: the Shafarevich conjecture and related problems*, Higher dimensional varieties and rational points (Lectures of the summer school and conference, Budapest, Hungary, September 3–21, 2001), Bolyai Soc. Math. Stud. **12** (2003) 133–167.

[KM98] KOLLÁR, J. UND MORI. S.: *Birational geometry of algebraic varieties. With the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[LS04] LU, Z. UND SUN, X.: *Weil-Petersson geometry on moduli space of polarized Calabi-Yau manifolds*, J. Inst. Math. Jussieu **3** (2004) 185–229.

[LS06] LU, Z. UND SUN, X.: *On the Weil-Petersson volume and the first Chern class of the moduli space of Calabi-Yau manifolds*, Comm. Math. Phys. **261** (2006) 297–322.

[MK06] MORROW, J. UND KODAIRA, K.: *Complex manifolds. Reprint with corrections of the 1971 original.*, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2006.

[MT08] MOUROUGANE, CH. UND TAKAYAMA, S.: *Hodge metrics and the curvature of higher direct images*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **41** (2008) 905–924.

[Na86] NANNICINI, A.: *Weil-Petersson metric in the moduli space of compact polarized Kähler-Einstein manifolds of zero first Chern class*, Manuscr. Math. **54** (1986) 405–438.

[Pa12] PAUN, M.: *Relative adjoint transcendental classes and Albanese maps of compact Kähler manifolds with nef Ricci curvature*, arXiv:1209.2195v1 [math.CV], preprint (2012).

[RZ11] RONG, X. UND ZHANG, Y.: *Continuity of extremal transitions and flops for Calabi-Yau manifolds*, J. Differ. Geom. **89** (2011) 233–269.

[Sch84] SCHUMACHER, G.: *Moduli of polarized Kähler manifolds*, Math. Ann. **269** (1984) 137–144.

[Sch85] SCHUMACHER, G.: *On the geometry of moduli spaces*, Manuscr. Math. **50** (1985) 229–267.

[Sch86] Schumacher, G.: *Moduli spaces of polarized Kähler manifolds*, Inst. Élie Cartan, Univ. Nancy I **10** (1986) 49–56.

[Sch93] Schumacher, G.: *The curvature of the Petersson-Weil metric on the moduli space of Kähler-Einstein manifolds*, in: Complex Analysis and Geometry, The University Series in Mathematics, Plenum Press, New York, 1993, pp. 339–354.

[Sch12] Schumacher, G.: *Positivity of relative canonical bundles and applications*, Invent. Math. **190** (2012) 1–56.

[Sch14] Schumacher, G.: *Curvature properties for moduli of canonically polarized manifolds – an analogy to moduli of Calabi-Yau manifolds*, C. R. Math., Acad. Sci. Paris **352** (2014) 835–840.

[Siu86] Siu, Y.-T.: *Curvature of the Weil-Petersson metric in the moduli space of compact Kähler-Einstein manifolds of negative first Chern class*, in: Contributions to several complex variables: in Honour of Wilhelm Stoll (Proceedings of a Conference in Complex Analysis held at the University of Notre Dame, IN, USA, 1984), Aspects Math. **E 9** (1986) 261–298.

[Siu87] Siu, Y.-T.: *Lectures on Hermitian-Einstein metrics for stable bundles and Kähler-Einstein metrics*, (Delivered at the German Mathematical Society Seminar in Düsseldorf (FRG) in June, 1986), DMV Seminar, Bd. 8, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston, 1987.

[ST07] Song, J. und Tian, G.: *The Kähler-Ricci flow on surfaces of positive Kodaira dimension*, Invent. Math. **170** (2007) 609–653.

[SW13] Song, J. und Weinkove, B.: *An introduction to the Kähler-Ricci flow*, in: An introduction to the Kähler-Ricci flow (Selected papers based on the presentations at several meetings of the ANR project MACK), Lecture Notes in Mathematics 2086, Springer, Cham, 2013, pp. 89–188.

[Ta14] Takayama, S.: *On moderate degenerations of polarized Ricci-flat Kähler manifolds*, preprint (2014).

[Ti87] Tian, G.: *Smoothness of the universal deformation space of compact Calabi-Yau manifolds and its Peterson-Weil metric*, in: Mathematical aspects of string theory (Proceedings of a conference held at the University of California, San Diego, CA, 1986), Adv. Ser. Math. Phys. **1** (1987) 629–646.

[To89] TODOROV, A. N.: *The Weil-Petersson geometry of the moduli space of $SU(n \geq 3)$ (Calabi-Yau) manifolds. I*, Comm. Math. Phys. **126** (1989) 325–346.

[Tos10] TOSATTI, V.: *Adiabatic limits of Ricci-flat Kähler metrics*, J. Differ. Geom. **84** (2010) 427–453.

[Tos15] TOSATTI, V.: *Families of Calabi-Yau manifolds and canonical singularities*, arXiv:1311.4845v3 [math.AG], preprint (2015).

[Tr86] TROMBA, A. J.: *On a natural algebraic affine connection on the space of almost complex structures and the curvature of Teichmüller space with respect to its Weil-Petersson metric*, Manuscr. Math. **56** (1986) 475-497.

[VZ03] VIEHWEG, E. UND ZUO, K.: *On the Brody hyperbolicity of moduli spaces for canonically polarized manifolds*, Duke Math. J. **118** (2003) 103–150.

[Wa03] WANG, C.-L.: *Curvature properties of the Calabi-Yau moduli*, Doc. Math., J. DMV **8** (2003) 577–590.

[We08] WELLS, R. O.: *Differential analysis on complex manifolds. With a new appendix by Oscar Garcia-Prada*, 3rd ed., Springer, New York, 2008.

[Wo85] WOLPERT, S.: *Chern forms and the Riemann tensor for the moduli space of curves*, Invent. Math. **85** (1985) 119–145.

[Yau77] YAU, S. T.: *Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **74** (1977) 1798–1799.

[Yau78] YAU, S. T.: *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation. I*, Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978) 339–411.

[Zh15] ZHANG, Y.: *Completion of the moduli space for polarized Calabi-Yau manifolds*, arXiv:1410.2979 [math.DG], preprint (2015).

# A. Abstract

This thesis deals with families of compact Ricci-flat Kähler manifolds and shall contribute to the field of complex geometry.

A Kähler metric $g$ on a complex manifold $X$ with Kähler form $\omega$ and Ricci form $\mathrm{Ric}(X,g)$ is called *Kähler-Einstein metric*, if there exists a $\lambda \in \mathbb{R}$ with $\mathrm{Ric}(X,g) = \lambda{\cdot}\omega$. A complex manifold carrying a Kähler-Einstein metric is called a *Kähler-Einstein* manifold. By scaling the metric one may always assume $\lambda \in \{-1,0,1\}$. In case of $\lambda = 0$ one speaks of Ricci-flat Kähler manifolds. The above trichotomy can be expressed in terms of the first real Chern class $c_1(X)_{\mathbb{R}} \in H^{1,1}(X) \cap H^2(X,\mathbb{R})$, since $c_1(X)_{\mathbb{R}} = \frac{1}{2\pi}\,[\mathrm{Ric}(X,g)] = \frac{\lambda}{2\pi}\,[\omega]$. The positivity of the Kähler class $[\omega]$ yields the alternatives $-c_1(X)_{\mathbb{R}} > 0$, $c_1(X)_{\mathbb{R}} = 0$ and $c_1(X)_{\mathbb{R}} > 0$. It is a fundamental question (Calabi conjecture [Ca54, Ca57]), if a compact Kähler manifold $X$ possesses a Kähler-Einstein metric in each of the above cases. This question was answered affirmatively for $-c_1(X)_{\mathbb{R}} > 0$ by the work of Aubin ([Au70, Au76, Au78]) and Yau ([Yau77, Yau78]) and for $c_1(X)_{\mathbb{R}} = 0$ by the work of Yau ([Yau77, Yau78]). In the first case a Kähler-Einstein Metric is uniquely determined up to a positive multiple and in the second case it has already been shown by Calabi ([Ca57]) that there exists at most one Kähler-Einstein metric inside each cohomology class. In the third case $c_1(X)_{\mathbb{R}} > 0$, there are examples for which a Kähler-Einstein metric may not exist and a complete characterisation of this situation is subject to the so called Yau-Tian-Donaldson conjecture (cf. [CDS15a, CDS15b, CDS15c]).

Let $K_X$ denote the canonical bundle on $X$, then it is $c_1(X)_{\mathbb{R}} = -c_1(K_X)_{\mathbb{R}}$. Hence, the properties $-c_1(X)_{\mathbb{R}} > 0$ and $c_1(X)_{\mathbb{R}} > 0$ are equivalent to the ampleness of $K_X$ and $K_X^*$, respectively. Moreover, $c_1(X)_{\mathbb{R}}$ vanishes if and only if $K_X$ is a torsion element of the Picard group $\mathrm{Pic}(X)$. Compact Kähler manifolds with ample canonical or anti-canonical bundle are called *canonically polarized varieties* or *Fano varieties*, respectively. Due to the structure theorem of Bogomolov-Kobayashi-Beauville ([Bo74a, Bo74b, Ko81, Be83]) a compact Kähler manifold with $c_1(X)_{\mathbb{R}} = 0$ possesses a finite unramified covering which decomposes isometrically in a product of complex tori and simply-connected Ricci-flat Kähler manifolds whith trivial canonical bundle. Therefore, in this situation one takes simply-connected Kähler manifolds with trivial canonical bundle into account. It is common practice, such as within the Mori program, to replace the assumption of a trivial fundamental group with the regularity of

$X$. This weaker assumption turns out to be sufficient for our purpose as well. Thus, we define a *Calabi-Yau manifold* as a compact Kähler manifold $X$ with $K_X \cong \mathcal{O}_X$ and $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

An essential step in the classification of a given class of complex manifolds is the construction of a moduli space inside the category of (reduced) complex spaces. In case of Calabi-Yau manifolds, it is necessary to introduce polarizations in order to get a Hausdorff moduli space. A *polarization* on a Kähler manifold $X$ is a Kähler class $\lambda_X \in H^{1,1}(X) \cap H^2(X, \mathbb{R})$ and a pair $(X, \lambda_X)$ is called a *polarized Kähler manifold*. The existence of a coarse moduli space of polarized Calabi-Yau manifolds was shown by Fujiki ([Fu84]) and Schumacher ([Sch84, Sch86]). In order to comprehend the construction, one has to extend the notion of a polarization to the situation of families of complex manifolds. Here, a *holomorphic family* (of compact complex manifolds) $\{\mathcal{X}_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ is a surjective, proper, smooth holomorphic map $f \colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ of reduced complex spaces with connected fibers $\mathcal{X}_s = f^{-1}(s)$ for all $s \in \mathcal{S}$. A *family of polarized Calabi-Yau manifolds* is a pair $(f \colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}, \lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ consisting of a holomorphic family $f \colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ and a holomorphic section $\lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}} \in R^1 f_* \Omega_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(\mathcal{S})$ such that $(\mathcal{X}_s, \lambda_{\mathcal{X}_s})$ where $\lambda_{\mathcal{X}_s} := \lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}|_{\mathcal{X}_s}$ is a polarized Calabi-Yau manifold for all $s \in \mathcal{S}$. The section $\lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ is called a *polarization*. The terminology of deformation theory of compact complex manifolds carries over to polarized families. A polarization induces a *relative Kähler form*, i.e. a locally $\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}$-exact, real $(1,1)$-form on $\mathcal{X}$. One also speaks of *Kähler deformations* in this setting. The construction of the moduli space is now carried out in four steps. As the first step, one shows the existence of versal Kähler deformations. This provides a topology on the set of isomorphism classes of polarized Calabi-Yau manifolds (here isomorphisms are understood as biholomorphic maps which are compatible with the given polarizations). As the second step, one proves that versal Kähler deformations are universal. This implies that the above topology is Hausdorff. As the third step, one shows that the identification of isomorphic fibers can be realized as a quotient with respect to the isomorphism group of the central fiber. This locally leads to a complex structure, which induces the given topology. As the last step, one glues the "local moduli spaces" constructed above to a complex space and verifies the properties of a coarse moduli space. Since the moduli space is locally given by families of polarized Calabi-Yau manifolds, the study of such families is crucial for the understanding of its geometric properties.

An important method to investigate geometric properties of moduli spaces of Kähler-Einstein manifolds is the construction of a Kähler metric on these spaces. This idea goes back to Teichmüller theory where, for instance, the curvature properties of the so called Weil-Petersson metric on the Teichmüller space of Riemann surfaces of genus $g \geqslant 2$ are investigated. Therefore, one classically makes particular use of the one dimensional situation. A significant result is the negativity of the sectional curvatures of the Weil-Petersson metric, which was shown by Wolpert ([Wo85]) and Tromba ([Tr86]). These papers gave rise to consider the applied methods in a more differential-geometric context. Based on this, Schumacher introduced in [Sch85] a generalized Weil-Petersson metric on parameter spaces of families of higher dimensional Kähler-Einstein manifolds (cf. also [FS90]). A first step in the computation of the curvature of this metric has been done by Siu ([Siu86]) for families of canonically polarized manifolds and Nannicini ([Na86]) for families of Ricci-flat manifolds. In particular, Siu introduced the notion of so called *canonical lifts*. The calculation, in case of canonically polarized manifolds, was completed in [Sch93] utilizing a refined version of canonical lifts. A corresponding result for Ricci-flat manifolds is included there as well (cf. also [To89, Wa03, LS04, LS06]).

Curvature properties of relative holomorphic bundles on families of compact Kähler manifolds have been studied recently in numerous papers (cf. for instance [MT08, Ber11, Pa12, Sch12]). The work [Sch12] considers families of canonically polarized varieties. More precisely, it is shown that the relative canonical bundle $\mathcal{K}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ is semi-positive and positive in particular directions. Furthermore, the curvature of certain higher direct image sheaves is computed in this situation, which is a far reaching generalization of the curvature formula from [Sch93]. These results may be applied to the moduli space of canonically polarized varieties. This, for example, leads to a differential-geometric proof of the quasi-projectivity of this moduli space and to the construction of a Finsler metric with negative curvature on this space ([Sch12]). Eventually, the Kobayashi-hyperbolicity of the moduli stack of canonically polarized varieties is shown in [Sch14], which gives a proof of the (generalized) hyperbolicity conjecture of Shafarevich (cf. for instance [Kov03, VZ03]).

We investigate geometric properties of the moduli space of polarized Calabi-Yau manifolds with methods from complex-analytic differential geometry. More precisely, we consider the problems addressed in the previous paragraph for families of polarized Calabi-Yau manifolds. Given a family $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ of Calabi-Yau manifolds with polarization $\lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$, the pair $(\mathcal{X}_s, \lambda_{\mathcal{X}_s})$ is a polarized Calabi-Yau manifold for all $s \in \mathcal{S}$. Let $\omega_s$ denote the unique Ricci-flat Kähler metric on $\mathcal{X}_s$ with Dolbeault cohomology class $\lambda_{\mathcal{X}_s}$ which is given by the solution of the Calabi conjecture. These metrics depend smoothly on the parameter $s$, thus there is a relative $(1,1)$-form $\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ on $\mathcal{X}$ with $\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}|_{\mathcal{X}_s} = \omega_s$ for all $s \in \mathcal{S}$. This form induces a Hermitian metric $h$ on the relative canonical bundle $\mathcal{K}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$. The first result considers the curvature of this metric.

**Theorem 1.** *Let $(f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}, \lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ be a family of polarized Calabi-Yau manifolds parametrized by a complex manifold $\mathcal{S}$. Let $h$ denote the Hermitian metric on the relative canonical bundle $\mathcal{K}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ induced by the Ricci-flat Kähler metrics on the fibers (with respect to the polarization $\lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$). Then the bundle $(\mathcal{K}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}, h)$ is semi-positive and positive in horizontal directions in which the family is not infinitesimally-trivial.*

A direct consequence of Theorem 1 together with the main theorem from [MT08] (cf. [Ber09]) is the following result about the positivity of higher direct image sheaves.

**Corollary 2.** *Let* $(f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}, \lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ *be a family of polarized Calabi-Yau manifolds parametrized by a complex manifold* $\mathcal{S}$*. Then the higher direct image sheaves* $R^q f_* \mathcal{K}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}^{\otimes m}$ *are locally-free and semi-positive in the sense of Nakano for all* $m \geqslant 2$ *and* $q \geqslant 0$*.*

For effectively parametrized families of canonically polarized varieties, the curvature form of the relative canonical bundle gives a Kähler metric on the total space which induces the Kähler-Einstein metrics on the fibers ([Sch12, Main Theorem]). However, this construction does not yield a corresponding metric in the case of Calabi-Yau manifolds. It is a natural question, if nevertheless the Ricci-flat metrics on the fibers are induced by a Kähler metric on the total space. The following theorem answers this question in form of a sufficient condition for the existence of such a Kähler metric. Here, a family of polarized Calabi-Yau manifolds is called *effectively parametrized*, if the Kodaira-Spencer map of the underlying holomorphic family is injective (cf. Section 2.1). We use the notation from [SW13] and call a closed, real $(1,1)$-form on the total space *semi-Ricci-flat*, if it induces the Ricci-flat Kähler metrics on the fibers. (In [ST07] and [Tos10] the term *semi-flat* is used instead.) An explicit bound of the Green's function of the Laplacian on the fibers relates the existence of a semi-Ricci-flat Kähler metric to the uniform boundedness of the diameters of the fibers.

**Theorem 3.** *Let* $(f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}, \lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ *be a family of* $n$*-dimensional polarized Calabi-Yau manifolds effectively parametrized by a complex manifold* $\mathcal{S}$*. For all* $s \in \mathcal{S}$ *let* $\omega_s$ *denote the Ricci-flat Kähler metric on the fiber* $\mathcal{X}_s$ *with Dolbeault cohmomology class* $\lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}|_{\mathcal{X}_s}$*. Assume there is a constant* $C = C(n) > 0$ *such that* $\operatorname{diam}(\mathcal{X}_s, \omega_s) < C$ *for all* $s \in \mathcal{S}$ *where* $\operatorname{diam}(\mathcal{X}_s, \omega_s)$ *denotes the diameter of* $\mathcal{X}_s$ *with respect to the metric* $\omega_s$*. Then there exists a Kähler form* $\omega_{SRF}$ *on* $\mathcal{X}$ *such that* $\omega_{SRF}|_{\mathcal{X}_s} = \omega_s$ *for all* $s \in \mathcal{S}$*. Moreover,* $\omega_{SRF}$ *may be chosen to satisfy the fiber integral formula*

$$\int_{\mathcal{X}/\mathcal{S}} \omega_{SRF}^{n+1} = C' \cdot \omega_{WP} \tag{A.1}$$

*where* $C' = C'(n)$ *is a positive constant and* $\omega_{WP}$ *denotes the Weil-Petersson metric on* $\mathcal{S}$ *(cf. Section 2.4).*

Theorem 3 yields a semi-Ricci-flat Kähler form on the total space of a family over a compact parameter space. In case of non-compact parameter spaces, we restrict our attention to families over curves. In particular, we consider a *projective degeneration* $f\colon \mathcal{X} \to \Delta$ of Calabi-Yau manifolds, i.e. $f$ is a homomorphic map from a quasi-projective variety $\mathcal{X}$ onto the unit disc $\Delta \subset \mathbb{C}$ which restricts to a (smooth) family of Calabi-Yau manifolds over the punctured unit disc $\Delta^* := \Delta \setminus \{0\}$. Such a degeneration is *log-canonical*, if $X$ is normal and the pair $(\mathcal{X}, \mathcal{X}_0)$ is log-canonical where $\mathcal{X}_0 := f^*(0)$ denotes the central fiber (cf. [KM98, Section 2.3.4]). Employing recent results from [Ta14, Tos15, RZ11] the next corollary is immediate.

**Corollary 4.** *Let $f\colon \mathcal{X} \to \Delta$ be a log-canonical projective degeneration of Calabi-Yau manifolds with $\mathcal{K}_{\mathcal{X}/\Delta} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$. Assume one of the following equivalent assertions.*

(a) *The point 0 is in finite Weil-Petersson distance from $\Delta^*$.*

(b) *The central fiber $\mathcal{X}_0$ has at worst canonical singularities and $K_{\mathcal{X}_0} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0}$.*

*Then there exists a semi-positive semi-Ricci-flat form on $\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_0$.*

The above corollary may be applied to Kulikov models of type I of semi-stable projective degenerations of $K3$ surfaces. More generally, the considered degenerations appear as minimal models of semi-stable projective degenerations of Calabi-Yau manifolds by [Fuj11]. Corollary 4 gives a sufficient condition for the existence of a natural Kähler metric on these degenerations. Moreover, the above corollary may be related to the completion of the moduli space of polarized Calabi-Yau manifolds (cf. [Zh15]).

We proceed with the computation of the curvature of the direct image sheaves $R^{n-p}f_*\Omega^p_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(\mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ where $n$ denotes the fiber dimension and $p, m$ are integers with $0 \leqslant p \leqslant n$ and $m \geqslant 0$. These sheaves are locally-free of rank $r(n,p) = \dim H^{p,n-p}(\mathcal{X}_s)$ with $\mathcal{X}_s$ an arbitrary fiber. Moreover, they possess natural metrics which are given as the $L^2$-products of fiberwise harmonic representatives. (The bundle part $\mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ leads to different metrics on $R^{n-p}f_*\Omega^p_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(\mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ with respect to $m$.)

The next result is formulated in local coordinates and makes use of fiberwise harmonic representatives $\{A_i \,|\, 1 \leqslant i \leqslant \dim \mathcal{S}\}$ of the Kodaira-Spencer classes of coordinate vector fields $\{\partial_i \,|\, 1 \leqslant i \leqslant \dim \mathcal{S}\}$ (cf. Section 2.4). These representatives induce mappings

$$\begin{aligned} A_i \cup \_ &: \mathcal{A}^{0,n-p}\left(\mathcal{X}_s, \Omega^p_{\mathcal{X}_s}\left(\mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}_s}\right)\right) \to \mathcal{A}^{0,n-p+1}\left(\mathcal{X}_s, \Omega^{p-1}_{\mathcal{X}_s}\left(\mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}_s}\right)\right), \\ A_{\bar{\jmath}} \cup \_ &: \mathcal{A}^{0,n-p}\left(\mathcal{X}_s, \Omega^p_{\mathcal{X}_s}\left(\mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}_s}\right)\right) \to \mathcal{A}^{0,n-p-1}\left(\mathcal{X}_s, \Omega^{p+1}_{\mathcal{X}_s}\left(\mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}_s}\right)\right), \end{aligned}$$

which are given by cup product and contraction of (bundle valued) differential forms (cf. Chapter 5). Moreover, we choose representatives $\left\{\psi^k \,\middle|\, 1 \leqslant k \leqslant r(n,p)\right\}$ of a local basis of $R^{n-p}f_*\Omega^p_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(\mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ which are harmonic on the fibers (cf. Lemma 2.4.5). Furthermore, $\mathrm{H}$ denotes the harmonic projection of tensors on the fibers and $\mathrm{d}V_\omega$ is the relative volume form with respect to $\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$. The following theorem expresses the curvature of the $L^2$-metric in terms of the above mentioned "linear data".

**Theorem 5.** *Let $(f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}, \lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ be a family of $n$-dimensional polarized Calabi-Yau manifolds parametrized by a complex manifold $\mathcal{S}$. Then, with the notations from above,* *the curvature tensor of the $L^2$-metric on $R^{n-p}f_*\Omega^p_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}(\mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ at a point $s \in \mathcal{S}$ is in suitable coordinates given by*

$$\begin{aligned} R_{i\bar{\jmath}}{}^{\bar{\ell}k}(s) = m \int_{\mathcal{X}_s} &\mathrm{H}(A_i \cdot A_{\bar{\jmath}}) \cdot \mathrm{H}(\psi^k \cdot \psi^{\bar{\ell}})\, \mathrm{d}V_\omega \\ + \int_{\mathcal{X}_s} &\mathrm{H}(A_i \cup \psi^k) \cdot \mathrm{H}(A_{\bar{\jmath}} \cup \psi^{\bar{\ell}})\, \mathrm{d}V_\omega \\ - \int_{\mathcal{X}_s} &\mathrm{H}(A_i \cup \psi^{\bar{\ell}}) \cdot \mathrm{H}(A_{\bar{\jmath}} \cup \psi^k)\, \mathrm{d}V_\omega\,. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Theorem 5 corresponds to the curvature formula for families of canonically polarized varieties given in [Sch12]. The above curvature formula coincides for $m = 0$ with the curvature of the Hodge metric on the bundle $R^{n-p}f_*\Omega^p_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ calculated in [Gri70]. The third summand is the only term which gives a negative contribution. This term vanishes for $p = n$ and we get a complement to Corollary 2.

**Corollary 6.** *Let $(f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}, \lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ be a family of polarized Calabi-Yau manifolds effectively parametrized by a complex manifold $\mathcal{S}$. Then the direct image sheaves $f_*\mathcal{K}^{\otimes m}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ are positive for all integers $m \geqslant 2$.*

By means of relative Serre duality (cf. (2.2)), Theorem 5 yields the curvature of the (dual) $L^2$-metric on $R^pf_*\Lambda^p\mathcal{T}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$. For this purpose, let $\{\nu_k \mid 1 \leqslant k \leqslant r(n,p)\}$ denote fiberwise harmonic representatives of a local basis of $R^pf_*\Lambda^p\mathcal{T}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$. For details see Chapter 5.

**Theorem 7.** *Let $(f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}, \lambda_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$ be a family of polarized Calabi-Yau manifolds parametrized by a complex manifold $\mathcal{S}$. Then, with the notations from above, the curvature tensor of the $L^2$-metric on $R^pf_*\Lambda^p\mathcal{T}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$ at a point $s \in \mathcal{S}$ is in suitable coordinates given by*

$$\begin{aligned} R_{i\bar{\jmath}k\bar{\ell}}(s) = - \int_{\mathcal{X}_s} &\mathrm{H}(A_i \cdot A_{\bar{\jmath}}) \cdot \mathrm{H}(\nu_k \cdot \nu_{\bar{\ell}})\, \mathrm{d}V_\omega \\ - \int_{\mathcal{X}_s} &\mathrm{H}(A_i \wedge \nu_{\bar{\ell}}) \cdot \mathrm{H}(A_{\bar{\jmath}} \wedge \nu_k)\, \mathrm{d}V_\omega \\ + \int_{\mathcal{X}_s} &\mathrm{H}(A_i \wedge \nu_k) \cdot \mathrm{H}(A_{\bar{\jmath}} \wedge \nu_{\bar{\ell}})\, \mathrm{d}V_\omega\,. \end{aligned} \tag{A.3}$$

For $p = 1$ equation (A.3) reproduces for effective families the curvature formula of the Weil-Petersson metric on the moduli space of polarized Calabi-Yau manifolds (cf. [Na86], [Sch93], [Wa03]). Moreover, equation (A.3) may be utilized in order to give an alternative proof of the Kobayashi-hyperbolicity of the moduli space of polarized Calabi-Yau manifolds, which does not invoke Torelli theorems. More precisely, following the arguments in [Sch14], it can be shown that every complex subspace of the moduli stack of polarized Calabi-Yau manifolds is hyperbolic in the sense of Kobayashi.

*Remark* 8. All given results are valid for families of polarized Kähler manifolds with trivial first real Chern class and vanishing first Betti number. One has to additionally assume that the image sheaves considered in Theorem 5, Corollary 6 and Theorem 7 are locally-free. The respective proofs hold literally in this more general situation.

This thesis is organized in six chapters. After the introduction (Chapter 1), we review the required basics (Chapter 2). First, we introduce notations (Section 2.1) and give elementary properties of fiber integrals (Section 2.2). Moreover, we define Calabi-Yau manifolds (Section 2.3) and polarized families of these (Section 2.4). Then, we study the positivity of relative canonical bundles (Chapter 3). For this purpose, we introduce horizontal lifts of vector fields in the context of families of Calabi-Yau manifolds (Section 3.1). Next, we proceed with the proofs of Theorem 1 and Corollary 2 utilizing horizontal lifts (Section 3.2). After that, we investigate the existence of semi-Ricci-flat Kähler metrics (Chapter 4). For this reason, we list fundamental properties of the Green's function of the Laplacian on compact Kähler manifolds (Section 4.1). Then, making use of theses properties, we give the proof of Theorem 3 employing a certain Hodge decomposition from Chapter 3. Moreover, we get Corollary 4 as an immediate consequence (Section 4.2). Next, we analyze the curvature of higher direct image sheaves (Chapter 5). We start with additional notations and state a curvature formula. As applications, we show Corollary 6 and Theorem 7 and outline an alternative proof of the Kobayashi-hyperbolicity of the moduli space of polarized Calabi-Yau manifolds (Section 5.1). Eventually, we proof Theorem 5, based on necessary preparations and results from Sections 2 and 3 (Section 5.2). Conclusively, we speculate about some further developments of the obtained results (Chapter 6).

# B. Danksagung

Mein erster Dank gilt meinem Betreuer Herrn Prof. Dr. Georg Schumacher für seine geduldige Ermutigung und Hilfe.

Außerdem bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr. Gordon Heier für die Übernahme des Zweitgutachtens.

Des Weiteren danke ich den Teilnehmern des Oberseminars „Komplexe Geometrie“ für interessante und aufschlussreiche Diskussionen.

Ich bedanke mich bei meinen Eltern und meiner Schwester sowie meinen Großeltern herzlich für ihre stete Unterstützung.

Besonderer Dank gilt meiner Partnerin Natalja, die mir während der Anfertigung dieser Arbeit mit viel Verständnis zur Seite stand.

# C. Erklärung und Versicherung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Dissertation

*Positivität relativer kanonischer Bündel und*
*Krümmung höherer direkter Bildgarben auf*
*Familien von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten*

selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst habe. Alle verwendeten Quellen und Hilfsmittel habe ich explizit angegeben und wörtliche oder sinngemäße Zitate als solche gekennzeichnet.

Diese Dissertation wurde bislang weder in der vorliegenden noch in einer ähnlichen Form bei einer in- oder ausländischen Hochschule anlässlich eines Promotionsgesuchs oder zu anderen Prüfungszwecken eingereicht.

Ich erkläre, dass dies mein erster Versuch einer Promotion ist.

Marburg (Lahn), 26. August 2015

Matthias Braun

Seite 56 (Lebenslauf) enthält persönliche Daten und ist daher nicht Bestandteil der Online-Veröffentlichung.