Dirac-Operatoren und Killing-Spinoren mit Torsion

D i s s e r t a t i o n

zur Erlangung des akademischen Grades

doctor rerum naturalium

(Dr. rer nat.)

im Fach Mathematik

eingereicht am

Fachbereich Mathematik und Informatik (FB 12)
der Philipps-Universität Marburg

von

Dipl.-Math. Julia Becker-Bender

(geb. am 29.10.1984 in Stuttgart)

Präsidentin der Philips-Universität Marburg
Prof. Dr. Katharina Krause

Dekan des Fachbereichs Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Manfred Sommer

Erster Gutachter:	Prof. Dr. Ilka Agricola
Zweiter Gutachter:	Prof. Dr. Uwe Semmelmann

Eingereicht am: 06.09.2012
Tag der Verteidigung: 17.12.2012

Inhalt

Einführung **3**

1 Die Twistor-Eigenwertabschätzung für $\not{D} = D^g + \frac{1}{4}T$ **9**
1.1 Technische Grundlagen . . . 9
1.2 Twistor-Eigenwertabschätzung . . . 14
1.3 Twistor- und Killing-Spinoren mit Torsion . . . 19
1.4 Der Fall der Dimensionen vier und sechs . . . 23

2 Killing-Spinoren auf Sasaki-Mannigfaltigkeiten **29**
2.1 Killing-Spinoren ohne Torsion auf Sasaki-Mannigfaltigkeiten . . . 31
2.2 Killing-Spinoren mit Torsion auf Sasaki-Mannigfaltigkeiten . . . 37

3 Die Killing-Gleichung mit Torsion in Dimension fünf **47**
3.1 Charakterisierung der Killing-Spinoren mit Torsion in fünf Dimensionen . . . 47
3.2 Die Ausnahmeräume der Charakterisierung . . . 54

4 Die Twistor-Abschätzung auf Sasaki-Mannigfaltigkeiten **61**

Bezeichnungen **67**

Literatur **69**

English summary **73**

Einführung

Der klassische Dirac-Operator D^g einer semi-Riemannschen Spin-Mannigfaltigkeit (M^n, g) mit Spinorbündel Σ ist durch die Verknüpfung von kovarianter Ableitung ∇^g und Clifford-Multiplikation gegeben:

$$D^g : \Gamma(\Sigma) \xrightarrow{\nabla^g} \Gamma(T^*M \otimes \Sigma) \overset{g}{\simeq} \Gamma(TM \otimes \Sigma) \xrightarrow{\cdot} \Gamma(\Sigma)\,.$$

Der Dirac-Operator D^g ist ein elliptischer Operator erster Ordnung. Auf einer kompakten Mannigfaltigkeit ist er wesentlich selbstadjungiert auf $L^2(\Sigma)$, besitzt ein reines Punktspektrum, und der einzige Häufungspunkt seiner Eigenwerte liegt im Unendlichen. Dieser Operator wurde mit physikalischer Motivation von P. Dirac im Jahr 1928 in den Arbeiten [Dir28a] und [Dir28b] eingeführt, als er eine relativistische quantenmechanische Beschreibung des Elektrons formulierte. Dort tritt der Dirac-Operator einer vierdimensionalen flachen Lorentz-Mannigfaltigkeit auf. Dem Kernstück der Arbeit, der sogenannten Dirac-Gleichung, entspricht in der von uns gebrauchten mathematischen Sprache die Eigenwert-Gleichung

$$D^g \psi = \lambda \psi\,.$$

In einem rein mathematischen Kontext trat in den frühen sechziger Jahren der Dirac-Operator D^g einer Riemannschen Metrik g in Erscheinung, und zwar in den Arbeiten von M. Atiyah und I. Singer zur Indextheorie elliptischer Operatoren ([AtSi63]). Kurz darauf untersuchte Lichnerowicz in [Lich63] sogenannte harmonische Spinoren, d. h. Spinoren, die im Kern des Operators D^g liegen. Er zeigte die klassische Formel

$$(D^g)^2 \psi = \Delta^g \psi + \tfrac{1}{4}\mathrm{Scal}^g \psi\,,$$

die das Quadrat des Riemannschen Dirac-Operators D^g, den spinoriellen Laplace-Operator $\Delta^g := (\nabla^g)^* \circ \nabla^g$ und die Riemannsche Skalarkrümmung Scal^g in Beziehung setzt. Eine unmittelbare Konsequenz dieser Identität ist, dass auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit positiver Skalarkrümmung keine harmonischen Spinoren existieren. Des Weiteren folgt mit den Ergebnissen von M. Atiyah und I. Singer aus derselben Formel, dass auf einer kompakten Mannigfaltigkeit das Verschwinden des topologischen $\mathcal{A}$-Geschlechts eine notwendige Bedingung für die Existenz von einer Riemannschen Metrik positiver Skalarkrümmung ist.
Tatsächlich hatte E. Schrödinger die obige Identität für das Quadrat des Dirac-Operators bereits 1932 in seiner physikalischen Arbeit [Schr32] angegeben.

Aus der Schrödinger-Lichnerowicz-Formel $(D^g)^2 = \Delta^g + \frac{1}{4}\mathrm{Scal}^g$ erhalten wir für einen Eigenwert λ des Dirac-Operators D^g durch Integration unmittelbar eine Abschätzung durch das Minimum der Skalarkrümmung:

$$\lambda^2 \geq \tfrac{1}{4}\mathrm{Scal}^g_{\min}\,.$$

Der Gleichheitsfall tritt ein, wenn ein Spinor ψ_o existiert, für den $\nabla^g \psi_o = 0$ gilt. Aus $\nabla^g \psi_o = 0$ folgt $D^g \psi_o = 0$ und $\mathrm{Scal}^g = 0$. Auf Räumen positiver Skalarkrümmung ist diese Abschätzung also nie optimal.

Th. Friedrich gelang es Anfang der achtziger Jahre, eine stärkere Abschätzung für die Eigenwerte des Riemannschen Dirac-Operators D^g zu geben ([Fri80]). Er deformierte den spinoriellen Zusammenhang ∇^g mit einer Funktion f zu $\nabla^f_X\psi := \nabla^g_X\psi + fX\psi$, bewies für den neuen Zusammenhang ∇^f eine Identität, die der klassischen Schrödinger-Lichnerowicz-Formel formal ähnlich ist und zeigte auf diese Weise: Für einen Eigenwert λ des Riemannschen Dirac-Operators D^g einer kompakten Mannigfaltigkeit der Dimension n gilt

$$\lambda^2 \geq \tfrac{1}{4}\tfrac{n}{n-1}\mathrm{Scal}^g_{\min}.$$

Der Gleichheitsfall in dieser Abschätzung tritt genau dann ein, wenn ein Riemannscher Killing-Spinor existiert, d. h. ein Spinor ψ_o, der für eine Zahl β die Gleichung

$$\nabla^g_X\psi_o = \beta X\psi_o$$

für alle $X \in TM$ erfüllt. Im kompakten Riemannschen Fall ist die Killing-Zahl β reell, für den Killing-Spinor ψ_o gilt $D^g\psi_o = -n\beta\psi_o$, und die Metrik g ist eine Einstein-Metrik mit Skalarkrümmung $\mathrm{Scal}^g \equiv 4n(n-1)\beta^2$.
In der folgenden Zeit wurden kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit Killing-Spinoren von verschiedenen Mathematikern untersucht. Durch ihre Arbeiten entstanden konkrete Beispiele und insbesondere ein klares geometrisches Schema, das kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit Killing-Spinoren beschreibt:
Für $n = 4$ zeigten Th. Friedrich und I. Kath, dass die einzige Mannigfaltigkeit mit Killing-Spinoren die Sphäre S^4 mit ihrer Standardmetrik ist ([BFGK91]). Für $n = 5$ existieren Killing-Spinoren genau dann, wenn die Mannigfaltigkeit Einstein-Sasaki ist ([FrKa89]). Für $n = 6$ bewies R. Grunewald, dass Killing-Spinoren einer nearly-Kähler-Struktur der Mannigfaltigkeit entsprechen ([Gru90]). Für $n = 7$ existiert ein Killing-Spinor, falls die Mannigfaltigkeit eine nearly-parallel G_2-Struktur besitzt. Zwei Killing-Spinoren existieren, falls die Mannigfaltigkeit Einstein-Sasaki ist, und drei Killing-Spinoren existieren, falls die Mannigfaltigkeit eine 3-Sasaki-Struktur besitzt ([FrKa88], [FrKa90], [Bär93], [FKMS97]). In $n = 8$ zeigte O. Hijazi, dass es Killing-Spinoren nur auf der Standardsphäre S^8 gibt ([Hij86b]).
In seiner Arbeit [Bär93] erhielt Ch. Bär zudem alle eben genannten Ergebnisse in niedrigen Dimensionen (welche in ihren ersten Beweisen explizit über die jeweilige geometrische Struktur konstruiert wurden) noch einmal auf andere, holonomiebasierte Weise, und er verallgemeinerte die bereits bekannten Ergebnisse auf höhere Dimensionen.

Wir wenden uns jetzt Geometrien mit antisymmetrischer Torsion T zu, wie sie auch in verschiedenen physikalischen Modellen der String-Theorie von Interesse sind. Unsere konkreten Rahmenbedingungen sind dabei im Folgenden diese: (M, g, Σ) ist eine kompakte Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit, auf der ein metrischer Zusammenhang ∇^c mit antisymmetrischer Torsion T existiert, d. h. für den Torsionstensor T gilt

$$g(T(X, Y), Z) + g(T(X, Z), Y) = 0\,.$$

Wir bezeichnen sowohl den $(2, 1)$-Tensor der antisymmetrischen Torsion als auch die von ihm definierte 3-Form mit T. Meist werden wir $\nabla^c T = 0$ fordern.

Wir untersuchen nun nicht nur den Riemannschen Dirac-Operator D^g, sondern allgemeiner für eine 3-Form T den Operator $\not{D} := D^g + \frac{1}{4}T$. Dies ist der Dirac-Operator des metrischen Zusammenhangs mit der Torsion $T/3$.
Dieser Operator $\not{D}$ ist eine Verallgemeinerung des Dolbeault-Operators einer fast-Hermiteschen Mannigfaltigkeiten (M, g, J)([Bis89], [Gau97]): Der Dolbeault-Operator ist definiert als

$$\square = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\partial} + \bar{\partial}^*)\,.$$

Das Spinorbündel Σ lässt sich mit dem Tensorprodukt $\Lambda^{0,*}(TM) \otimes K'$ identifizieren, wobei K' eine Wurzel des kanonischen Linienbündels K von J ist. In [Gau97, Prop.7] wurde gezeigt, dass für den Dolbeault-Operator auf Spinoren gilt

$$\Box = D^g - \tfrac{1}{4}F^+ + \tfrac{1}{4}F^- ,$$

wobei F^+ und F^- jeweils 3-Formen sind, die durch die $(1,2)+(2,1)$-Komponenten bzw. die $(3,0)+(0,3)$-Komponenten des Differentials der fundamentalen 2-Form $\Omega := g(J\cdot,\cdot)$ definiert sind. Der Operator $\Box$ stimmt mit dem Riemannschen Dirac-Operator D^g genau dann überein, wenn $d\Omega = 0$ gilt. Wir setzen voraus, dass der Nijenhuis-Tensor N der fast-komplexen Struktur J antisymmetrisch ist und betrachten den Hermiteschen Zusammenhang ∇^c mit antisymmetrischer Torsion

$$T = N + d\Omega \circ J .$$

Im Spezialfall einer nearly-Kähler-Mannigfaltigkeit ist die Torsion T parallel bezüglich des Zusammenhangs ∇^c, es ist $F^+ = 0$, und F^- ist gleich der parallelen antisymmetrischen Torsion T des Zusammenhangs ∇^c, so dass hier gilt:

$$\not{D} = \Box \neq D^g .$$

Der Operator $\not{D}$ tritt an einer weiteren Stelle in Erscheinung: Auf einem natürlich-reduktiven Raum ist $\not{D}$ der sogenannte kubische Dirac-Operator, wie er von B. Kostant in einem darstellungstheoretischen Kontext eingeführt wurde ([Kos99], [Agr03]).
Auch in der theoretischen Physik ist der Operator $\not{D}$ in der Superstring-Theorie Gegenstand von Untersuchungen geworden ([HKWY10]).

Tatsächlich ist es möglich, Aussagen über das Spektrum des Operators $\not{D}$ zu treffen: Von zentraler Bedeutung für die Eigenwertabschätzung des Riemannschen Dirac-Operators D^g ist die Schrödinger-Lichnerowicz-Formel $(D^g)^2 = \Delta^g + \frac{1}{4}\mathrm{Scal}^g$. Es stellt sich heraus, dass – anders als für den Dirac-Operator D^c des Zusammenhangs ∇^c – das Quadrat des Operators $\not{D}$ sich durch eine ähnliche Identität ausdrücken lässt, und zwar als der spinorielle Laplace-Operator des Zusammenhangs ∇^c und Summanden, die vollständig durch die Riemannsche Skalarkrümmung und die Torsion T bestimmt sind ([AgFr04]). Im Fall paralleler Torsion $\nabla^c T = 0$ vereinfacht sich diese Beziehung zu

$$\not{D}^2 = \Delta^c + \tfrac{1}{4}\mathrm{Scal}^g + \tfrac{1}{8}\|T\|^2 - \tfrac{1}{4}T^2 ,$$

wobei T^2 das Quadrat der 3-Form T in der Clifford-Algebra bezeichnet und $\|T\|^2$ für den skalaren Anteil von T^2 steht. Aus dieser *verallgemeinerten Schrödinger-Lichnerowicz-Formel* ergibt sich eine erste Abschätzung des Operators $\not{D}^2$:
Der Spinor-Endomorphismus T ist symmetrisch, also diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten. Da T nach Voraussetzung invariant unter dem von ∇^c definierten Paralleltransport ist, hängen die Eigenwerte nicht vom Punkt ab, und wir können das Spinorbündel global in die orthogonale Summe der Eigenräume Σ_μ von T aufspalten,

$$\Sigma = \oplus_\mu \Sigma_\mu .$$

Wegen $\nabla^c T = 0$ erhält ∇^c diese Aufspaltung, und es ist bekannt, dass der Operator $(\not{D})^2$ unter der Voraussetzung $\nabla^c T = 0$ mit der Wirkung der Torsion T kommutiert und deshalb diese Aufspaltung ebenfalls erhält. Daher ist es uns möglich, die Einschränkung des Operators $\not{D}^2$ auf ein Bündel Σ_μ zu einem Torsionseigenwert μ zu betrachten,

$$\not{D}^2_{|\Sigma_\mu} : \Sigma_\mu \longrightarrow \Sigma_\mu ,$$

und für jedes Bündel Σ_μ gesondert nach einer unteren Schranke für den kleinsten Eigenwert λ des Operators $\not{D}^2$ zu suchen. Die Abschätzung, die wir unmittelbar aus der zuvor genannten verallgemeinerten Schrödinger-Lichnerowicz-Formel erhalten, ist für ein Bündel Σ_μ

$$\lambda(D\!\!\!/^2\big|_{\Sigma_\mu}) \geq \tfrac{1}{4}\mathrm{Scal}^g_{\min} + \tfrac{1}{8}\|T\|^2 - \tfrac{1}{4}\,\mu^2\,.$$

Die Gleichheit wird genau dann realisiert, wenn das Bündel Σ_μ einen ∇^c-parallelen Spinor enthält. Wir bezeichnen mit $\mu_1, ..., \mu_l$ die Eigenwerte der Torsion T. Für den kleinsten Eigenwert λ von $D\!\!\!/^2$ auf dem gesamten Spinorbündel Σ erhalten wir damit

$$\lambda \geq \tfrac{1}{4}\mathrm{Scal}^g + \tfrac{1}{8}\|T\|^2 - \tfrac{1}{4}\ \max(\mu_1^2, \dots, \mu_l^2)\,.$$

Weitere Abschätzungen für den Dirac-Operator mit Torsion $D\!\!\!/$ wurden in [AFK08] gegeben. Die dort verwendete Methode ist von Th. Friedrichs Beweis der Eigenwertabschätzung für den Riemannschen Dirac-Operator D^g inspiriert, und zwar betrachten die Autoren nun gewisse Zusammenhänge, die aus dem Levi-Civita-Zusammenhang durch Deformation mit Polynomen in der Torsion T entstehen. Jeder Typ von Geometrie erfordert auf diese Weise eine gesonderte Behandlung. Die so erhaltenen Abschätzungen nennen wir *Deformationsabschätzungen.*

Es gibt jedoch noch einen weiteren Beweis von Friedrichs Eigenwertabschätzung, der den Riemannschen Twistor-Operator P^g ins Spiel bringt. Wenn pr die Projektion auf den Kern der Clifford-Multiplikation bezeichnet, dann ist der Riemannsche Twistor-Operator P^g definiert als

$$P^g\,:\,\Gamma(\Sigma) \xrightarrow{\nabla^g} \Gamma(T^*M \otimes \Sigma) \overset{g}{\simeq} \Gamma(TM \otimes \Sigma) \xrightarrow{pr} \Gamma(TM \otimes \Sigma)\,.$$

Der Dirac-Operator D^g ist also durch die Verknüpfung von kovarianter Ableitung mit der Projektion auf das Bild der Clifford-Multiplikation gegeben und der Twistor-Operator durch die Verknüpfung von kovarianter Ableitung mit der Projektion auf den Kern der Clifford-Multiplikation. Seinen Ursprung hat der Twistor-Operator in Arbeiten von R. Penrose zur allgemeinen Relativitätstheorie, weshalb er auch Penrose-Operator genannt wird ([Pen86]).
Auf Eigenwertabschätzungen des Dirac-Operators führt die zentrale Identität

$$\|P^g\psi\|^2 + \tfrac{1}{n}\|D^g\psi\|^2 = \|\nabla^g\psi\|^2\,.$$

Die Bedeutung des Twistor-Operators für Eigenwertabschätzungen des Dirac-Operators wurde erstmals in der Arbeit von A. Lichnerowicz ersichtlich ([Lich87]). Kurze Beweise von Eigenwertabschätzungen des Riemannschen Dirac-Operators D^g, die auf den Twistor-Operator P^g zurückgreifen, sind in [Hij94/98] und [Sem98] zu finden.

Spinoren, die im Kern des Riemannschen Twistor-Operators P^g liegen, heissen Riemannsche Twistor-Spinoren. Sie werden äquivalent durch die sogenannte Twistor-Gleichung

$$\nabla^g_X\psi_o + \tfrac{1}{n}XD^g\psi_o = 0$$

beschrieben, die für alle $X \in TM$ gefordert wird. Man sieht leicht, dass jeder Killing-Spinor ein Twistor-Spinor ist und dass genau diejenigen Twistor-Spinoren Killing-Spinoren sind, die zusätzlich Eigenspinoren des Operators D^g sind.

Ergebnisse dieser Arbeit – Überblick

Ausgangspunkt dieser Arbeit war die Idee, den Twistor-Beweis der Eigenwertabschätzung des Riemannschen Operators D^g für den Dirac-Operator mit Torsion $D\!\!\!/ = D^g + \frac{1}{4}T$ zu adaptieren. Tatsächlich erhalten wir auf diese Weise eine neue Abschätzung, deren Gleichheitsfall durch

die Existenz von Twistor-Spinoren zu dem metrischen Zusammenhang mit Torsion $\frac{n-1}{4(n-3)}T$ gekennzeichnet ist. Dies war die Motivation dafür, Twistor- und Killing-Spinoren zu metrischen Zusammenhängen mit antisymmetrischer Torsion auch unter allgemeineren Bedingungen zu untersuchen. Versuche, eine Verallgemeinerung von Riemannschen Killing-Spinoren für Geometrien mit Torsion zu beschreiben, wurden auch in den Arbeiten [Raj06] und [Fer10] unternommen, allerdings ohne die Konstruktion von konkreten Beispielen.
Wir geben nun eine Übersicht der wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit. Der Inhalt des ersten Kapitels ist dabei Teil der gemeinsamen Arbeit mit I. Agricola und H. Kim ([ABBK]).

Unsere Voraussetzungen sind dabei diese: (M^n, g) ist eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n mit Spinorbündel Σ, auf der ein metrischer Zusammenhang ∇^c mit paralleler antisymmetrischer Torsion T existiert, d. h. es gilt $\nabla^c T \equiv 0$.
Wichtig wird in unseren Betrachtungen die Zusammenhangsfamilie ∇^s, die für den reellen Parameter s definiert ist durch

$$\nabla^s_X Y = \nabla^g + 2sT(X,Y)\,.$$

In Kapitel 1 dieser Arbeit zeigen wir die zentrale *Twistor-Eigenwertabschätzung* für den kleinsten Eigenwert λ von $D\!\!\!/^2$ auf dem Bündel Σ_μ:

$$\lambda(D\!\!\!/^2\big|_{\Sigma_\mu}) \geq \tfrac{n}{4(n-1)}\mathrm{Scal}^g_{\min} + \tfrac{n(n-5)}{8(n-3)^2}\|T\|^2 - \tfrac{n(n-4)}{4(n-3)^2}\mu^2\,.$$

Der Gleichheitsfall tritt genau dann ein, wenn die Riemannsche Skalarkrümmung konstant ist und der Eigenspinor $\psi_o \in \Gamma(\Sigma_\mu)$ ein Twistor-Spinor des Zusammenhangs $\nabla^{s_{\mathrm{tw}}}$ für den Parameter $s_{\mathrm{tw}} := \frac{n-1}{4(n-3)}$ ist. Für das gesamte Bündel erhalten wir hieraus die Twistor-Abschätzung

$$\lambda \geq \tfrac{n}{4(n-1)}\mathrm{Scal}^g_{\min} + \tfrac{n(n-5)}{8(n-3)^2}\|T\|^2 - \tfrac{n(n-4)}{4(n-3)^2}\max(\mu_1^2,\ldots,\mu_k^2)\,.$$

Anders als im Riemannschen Fall muss hier ein Spinor, der den Gleichheitsfall der Abschätzung realisiert, nicht sofort auch ein Killing-Spinor sein.
Ein Vorteil dieser Abschätzung liegt in ihrer Allgemeinheit: Wie die universelle Abschätzung trifft sie eine Aussage für eine beliebige 3-Form T, die parallel ist bezüglich des Zusammenhangs $\nabla^g + \frac{1}{2}T$. Tatsächlich werden wir Beispiele beschreiben, in denen diese Abschätzung optimal wird, und wir werden sehen, dass sie die bisher bekannten Abschätzungen in manchen Geometrien verbessert.
Unser erstes Beispiel eines Raums, auf dem die Twistor-Abschätzung optimal wird, ist die fünfdimensionale Stiefel-Mannigfaltigkeit $V_2(\mathbb{R}^4) = \mathrm{SO}(4)/\mathrm{SO}(2)$. Hier existiert eine einparametrige Familie homogener Metriken, die durch Reskalieren entlang des speziellen Vektorfeldes einer metrischen Kontakt-Struktur entsteht. Th. Friedrich zeigte in [Fri80], dass für eine dieser Metriken Riemannsche Killing-Spinoren existieren. Wir werden zeigen, dass die Twistor-Abschätzung für eine Metrik zu einem anderen Parameter optimal wird und dass die Gleichheit in der Abschätzung durch Killing-Spinoren mit Torsion realisiert wird.
In Abschnitt 1.4 werden wir sehen, dass die Twistor-Abschätzung auf einer kompakten vierdimensionalen Mannigfaltigkeit unter der Voraussetzung $\mathrm{Scal}^g_{\min} > \frac{9}{2}\|T\|^2$ oberhalb der bisher bekannten Abschätzungen liegt. Der verbleibende Teil von Abschnitt 1.4 ist dem sechsdimensionalen Fall gewidmet. Es ist eine Besonderheit der Dimension sechs, dass hier ein Spinor, der den Gleichheitsfall der Twistor-Abschätzung auf einem Bündel Σ_μ realisiert, wie im Riemannschen Fall nicht nur ein Twistor-Spinor, sondern sofort auch ein Killing-Spinor ist. Speziell für eine sechsdimensionale nearly-Kähler-Mannigfaltigkeit (M^6, g, J) mit dem eindeutigen metrischen Zusammenhang ∇^c mit antisymmetrischer Torsion T, für den $\nabla^c J = 0$ gilt, zeigen wir, dass die Twistor-Spinoren des Gleichheitsfalls der Twistor-Abschätzung mit den Riemannschen Killing-Spinoren der nearly-Kähler-Mannigfaltigkeit übereinstimmen. Zuletzt vergleichen wir die verschiedenen Abschätzungen des Operators $D\!\!\!/^2$ für eine gewisse Klasse von fast-Hermiteschen

Mannigfaltigkeiten vom strikten Typ $\mathcal{W}_3$. Auch hier verbessert die Twistor-Abschätzung für $\mathrm{Scal}^g_{\min} > \frac{7}{2}\|T\|^2$ die bisherigen Abschätzungen.

In Kapitel 2 wird das allgemeine Konstruktionsprinzip von Killing-Spinoren mit Torsion dargelegt, das hinter dem Beispiel der fünfdimensionalen Stiefel-Mannigfaltigkeit $V_2(\mathbb{R}^4) = \mathrm{SO}(4)/\mathrm{SO}(2)$ steht. Auf einer Sasaki-Mannigfaltigkeit $(M^{2k+1}, g, \xi, \eta, \varphi)$ ist eine sogenannte D-homothetische Deformation g_t der Metrik g definiert durch

$$g_t := tg + (t^2 - t)\eta \otimes \eta\,.$$

Wir werden Killing-Spinoren mit Torsion auf Sasaki-Mannigfaltigkeiten beschreiben, die sich durch eine solche Deformation einer Riemannschen Einstein-Metrik bzw. einer semi-Riemannschen Einstein-Metrik mit Lorentz-Signatur konstruieren lassen.

In Kapitel 3 untersuchen wir auf einer fünfdimensionalen Riemannschen Spin-Mannigfaltigkeit (M^5, g) für eine beliebige 3-Form T, die parallel ist bezüglich des Zusammenhangs $\nabla^c := \nabla^g + 1/2\,T$, die Gleichungen

$$T\psi = \mu\psi, \quad \nabla^s_X\psi = \beta X\psi\,.$$

Wir zeigen, dass die Lösungsspinoren dieser Gleichungen bis auf bestimmte Ausnahmen die im vorhergehenden Kapitel konstruierten Killing-Spinoren mit Torsion auf einer Sasaki-Mannigfaltigkeit sind. Der erste Ausnahmefall tritt für $s = -3/4$ ein. Der zweite besondere Fall tritt für $s = 1/4$ ein. Killing-Spinoren zu diesem Parameter $s = 1/4$ sind Spinoren, die parallel bezüglich des Zusammenhangs ∇^c sind. Wir zeigen, dass eine fünfdimensionale Mannigfaltigkeit mit ∇^c-parallelen Spinoren, die sich nicht durch eine D-homothetische Deformation einer Einstein-Sasaki-Metrik konstruieren lassen, lokal einer von drei bestimmten natürlich-reduktiven Räumen ist, nämlich die fünfdimensionale Heisenberg-Gruppe H^5 oder $\mathrm{SO}(3)\times\mathrm{SO}(3)/\mathrm{SO}(2)$ oder $\mathrm{SO}(3)\times\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$ mit gewissen Einbettungen von $\mathrm{SO}(2)$. In Abschnitt 3.2 beschreiben wir diese natürlich-reduktiven Räume mit ihren ∇^c-parallelen Spinoren explizit, und wir geben auf der fünfdimensionalen Heisenberg-Gruppe zudem ein Beispiel von Killing-Spinoren mit Torsion zum Parameter $s = -3/4$.

In Kapitel 4, dem letzten Teil der Arbeit, kehren wir zu den Eigenwerten des Operators $\not{D}^2$ zurück. Wir vergleichen die bekannten Abschätzungen, die für Sasaki-Mannigfaltigkeiten $(M^{2k+1}, \xi, \eta, \varphi)$ mit der Torsion $T = \eta \wedge d\eta$ bekannt sind, und sehen, dass die Twistor-Abschätzung stärker als die universelle Abschätzung ist, wenn $\mathrm{Scal}^g_{\min} > 8k^2$ gilt. Die von uns auf gewissen Sasaki-Mannigfaltigkeiten konstruierten Killing-Spinoren mit Torsion sind Eigenspinoren des Operators $\not{D}$. Speziell im fünfdimensionalen Fall können wir zeigen, dass für einen gewissen Wertebereich der Skalarkrümmung ihr Eigenwert der kleinste Eigenwert des Operators $\not{D}$ ist.

Danksagung

Frau Prof. Dr. habil. Ilka Agricola gilt mein besonderer Dank: Sie hat mich an dieses interessante Thema herangeführt, die Entstehung der Arbeit mit vielen wertvollen Ratschlägen begleitet und durch ihren Einsatz für optimale Arbeitsbedingungen am Institut gesorgt.
Ebenso danke ich Herrn Prof. Dr. sc. Thomas Friedrich, der mir den Weg von Anfang an, beginnend mit seinen grundlegenden in die Mathematik einführenden Lehrveranstaltungen, bis hin zu dem Themenkreis meiner Arbeit wies.

Marburg, den 31. August 2012 Julia Becker-Bender

1 Die Twistor-Eigenwertabschätzung für $\not{D} = D^g + \frac{1}{4}T$

In diesem Kapitel beweisen wir mit Hilfe des Twistor-Operators eine allgemeine Eigenwertabschätzung für den Operator $\not{D} = D^g + \frac{1}{4}T$. Das zentrale Ergebnis ist die Integralformel aus Satz 1.8 und die Abschätzung aus Korollar 1.9. Die speziellen Spinorfelder, die den Gleichheitsfall dieser Twistor-Abschätzung charakterisieren, untersuchen wir in Abschnitt 1.3 allgemein, und in Abschitt 1.4 betrachten wir die Twistor-Abschätzung speziell in den Dimensionen vier und sechs. Die Ergebnisse dieses Kapitels sind Teil des gemeinsamen Artikels [ABBK] mit I. Agricola und K. Kim.

Unsere wichtigsten Bezeichnungen und Voraussetzungen sind diese: (M^n, g) ist eine kompakte Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit der Dimension n mit Spinorbündel Σ. Der Raum der glatten Schnitte im Spinorbündel ist $\Gamma(\Sigma)$. Der Levi-Civita-Zusammenhang der Riemannschen Metrik g ist ∇^g, und der Riemannsche Dirac-Operator ist D^g. Der Zusammenhang ∇^c steht immer für einen metrischen Zusammenhang $\nabla^c = \nabla^g + \frac{1}{2}T$ mit antisymmetrischer Torsion T, d. h. für die Torsion gilt $g(T(X,Y),Z) + g(T(X,Z),Y) = 0$. Wir bezeichnen den $(2,1)$-Tensor der Torsion und die zugehörige 3-Form unterschiedslos mit T. Meist wird $\nabla^c T = 0$ eine weitere Voraussetzung sein, die wir aber jeweils nennen. Wir werden viel mit der Zusammenhangsfamilie

$$\nabla^s_X Y := \nabla^g_X Y + 2sT(X,Y)$$

arbeiten. Für $s = 0$ erhalten wir dabei den Levi-Civita-Zusammenhang ∇^g und für $s = 1/4$ den Zusammenhang ∇^c mit Torsion T. Für den Lift von ∇^s ins Spinorbündel gilt

$$\nabla^s_X \psi = \nabla^g_X \psi + s(X \lrcorner T)\psi\,.$$

Die Clifford-Multiplikation zeigen wir hierbei nicht durch einen Punkt an. Wir kennzeichnen Objekte mit einem hochgestellten s, um ausdrücken, dass sie zu dem Zusammenhang ∇^s gehören. Beispielsweise ist D^s der Dirac-Operator des Zusammenhangs ∇^s, d. h. die Verknüpfung von der spinoriellen kovarianten Ableitung ∇^s mit der Clifford-Multiplikation. Wir werden das Spektrum des Dirac-Operators $\not{D}$ zum metrischen Zusammenhang mit Torsion $T/3$ untersuchen, also den Dirac-Operator zu ∇^s für $s = 1/12$. Es gilt $\not{D} = D^g + \frac{1}{4}T$.

1.1 Technische Grundlagen

Als Vorbereitung auf die zu zeigende Eigenwertabschätzung stellen wir bereits Bekanntes zu Dirac- und Twistor-Operatoren zusammen. Insbesondere erinnern wir am Ende dieses Abschnitts daran, wie sich Friedrichs Eigenwertabschätzung ([Fri80]) für den kleinsten Eigenwert des Riemannschen Dirac-Operators durch den Riemannschen Twistor-Operator beweisen lässt.

Wie in [FrIv02] ordnen wir einer 3-Form T die 4-Form σ_T zu, die durch folgende zyklische Summation definiert ist:

$$\sigma_T(X,Y,Z,W) := \overset{X,Y,Z}{\mathfrak{S}}\; T(T(X,Y),Z,W)\,.$$

In einem lokalen Orthonormalreper e_j gilt dann

$$\sigma_T = \frac{1}{2}\sum_j (e_j \lrcorner T) \wedge (e_j \lrcorner T)\,.$$

Die 4-Form σ_T besitzt eine weitere Interpretation:

Lemma 1.1 ([Agr03]).
In der Clifford-Algebra hat das Element T^2 keinen Bestandteil vom Grad zwei und sechs. Der skalare Anteil und der Anteil vom Grad vier sind

$$T_0^2 = \|T\|^2 := \frac{1}{6}\sum_{j,k=1}^{n} \|T(e_j, e_k)\|^2, \qquad T_4^2 = -2\sigma_T\,.$$

Für die Wurzel aus dem skalaren Anteil von T^2 verwenden wir die Bezeichnung $\|T\| := \sqrt{\|T\|^2}$. Im Fall paralleler Torsion ist die 4-Form σ_T außerdem zur 4-Form des Differentials dT proportional:

Lemma 1.2 ([IvPa01]).
Sei ∇ ein metrischer Zusammenhang mit antisymmetrischer Torsion T. Dann ist das äußere Differential von T

$$dT(X,Y,Z,V) = \left(\overset{X,Y,Z}{\mathfrak{S}} (\nabla_X T)(Y,Z,V)\right) - (\nabla_V T)(X,Y,Z) + 2\,\sigma_T(X,Y,Z,V)\,.$$

Insbesondere folgt aus $\nabla T = 0$, dass $dT = 2\sigma_T$ gilt.

Der Dirac-Operator D^∇ eines metrischen Zusammenhangs ∇ ist durch die Verknüpfung von kovarianter Ableitung ∇ und Clifford-Multiplikation gegeben:

$$D^\nabla : \Gamma(\Sigma) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^*M \otimes \Sigma) \overset{g}{\simeq} \Gamma(TM \otimes \Sigma) \xrightarrow{\cdot} \Gamma(\Sigma)\,.$$

In einem lokalen Orthonormalreper e_j gilt

$$D^\nabla \psi = \sum_j e_j \nabla_{e_j} \psi\,.$$

Wir werden im Folgenden den Dirac-Operator D^s des eingangs definierten Zusammenhangs ∇^s betrachten. Es gilt

$$D^s\psi = \sum_j e_j \nabla^s_{e_j}\psi = \sum_j \left(e_j \nabla^g_{e_j}\psi + s\, e_j (e_j \lrcorner T)\psi\right) = D^g\psi + 3sT\psi\,.$$

Wir führen einen weiteren Differentialoperator erster Ordnung ein:

$$\mathcal{D}^s\psi := \sum_j (e_j \lrcorner T)\nabla^s_{e_j}\psi\,.$$

Dieser Operator tritt in der Schrödinger-Lichnerowicz-Formel für das Quadrat des Dirac-Operators D^s zum Zusammenhang ∇^s auf. Mit δT ist die Divergenz der 3-Form T bezeichnet. In einem lokalen Orthonormalreper e_j gilt

$$\delta T = -\sum_j e_j \lrcorner \nabla^g_{e_j} T\,.$$

Falls T parallel ist bezüglich einem der Zusammenhänge ∇^s, gilt $\delta T = 0$. Wir haben für den Operator D^s folgende Identitäten:

Satz 1.3 ([FrIv02]).
Für das Quadrat des Dirac-Operators D^s gilt

$$(D^s)^2 = \Delta^s + \tfrac{1}{4}\mathrm{Scal}^s + 3s\,dT - 8s^2\sigma_T + 2s\,\delta T - 4s\,\mathcal{D}^s\,.$$

Der Antikommutator von D^s und T ist

$$D^sT + TD^s \;=\; dT + \delta T - 8s\sigma_T - 2\mathcal{D}^s\,.$$

Über das Spektrum des hier auftretenden Operators $\mathcal{D}^s$ lassen sich im allgemeinen Fall auf einfache Weise keine Aussagen treffen. Fordert man aber nicht mehr, dass der Dirac-Operator und der Laplace-Operator zum selben Zusammenhang ∇^s gehören, so erlaubt dieser Freiheitsgrad, den Operator $\mathcal{D}^s$ aus der Gleichung zu eliminieren, und wir erhalten die *verallgemeinerte Schrödinger-Lichnerowicz-Formel*:

Satz 1.4 ([AgFr04], Verallgemeinerte Schrödinger-Lichnerowicz-Formel).
Für beliebige antisymmetrische Torsion T gilt

$$(D^{s/3})^2 = \Delta^s + \tfrac{1}{4}\mathrm{Scal}^g + s\,dT - 2s^2\|T\|^2\,.$$

Im Fall $\nabla^sT = 0$ vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$(D^{s/3})^2 = \Delta^s + \tfrac{1}{4}\mathrm{Scal}^g + s(1-2s)\|T\|^2 - sT^2\,.$$

Gilt $\nabla^sT = 0$, kommutieren Δ^s und T. Aus der obigen Identität folgt dann auch

$$(D^{s/3})^2 \circ T \;=\; T \circ (D^{s/3})^2\,.$$

Der Spinor-Endomorphismus T ist symmetrisch, also diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten. Wenn $\nabla^sT = 0$ gilt und T also invariant unter dem von ∇^s definierten Paralleltransport ist, hängen die Eigenwerte nicht vom Punkt ab, und wir können das Spinorbündel Σ global in die orthogonale Summe der Eigenräume Σ_μ von T aufspalten,

$$\Sigma = \oplus_\mu \Sigma_\mu\,.$$

Wegen $\nabla^sT = 0$ erhält ∇^s diese Aufspaltung, und der Operator $(D^{s/3})^2$ erhält diese Aufspaltung ebenfalls, da er mit der Wirkung der Torsion T kommutiert.
Wir bezeichnen mit $\mu_1, ..., \mu_l$ die Eigenwerte der Torsion T. Aus der verallgemeinerten Schrödinger-Lichnerowicz-Formel (Satz 1.4) für den Operator $\not{D}$ $(s = 1/12)$ im Fall ∇^c-paralleler Torsion,

$$\not{D}^2 = \Delta^c + \tfrac{1}{4}\mathrm{Scal}^g + \tfrac{1}{8}\|T\|^2 - \tfrac{1}{4}T^2,$$

erhalten wir die folgende Abschätzung, die wir die *universelle Eigenwertabschätzung* nennen:

Lemma 1.5 (Universelle Eigenwertabschätzung).
Sei $\nabla^cT = 0$. Dann gilt für den kleinsten Eigenwert λ von $\not{D}^2$ auf dem Bündel Σ_μ

$$\lambda(\not{D}^2\big|_{\Sigma_\mu}) \geq \tfrac{1}{4}\mathrm{Scal}^g_{\min} + \tfrac{1}{8}\|T\|^2 - \tfrac{1}{4}\,\mu^2 =: \beta_{\mathrm{univ}}(\mu)\,.$$

Die Gleichheit wird genau dann angenommen, wenn das Bündel Σ_μ einen ∇^c-parallelen Spinor enthält. Für den kleinsten Eigenwert λ von $\not{D}^2$ auf dem gesamten Spinorbündel Σ erhalten wir damit

$$\lambda \geq \tfrac{1}{4}\mathrm{Scal}^g + \tfrac{1}{8}\|T\|^2 - \tfrac{1}{4}\,\max(\mu_1^2, \ldots, \mu_l^2) =: \beta_{\mathrm{univ}}\,.$$

Für $T = 0$ stimmt die verallgemeinerte Schrödinger-Lichnerowicz-Formel mit der klassischen Schrödinger-Lichnerowicz-Formel überein. Die universelle Eigenwertabschätzung geht somit für $T = 0$ in eine Abschätzung über, die für Metriken positiver Skalarkrümmung nicht optimal ist. Wir werden im kommenden Abschnitt sehen, dass unsere twistorielle Eigenwertabschätzung dies verbessert und für $T = 0$ Friedrichs Abschätzung ([Fri80]) reproduziert.

Wir kommen nun, in diesem letzen Teil des Abschnitts, zu Twistor-Operatoren, Twistor-Spinoren und Killing-Spinoren. Eine grundlegende Übersichtsarbeit zu diesen Themen ist [BFGK91]. Es bezeichne pr die Projektion auf den Kern der Clifford-Multiplikation. Dann ist der Twistor-Operator P^∇ eines metrischen Zusammenhangs ∇ definiert durch

$$P^\nabla : \Gamma(\Sigma) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^*M \otimes \Sigma) \overset{g}{\simeq} \Gamma(TM \otimes \Sigma) \xrightarrow{pr} \Gamma(TM \otimes \Sigma) .$$

In einem lokalen Orthonormalreper e_j lässt sich der Twistor-Operator P^∇ des Zusammenhangs ∇ mit Hilfe des Dirac-Operators D^∇ des gleichen Zusammenhangs schreiben als

$$P^\nabla \psi = \sum_j e_j \otimes \left(\nabla_{e_j} \psi + \tfrac{1}{n} X D^\nabla \psi \right) .$$

Elemente des Kerns von P^∇ heißen Twistor-Spinoren. Ein Spinor $\psi_o \in \Gamma(\Sigma)$ ist genau dann ein Twistor-Spinor des Zusammenhangs ∇, wenn er die Twistor-Gleichung

$$\nabla_X \psi_o + \tfrac{1}{n} X D^\nabla \psi_o = 0$$

für alle $X \in TM$ erfüllt. Ein besonderer Fall von Twistor-Spinoren sind Killing-Spinoren: Ein Spinor $\psi_o \in \Gamma(\Sigma)$ ist ein Killing-Spinor des Zusammenhangs ∇ zur Killing-Zahl β, falls er die Killing-Gleichung

$$\nabla_X \psi_o = \beta X \psi_o$$

für alle $X \in TM$ erfüllt. Ein Killing-Spinor ψ_o des Zusammenhangs ∇ zur Killing-Zahl β ist immer auch Eigenspinor des Dirac-Operators D^∇ zum selben Zusammenhang ∇, und zwar zum Eigenwert $-\beta/n$. Dies folgt unmittelbar aus dem lokalen Ausdruck für den Dirac-Operator. Damit ist der Killing-Spinor ψ_o auch immer ein Twistor-Spinor desselben Zusammenhangs ∇. Umgekehrt ist ein Twistor-Spinor des Zusammenhangs ∇ genau dann ein Killing-Spinor des Zusammenhangs ∇, wenn er auch ein Eigenspinor des Operators D^∇ ist.

Da ein Killing-Spinor ψ_o des Zusammenhangs ∇ zur Killing-Zahl β parallel ist bezüglich des spinoriellen Zusammenhangs $\nabla_X - \beta X$, besitzt er keine Nullstellen.
Wenn ∇ ein metrischer Zusammenhang mit antisymmetrischer Torsion T ist, dann definiert ein Killing-Spinor ψ_o des Zusammenhangs ∇ zur Killing-Zahl $\beta \in \mathbb{R}$ ein reelles Vektorfeld durch

$$X_{\psi_o} := i \sum_j \langle \psi_o, e_j \psi_o \rangle e_j .$$

Wie im klassischen Fall eines Riemannschen Killing-Spinors ist dieses Vektorfeld, wenn es nicht Null ist, ein Killing-Vektorfeld: Da ∇ metrisch ist, gilt

$$\nabla_Y X_{\psi_o} = i\beta \sum_j \langle \psi_o, (e_j Y - Y e_j) \psi_o \rangle e_j .$$

Für die Lie-Ableitung der Metrik g in Richtung des Vektorfeldes X_{ψ_o} gilt aufgrund dieser Identität und der Antisymmetrie der Torsion T

$$\left(\mathcal{L}_{X_{\psi_o}} g \right) (Y, Z) = g(\nabla_Y X_{\psi_o}, Z) + g(Y, \nabla_Z X_{\psi_o}) + g(T(X_{\psi_o}, Y), Z) + g(Y, T(X_{\psi_o}, Z)) = 0 .$$

Also ist das Vektorfeld X_{ψ_o} ein Killing-Vektorfeld.

Folgende Identität ist von großer Bedeutung für Eigenwertabschätzungen des Dirac-Operators:

Lemma 1.6.
Sei $\psi \in \Gamma(\Sigma)$ ein beliebiger Spinor. Dann gilt

$$\|P^\nabla \psi\|^2 + \tfrac{1}{n}\|D^\nabla \psi\|^2 = \|\nabla\psi\|^2 \,.$$

Wie in [Hij94/98] und [Sem98] ausgeführt, zeigt man mit dieser Beziehung auf folgende Weise die Friedrichsche Abschätzung für den Riemannschen Dirac-Operator:
Wir bezeichnen mit D^g und P^g den Dirac- bzw. den Twistor-Operator zum Levi-Civita-Zusammenhang einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit (M^n, g), und durch Integration der klassischen Schrödinger-Lichnerowicz-Formel

$$(D^g)^2 = \Delta^g + \tfrac{1}{4}\mathrm{Scal}^g$$

erhalten wir aufgrund der Selbstadjungiertheit von D^g und aufgrund der Definition von Δ^g als Verknüpfung der kovarianten Ableitung $\nabla^g : \Gamma(\Sigma) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes \Sigma)$ mit der formal adjungierten Abbildung $(\nabla^g)^* : \Gamma(T^*M \otimes \Sigma) \longrightarrow \Gamma(\Sigma)$ die Integralformel

$$\int \|D^g\psi\|^2 = \int \|\nabla^g\psi\|^2 + \tfrac{1}{4}\int \mathrm{Scal}^g \|\psi\|^2 \,.$$

Wir nutzen weiter die Gleichung aus Lemma 1.6, um den ersten Summanden auf der rechten Seite zu ersetzen, und erhalten

$$\tfrac{n-1}{n}\int \|D^g\psi\|^2 = \int \|P^g\psi\|^2 + \tfrac{1}{4}\int \mathrm{Scal}^g \|\psi\|^2 \,.$$

Lassen wir den ersten (nicht negativen) Summanden der rechten Seite hier weg und gehen im zweiten Summanden zum Minimum der Skalarkrümmung über, erhalten wir für einen Eigenwert λ des Operators D^g die Friedrichsche Abschätzung

$$\lambda^2 \geq \tfrac{n}{4(n-1)}\mathrm{Scal}^g_{\min} \,.$$

Im folgenden Abschnitt werden wir sehen, wie sich dieser Beweisgedanke für Eigenwertabschätzungen des Operators $\not{D} = D^g + \frac{1}{4}T$ adaptieren lässt.

1.2 Twistor-Eigenwertabschätzung

Wir beweisen nun mit Hilfe des Twistor-Operators eine neue allgemeine Eigenwertabschätzung für den Dirac-Operator $\not{D} = D^g + \frac{1}{4}T$. Wir setzen hierbei $\nabla^c T = 0$ voraus. Die Eigenwerte des Spinor-Endomorphismus T bezeichnen wir mit $\mu_j \in \mathbb{R}$ und die zugehörigen Eigenräume mit Σ_{μ_i}. Wir werden zeigen: Ein Eigenwert λ des Operators $\not{D}^2$ auf dem Bündel Σ_μ erfüllt

$$\lambda(\not{D}^2|_{\Sigma_\mu}) \geq \tfrac{n}{4(n-1)}\mathrm{Scal}^g_{\min} + \tfrac{n(n-5)}{8(n-3)^2}\|T\|^2 - \tfrac{n(n-4)}{4(n-3)^2}\mu^2 .$$

Der Gleichheitsfall tritt genau dann ein, wenn die Riemannsche Skalarkrümmung Scal^g konstant und der zu λ gehörige Eigenspinor ein Twistor-Spinor des Zusammenhangs ∇^s zum Parameter $s = \frac{n-1}{4(n-3)}$ ist. Die Beweisidee besteht darin, von der verallgemeinerten Schrödinger-Lichnerowicz-Formel auszugehen und die nach Anwenden der Twistor-Operatoren-Identität aus Lemma 1.6 auftretende Differenz der Quadrate zweier Dirac-Operatoren zu den Parametern s und $s/3$ durch geeignete Wahl des Paramters s als Quadrat des Dirac-Operators $\not{D}$ plus Torsionsterme neu zu interpretieren.
Dieser Neuinterpretation liegt folgende Rechnung zugrunde:

Lemma 1.7.

$$(D^{s/3})^2 - \tfrac{1}{n}(D^s)^2 = \tfrac{n-1}{n}\left(D^g + s\tfrac{(n-3)}{n-1}T\right)^2 - s^2\tfrac{4}{n-1}T^2.$$

Beweis. Wir drücken die Dirac-Operatoren der linken Seite über den Riemannschen Dirac-Operator D^g aus:

$$\begin{aligned}(D^{s/3})^2 - \tfrac{1}{n}(D^s)^2 &= (D^g + sT)^2 - \tfrac{1}{n}(D^g + 3sT)^2 \\ &= (D^g)^2 + s^2T^2 + s(D^gT + TD^g) - \tfrac{1}{n}\left((D^g)^2 + 9s^2T^2 + 3s(D^gT + TD^g)\right) \\ &= \left(1 - \tfrac{1}{n}\right)(D^g)^2 + s^2\left(1 - \tfrac{9}{n}\right)T^2 + s\left(1 - \tfrac{3}{n}\right)(D^gT + TD^g) \\ &= \tfrac{n-1}{n}\left((D^g)^2 + s^2\tfrac{n-9}{n-1}T^2 + s\tfrac{n-3}{n-1}(D^gT + TD^g)\right).\end{aligned}$$

Dies vergleichen wir mit dem Ausdruck für das Quadrat eines Operators der Form $D^g + cT$,

$$(D^g + cT)^2 = (D^g)^2 + c(D^gT + TD^g) + c^2T^2 .$$

Ein Blick auf die jeweiligen Koeffizienten vor dem Summanden $(D^gT + TD^g)$ sagt uns, dass wir den Operator $D^g + cT$ für $c = s\frac{n-3}{n-1}$ ins Spiel bringen können:

$$\begin{aligned}(D^{s/3})^2 - \tfrac{1}{n}(D^s)^2 &= \tfrac{n-1}{n}\left(\left(D^g + s\tfrac{n-3}{n-1}T\right)^2 - s^2\tfrac{4n}{(n-1)^2}T^2\right) \\ &= \tfrac{n-1}{n}\left(D^g + s\tfrac{n-3}{n-1}T\right)^2 - s^2\tfrac{4}{n-1}T^2 .\end{aligned}$$

□

Mit diesem Lemma vorbereitet, können wir die zentrale Integralformel beweisen.

Satz 1.8 (Die Twistor-Integralformel)**.**
Sei $\nabla^c T = 0$. Dann gilt für den Operator $\not{D} = D^g + \frac{1}{4}T$ und einen beliebigen Spinor ψ

$$\begin{aligned}\int\langle\not{D}^2\psi,\psi\rangle &= \tfrac{n}{n-1}\int\|P^{s_{\mathrm{tw}}}\psi\|^2 + \tfrac{n}{4(n-1)}\int\mathrm{Scal}^g\|\psi\|^2 \\ &\quad + \tfrac{n(n-5)}{8(n-3)^2}\|T\|^2\int\|\psi\|^2 - \tfrac{n(n-4)}{4(n-3)^2}\int\langle T^2\psi,\psi\rangle ,\end{aligned}$$

wobei der Parameter s_{tw} des Twistor-Operators $P^{s_{\mathrm{tw}}}$ für den Wert $s_{\mathrm{tw}} = \frac{n-1}{4(n-3)}$ steht.

Beweis. Für den Dirac-Operator $D^{s/3} = D^g + 3sT$ gilt die verallgemeinerte Schrödinger-Lichnerowicz-Formel aus Satz 1.4. Integration liefert

$$\int \langle (D^{s/3})^2\psi,\psi\rangle \;=\; \int \|\nabla^s\psi\|^2 + s\int\langle dT\psi,\psi\rangle + \tfrac{1}{4}\int \mathrm{Scal}^g\|\psi\|^2 - 2s^2\int \|T\|^2\|\psi\|^2 .$$

Die Länge $\|\nabla^s\psi\|^2$ kann nach Lemma 1.6 über den Twistor- und den Dirac-Operator zum gleichen Parameter ausgedrückt werden. Dann lautet die Gleichung

$$\int \langle ((D^{s/3})^2 - \tfrac{1}{n}(D^s)^2)\psi,\psi\rangle = \int \|P^s\psi\|^2 + s\int\langle dT\psi,\psi\rangle + \tfrac{1}{4}\int \mathrm{Scal}^g\,\|\psi\|^2 - 2s^2\int \|T\|^2\|\psi\|^2 .$$

Als nächstes wenden wir Lemma 1.7 an, um den Differenzausdruck der linken Seite zu substituieren,

$$\begin{aligned}\tfrac{n-1}{n}\int\langle (D^g + s\tfrac{n-3}{n-1}T)^2\psi,\psi\rangle \;&=\; \int \|P^s\psi\|^2 + \tfrac{1}{4}\int \mathrm{Scal}^g\|\psi\|^2 + \\ &\quad + s\int\langle dT\psi,\psi\rangle - 2s^2\int\|T\|^2\|\psi\|^2 + s^2\tfrac{4}{n-1}T^2.\end{aligned}$$

Wir wählen den Parameter s nun so, dass der Dirac-Operator auf der linken Seite zum Operator $\not{D} = D^g + \frac{1}{4}T$ wird. Dies ist der Fall für $s = s_{\mathrm{tw}} := \frac{n-1}{4(n-3)}$. Für diesen Wert von s lautet die Integralformel

$$\begin{aligned}\tfrac{n-1}{n}\int\langle \not{D}^2\psi,\psi\rangle \;&=\; \int \|P^{s_{\mathrm{tw}}}\psi\|^2 + \tfrac{1}{4}\int \mathrm{Scal}^g\|\psi\|^2 + \\ &\quad + \tfrac{n-1}{4(n-3)}\int\langle dT\psi,\psi\rangle - \tfrac{(n-1)^2}{8(n-3)^2}\int\|T\|^2\|\psi\|^2 + \tfrac{n-1}{4(n-3)^2}T^2.\end{aligned}$$

Aus $\nabla^c T = 0$ folgt $dT = 2\sigma_T$, und da allgemein gilt $T^2 = -2\sigma_T + \|T\|^2$, erhalten wir $dT = -T^2 + \|T\|^2$. Für die Integralformel heißt das:

$$\int\langle \not{D}^2\psi,\psi\rangle = \tfrac{n}{n-1}\int\|P^{s_{\mathrm{tw}}}\psi\|^2 + \tfrac{n}{4(n-1)}\int \mathrm{Scal}^g\|\psi\|^2 + \tfrac{n(n-5)}{8(n-3)^2}\int\|T\|^2\|\psi\|^2 - \tfrac{n(n-4)}{4(n-3)^2}T^2. \qquad \square$$

Da der Operator $\not{D}^2$ mit dem Spinor-Endomorphismus T kommutiert (Lemma 1.4), können wir annehmen, dass ein Eigenspinor ψ_o von $\not{D}^2$ zum Eigenwert λ auch ein Eigenspinor von T zu einem Eigenwert μ ist, also im Unterbündel Σ_μ liegt. Aus der obigen Integralformel erhalten wir für jedes Eigenbündel Σ_μ die folgende Eigenwertabschätzung:

Korollar 1.9 (Twistor-Eigenwertabschätzung auf Σ_μ).
Gelte $\nabla^c T = 0$. Für den kleinsten Eigenwert λ von $\not{D}^2$ auf Σ_μ gilt

$$\lambda(\not{D}^2|_{\Sigma_\mu}) \geq \tfrac{n}{4(n-1)}\mathrm{Scal}^g_{\min} + \tfrac{n(n-5)}{8(n-3)^2}\|T\|^2 - \tfrac{n(n-4)}{4(n-3)^2}\mu^2 .$$

Der Gleichheitsfall tritt genau dann ein, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(1) *Die Riemannsche Skalarkrümmung* Scal^g *ist konstant,*

(2) *der Eigenspinor $\psi_o \in \Gamma(\Sigma_\mu)$ ist ein Twistor-Spinor für $s_{\mathrm{tw}} = \frac{n-1}{4(n-3)}$.*

Beim Übergang zum gesamten Spinorbündel Σ ergibt sich hieraus:

Korollar 1.10 (Twistor-Eigenwertabschätzung).
Gelte $\nabla^c T = 0$. Für den kleinsten Eigenwert λ von $\not{D}^2$ gilt

$$\lambda \geq \tfrac{n}{4(n-1)}\mathrm{Scal}^g_{\min} + \tfrac{n(n-5)}{8(n-3)^2}\|T\|^2 - \tfrac{n(n-4)}{4(n-3)^2}\max(\mu_1^2,\ldots,\mu_k^2) .$$

Der Gleichheitsfall tritt genau dann ein, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(1) *Die Riemannsche Skalarkrümmung* Scal^g *ist konstant,*

(2) *der Eigenspinor* ψ_o *ist ein Twistor-Spinor für* $s_{\mathrm{tw}} = \frac{n-1}{4(n-3)}$*,*

(3) *der Eigenspinor* ψ_o *liegt im Unterbündel* Σ_μ *zum größten Eigenwert* μ *von* T*.*

Wir machen einige Bemerkungen zu dieser Abschätzung:

- Für $T = 0$ geht die Abschätzung in Friedrichs Ungleichung über, d. h. in die für den allgemeinen Riemannschen Fall optimale Abschätzung.
- Es ist möglich, dass die Abschätzung auf einem Unterbündel Σ_μ scharf ist, auf einem anderen Unterbündel nicht. Insbesondere muss die Gesamtabschätzung, bei der man zum Maximum von μ^2 übergeht, noch nicht scharf sein, wenn auf einem beliebigen Unterbündel Σ_μ der Gleichheitsfall eintritt.
- In manchen Geometrien ist bereits bekannt, dass der kleinste Eigenwert von $\not{D}^2$ immer in einem bestimmten Bündel Σ_μ liegt. Dies ist beispielsweise für fünfdimensionale Sasaki-Mannigfaltigkeiten der Fall (vgl. [AFK08] und Kapitel 4 dieser Arbeit).
- Die Abschätzung liefert dann eine sinnvolle Aussage, wenn Scal^g im Vergleich zu $\|T\|^2$ und den Torsions-Eigenwerten μ_j so groß ist, dass auf der rechten Seite ein positiver Wert steht. Es gibt Räume mit negativer Skalarkrümmung, in denen das nicht der Fall ist. In Abschnitt 3.2 beschreiben wir hierzu das Beispiel der fünfdimensionalen Heisenberg-Gruppe.
- Anders als im Riemannschen Fall müssen diejenigen Twistor-Spinoren, die den Gleichheitsfall in der Abschätzung realisieren, nicht sofort auch Killing-Spinoren sein. Das Problem hierbei ist, dass zwar $\not{D}^2$ mit der Torsion kommutiert, aber nicht $\not{D}$ selbst. Wenn wir einen Eigenspinor ψ von $\not{D}$ bezüglich der Unterbündel Σ_μ zerlegen in $\psi = \psi_1 + \psi_2 + ...$, dann ist ein Spinor $\psi_j \in \Gamma(\Sigma_{\mu_j})$ wieder Eigenspinor von $\not{D}^2$, aber nicht notwendigerweise auch von $\not{D}$. Falls jedoch in einem bestimmten Fall bekannt ist, dass ein $\psi_j \in \Gamma(\Sigma_{\mu_j})$ tatsächlich ein Eigenspinor von $\not{D}$ selbst ist, dann ist ψ_j Eigenspinor aller Operatoren der Familie D^s und ein Killing-Spinor zu genau den Zusammenhängen ∇^s, für die er ein Twistor-Spinor ist. In allen unseren bisherigen Beispielen für Twistor-Spinoren mit Torsion ist das der Fall.
- In Abschnitt 1.4 werden wir sehen, dass in Dimension sechs ein besonderer Fall vorliegt: Hier sind die Twistor-Spinoren des Gleichheitsfalls tatsächlich auch Killing-Spinoren.

Wir beschreiben nun einen Raum explizit, auf dem die Gleichheit in der Twistor-Abschätzung eintritt. Dieses Beispiel ist typisch für eine größere Klasse von Geometrien, die wir in den folgenden Kapiteln noch eingehend untersuchen werden.

Die fünfdimensionale Stiefel-Mannigfaltigkeit $V_2(\mathbb{R}^4)$

Wir betrachten die fünfdimensionale Stiefel-Mannigfaltigkeit $V_2(\mathbb{R}^4) = \mathrm{SO}(4)/\mathrm{SO}(2)$ mit der einparametrigen Familie von Metriken, die G. Jensen ([Jen75]) erstmals beschrieb: Wir betten $H = \mathrm{SO}(2)$ nach $G = \mathrm{SO}(4)$ ein als den unteren 2×2-Block auf der Diagonalen. Die Lie-Algebra $\mathfrak{so}(4)$ spaltet sich dann zu $\mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{m}$ auf, wobei das Komplement $\mathfrak{m}$ definiert ist durch

$$\mathfrak{m} \;=\; \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -a & \\ a & 0 & -X^t \\ \hline & & 0 \quad 0 \\ \multicolumn{2}{c|}{X} & 0 \quad 0 \end{array} \right) =: (a, X) \mid a \in \mathbb{R},\ X \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \right\}.$$

Sei $\beta(X, Y) := \mathrm{tr}(X^t Y)$ die Killing-Form von $\mathfrak{so}(4)$. Die Jensen-Metrik auf $\mathfrak{m}$ zum Parameter $t \in \mathbb{R}$ ist

$$\langle (a, X), (b, Y) \rangle \;=\; \frac{1}{2}\beta(X, Y) + t\beta(a, b) \;=\; \frac{1}{2}\beta(X, Y) + 2t\, ab\,.$$

G. Jensen zeigte, dass diese Metrik für $t = 2/3$ eine Einstein-Metrik ist. In [Fri80] zeigte Th. Friedrich, dass der Raum eine homogene Spin-Struktur trägt und zwei Riemannsche Killing-Spinoren besitzt. Eine detaillierte Beschreibung der metrischen Fast-Kontakt-Strukturen und der metrischen Zusammenhänge mit antisymmetrischer Torsion des Raums findet sich in [Agr03]. Insbesondere verweisen wir auf die beiden letztgenannten Arbeiten für Beweise der hier gebrauchten Formeln.

Sei E_{jl} die Standardbasis von $\mathfrak{so}(4)$, die aus den schiefsymmetrischen Endomorphismen

$$E_{jl} := e_j^* \otimes e_l - e_l^* \otimes e_j, \quad 1 \le j < l \le 4$$

besteht. Dann ist eine Orthonormalbasis von $\mathfrak{m}$ gegeben durch

$$Z_1 \;:=\; E_{13},\ Z_2 \;:=\; E_{14},\ Z_3 \;=\; E_{23},\ Z_4 \;=\; E_{24},\ Z_5 \;=\; \frac{1}{\sqrt{2s}} E_{12}\,.$$

Wenn wir $\mathfrak{m}$ durch diese Basis mit $\mathbb{R}^5$ identifizieren, ist die Isotropiedarstellung eines Elements

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in H = \mathrm{SO}(2)$$

und der Lift in die vierdimensionale Spinordarstellung $\kappa : \mathrm{Spin}(\mathbb{R}^5) \to \mathrm{GL}(\Delta_5)$ gegeben durch

$$\mathrm{Ad}\, g(\theta) \;=\; \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \kappa\big(\widetilde{\mathrm{Ad}}\, g(\theta)\big) \;=\; \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daher definieren die Basiselemente ψ_3 und ψ_4 von Δ_5 globale Schnitte des Spinorbündels $S = G \times_{\kappa(\widetilde{\mathrm{Ad}})} \Delta_5$, wenn man sie als konstante Abbildungen $G \to \Delta_5$ interpretiert. Tatsächlich sind für den Parameter $t = 2/3$ die Spinoren $\psi^{\pm} := \pm i\psi_3 + \psi_4$ genau die Riemannschen Killing-Spinoren aus [Fri80]. Für die undeformierte Metrik $t = 1/2$ sind diese beiden Spinoren parallel.

Für die Abbildung $\Lambda^g_{\mathfrak{m}} : \mathfrak{m} \simeq \mathbb{R}^5 \to \mathfrak{so}(5)$, die nach dem Satz von Wang ([KN2, X.2.1]) den Levi-Civita-Zusammenhang beschreibt, gilt:

$$\Lambda^g_{\mathfrak{m}}(Z_1) = \sqrt{\frac{t}{2}}E_{35}, \quad \Lambda^g_{\mathfrak{m}}(Z_2) = \sqrt{\frac{t}{2}}E_{45}, \quad \Lambda^g_{\mathfrak{m}}(Z_3) = -\sqrt{\frac{t}{2}}E_{15}, \quad \Lambda^g_{\mathfrak{m}}(Z_4) = -\sqrt{\frac{t}{2}}E_{25},$$

$$\Lambda^g_{\mathfrak{m}}(Z_5) = \frac{1-t}{\sqrt{2t}}(E_{13} + E_{24})\,.$$

Der Raum $\mathfrak{m}$ hat also eine besondere Richtung $\xi = Z_5$, die invariant unter der Isotropiedarstellung ist. Die duale 1-Form ist $\eta(X) := \langle Z_5, X\rangle$. Wie in [Agr03] beschrieben, existieren drei metrische Fast-Kontakt-Strukturen auf dem Raum, die mit der Isotropiedarstellung kommutieren. Wir betrachten hier den schiefsymmetrischen Endomorphismus $\varphi : TM \to TM$, der durch

$$\varphi(Z_1) = -Z_3, \quad \varphi(Z_2) = -Z_4, \quad \varphi(Z_5) = 0$$

gegeben ist. Da die 2-Formen $Z_1 \wedge Z_3$ und $Z_2 \wedge Z_4$ invariant unter der Isotropiedarstellung sind, ist es die 3-Form

$$T = \eta \wedge d\eta = -\sqrt{2t}\,(Z_1 \wedge Z_3 + Z_2 \wedge Z_4) \wedge Z_5\,.$$

ebenfalls. Man prüft, dass für den invarianten metrischen Zusammenhang ∇^c mit Torsion T gilt

$$\nabla^c\varphi = 0 = \nabla^c\xi = \nabla^c\eta, \quad \nabla^c T = 0\,.$$

Des Weiteren haben wir für die Torsion T

$$\|T\|^2 = 4t, \quad \mu \in \{0, \pm 2\sqrt{2t}\}, \quad \mathrm{Scal}^g = 8 - 2t, \quad \mathrm{Ric}^g = \mathrm{diag}(2-t, 2-t, 2-t, 2-t, 2t).$$

Man sieht, dass $\psi^\pm$ im Bündel Σ_μ für $\mu = \mp 2\sqrt{2t}$ liegt und ein Eigenspinor von $\not{D} = \not{D}^g + \frac{1}{4}T$ zum Eigenwert $\pm 1/\sqrt{2t}$ ist. Die Werte der universellen Eigenwertabschätzung und der Twistor-Abschätzung sind

$$\beta_{\mathrm{univ}} = 2(1-t), \quad \beta_{\mathrm{tw}} = \tfrac{5}{2} - \tfrac{25}{8}t\,.$$

Die beiden Abschätzungen stimmen für $t = 4/9$ überein. Unterhalb dieses Wertes ist die Twistor-Abschätzung besser, und oberhalb dieses Wertes ist die universelle Eigenwertabschätzung besser. Für große Werte von t wird die Skalarkrümmung negativ. Beide Abschätzungen liefern in diesem Fall keine Aussage. Für $t = 1/2$ sind die Spinoren $\psi^\pm$ parallel bezüglich ∇^c und die universelle Eigenwertabschätzung β_{univ} wird optimal. Die Twistor-Abschätzung β_{tw} wird für $t = 2/5$ optimal. In diesem Fall sind die Spinoren $\psi^\pm$ also Torsions-Twistor-Spinoren zum Abschätzungsparameter $s_{\mathrm{tw}} = 1/2$. Tatsächlich berechnet man, dass die Spinoren $\psi^\pm$ dann sogar Torsions-Killing-Spinoren mit Killing-Zahl $\beta = \pm\sqrt{5}/10$ sind.

1.3 Twistor- und Killing-Spinoren mit Torsion

Ist (M^n, g, Σ) eine Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit und ∇^c ein metrischer Zusammenhang mit antisymmetrischer Torsion T, dann heißt ein Spinor $\psi_o \in \Gamma(\Sigma)$ *Torsions-Twistor-Spinor zum Parameter s* oder auch *Twistor-Spinor mit Torsion zum Parameter s*, wenn ψ_o die Twistor-Gleichung für den Zusammenhang $\nabla^s_X\psi = \nabla^g_X\psi + s(X\lrcorner T)\psi$ erfüllt. Der Spinor ψ_o heißt *Torsions-Killing-Spinor zum Parameter s* oder auch *Killing-Spinor mit Torsion zum Parameter s*, wenn er die Killing-Gleichung für den Zusammenhang ∇^s erfüllt. In der Beschreibung des Gleichheitsfalls der Twistor-Abschätzung (Korollar 1.9) treten Torsions-Twistor-Spinoren zum Parameter $s_{\mathrm{tw}} := \frac{n-1}{4(n-3)}$ auf. In diesem Abschnitt untersuchen wir zunächst die Twistor-Spinoren des Zusammenhangs ∇^s für den Abschätzungsparameter s_{tw}, und anschließend beschreiben wir, welche Gestalt die Krümmung notwendigerweise hat, wenn Torsions-Killing-Spinoren zu einem Zusammenhang ∇^s für beliebiges reelles s existieren.

Für einen Torsions-Twistor-Spinor zum Abschätzungsparameter s_{tw} erhalten wir eine Identität, die der twistoriellen Integralformel aus Satz 1.8 ähnelt:

Lemma 1.11.
Ist (M^n, g, Σ) eine Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit mit einem metrischen Zusammenhang ∇^c mit ∇^c-paralleler antisymmetrischer Torsion T und $\psi_o \in \Gamma(\Sigma)$ ein Torsions-Twistor-Spinor zum Abschätzungsparameter $s_{\mathrm{tw}} = \frac{n-1}{4(n-3)}$, dann gilt

$$\not{D}^2\psi_o = \frac{n}{4(n-1)}\mathrm{Scal}^g\psi_o - \frac{n(n-4)}{4(n-3)^2}T^2\psi_o + \frac{n(n-5)}{8(n-3)^2}\|T\|^2\psi_o\,.$$

Insbesondere ist ein Torsions-Twistor-Spinor ψ_o zum Abschätzungsparameter $s_{\mathrm{tw}} = \frac{n-1}{4(n-3)}$, der ein Eigenspinor der Torsion T ist, genau dann ein Eigenspinor des Operators $\not{D}^2$, wenn die Skalarkrümmung Scal^g konstant ist.

Beweis. Wir wählen zu einem beliebigen Punkt $x \in M^n$ ein lokales Orthonormalreper e_j, das $(\nabla^s e_j)_x \equiv 0$ erfüllt. Für den spinoriellen Laplace-Operator Δ^s haben wir im Punkt x den Ausdruck

$$\Delta^s\psi := (\nabla^s)^* \circ \nabla^s\psi = -\sum_j \nabla^s_{e_j}\nabla^s_{e_j}\psi\,.$$

Wenden wir $\nabla^s_{e_j}$ auf die Twistor-Gleichung $\nabla^s_{e_j}\psi_o + \frac{1}{n}e_j D^s\psi_o$ an, dann erhalten wir im Punkt x

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_j \nabla^s_{e_j}\nabla^s_{e_j}\psi_o + \tfrac{1}{n}\nabla^s_{e_j}(e_j D^s\psi_o) \\ &= -\Delta^s\psi_o + \tfrac{1}{n}(D^s)^2\psi_o\,. \end{aligned}$$

Aus der verallgemeinerten Schrödinger-Lichnerowicz-Formel

$$(D^{s/3})^2 = \Delta^s + \tfrac{1}{4}\mathrm{Scal}^g + s dT - 2s^2\|T\|^2$$

folgt dann

$$(D^{s/3})^2\psi_o - \tfrac{1}{n}(D^s)^2\psi_o = \tfrac{1}{4}\mathrm{Scal}^g\psi_o + s dT\psi_o - 2s^2\|T\|^2\psi_o\,.$$

Nach Lemma 1.7 können wir für $s = s_{\mathrm{tw}}$ auf der linken Seite den Operator $\not{D}^2$ ins Spiel bringen:

$$\tfrac{n-1}{n}\not{D}^2\psi_o - s_{\mathrm{tw}}^2\tfrac{4}{n-1}T^2\psi_o = \tfrac{1}{4}\mathrm{Scal}^g\psi_o + s_{\mathrm{tw}}dT\psi_o - 2s_{\mathrm{tw}}^2\|T\|^2\psi_o\,.$$

Wegen $\nabla^c T = 0$ gilt $dT = 2\sigma_T = \|T\|^2 - T^2$, und mit dieser Substitution erhalten wir insgesamt die zu zeigende Identität. □

Wir beschreiben nun die Krümmungsgrößen des Zusammenhangs ∇^s. Die wichtigste Erkenntnis ist hierbei, dass die Riemannsche Skalarkrümmung konstant ist, wenn $\nabla^c T = 0$ gilt und Torsions-Killing-Spinoren zu einem reellen Parameter s existieren. Des Weiteren werden wir in Abschnitt 3.1 bei der Charakterisierung der Killing-Spinoren mit Torsion in fünf Dimensionen auf die hier bewiesenen Symmetrieeigenschaften des Krümmungstensors $\mathcal{R}^s$ zurückgreifen.

Die allgemeine Beziehung zwischen den Riemannschen Krümmungsgrößen und denen eines metrischen Zusammenhangs mit antisymmetrischer Torsion T ist wie folgt:

Lemma 1.12 ([IvPa01]).
Sei ∇ ein beliebiger metrischer Zusammenhang mit antisymmetrischer Torsion T. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^g(X,Y,Z,W) &= \mathcal{R}^\nabla(X,Y,Z,W) - \tfrac{1}{2}(\nabla_X T)(Y,Z,W) + \tfrac{1}{2}(\nabla_Y T)(X,Z,W) \\
&\quad - \tfrac{1}{4} g(T(X,Y),T(Z,W)) - \tfrac{1}{4}\sigma_T(X,Y,Z,W) \\
\mathrm{Ric}^g(X,Y) &= \mathrm{Ric}^\nabla(X,Y) + \tfrac{1}{2}\delta T(X,Y) + \tfrac{1}{4}\sum g(T(e_j,X),T(e_j,Y)) \\
\mathrm{Scal}^g &= \mathrm{Scal}^\nabla + \tfrac{3}{2}\|T\|^2 .
\end{aligned}$$

Die Krümmungsrechnungen von [AFK08] für einen metrischen Zusammenhang ∇^c mit antisymmetrischer paralleler Torsion T verallgemeinern wir auf die gesamte Zusammenhangsfamilie $\nabla^s_X Y = \nabla^g_X Y + 2sT(X,Y)$:

Lemma 1.13.
Bezeichne ∇^c einen metrischen Zusammenhang mit paralleler antisymmetrischer Torsion T, $\nabla^c T \equiv 0$, und sei $s \in \mathbb{R}$. Für den Krümmungstensor $\mathcal{R}^s$ des Zusammenhangs $\nabla^s_X Y = \nabla^g_X Y + 2sT(X,Y)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\overset{X,Y,Z}{\mathfrak{S}}\ \mathcal{R}^s(X,Y,Z,W) &= 2s(3-4s)\sigma_T(X,Y,Z,W) \\
\mathcal{R}^s(X,Y,Z,W) &= \mathcal{R}^s(Z,W,X,Y) .
\end{aligned}$$

Existiere nun ein Spinorbündel Σ und sei $\psi \in \Gamma(\Sigma)$. Dann ist die Beziehung zwischen den Spinor-Endomorphismen $\mathcal{R}^s_\Sigma(X,Y)\psi := \nabla^s_X\nabla^s_Y\psi - \nabla^s_Y\nabla^s_Z\psi - \nabla^s_{[X,Y]}\psi$ und dem Ricci-Endomorphismus $\mathrm{Ric}^s(X)\psi := \sum \mathrm{Ric}^s(X,e_j)e_j\psi$ gegeben durch

$$\mathrm{Ric}^s(X)\psi = -2\sum_j e_j \mathcal{R}^s_\Sigma(X,e_j)\psi + 2s(3-4s)X\lrcorner\sigma_T\psi .$$

Falls ein Torsions-Killing-Spinor existiert, lassen sich weitere Aussagen über die Krümmung treffen:

Lemma 1.14. *Gelte $\nabla^c T = 0$. Ist $\psi_o \in \Gamma(\Sigma)$ ein Killing-Spinor des Zusammenhangs ∇^s zur Killing-Zahl β, dann gilt*

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^s_\Sigma(X,Y)\psi_o &= \beta^2(YX - XY)\psi_o + 4\beta s T(X,Y)\psi_o \\
\mathrm{Ric}^s(X)\psi_o &= 4(n-1)\beta^2 X\psi_o - 16\beta s(X\lrcorner T)\psi_o + 2s(3-4s)X\lrcorner\sigma_T\psi_o \\
\mathrm{Scal}^s\psi_o &= 4n(n-1)\beta^2\psi_o + 48\beta s T\psi_o + 8s(4s-3)\sigma_T\psi_o .
\end{aligned}$$

Insbesondere sind die Skalarkrümmungen Scal^s *und* Scal^g *konstant, wenn solch ein Killing-Spinor existiert.*

Beweis von Lemma 1.13 und 1.14. Für einen linearen Zusammenhang ∇ mit Krümmung $\mathcal{R}^\nabla$ und Torsion T gilt nach [KN1, Ch. III, Th. 5.3] die erste Bianchi-Identität

$$\overset{X,Y,Z}{\mathfrak{S}}\ \mathcal{R}^\nabla(X,Y)Z = \overset{X,Y,Z}{\mathfrak{S}}\ (T(T(X,Y),Z) + (\nabla_X T)(Y,Z)) .$$

Wenn T die Torsion des Zusammenhangs ∇^c bezeichnet, dann hat der Zusammenhang ∇^s die Torsion $T^s = 4sT$. Wegen

$$\overset{X,Y,Z}{\mathfrak{S}} T(T(X,Y),Z,W) = \sigma_T(X,Y,Z,W), \quad (\nabla^s_X T)(Y,Z,W) = \tfrac{1}{2}(1-4s)\sigma_T(X,Y,Z,W)$$

erhalten wir als erste Bianchi-Identität für den Krümmungstensor $\mathcal{R}^s$ den behaupteten Ausdruck

$$\overset{X,Y,Z}{\mathfrak{S}} \mathcal{R}^s(X,Y,Z,W) = 2s(3-4s)\sigma_T(X,Y,Z,W)\,.$$

Da hier rechts eine 4-Form steht, ist $\mathcal{R}^s$ symmetrisch: Wir summieren ein weiteres Mal zyklisch, erhalten für die zu σ_T proportionale Seite der Gleichung Null und andererseits

$$\begin{aligned} 0 &= \overset{X,Y,Z,W}{\mathfrak{S}} (\overset{X,Y,Z}{\mathfrak{S}} \mathcal{R}^s(X,Y,Z,W)) \\ &= 2(\mathcal{R}^s(Z,X,Y,X) - \mathcal{R}^s(Y,W,Z,X))\,. \end{aligned}$$

Um $\mathcal{R}^s_\Sigma$ und Ric^s in Beziehung zueinander zu setzen, berechnen wir die Summe

$$\begin{aligned} \sum_j e_j \mathcal{R}^s_\Sigma(X,e_j)\psi &= \tfrac{1}{2}\sum_j e_j \mathcal{R}^s(X,e_j)\psi \\ &= \tfrac{1}{4}\sum_{\substack{k\neq l\\ j}} \mathcal{R}^s(X,e_j,e_k,e_l)e_je_ke_l\psi\,. \end{aligned}$$

Wir betrachten zuerst die Terme mit $j = k \neq l$ und $j = l \neq k$:

$$-\tfrac{1}{4}\sum_{k\neq l}\mathcal{R}^s(X,e_k,e_k,e_l)e_l\psi + \tfrac{1}{4}\sum_{k\neq l}\mathcal{R}^s(X,e_l,e_k,e_l)e_k\psi = -\tfrac{1}{2}\mathrm{Ric}^s(X)\psi\,.$$

Jetzt betrachten wir die verbleibenden Terme mit $j \neq k, k \neq l, l \neq j$. Mit den bereits bekannten Symmetrieeigenschaften von $\mathcal{R}^s$ und der Bianchi-Identität erhalten wir:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}\sum_{j\neq k\neq l\neq j}\mathcal{R}^s(X,e_j,e_k,e_l)e_je_ke_l\psi &= -\tfrac{1}{2}\sum_{j<k<l}\left(\overset{j,k,l}{\mathfrak{S}} \mathcal{R}^s(e_j,e_k,e_l,X)\right)e_je_ke_l\psi \\ &= s(3-4s)X\lrcorner\sigma_T\psi\,. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich der behauptete Ausdruck für $\mathrm{Ric}^s(X)$.
Aus der Killing-Gleichung $\nabla^s_X\psi_o = \beta X\psi_o$ folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^s_\Sigma(X,Y)\psi_o &= \nabla^s_X\nabla^s_Y\psi_o - \nabla^s_Y\nabla^s_X\psi_o - \nabla^s_{[X,Y]}\psi_o \\ &= \beta^2(YX-XY)\psi_o + 4\beta sT(X,Y)\psi_o\,. \end{aligned}$$

Um $\mathrm{Ric}^s(X)\psi_o$ zu erhalten, berechnen wir unter der Verwendung von $\sum e_jT(e_j,X) = -2X\lrcorner T$:

$$\begin{aligned} \sum_j e_j\mathcal{R}^s_\Sigma(X,e_j)\psi_o &= \sum_j e_j(\beta^2(e_jX - Xe_j) + 4\beta sT(X,e_j))\psi_o \\ &= -n\beta^2X\psi_o + \sum_j\beta^2e_j(e_jX + 2g(X,e_j))\psi_o + 4\beta s\sum_j e_jT(X,e_j)\psi_o \\ &= 2(1-n)\beta^2X\psi_o + 8\beta s(X\lrcorner T)\psi_o\,. \end{aligned}$$

Der angegebene Ausdruck für $\mathrm{Ric}^s(X)$ folgt hieraus. Es bleibt die Skalarkrümmung Scal^s zu bestimmen: Da mit $\mathcal{R}^s$ auch Ric^s symmetrisch ist, gilt allgemein

$$\sum_j e_j\mathrm{Ric}^s(e_j)\psi = \sum_{j,k}\mathrm{Ric}^s(e_j,e_k)e_je_k\psi = -\sum_j\mathrm{Ric}^s(e_j,e_j)\psi = -\mathrm{Scal}^s\psi\,.$$

Wir berechnen also

$$\begin{aligned}
\mathrm{Scal}^s\psi_o &= -\sum_j e_j \mathrm{Ric}^s(e_j)\psi_o \\
&= 4n(n-1)\beta^2\psi_o + 16\beta s \sum_j e_j(e_j \lrcorner T)\psi_o - 2s(3-4s)\sum_j e_j(e_j \lrcorner \sigma_T)\psi_o \\
&= 4n(n-1)\beta^2\psi_o + 48\beta s T\psi_o + 8s(4s-3)\sigma_T\psi_o\,.
\end{aligned}$$

Da $\nabla^c T = 0$, $\nabla^c \sigma_T = 0$ gilt, haben die Spinor-Endomorphismen T und σ_T Eigenwerte, die nicht vom Basispunkt abhängen. Damit hängt nach der eben erhaltenen Identität auch der Wert von Scal^s nicht vom Punkt ab. Wegen $\mathrm{Scal}^g = \mathrm{Scal}^s + \frac{3}{2}\|T^s\|^2$ ist auch die Riemannsche Skalarkrümmung konstant. □

Zur Auswertung der universellen Eigenwertabschätzung benötigen wir noch folgende grundlegende Aussage über die Skalarkrümmung (s. auch [FrIv02], [AFK08]):

Lemma 1.15.
Gelte $\nabla^c T = 0$. Existiert ein Spinor ψ_o mit $\nabla^c\psi_o = 0$ und $T\psi_o = \mu\psi_o$, dann gilt

$$\not{D}\psi_o = -\tfrac{1}{2}\mu, \quad \mathrm{Scal}^g = -\tfrac{1}{2}\|T\|^2 + 2\mu^2\,.$$

Beweis. Aus $D^s = D^g + 3sT$ folgt $\not{D} = D^c - \frac{1}{2}T$, und für den parallelen Spinor $\psi_o \in \Gamma(\Sigma_\mu)$ gilt

$$\not{D}\psi_o = -\tfrac{1}{2}T\psi_o = -\tfrac{1}{2}\mu\psi_o\,.$$

Nach Lemma 1.14 ist die Skalarkrümmung des Zusammenhangs ∇^c konstant, und die Riemannsche Skalarkrümmung Scal^g ist dann nach Lemma 1.12 ebenfalls konstant. Werten wir die verallgemeinerte Schrödinger-Lichnerowicz-Formel aus Lemma 1.4 für den Spinor ψ_o aus, erhalten wir

$$\tfrac{1}{4}\mu^2 = \tfrac{1}{4}\mathrm{Scal}^g + \tfrac{1}{8}\|T\|^2 - \tfrac{1}{4}\mu^2\,,$$

woraus der behauptete Ausdruck für Scal^g folgt. □

1.4 Der Fall der Dimensionen vier und sechs

Wir untersuchen die Twistor-Abschätzung des Operators $\not{D}^2$ in den Dimensionen vier und sechs. Speziell für nearly-Kähler-Mannigfaltigkeiten geben wir eine Charakterisierung der Twistor-Spinoren mit Torsion, deren Existenz den Gleichheitsfall der Abschätzung kennzeichnet. Zuletzt vergleichen wir die bekannten Abschätzungen des Operators $\not{D}^2$ für eine gewisse Klasse von sechsdimensionalen fast-Hermiteschen Mannigfaltigkeiten vom Typ $\mathcal{W}_3$.

Vergleich der Abschätzungen im vierdimensionalen Fall

Sei (M^4, g, Σ) eine vierdimensionale kompakte Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit und ∇^c ein metrischer Zusammenhang mit paralleler antisymmetrischer Torsion T. Eine 3-Form T besitzt im Vierdimensionalen lokal die Darstellung $T = v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$ für gewisse 1-Formen v_j. Deshalb gilt $\sigma_T = 0$, und aus $\nabla^c T = 0$ folgt: $dT = 0$ und T^2 wirkt allein durch die Multiplikation mit dem Skalar $\|T\|^2$, d. h. für einen Eigenwert μ von T gilt $\mu^2 = \|T\|^2$. Sei $c = \mathrm{Scal}^g_{\min}/\|T\|^2$. In [AFK08] wurde gezeigt, dass für einen Eigenwert λ des Operators $\not{D}^2$ gilt

$$\lambda \geq \begin{cases} \frac{1}{4}\|T\|^2(c - \frac{1}{2}) & \text{für } c \geq 3/2\,, \\ \frac{1}{16}\|T\|^2(\sqrt{6c} - 1)^2 & \text{für } 1/6 \leq c \leq 3/2\,. \end{cases}$$

Der für $c \geq 3/2$ angegebene Ausdruck ist die universelle Eigenwertabschätzung aus Lemma 1.5. Im Bereich $1/6 \leq c \leq 3/2$ liefert die Deformationsmethode einen besseren Wert als die universelle Eigenwertabschätzung. Die twistorielle Eigenwertabschätzung aus Korollar 1.9 lautet im hier betrachteten Fall

$$\lambda \geq \tfrac{1}{3}\|T\|^2(c - \tfrac{3}{2})\,.$$

Man prüft, dass die Twistor-Abschätzung für $c > 9/2$ stärker als die universelle Abschätzung ist.

Der Gleichheitsfall der Twistor-Abschätzung in sechs Dimensionen

Torsions-Killing-Spinoren zum Abschätzungsparameter $s_{\mathrm{tw}} = \frac{n-1}{4(n-3)}$, die Eigenspinoren der Torsion sind, weisen in sechs Dimensionen eine besondere Eigenschaft auf, und zwar sind sie immer auch Torsions-Killing-Spinoren zum gleichen Paramter s_{tw}. Dies ist eine Konsequenz der folgenden allgemeinen Gleichung:

Lemma 1.16.
Ist (M^n, g, Σ) eine Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit mit einem metrischen Zusammenhang ∇^c mit paralleler antisymmetrischer Torsion T und $\psi_o \in \Gamma(\Sigma)$ ein Torsions-Twistor-Spinor zum Parameter $s_{\mathrm{tw}} = \frac{n-1}{4(n-3)}$, dann gilt für den Operator $\not{D} = D^g + \frac{1}{4}T$:

$$\not{D}T\psi_o + \left(1 - \tfrac{6}{n}\right) T\not{D}\psi_o = \left(\tfrac{5-n}{n-3}T^2 - \tfrac{2}{n-3}\|T\|^2\right)\psi_o\,.$$

Speziell im sechsdimensionalen Fall und unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass der Torsions-Twistor-Spinor zum Parameter $s_{\mathrm{tw}} = \frac{n-1}{4(n-3)}$ im Bündel Σ_μ liegt, erhalten wir aus diesem Lemma:

Korollar 1.17.
Gilt zusätzlich $n = 6$ und $T\psi_o = \mu\psi_o$, dann liegt einer dieser Fälle vor:

(1) $\mu = 0$: *Es gilt $T \equiv 0$ oder $\psi_o \equiv 0$.*

(2) $\mu \neq 0$: *Der Spinor ψ_o ist Eigenspinor des Operators $\not{D}$, und zwar gilt*

$$\not{D}\psi_o = -\tfrac{1}{3}\left(\mu + \tfrac{2}{\mu}\|T\|^2\right)\psi_o\,.$$

Damit ist der Spinor ψ_o auch ein Torsions-Killing-Spinor zum Parameter s_{tw}, und für die Killing-Zahl β und die Riemannsche Skalarkrümmung Scal^g *gilt*

$$\beta = \tfrac{1}{9}\left(\tfrac{1}{\mu}\|T\|^2 - \mu\right), \quad \tfrac{3}{10}\mathrm{Scal}^g = \tfrac{1}{9}\left(\tfrac{13}{4} + \tfrac{4}{\mu}\right)\|T\|^2 + \tfrac{4}{9}\mu^2\,.$$

Beweis des Lemmas. Aus der bereits in Satz 1.3 zitierten Identität

$$D^sT + TD^s = dT + \delta T - 8s\sigma_T - 2\mathcal{D}^s$$

ergibt sich unter der Voraussetzung $\nabla^c T = 0$ für den Parameter $s = 1/4$ die Gleichung

$$D^cT + TD^c = -2\mathcal{D}^c\,,$$

was zusammen mit der Beziehung $D^c = \not{D} + 1/2T$ auf

$$\not{D}T + T\not{D} + T^2 = -2\mathcal{D}^c$$

führt. Die Wirkung des Operators $\mathcal{D}^c$ auf den Twistor-Spinor ψ_o berechnet sich aus der Twistor-Gleichung: Es ist

$$\begin{aligned}
\nabla^c_X\psi_o &= \nabla^{s_{\mathrm{tw}}}_X\psi_o + \left(\tfrac{1}{4} - s_{\mathrm{tw}}\right)(X\lrcorner T)\psi_o \\
&= -\tfrac{1}{n}XD^{s_{\mathrm{tw}}}\psi_o - \tfrac{1}{2(n-3)}(X\lrcorner T)\psi_o \\
&= -\tfrac{1}{n}X(\not{D} + (3s_{\mathrm{tw}} - \tfrac{1}{4})T)\psi_o - \tfrac{1}{2(n-3)}(X\lrcorner T)\psi_o \\
&= -\tfrac{1}{n}X(\not{D} + \tfrac{n}{2(n-3)}T)\psi_o - \tfrac{1}{2(n-3)}(X\lrcorner T)\psi_o \\
&= -\tfrac{1}{n}X\not{D}\psi_o - \tfrac{1}{2(n-3)}XT\psi_o - \tfrac{1}{2(n-3)}(X\lrcorner T)\psi_o\,.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir unter Berücksichtigung von $\sum e_j(e_j\lrcorner T) = 3T$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^c\psi_o &= -\tfrac{3}{n}T\not{D}\psi_o - \tfrac{3}{2(n-3)}T^2\psi_o - \tfrac{1}{n-3}\sigma_T\psi_o \\
&= -\tfrac{3}{n}T\not{D}\psi_o - \tfrac{1}{n-3}T^2\psi_o + \tfrac{1}{n-3}\|T\|^2\psi_o\,.
\end{aligned}$$

Zusammen mit der obigen Gleichung $\not{D}T + T\not{D} + T^2 = -2\mathcal{D}^c$ erhalten wir die behauptete Identität. □

Beweis des Korollars. Aus dem eben bewiesenen Lemma erhalten wir für $n = 6$ und für einen Twistor-Spinor ψ_o, der Eigenspinor der Torsion T zum Eigenwert μ ist:

$$\mu\not{D}\psi_o = -\tfrac{1}{3}\left(\mu^2 + 2\|T\|^2\right)\psi_o.$$

Wenn $\mu = 0$ gilt, erhalten wir $\|T\|^2\psi_o = 0$. Es muss in diesem Fall also $\|T\|^2 = 0$ oder $\psi_o = 0$ sein. Wenn $\mu \neq 0$ gilt, ist ψ_o Eigenspinor des Operators $\not{D}$:

$$\not{D}\psi_o = -\tfrac{1}{3}\left(\mu + \tfrac{2}{\mu}\|T\|^2\right)\psi_o.$$

Aus der Twistor-Gleichung erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
\nabla^{s_{\mathrm{tw}}}_X \psi_o &= -\tfrac{1}{n} X D^{s_{\mathrm{tw}}} \psi_o \\
&= -\tfrac{1}{6} X \left(D\!\!\!/ + \left(3 s_{\mathrm{tw}} - \tfrac{1}{4}\right) T \right) \psi_o \\
&= -\tfrac{1}{6} X D\!\!\!/ \psi_o - \tfrac{1}{6} X T \psi_o \\
&= \tfrac{1}{18} \left(\mu + \tfrac{2}{\mu} \|T\|^2 \right) X \psi_o - \tfrac{\mu}{6} X \psi_o \\
&= \tfrac{1}{9} \left(\tfrac{1}{\mu} \|T\|^2 - \mu \right) X \psi_o .
\end{aligned}$$

Also ist der Torsions-Twistor-Spinor ψ_o zum Parameter s_{tw} auch ein Torsions-Killing-Spinor zum Parameter s_{tw}.
Aus Lemma 1.11 erhalten wir die Beziehung

$$D\!\!\!/^2 \psi_o = \tfrac{3}{10} \mathrm{Scal}^g \psi_o + \tfrac{1}{12} \|T\|^2 - \tfrac{1}{3} \mu^2 \psi_o \,.$$

Wir wissen bereits, dass ψ_o Eigenspinor des Operators $D\!\!\!/^2$ zum Eigenwert $1/9(\mu + 2/\mu \|T\|^2)^2$ ist. Ein Vergleich dieser Ausdrücke liefert den behaupteten Wert der Skalarkrümmung. □

Der Gleichheitsfall auf nearly-Kähler-Mannigfaltigkeiten

Wir nennen kurz, was wir an Bekanntem aus der nearly-Kähler-Geometrie benötigen.

Definition 1.18.
Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M^{2k}, g, J) mit einer fast-komplexen Struktur J heißt fast-Hermitesche Mannigfaltigkeit, wenn die fast-komplexe Struktur kompatibel mit der Metrik g ist, d. h. wenn für beliebige $X, Y \in TM$ gilt $g(J(X), J(Y)) = g(X, Y)$.

Definition 1.19.
Eine fast-Hermitesche Mannigfaltigkeit (M^{2k}, g, J) heißt nearly-Kähler, wenn $\nabla^g J \neq 0$ ist und wenn für beliebiges $X \in \Gamma(TM)$ gilt $(\nabla^g_X J)(X) = 0$.

Nach [Gra70] ist eine nearly-Kähler-Mannigfaltigkeit immer eine Spin-Mannigfaltigkeit, und ihre Metrik ist eine Einstein-Metrik.

R. Grunewald untersuchte Riemannsche Killing-Spinoren in sechs Dimensionen und zeigte, dass ihre Existenz zu einer strengen nearly-Kähler-Struktur der Mannigfaltigkeit äquivalent ist:

Satz 1.20 ([Gru90]).
Eine kompakte sechsdimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit besitzt genau dann einen Riemannschen Killing-Spinor, wenn sie eine nearly-Kähler-Mannigfaltigkeit ist. In diesem Fall existieren zwei linear unabhängige Riemannsche Killing-Spinoren, und ihre Riemannschen Killing-Zahlen sind $\pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathrm{Scal}^g}{30}}$.

Wir skizzieren kurz die Beziehung zwischen Riemannschen Killing-Spinoren und fast-komplexen Strukturen auf einer sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit. Die Argumentation ist hierbei analog zu der später in Abschnitt 2.1 für eine metrische Fast-Kontakt-Struktur genauer ausgeführten. Im sechsdimensionalen Fall spaltet sich das komplex achtdimensionale Spinorbündel Σ unter der Wirkung der Volumenform in die jeweils vierdimensionalen Räume positiver Σ_+ bzw.

negativer Spinoren Σ_- auf. Eine mit der Metrik kompatible fast-komplexe Struktur J definiert ein eindimensionales komplexes Linienbündel L_1 im Raum der positiven Spinoren durch

$$L_1 := \{\, \psi \in \Sigma \mid J(X)\psi = -iX\psi \;\forall\, X \in TM \,\} \subset \Sigma_+ \,.$$

Da $\mathrm{Spin}(6)$ transitiv auf den komplexen Geraden im Raum der positiven Spinoren wirkt, definiert auch umgekehrt ein positiver Spinor $\psi_+ \neq 0$ durch die Gleichung $J(X)\psi_+ = -iX\psi_+$ eine mit der Metrik kompatible fast-komplexe Struktur J. Man zeigt: Im Bündel L_1 existiert genau dann ein Killing-Spinor, wenn J eine nearly-Kähler-Struktur ist. Tatsächlich existiert in diesem Fall ein zweiter Riemannscher Killing-Spinor, und zwar liegt dieser im komplexen Linienbündel

$$L_2 := \{\, \psi \in \Sigma \mid J(X)\psi = iX\psi \;\forall\, X \in TM \,\} \subset \Sigma_- \,.$$

Ein Beweis des Satzes ist außer in [Gru90] auch in [BFGK91] zu finden.

Der von uns auf einer fast-Hermiteschen Mannigfaltigkeit betrachtete metrische Zusammenhang mit Torsion drückt sich über die fundamentale 2-Form Ω und den Nijenhuis-Tensor N der fast-komplexen Struktur J aus. Die fundamentale 2-Form einer fast-komplexen Struktur J ist $\Omega := g(J\cdot,\cdot)$. Der Nijenhuis-Tensor N einer fast-komplexen Struktur ist

$$N(X,Y) = [J(X),J(Y)] - J([J(X),Y]) - J([X,J(Y)]) - [X,Y]\,.$$

Setzen wir voraus, dass der Nijenhuis-Tensor N als $(3,0)$-Tensor aufgefasst antisymmetrisch ist, erhalten wir einen metrischen Zusammenhang ∇^c mit antisymmetrischer Torsion durch

$$\nabla^c_X Y := \nabla^g_X Y + \tfrac{1}{2}\left(N(X,Y) + d\Omega(J(X),J(Y),\cdot)\right)\,.$$

Es gilt $\nabla^c J = 0$. Die Torsion dieses Zusammenhangs ∇^c ist nicht allgemein parallel. Speziell im nearly-Kähler-Fall ist aber bekannt:

Satz 1.21 ([Gra70], [Kiri77])**.**
Auf einer nearly-Kähler-Mannigfaltigkeit (M^{2k},g,J) gilt

$$\nabla^c_X Y := \nabla^g_X Y + \tfrac{1}{2}\left(N(X,Y) + d\Omega(J(X),J(Y),\cdot)\right) = \nabla^g_X Y + \tfrac{1}{2}\left(\nabla^g_X J\right)(J(Y))\,.$$

Die Torsion des Zusammenhangs ∇^c ist parallel.

Th. Friedrich und I. Ivanov untersuchten die parallelen Spinoren dieses Zusammenhangs:

Satz 1.22 ([FrIv02, Satz 10.8])**.**
Ist (M^6,g,J) eine kompakte strenge nearly-Kähler-Mannigfaltigkeit, dann existieren genau zwei linear unabhängige ∇^c-parallele Spinoren. Diese stimmen mit den Riemannschen Killing-Spinoren überein.

Um die Abschätzungen des Dirac-Operators $D\!\!\!/$ auszuwerten, benötigen wir weitere geometrische Größen:

Lemma 1.23 ([AFS05])**.**
Auf einer nearly-Kähler-Mannigfaltigkeit (M^6,g,J) mit dem Zusammenhang ∇^c mit Torsion T gilt $\|T\|^2 = \frac{2}{15}\mathrm{Scal}^g$. Die Eigenwerte von T sind $\mu = 0$ mit der Vielfachheit sechs und $\mu = \pm 2\|T\|$ mit jeweils der Vielfachheit eins.

Hiermit können wir die Torsions-Twistor-Spinoren, die auf einer nearly-Kähler-Mannigfaltigkeit den Gleichheitsfall in der Twistor-Abschätzung realisieren, auf folgende Weise charakterisieren:

Satz 1.24.
Ist (M^6, g, Σ) eine sechsdimensionale kompakte nearly-Kähler-Mannigfaltigkeit und ∇^c der eben beschriebene Zusammenhang, dann stimmen folgende Klassen von Spinoren überein:

(1) *Riemannsche Killing-Spinoren*

(2) *∇^c-parallele Spinoren*

(3) *Torsions-Twistor-Spinoren zum Parameter $s_{\mathrm{tw}} = \frac{5}{12}$, die Eigenspinoren der Torsion sind,*

(4) *Torsions-Killing-Spinoren zum Parameter $s_{\mathrm{tw}} = \frac{5}{12}$, die Eigenspinoren der Torsion sind.*

Spinoren dieser Art existieren nur in den beiden eindimensionalen Bündeln zu den Torsionseigenwerten $\mu = \pm 2\|T\|^2$. Ihre Killing-Zahlen der Torsions-Killing-Gleichung zum Parameter $s_{\mathrm{tw}} = \frac{5}{12}$ sind $\mp\frac{1}{6}\|T\| = \mp\frac{1}{3}\sqrt{\frac{\mathrm{Scal}^g}{30}}$. Ihre $D\!\!\!/$-Eigenwerte sind $\mp\|T\| = \mp\sqrt{\frac{2\,\mathrm{Scal}^g}{15}}$.

Beweis. Nach dem bereits aus [FrIv02] zitieren Satz 1.22 ist bekannt, dass die Riemannschen Killing-Spinoren hier mit den ∇^c-parallelen Spinoren übereinstimmen und Eigenspinoren der Torsion zu den Eigenwerten $\pm 2\|T\|^2$ sind. Für einen Eigenwert λ von $D\!\!\!/^2$ auf dem Bündel Σ_μ haben wir in sechs Dimensionen die universelle Eigenwertabschätzung

$$\lambda(D\!\!\!/^2|_{\Sigma_\mu}) \geq \tfrac{1}{4}\mathrm{Scal}^g_{\min} + \tfrac{1}{8}\|T\|^2 - \tfrac{1}{4}\mu^2,$$

und die Twistor-Abschätzung

$$\lambda(D\!\!\!/^2|_{\Sigma_\mu}) \geq \tfrac{3}{10}\mathrm{Scal}^g_{\min} + \tfrac{1}{12}\|T\|^2 - \tfrac{1}{3}\mu^2\,.$$

Werten wir die Abschätzungen mit Lemma 1.23 für eine strenge nearly-Kähler-Mannigfaltigkeit auf dem Bündel zum Eigenwert $\mu = \mp\|T\|$ aus, erhalten wir in beiden Fällen den Wert $\frac{2}{15}\mathrm{Scal}^g$. Insbesondere tritt der Gleichheitsfall in beiden Abschätzungen gleichzeitig ein. Daher stimmen für $\mu = \mp\|T\|$ die Torsions-Twistor-Spinoren zum Abschätzungsparameter s_{tw}, die im Bündel Σ_μ liegen, mit den ∇^c-parallelen Spinoren im Bündel Σ_μ überein. Im Bündel Σ_0 kann ein Torsions-Twistor-Spinor zum Abschätzungsparameter s_{tw} nicht liegen, da er dann ein Riemannscher Twistor-Spinor wäre: Im Bündel Σ_0 existiert kein Riemannscher Twistor-Spinor, da ein solcher im Fall konstanter Skalarkrümmung ein Riemannscher Killing-Spinor oder die Summe von zwei Riemannschen Killing-Spinoren ist und Riemannsche Killing-Spinoren nur im Bündel zum Torsionseigenwert $\mu = \pm 2\|T\|^2$ existieren. Aus Korollar 1.17 wissen wir bereits, dass die angegebenen Klassen von Torsions-Twistor-Spinoren und Torsions-Killing-Spinoren übereinstimmen, und in demselben Korollar sind die Eigenwerte von $D\!\!\!/$ und die Killing-Zahlen für diese Spinoren berechnet. □

Der Fall $\mathcal{W}_3$, Stab$_o(T)$ abelsch

Nearly-Kähler-Mannigfaltigkeiten sind in der Gray-Hervella-Klassifikation vom strikten Typ $\mathcal{W}_1$. Wir betrachten nun den Fall einer sechsdimensionalen fast-Hermiteschen Mannigfaltigkeit, die in der Gray-Hervella-Klassifikation vom strikten Typ $\mathcal{W}_3$ ist und deren reduzierte Isotropiegruppe $\mathrm{Stab}_o(T)$ abelsch ist. (Siehe [AFS05] für eine genauere Beschreibung dieser Torsionsgeometrie und für die Klassifikation der außerdem möglichen reduzierten Isotropiegruppen $\mathrm{Stab}_o(T)$ der Torsion T.) Die Eigenwerte der Torsion sind $\mu = 0$ mit Vielfachheit vier, $\mu = \pm\sqrt{2}\|T\|$

mit Vielfachheit je zwei. Die universelle Eigenwertabschätzung auf dem Bündel Σ_μ zu einem Torsionseigenwert mit $\mu^2 = 2\|T\|^2$ liefert für einen Eigenwert λ von $\not{D}^2$

$$(\not{D}^2|_{\Sigma_{\pm\sqrt{2}\|T\|}}) \geq \tfrac{1}{4}\mathrm{Scal}^g_{\min} - \tfrac{3}{8}\|T\|^2 .$$

M. Kassuba zeigte in [Kas09] mit der Deformationsmethode eine verbesserte Abschätzung für den Fall, dass die Riemannsche Skalarkrümmung in einem gewissen Intervall liegt:

$$(\not{D}^2|_{\Sigma_{\pm\sqrt{2}\|T\|}}) \geq \tfrac{1}{2\|T\|^2}\left(\tfrac{1}{8}\|T\|^2 + \tfrac{1}{4}\mathrm{Scal}^g_{\min}\right)^2, \quad -\tfrac{1}{2}\|T\|^2 \leq \mathrm{Scal}^g_{\min} \leq \tfrac{7}{2}\|T\|^2 .$$

Für $\mathrm{Scal}^g_{\min} > \frac{7}{2}\|T\|^2$ liegt der Wert der universellen Abschätzung oberhalb des Wertes der Deformationsabschätzung. Optimal kann die universelle Abschätzung aber für $\mathrm{Scal}^g_{\min} > \frac{7}{2}\|T\|^2$ nicht sein, da mit Lemma 1.15 aus der Existenz eines ∇^c parallelen Spinors im Bündel zum Torsionseigenwert mit $\mu^2 = 2\|T\|^2$ folgt, dass $\mathrm{Scal}^g = \frac{7}{2}\|T\|^2$ gilt. Tatsächlich liefert die Twistor-Abschätzung für einen Eigenwert λ von $\not{D}^2$

$$(\not{D}^2|_{\Sigma_{\pm\sqrt{2}\|T\|}}) \geq \tfrac{3}{10}\mathrm{Scal}^g_{\min} - \tfrac{1}{4}\|T\|^2 .$$

Die Twistor-Abschätzung ist also stärker als die universelle Abschätzung und liefert im Bereich von $\mathrm{Scal}^g_{\min} > \frac{7}{2}\|T\|^2$ den besten bekannten Abschätzungswert.

2 Killing-Spinoren auf Sasaki-Mannigfaltigkeiten

In diesem Kapitel konstruieren wir Killing-Spinoren mit Torsion in allen ungeraden Dimensionen. In Satz 2.22 geben wir eine Krümmungsbedingung für die Existenz von Killing-Spinoren mit Torsion in gewissen komplexen Linienbündeln auf einer Sasaki-Mannigfaltigkeit an. Wir werden sehen, dass jene Krümmungsbedingung äquivalent dazu ist, dass die Metrik über eine transverse Homothetie zu einer Riemannschen bzw. einer semi-Riemannschen Einstein-Metrik in Beziehung steht. Unter dieser Änderung der Metrik werden die Riemannschen bzw. semi-Riemannschen Killing-Spinoren zu Killing-Spinoren mit Torsion deformiert.

Wir nennen zu Beginn dieses Kapitels kurz noch einmal die grundlegenden Bezeichnungen und Eigenschaften aus der Kontakt-Geometrie, mit denen wir arbeiten werden. In Abschnitt 2.1 betrachten wir den klassischen torsionsfreien Fall von Riemannschen und semi-Riemannschen Killing-Spinoren auf Einstein-Sasaki-Mannigfaltigkeiten, auf den wir in Abschnitt 2.2 schließlich zurückgreifen, um die Existenz von Killing-Spinoren mit Torsion auf Sasaki-Mannigfaltigkeiten zu untersuchen.

Metrische Fast-Kontakt-Strukturen

Wir rufen kurz die aus der Kontakt-Geometrie benötigten Begriffe und Beziehungen in Erinnerung. Eine umfassende Referenz ist das Buch [Bla02].

Definition 2.1.
Eine metrische Fast-Kontakt-Struktur auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M^{2k+1}, g) besteht aus einem Vektorfeld ξ der Länge eins und einem Endomorphismus $\varphi : TM \to TM$ derart, dass für ξ, φ und die 1-Form $\eta := g(\xi, \cdot)$ gilt

$$\varphi^2 = -\mathrm{Id}_{TM} + \eta \otimes \xi, \quad g(\varphi(X), \varphi(Y)) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)\,.$$

Es gilt $\varphi(\xi) = 0$ und $\eta \circ \varphi = 0$.

Definition 2.2.
Eine metrische Fast-Kontakt-Struktur ist eine metrische Kontakt-Struktur, wenn $d\eta$ zur sogenannten fundamentalen 2-Form $F := g(\cdot, \varphi\cdot)$ proportional ist durch $d\eta = 2F$.

Eine metrische Kontakt-Struktur erfüllt $\eta \wedge (d\eta)^k \neq 0$.

Definition 2.3.
Eine metrische Kontakt-Struktur heißt metrische K-Kontakt-Struktur, wenn ξ ein Killing-Vektorfeld ist.

Lemma 2.4.
Eine metrische Kontakt-Struktur ist genau dann eine metrische K-Kontakt-Struktur, wenn $\nabla^g_X \xi = -\varphi(X)$ gilt.

Ist für eine metrische Fast-Kontakt-Struktur die Bedingung $\nabla^g_X \xi = -\varphi(X)$ erfüllt, dann folgt sofort $d\eta(X,Y) = (\nabla^g_X \eta)(Y) - (\nabla^g_Y \eta)(X) = 2F(X,Y)$.

Definition 2.5.
Der Nijenhuis-Tensor einer metrischen Fast-Kontakt-Struktur ist

$$N(X,Y) := [\varphi(X), \varphi(Y)] - \varphi[X, \varphi(Y)] - \varphi[\varphi(X), Y] + \varphi^2[X,Y] + d\eta(X,Y)\xi\,.$$

Definition 2.6.
Eine Sasaki-Struktur ist eine metrische Kontakt-Struktur, deren Nijenhuis-Tensor N verschwindet.

Lemma 2.7.
Eine Sasaki-Struktur ist immer eine metrische K-Kontakt-Struktur.

Lemma 2.8.
Eine metrische K-Kontakt-Struktur ist genau dann eine Sasaki-Struktur, wenn gilt

$$(\nabla^g_X \varphi)(Y) = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X\,.$$

Lemma 2.9.
Eine metrische Kontakt-Struktur ist genau dann eine metrische K-Kontakt-Struktur, wenn für den Ricci-Tensor gilt

$$\mathrm{Ric}^g(\xi,\xi) = 2k\,.$$

Insbesondere: Ist die Metrik einer K-Kontakt-Struktur eine Einstein-Metrik, dann gilt

$$\mathrm{Ric}^g(X,Y) = 2kg(X,Y), \quad \mathrm{Scal}^g = 2k(2k+1)\,.$$

Eine große Klasse von metrischen Fast-Kontakt-Strukturen besitzt einen metrischen Zusammenhang ∇ mit antisymmetrischer Torsion, der die Struktur invariant lässt, d. h. ∇ erfüllt

$$\nabla g = \nabla\xi = \nabla\eta = \nabla\varphi = 0\,.$$

Die beiden folgenden Sätze stammen aus [FrIv02]:

Satz 2.10.
Auf einer metrischen Fast-Kontakt-Mannigfaltigkeit $(M^{2k+1}, g, \xi, \eta, \varphi)$ existiert genau dann ein metrischer Zusammenhang ∇ mit antisymmetrischer Torsion T, der die metrische Fast-Kontakt-Struktur invariant lässt, wenn der Nijenhuis-Tensor N schiefsymmetrisch und ξ ein Killing-Vektorfeld ist. Wenn ein solcher Zusammenhang $\nabla = \nabla^g + \frac{1}{2}T$ existiert, dann ist er eindeutig, und seine Torsion T hat die Gestalt

$$T = \eta \wedge d\eta + d^\varphi F + N - \eta \wedge (\xi \lrcorner N),$$

wobei $d^\varphi F(X,Y,Z) := -dF(\varphi(X), \varphi(Y), \varphi(Z))$.

Satz 2.11.
Eine metrische Kontakt-Struktur $(M^{2k+1}, g, \xi, \eta, \varphi)$ besitzt genau dann einen metrischen Zusammenhang ∇ mit antisymmetrischer Torsion T, der die metrische Fast-Kontakt-Struktur invariant lässt, wenn sie eine Sasaki-Struktur ist. In diesem Fall gilt für die Torsion

$$T = \eta \wedge d\eta, \quad \nabla T = 0\,.$$

Auf Sasaki-Mannigfaltigkeiten wurde der metrische Zusammenhang mit Torsion $T = \eta \wedge d\eta$ schon in [Oku62] und später beispielsweise in [KoWe87] untersucht. Solange wir im allgemeinen ungeraddimensionalen Fall sind, werden wir auf Sasaki-Mannigfaltigkeiten als metrischen Zusammenhang ∇^c mit paralleler antisymmetrischer Torsion immer den eben erwähnten Zusammenhang mit Torsion $T = \eta \wedge d\eta$ betrachten.

2.1 Killing-Spinoren ohne Torsion auf Sasaki-Mannigfaltigkeiten

Riemannsche Killing-Spinoren auf Sasaki-Mannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt geben wir noch einmal einen Beweis der Konstruktion von zwei linear unabhängigen Riemannschen Killing-Spinoren auf einer Einstein-Sasaki-Mannigfaltigkeit. Die hier verwendete Technik wurde von Th. Friedrich und I. Kath in [FrKa88], [FrKa89], [FrKa90] entwickelt, und des Weiteren ist ein Beweis auch in [BFGK91, 4.2] wiedergegeben.

Unser Ziel ist der Beweis von Satz 2.13. Wir benötigen dazu folgendes Lemma:

Lemma 2.12.
Sei (M^{2k+1}, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit metrischer Fast-Kontakt-Struktur (φ, ξ, η) und Spinor-Bündel Σ. Dann sind

$$L_1 := \{\, \psi \in \Sigma \,|\, \varphi(X)\psi = -iX\psi \ \forall\, X \perp \xi \,\}, \quad L_2 := \{\, \psi \in \Sigma \,|\, \varphi(X)\psi = iX\psi \ \forall\, X \perp \xi \,\}$$

zwei komplexe eindimensionale Vektorbündel über M^{2k+1}. Sei weiter $(e_1, \varphi(e_1), ..., e_k, \varphi(e_k), \xi)$ ein lokales Orthonormalreper. Dann existiert $\varepsilon \in \{+1, -1\}$, so dass für alle $\psi \in \Sigma$ gilt

$$e_1\varphi(e_1)e_2\varphi(e_2)...e_k\varphi(e_k)\xi\psi = \varepsilon i^{k+1}\psi,$$

und ξ wirkt dann auf den Bündeln L_1 und L_2 durch

$$\xi\psi_1 = \varepsilon i\psi_1 \quad \forall\, \psi_1 \in L_1, \quad \xi\psi_2 = \varepsilon(-1)^k i\psi_2 \quad \forall\, \psi_2 \in L_2\,.$$

Beweis. Wir fixieren in einem Punkt $x \in M$ eine Basis von Σ_x der Gestalt $(e_1, \varphi(e_1), ..., e_k, \varphi(e_k), \xi)$. Ein Spinor $\psi \in \Sigma_x$ liegt in L_1 genau dann, wenn er für alle $j = 1, ..., k$ ein Eigenspinor der Spinor-Endomorphismen $e_j\varphi(e_j)$ zum Eigenwert i ist, $e_j\varphi(e_j)\psi = i\psi$. Ebenso liegt ein Spinor $\psi \in \Sigma$ in L_2 genau dann, wenn er für alle $j = 1, ..., k$ ein Eigenspinor der Spinor-Endomorphismen $e_j\varphi(e_j)$ zum Eigenwert $-i$ ist, $e_j\varphi(e_j)\psi = -i\psi$. Die Spinor-Endomorphismen $e_j\varphi(e_j)$ haben weiter folgende Eigenschaften: Sie sind antisymmetrisch bezüglich des kanonischen Spinor-Skalarproduktes, also diagonalisierbar. Da gilt $(e_j\varphi(e_j))^2 = -\mathrm{Id}_\Sigma$, sind die möglichen Eigenwerte i und $-i$. Tatsächlich haben für jeden Spinor-Endomorphismus $e_j\varphi(e_j)$ der Eigenraum zu i und der Eigenraum zu $-i$ die gleiche Dimension 2^{k-1}, da ein Isomorphismus zwischen den Räumen durch die Multiplikation mit e_j gegeben ist. Die Endomorphismen $e_j\varphi(e_j)$, $e_l\varphi(e_l)$ kommutieren für beliebige Werte von j und l miteinander, und somit sind alle Endomorphismen $e_j\varphi(e_j)$, $j = 1...k$, gleichzeitig diagonalisierbar. Da die Eigenräume von $e_j\varphi(e_j)$ für $l \neq j$ invariant unter Multiplikation mit e_l sind, hat der Schnitt von einem Eigenraum von $e_l\varphi(e_l)$ mit einem Eigenraum von $e_j\varphi(e_j)$ immer die Dimension 2^{k-2}. Führen wir diese Aufspaltung induktiv weiter, erhalten wir für $(L_1)_x$ – was ja der Schnitt aller Eigenräume der Endomorphismen $e_j\varphi(e_j)$, $j = 1...k$, zum Eigenwert i ist) – die Dimension eins. Genauso hat das $(L_1)_x$ als Schnitt aller Eigenräume der Endomorphismen $e_j\varphi(e_j)$, $j = 1...k$, zum Eigenwert $-i$ die Dimension eins. Da φ glatt und global definiert ist, sind L_1 und L_2 zwei über der ganzen Mannigfaltigkeit definierte glatte Linienbündel.

Wir beschreiben die Wirkung von ξ auf Elemente von L_1 und L_2. Dazu betrachten wir zunächst die Wirkung der Volumenform $e_1 \wedge \varphi(e_1) \wedge ... \wedge e_k \wedge \varphi(e_k) \wedge \xi$ auf einen beliebigen Spinor $\psi \in \Sigma$. Der Spinor-Endomorphismus $e_1\varphi(e_1)...e_k\varphi(e_k)\xi$ ist schiefsymmetrisch bezüglich des kanonischen Spinor-Skalarproduktes, also diagonalisierbar. Für sein Quadrat gilt

$$(e_1\varphi(e_1)...e_k\varphi(e_k)\xi)^2 = (-1)^{k+1}\,.$$

Also sind die möglichen Eigenwerte i^{k+1} und $(-i)^{k+1}$. Da die Volumenform Spin$(2k+1)$-invariant und die Wirkung von Spin$(2k+1)$ auf Σ irreduzibel ist, tritt immer nur einer der beiden Eigenwerte i^{k+1} und $(-i)^{k+1}$ auf. Wir können also ε so als 1 oder -1 wählen, dass für alle Spinoren ψ gilt

$$e_1\varphi(e_1)e_2\varphi(e_2)...e_k\varphi(e_k)\xi\psi = \varepsilon i^{k+1}\psi\,.$$

(Der Wert von ε hängt davon ab, ob die Orientierung der metrischen Fast-Kontakt-Struktur mit der von der Spin-Struktur induzierten Orientierung übereinstimmt. Es ist immer möglich, diese Orientierungen so aufeinander abzustimmen, dass $\varepsilon = -1$ gilt, z. B. durch den Übergang von ξ zu $-\xi$.) Mit dieser Festlegung berechnen wir die Wirkung von ξ auf Elemente der Bündel L_1 und L_2. Sei ψ_1 aus L_1. Dann folgt aus der Definition von L_1

$$e_1\varphi(e_1)e_2\varphi(e_2)...e_k\varphi(e_k)\xi\psi_1 = i^k\xi\psi_1\,.$$

Vergleichen wir dies mit der zuvor beschriebenen Wirkung der Volumenform auf einen beliebigen Spinor, dann ergibt sich

$$\xi\psi_1 = \varepsilon i\psi_1\,.$$

Sei jetzt ψ_2 aus L_2. Dann gilt

$$e_1\varphi(e_1)e_2\varphi(e_2)...e_k\varphi(e_k)\xi\psi_2 = (-i)^k\xi\psi_2\,.$$

Vergleichen wir dies wieder mit der Wirkung der Volumenform auf einen beliebigen Spinor, dann folgt

$$\xi\psi_2 = \varepsilon(-1)^k i\psi_2\,.$$

□

Mit dem soeben formulierten Lemma zeigen wir:

Satz 2.13.
Ist $(M^{2k+1}, g, \xi, \eta, \varphi)$ eine Riemannsche metrische Fast-Kontakt-Mannigfaltigkeit mit fundamentaler 2-Form F und mit Spinorbündel Σ, dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) *$(M^{2k+1}, g, \xi, \eta, \varphi)$ ist eine Sasaki-Mannigfaltigkeit.*

(2) *Das Bündel L_1 ist invariant unter dem Zusammenhang $\nabla^g_X - \frac{\varepsilon}{2}X$.*

(3) *Das Bündel L_2 ist invariant unter dem Zusammenhang $\nabla^g_X + \varepsilon\frac{(-1)^k}{2}X$.*

Ist $(M^{2k+1}, g, \xi, \eta, \varphi)$ eine Riemannsche Sasaki-Mannigfaltigkeit mit fundamentaler 2-Form F und mit Spinorbündel Σ, dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) *$(M^{2k+1}, g, \xi, \eta, \varphi)$ ist eine Einstein-Sasaki-Mannigfaltigkeit.*

(2) *Der Zusammenhang $\nabla^g_X - \frac{\varepsilon}{2}X$ auf dem Bündel L_1 ist flach.*

(3) *Der Zusammenhang $\nabla^g_X + \varepsilon\frac{(-1)^k}{2}X$ auf dem Bündel L_2 ist flach.*

Korollar 2.14.
Ist $(M^{2k+1}, g, \xi, \eta, \varphi)$ eine einfach-zusammenhängende Einstein-Sasaki-Mannigfaltigkeit mit fundamentaler 2-Form F und mit Spinorbündel Σ, dann existieren zwei linear unabhängige Riemannsche Killing-Spinoren $\psi_1 \in \Gamma(L_1)$ und $\psi_2 \in \Gamma(L_2)$, und es gilt

$$\begin{aligned}
&\xi\psi_1 = \varepsilon i\psi_1\,, && \xi\psi_2 = \varepsilon(-1)^k i\psi_2\\
&\varphi(X)\psi_1 = -iX\psi_1 - \varepsilon\eta(X)\psi_1\,, && \varphi(X)\psi_2 = iX\psi_2 + \varepsilon(-1)^k\eta(X)\psi_2\\
&\nabla^g_X\psi_1 = \tfrac{\varepsilon}{2}X\psi_1\,, && \nabla^g_X\psi_2 = -\varepsilon\tfrac{(-1)^k}{2}X\psi_2\,.
\end{aligned}$$

Beweis des Satzes. Wir zeigen als Erstes: Ist $(M^{2k+1}, g, \xi, \eta, \varphi)$ eine Sasaki-Mannigfaltigkeit, dann ist das Bündel L_1 invariant unter dem Zusammenhang $\nabla^g_X - \frac{\varepsilon}{2}X$. Sei $\psi_1 \in \Gamma(L_1)$. Dann gilt $\varphi(Y)\psi_1 = -iY\psi_1 - \varepsilon\eta(Y)\psi_1$. Wir wenden ∇^g_X auf diese Gleichung an und erhalten

$$\begin{aligned}(\varphi(Y) + iY + \varepsilon\eta(Y))\nabla^g_X\psi_1 &= -\left(\nabla^g_X\varphi(Y)\right)\psi_1 - i\left(\nabla^g_X Y\right)\psi_1 - \varepsilon X(\eta(Y))\psi_1 \\ &= -(\nabla^g_X\varphi)(Y)\psi_1 - \varepsilon(\nabla^g_X\eta)(Y)\psi_1\,.\end{aligned}$$

Wir werten dies zunächst für $Y = \xi$ aus:

$$\begin{aligned}(i\xi + \varepsilon)\nabla^g_X\psi_1 &= -i\left(\nabla^g_X\xi\right)\psi_1 \\ &= i\varphi(X)\psi_1 \\ &= X\psi_1 - \varepsilon i\eta(X)\psi_1.\end{aligned}$$

Spalten wir an dieser Stelle $\nabla^g_X\psi_1$ auf bezüglich der beiden Eigenräume von ξ mit Eigenwert jeweils $+\varepsilon i$ und $-\varepsilon i$,

$$\nabla^g_X\psi_1 = [\nabla^g_X\psi_1]_{+\varepsilon i} + [\nabla^g_X\psi_1]_{-\varepsilon i}\,,$$

dann können wir die vorherige Gleichung auswerten als

$$2\varepsilon[\nabla^g_X\psi_1]_{-\varepsilon i} = X\psi_1 - \varepsilon i\eta(X)\psi_1\,.$$

Um die noch fehlende Komponente $[\nabla^g_X\psi_1]_{+\varepsilon i}$ von $\nabla^g_X\psi_1$ zu erhalten, kehren wir zurück zur Anfangsgleichung und werten sie diesmal für $Y \perp \xi$ aus. Da für Sasaki-Strukturen allgemein gilt $(\nabla^g_X\varphi)(Y) = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X$, erhalten wir:

$$\begin{aligned}(\varphi(Y) + iY)\nabla^g_X\psi_1 &= -(\nabla^g_X\varphi)(Y)\psi_1 - \varepsilon(\nabla^g_X\eta)(Y)\psi_1 \\ &= -g(X,Y)\xi\psi_1 - \varepsilon g(\nabla^g_X\xi, Y)\psi_1 \\ &= -\varepsilon i g(X,Y)\psi_1 + \varepsilon g(\varphi(X), Y)\psi_1\,.\end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser letzten Gleichung ist proportional zu ψ_1 und liegt damit im $+\varepsilon i$-Eigenraum von ξ. Da die Multiplikation mit $(\varphi(Y) + iY)$ die beiden Eigenräume zu $+\varepsilon i$ und $-\varepsilon i$ miteinander vertauscht, folgt

$$(\varphi(Y) + iY)[\nabla^g_X\psi_1]_{+\varepsilon i} = 0.$$

Also gilt $[\nabla^g_X\psi_1]_{+\varepsilon i} \in \Gamma(L_1)$. Insgesamt erhalten wir

$$\nabla^g_X\psi_1 = \tfrac{\varepsilon}{2}X\psi_1 - \tfrac{1}{2}i\eta(X)\psi_1 + [\nabla^g_X\psi_1]_{+\varepsilon i}\,,$$

und es folgt $\nabla^g_X\psi_1 - \frac{\varepsilon}{2}X\psi_1 \in \Gamma(L_1)$. Hiermit ist gezeigt, dass das Bündel L_1 im Sasaki-Fall unter dem Zusammenhang $\nabla^g_X - \frac{\varepsilon}{2}X$ invariant ist.

Wir zeigen nun die Umkehrung: Wenn das Bündel L_1 unter dem Zusammenhang $\nabla^g_X - \frac{\varepsilon}{2}X$ invariant ist, dann ist die metrische Fast-Kontakt-Struktur (g, ξ, η, φ) eine Sasaki-Struktur. Wir fixieren einen Schnitt $\psi_1 \in \Gamma(L_1)$. Nach Voraussetzung können wir eine 1-Form α durch $\nabla^g_X\psi_1 = \frac{\varepsilon}{2}X\psi_1 + i\alpha(X)\psi_1$ definieren. Kovariantes Ableiten der Gleichung $\xi\psi_1 = \varepsilon i\psi_1$ liefert dann

$$\begin{aligned}(\nabla^g_X\xi)\psi_1 &= (\varepsilon i - \xi)\nabla^g_X\psi_1 \\ &= (\varepsilon i - \xi)\left(\tfrac{\varepsilon}{2}X\psi_1 + i\alpha(X)\psi_1\right) \\ &= \tfrac{1}{2}iX\psi_1 - \tfrac{\varepsilon}{2}\xi X\psi_1 \\ &= \tfrac{1}{2}iX\psi_1 + \tfrac{\varepsilon}{2}X\xi\psi_1 + \varepsilon\eta(X)\psi_1 \\ &= iX\psi_1 + \varepsilon\eta(X)\psi_1 \\ &= -\varphi(X)\psi_1\,.\end{aligned}$$

Wie zuvor schon gesehen, führt kovariantes Ableiten der Identität $\varphi(Y)\psi_1 = -iY\psi_1 - \varepsilon\eta(Y)\psi_1$ auf

$$(\varphi(Y) + iY + \varepsilon\eta(Y))\nabla^g_X\psi_1 = -(\nabla^g_X\varphi)(Y)\psi_1 - \varepsilon(\nabla^g_X\eta)(Y)\psi_1\,.$$

Mit $\nabla^g_X\psi_1 = \frac{\varepsilon}{2}X\psi_1 + \alpha(X)\psi_1$ und $(\nabla^g_X\xi)\psi_1 = -\varphi(X)\psi_1$ erhalten wir dann:

$$\begin{aligned}
(\nabla^g_X\varphi)(Y)\psi_1 &= -\varepsilon(\nabla^g_X\eta)(Y)\psi_1 - (\varphi(Y) + iY + \varepsilon\eta(Y))\nabla^g_X\psi_1 \\
&= -\varepsilon g(\nabla^g_X\xi, Y)\psi_1 - (\varphi(Y) + iY + \varepsilon\eta(Y))\left(\tfrac{\varepsilon}{2}X\psi_1 + \alpha(X)\psi_1\right) \\
&= \varepsilon g(\varphi(X), Y)\psi_1 - (\varphi(Y) + iY + \varepsilon\eta(Y))\tfrac{\varepsilon}{2}X\psi_1 \\
&= -\varepsilon g(X, \varphi(Y))\psi_1 + \tfrac{\varepsilon}{2}X\varphi(Y)\psi_1 + \varepsilon g(\varphi(Y), X)\psi_1 - \tfrac{\varepsilon}{2}iYX\psi_1 - \tfrac{1}{2}\eta(Y)X\psi_1 \\
&= \tfrac{\varepsilon}{2}X\varphi(Y)\psi_1 - \tfrac{\varepsilon}{2}iYX\psi_1 - \tfrac{1}{2}\eta(Y)X\psi_1 \\
&= \tfrac{\varepsilon}{2}X(-iY - \varepsilon\eta(Y))\psi_1 - \tfrac{\varepsilon}{2}iYX\psi_1 - \tfrac{1}{2}\eta(Y)X\psi_1 \\
&= -\tfrac{\varepsilon}{2}i(XY + YX)\psi_1 - \eta(Y)X\psi_1 \\
&= \varepsilon g(X, Y)i\psi_1 - \eta(Y)X\psi_1 \\
&= g(X, Y)\xi\psi_1 - \eta(Y)X\psi_1\,.
\end{aligned}$$

Mit der letzten Gleichheit haben wir gezeigt, dass die betrachtete metrische Fast-Kontakt-Struktur eine Sasaki-Struktur ist.

Wir kommen zum zweiten Teil des Satzes. Hier setzen wir voraus, dass (g, ξ, η, φ) eine Sasaki-Struktur ist. Sei ψ_1 ein lokaler Schnitt im Bündel L_1 mit konstanter Länge. Wir wissen bereits, dass das Bündel L_1 invariant unter dem Zusammenhang $\nabla^g_X - \frac{\varepsilon}{2}X$ ist. Deshalb existiert eine 1-Form α derart, dass gilt

$$\nabla^g_X\psi_1 = \tfrac{\varepsilon}{2}X\psi_1 + i\alpha(X)\psi_1\,.$$

Da ψ_1 konstante Länge hat, ist die 1-Form α reellwertig: Es ist

$$\langle\nabla^g_X\psi_1, \psi_1\rangle = \tfrac{\varepsilon}{2}\langle X\psi_1, \psi_1\rangle + i\alpha(X)\langle\psi_1, \psi_1\rangle\,.$$

Für einen Schnitt ψ_1 konstanter Länge gilt $\mathrm{Re}(\langle\nabla^g_X\psi_1, \psi_1\rangle) = 0$. Da auch der Term $\langle X\psi_1, \psi_1\rangle = -\langle\psi_1, X\psi_1\rangle = -\overline{\langle X\psi_1, \psi_1\rangle}$ imaginär ist, muss damit α reellwertig sein.
Für den Krümmungsendomorphismus $\mathcal{R}^1(X, Y)$ des Zusammenhangs $\nabla^{L_1}_X := \nabla^g_X - \frac{\varepsilon}{2}X$ auf L_1 erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^1(X, Y)\psi_1 &= \nabla^{L_1}_X\nabla^{L_1}_Y\psi_1 - \nabla^{L_1}_Y\nabla^{L_1}_X\psi_1 - \nabla^{L_1}_{[X,Y]}\psi_1 \\
&= \nabla^{L_1}_X(i\alpha(Y)\psi_1) - \nabla^{L_1}_X(i\alpha(X)\psi_1) - i\alpha([X, Y])\psi_1 \\
&= iX(\alpha(Y))\psi_1 - iY(\alpha(X))\psi_1 - i\alpha([X, Y])\psi_1 \\
&= id\alpha(X, Y)\psi_1\,.
\end{aligned}$$

Der Zusammenhang $\nabla^g_X - \frac{\varepsilon}{2}X$ auf dem Bündel L_1 ist also genau dann flach, wenn $d\alpha = 0$ gilt.
Wir berechnen den Riemannschen Krümmungsendomorphismus:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^g(X, Y)\psi_1 &= \nabla^g_X\nabla^g_Y\psi_1 - \nabla^g_Y\nabla^g_X\psi_1 - \nabla^g_{[X,Y]}\psi_1 \\
&= \nabla^g_X(\tfrac{\varepsilon}{2}Y\psi_1 + i\alpha(Y)\psi_1) - \nabla^g_Y(\tfrac{\varepsilon}{2}X\psi_1 + i\alpha(X)\psi_1) - \tfrac{\varepsilon}{2}[X, Y]\psi_1 - i\alpha([X, Y])\psi_1 \\
&= \tfrac{\varepsilon}{2}(\nabla^g_XY)\psi_1 + \tfrac{\varepsilon}{2}Y\nabla^g_X\psi_1 + iX(\alpha(Y))\psi_1 + i\alpha(Y)\nabla^g_X\psi_1 \\
&\quad -\tfrac{\varepsilon}{2}(\nabla^g_YX)\psi_1 - \tfrac{\varepsilon}{2}X\nabla^g_Y\psi_1 - iY(\alpha(X))\psi_1 - i\alpha(X)\nabla^g_Y\psi_1 \\
&\quad -\tfrac{\varepsilon}{2}[X, Y]\psi_1 - i\alpha([X, Y])\psi_1 \\
&= \tfrac{\varepsilon}{2}Y(\tfrac{\varepsilon}{2}X\psi_1 + i\alpha(X)\psi_1) + i\alpha(Y)(\tfrac{\varepsilon}{2}X\psi_1 + i\alpha(X)\psi_1) \\
&\quad -\tfrac{\varepsilon}{2}X(\tfrac{\varepsilon}{2}Y\psi_1 + i\alpha(Y)\psi_1) - i\alpha(X)(\tfrac{\varepsilon}{2}Y\psi_1 + i\alpha(Y)\psi_1) \\
&\quad +id\alpha(X, Y)\psi_1 \\
&= \tfrac{1}{4}(YX - XY)\psi_1 + id\alpha(X, Y)\psi_1\,.
\end{aligned}$$

Für die Ricci-Krümmung erhalten wir dann

$$\mathrm{Ric}^g(X)\psi_1 = -2\sum_j e_j \mathcal{R}^g(X, e_j)\psi_1 = 2kX\psi_1 - 2i(X \lrcorner d\alpha)\psi_1\,.$$

Hieraus folgt bereits, dass die Bedingungen $\mathrm{Ric}^g(X) - 2kX \equiv 0$ und $d\alpha \equiv 0$ äquivalent sind. Für eine Riemannsche Sasaki-Mannigfaltigkeit ist aber $\mathrm{Ric}^g(X) - 2kX \equiv 0$ wiederum zur Einstein-Bedingung äquivalent. Also haben wir insgesamt gezeigt, dass der Zusammenhang $\nabla^g_X\psi - \frac{\varepsilon}{2}X\psi$ auf L_1 genau dann flach ist, wenn die Metrik eine Einstein-Metrik ist.

Für das Bündel L_2 folgen die entsprechenden Aussagen auf gleiche Weise, wie hier für das Bündel L_1 ausgeführt.

□

Semi-Riemannsche Killing-Spinoren auf Sasaki-Mannigfaltigkeiten

Wir betrachten kurz auch den allgemeineren semi-Riemannschen Fall, da die Untersuchung von Torsions-Killing-Spinoren im nächsten Abschnitt uns auf Metriken mit Lorentz-Signatur führen wird. Killing-Spinoren auf semi-Riemannschen Sasaki-Mannigfaltigkeiten wurden in [Boh98] mit der von Th. Friedrich und I. Kath entwickelten Technik beschrieben. In [Kat99] hat I. Kath die holonomiebasierte Herangehensweise von Ch. Bär ([Bär93]) auf den Fall semi-Riemannscher Sasaki-Mannigfaltigkeiten übertragen.
Der wesentliche Punkt, in dem sich die semi-Riemannsche Spingeometrie von der Riemannschen unterscheidet, ist, dass bei nicht positiv-definiter Metrik aus $X\psi = 0$ nicht mehr folgt, dass $X = 0$ oder $\psi = 0$ gilt. Deshalb ist die Aussage, dass der Ricci-Tensor Ric^g bei Existenz von Killing-Spinoren notwendigerweise proportional zur Metrik g ist, zu ersetzen durch die schwächere Aussage, dass für den Killing-Spinor ψ_o gilt $(\mathrm{Ric}^g(X) - 2kX)\psi_o \equiv 0$.

Wir skizzieren im Folgenden, an welchen Stellen im Beweis von Satz 2.13 Änderungen vorzunehmen sind, wenn wir auch nicht positiv-definite Metriken betrachten. Sei $(M^{2k+1}, g, \xi, \eta, \varphi)$ eine kompakte semi-Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit mit Spinorbündel Σ und metrischer Fast-Kontakt-Struktur (ξ, η, φ), wobei η definiert ist durch $\eta := g(\xi, \cdot)$. Für eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit sind manche Identitäten der Kontakt-Geometrie leicht zu modifizieren, und zwar mit $\sigma := g(\xi, \xi)$ an folgenden Stellen: $\varphi^2 = -\mathrm{Id}_{TM} + \sigma\eta \otimes \xi$, $g(\varphi(X), \varphi(Y)) = g(X, Y) - \sigma\eta(X)\eta(Y)$. Für eine Sasaki-Mannigfaltigkeit gilt $(\nabla^g_X\varphi)(Y) = \sigma g(X, Y)\xi - \sigma\eta(Y)\xi$.
Wir übernehmen die Definition zweier komplex-eindimensionaler Bündel aus dem Riemannschen Fall:

$$L_1 := \{\,\psi \in \Sigma \,|\, \varphi(X)\psi = -iX\psi \;\forall\, X \perp \xi\,\}, \quad L_2 := \{\,\psi \in \Sigma \,|\, \varphi(X)\psi = iX\psi \;\forall\, X \perp \xi\,\}\,.$$

Die lokale Beschreibung dieser Bündel weicht bei einer nicht positiv-definiten Metrik von der in Lemma 2.12 gegebenen ab: Sei $e_1, \varphi(e_1), e_2, \varphi(e_2), ..., e_{2k}, \varphi(e_{2k}), \xi$ ein lokales Orthonormalreper. Da φ metrisch ist, gilt $g(e_j, e_j) = g(\varphi(e_j), \varphi(e_j))$, und der Spinor-Endomorphismus $e_j\varphi(e_j)$ erfüllt, unabhängig von der Signatur der Metrik, $(e_j\varphi(e_j))^2 = -1$. Wie im Riemannschen Fall spaltet sich das Spinorbündel in einen Eigenraum des Endomorphismus $e_j\varphi(e_j)$ zum Eigenwert i und in einen Eigenraum zum Eigenwert $-i$ gleicher Dimension auf. Dort, wo das lokale Orthonormalreper definiert ist, gilt für einen Spinor $\psi \in \Sigma$

$$\psi \in L_1 \iff e_j\varphi(e_j)\psi = ig(e_j, e_j)\psi \quad \forall\, j = 1, ..., k,$$

und analog

$$\psi \in L_2 \iff e_j\varphi(e_j)\psi = -ig(e_j, e_j)\psi \quad \forall\, j = 1, ..., k.$$

Mit dieser Änderung, nun alle Endomorphismen $g(e_j,e_j)e_j\varphi(e_j)$ statt $e_j\varphi(e_j)$ zu betrachten, lässt sich wieder wie in Lemma 2.12 argumentieren, dass L_1 und L_2 komplex-eindimensionale Bündel sind.
Die Wirkung des Vektorfelds ξ auf Elemente der Bündel L_1 und L_2 benötigt eine neue Beschreibung. Es gilt

$$(e_1\varphi(e_1)...e_k\varphi(e_k)\xi)^2 = (-1)^{k+1}g(\xi,\xi)\,.$$

Im Fall $g(\xi,\xi)=1$ gilt $\xi^2=-1$, und die Spinorwirkung von ξ hat die Eigenwerte i und $-i$. Im Fall $g(\xi,\xi)=-1$ gilt $\xi^2=1$, und die Spinorwirkung von ξ hat die Eigenwerte 1 und -1. Die Wurzel $\sqrt{\tau}$ stehe im Fall $g(\xi,\xi)=1$ für den ξ-Eigenwert i, im Fall $g(\xi,\xi)=-1$ für den ξ-Eigenwert 1. Dann existiert (mit gleicher Argumentation wie im Riemannschen Fall) ein $\varepsilon\in\{+1,-1\}$, so dass für alle $\psi\in\Sigma$ gilt

$$e_1\varphi(e_1)e_2\varphi(e_2)...e_k\varphi(e_k)\xi\psi = \varepsilon i^k\sqrt{\tau}\psi\,.$$

Bezeichne q die Anzahl der Paare $(e_j,\varphi(e_j))$ im fixierten Orthonormalreper mit $g(e_j,e_j)=-1$. Dann gilt für alle $\psi_1\in L_1$

$$e_1\varphi(e_1)e_2\varphi(e_2)...e_k\varphi(e_k)\xi\psi_1 = (-i)^q i^{k-q}\xi\psi_1 = (-1)^q i^k\xi\psi_1\,.$$

Für alle $\psi_2\in L_2$ gilt

$$e_1\varphi(e_1)e_2\varphi(e_2)...e_k\varphi(e_k)\xi\psi_2 = i^q(-i)^{k-q}\xi\psi_2 = (-1)^{k-q}i^k\xi\psi_2\,.$$

Es folgt

$$\xi\psi_1 = \varepsilon(-1)^q\sqrt{\tau}\psi_1,\quad \xi\psi_2 = \varepsilon(-1)^{k-q}\sqrt{\tau}\psi_2\,.$$

Anders als zuvor im Riemannschen Fall legen wir nun einen Wert von ε fest, und zwar wählen wir ε (d. h. die Orientierung) so, dass $\varepsilon(-1)^q=1$ gilt. Dann wirkt ξ auf L_1 und L_2 also durch

$$\xi\psi_1 = \sqrt{\tau}\psi_1,\quad \xi\psi_2 = (-1)^k\sqrt{\tau}\psi_2\,.$$

Damit erhalten wir für φ:

$$\begin{aligned}\varphi(X)\psi_1 &= -iX\psi_1 + \sigma i\eta(X)\xi\psi_1 = -iX\psi_1 + \sigma\sqrt{\tau}i\eta(X)\psi_1 \quad \forall\psi_1\in L_1\,,\\ \varphi(X)\psi_2 &= iX\psi_2 - \sigma i\eta(X)\xi\psi_2 = iX\psi_2 - (-1)^k\sigma\sqrt{\tau}i\eta(X)\psi_2 \quad \forall\psi_2\in L_2\,.\end{aligned}$$

Gelte $\nabla^g_X\psi_1=\beta_1X\psi_1$ für ein $\psi_1\in\Gamma(L_1)$. Durch die Identität $\nabla^g_X\xi=-\varphi(X)$ einerseits und kovariantes Ableiten von $\xi\psi_1=\sqrt{\tau}\psi_1$ andererseits erhalten wir, dass ψ_1 als Killing-Zahl nur $\beta_1=-\frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau}i$ haben kann. Für $\psi_1\in\Gamma(L_2)$ ist die einzig mögliche Killing-Zahl $\beta_2=(-1)^{k+1}\frac{\sigma\sqrt{\tau}}{2}i$.
Ähnlich wie im Riemannschen Fall rechnet man nun nach: Wenn die semi-Riemannsche Metrik der Sasaki-Mannigfaltigkeit eine Einstein-Metrik ist, dann definiert $\nabla^g_X+\frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau}iX$ einen flachen Zusammenhang auf dem Bündel L_1, und $\nabla^g_X+(-1)^k\frac{\sigma\sqrt{\tau}}{2}iX$ definiert einen flachen Zusammenhang auf dem Bündel L_2. Wir haben also die Aussage:

Satz 2.15.
Auf einer einfach-zusammenhängenden kompakten semi-Riemannschen Einstein-Mannigfaltigkeit (M^{2k+1},g) mit Sasaki-Struktur (ξ,η,φ) existieren zwei semi-Riemannsche Killing-Spinoren $\psi_1\in\Gamma(L_1)$ und $\psi_2\in\Gamma(L_2)$. Gilt $g(\xi,\xi)=1$, hat ψ_1 die Killing-Zahl $\beta_1=\frac{1}{2}$ und ψ_2 hat die Killing-Zahl $\beta_2=(-1)^k\frac{1}{2}$. Gilt $g(\xi,\xi)=-1$, hat ψ_2 die Killing-Zahl $\beta_1=\frac{1}{2}i$ und ψ_2 hat die Killing-Zahl $\beta_2=(-1)^k\frac{1}{2}i$.

2.2 Killing-Spinoren mit Torsion auf Sasaki-Mannigfaltigkeiten

Wir geben die Krümmungsbedingung dafür an, dass in den komplexen Linienbündeln, in denen im torsionsfreien Fall die Killing-Spinoren liegen, Killing-Spinoren mit Torsion zu einem Parameter s existieren.

Folgender Satz ist eine Verallgemeinerung von Satz 2.13:

Satz 2.16.
Ist $(M^{2k+1}, g, \xi, \eta, \varphi)$ eine Riemannsche metrische Fast-Kontakt-Mannigfaltigkeit mit fundamentaler 2-Form F, mit Spinorbündel Σ und der 3-Form $T = 2\eta \wedge F$, dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) *$(M^{2k+1}, g, \xi, \eta, \varphi)$ ist eine Sasaki-Mannigfaltigkeit.*

(2) *Das Bündel L_1 ist invariant unter dem Zusammenhang $\nabla^g_X - \frac{\varepsilon}{2}(1-4s)X + s(X \lrcorner T)$.*

(3) *Das Bündel L_2 ist invariant unter dem Zusammenhang $\nabla^g_X + \varepsilon\frac{(-1)^k}{2}(1-4s)X + s(X \lrcorner T)$.*

Ist $(M^{2k+1}, g, \xi, \eta, \varphi)$ eine Riemannsche Sasaki-Mannigfaltigkeit mit fundamentaler 2-Form F, mit Spinorbündel Σ und der 3-Form $T = 2\eta \wedge F$, dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) *Es gilt $\mathrm{Ric}^g(X,Y) = (2k + 8s(k-1))\, g(X,Y) - 8s(k-1)\eta(X)\eta(Y)$.*

(2) *Der Zusammenhang $\nabla^g_X - \frac{\varepsilon}{2}(1-4s)X + s(X \lrcorner T)$ auf dem Bündel L_1 ist flach.*

(3) *Der Zusammenhang $\nabla^g_X + \varepsilon\frac{(-1)^k}{2}(1-4s)X + s(X \lrcorner T)$ auf dem Bündel L_2 ist flach.*

Korollar 2.17.
Ist $(M^{2k+1}, g, \xi, \eta, \varphi)$ eine einfach-zusammenhängende Riemannsche Sasaki-Mannigfaltigkeit mit fundamentaler 2-Form F, mit Spinorbündel Σ und der 3-Form $T = 2\eta \wedge F$, für deren Ricci-Tensor

$$\mathrm{Ric}^g(X,Y) = \lambda g(X,Y) - \nu\eta(X)\eta(Y), \quad \lambda, \nu \in \mathbb{R},$$

gilt, dann existieren Schnitte $\psi_1 \in \Gamma(L_1)$ und $\psi_2 \in \Gamma(L_2)$, die Torsions-Killing-Spinoren zum Parameter $s = \frac{\lambda - 2k}{8(k-1)}$ sind.

Beweis. Sei $\psi_1 \in \Gamma(L_1)$. Dann gilt

$$(X \lrcorner T)\psi_1 = -\varepsilon 2X\psi_1 - 2(k-1)i\eta(X)\psi_1 .$$

Der Zusammenhang, den wir auf L_1 betrachten, ist dann

$$\nabla^g_X\psi_1 - \frac{\varepsilon}{2}(1-4s)X\psi_1 + s(X \lrcorner T)\psi_1 = \nabla^g_X\psi_1 - \frac{\varepsilon}{2}X\psi_1 - 2s(k-1)i\eta(X)\psi_1 .$$

Offensichtlich lässt dieser Zusammenhang das Bündel L_1 genau dann invariant, wenn der Zusammenhang $\nabla^g_X - \frac{\varepsilon}{2}(1-4s)X$ dies tut. Nach Satz 2.13 ist das genau dann der Fall, wenn die metrische Fast-Kontakt-Struktur eine Sasaki-Struktur ist.

Sei jetzt (g, ξ, η, φ) eine Sasaki-Struktur. Wir fixieren einen lokalen Schnitt $\psi_1 \in \Gamma(\Sigma)$ konstanter Länge. Nach Voraussetzung existiert eine 1-Form α derart, dass gilt

$$\nabla^g_X\psi_1 - \frac{\varepsilon}{2}(1-4s)X\psi_1 + s(X \lrcorner T)\psi_1 = i\alpha(X)\psi_1 .$$

Mit der gleichen Argumentation wie im Beweis von Satz 2.13 folgt, dass α reellwertig ist.
Für den Krümmungsendomorphismus $\mathcal{R}^1(X,Y)$ des Zusammenhangs $\nabla^g_X - \frac{\varepsilon}{2}(1-4s)X + s(X\lrcorner T)$ gilt dann

$$\mathcal{R}^1(X,Y)\psi_1 = id\alpha(X,Y)\psi_1 \,.$$

Der Riemannsche Krümmungsendomorphismus ist

$$\mathcal{R}^g(X,Y)\psi_1 = \tfrac{1}{4}(YX - XY)\psi_1 + id\alpha(X,Y)\psi_1 + 2s(k-1)id\eta(X,Y)\psi_1 \,.$$

Daraus folgt

$$\mathrm{Ric}^g(X)\psi_1 = 2kX\psi_1 + 8s(k-1)X\psi_1 - \varepsilon 8s(k-1)i\eta(X)\psi_1 - 2i(X\lrcorner d\alpha)\psi_1,$$

woraus sich die Behauptung ergibt. □

Metriken, deren Ricci-Tensor $\mathrm{Ric}^g = \lambda g + \nu\eta\otimes\eta$, $\lambda,\nu\in\mathbb{R}$, erfüllt, werden η-Einstein-Metriken genannt. Es gilt dabei immer $\lambda+\nu = 2k$. Okumura begann die Untersuchung von η-Einstein Metriken mit der Arbeit [Oku62], und Tanno zeigte in [Tan67], dass eine metrische K-Kontakt-Mannigfaltigkeit, deren Metrik η-Einstein mit $\lambda > -2$ ist, durch Reskalieren der Metrik in Richtung des Vektorfeldes ξ zur Einstein-Mannigfaltigkeit wird. In [Tan68] führte Tanno kurz darauf D-homothetische Deformationen der Metrik ein: Bei diesen wird nicht nur in Richtung des Vektorfeldes ξ mit einer reellen Konstanten reskaliert, sondern man multipliziert zusätzlich noch die gesamte Metrik mit derselben Konstanten. Dies sorgt dafür, dass wesentliche Eigenschaften der metrischen Fast-Kontakt-Struktur unter der Deformation erhalten bleiben:

Lemma 2.18.
Auf einer metrischen Fast-Kontakt-Mannigfaltigkeit $(M^{2k+1}, g, \xi, \eta, \varphi)$ sei definiert

$$g_t := tg + (t^2 - t)\eta\otimes\eta, \quad \xi_t := \tfrac{1}{t}\xi, \quad \eta_t := t\eta \,.$$

Dann ist $(M^{2k+1}, g_t, \xi_t, \eta_t, \varphi)$ eine neue metrische Fast-Kontakt-Mannigfaltigkeit, und die Eigenschaft, K-Kontakt oder Sasaki zu sein, vererbt sich von der ursprünglichen auf die deformierte Struktur.

Bezeichnungen für diese Änderung der Metrik sind neben D-homothetischer Deformation auch D-homothetische Transformation, transverse Homothetie oder Tanno-Deformation. Eine Verallgemeinerung dieser D-homothetischen Deformation von Sasaki-Strukturen wurden von Takahashi in [Tak78] beschrieben. Eine neuere und umfassende Arbeit zu η-Einstein-Metriken und Deformationsklassen von Sasaki-Strukturen ist [BGM06].

Wir beschreiben im Folgenden genauer, inwiefern die Beziehung zwischen den Torsions-Killing-Spinoren aus Satz 2.16 und den Killing-Spinoren des torsionsfreien Falls über eine D-homothetische Deformation der Metrik gegeben ist. Dazu benötigen wir das Wissen, wie sich die Krümmung unter einer solchen Deformation verhält. Wir schließen an dieser Stelle ausdrücklich nicht-entartete Metriken mit nicht-positiver Signatur ein:

Lemma 2.19.
Sei $(M^{2k+1}, g, \xi, \varphi, \eta)$ eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einer metrischen K-Kontakt-Struktur (Sasaki-Struktur) und

$$g_t := t\,g + (t^2 - t)\eta\otimes\eta, \quad t \neq 0$$

eine Deformation der Metrik. Dann ist $(M^{2k+1}, g_t, \xi_t, \varphi, \eta_t)$ *mit* $\xi_t := \frac{1}{t}\xi$ *und* $\eta_t := t\eta$ *wieder eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit mit K-Kontakt-Struktur (Sasaki-Struktur). Der Levi-Civita-Zusammenhang der Metrik* g_t *ist*

$$\nabla^{g_t}_X Y = \nabla^g_X Y + (1-t)\left(\eta(X)\varphi(Y) + \eta(Y)\varphi(X)\right) .$$

Für den Ricci-Tensor gilt

$$\mathrm{Ric}^{g_t}(X,Y) = \mathrm{Ric}^g(X,Y) - 2(t-1)g(X,Y) + 2(t-1)(kt+k+1)\eta(X)\eta(Y) .$$

Die Skalarkrümmung ist

$$\mathrm{Scal}^{g_t} = \tfrac{1}{t}\mathrm{Scal}^g + 2k\left(\tfrac{1}{t} - 1\right) .$$

Insbesondere: Ist g *eine semi-Riemannsche Einstein-Metrik auf einer Sasaki-Mannigfaltigkeit, dann ist* g_t *eine semi-Riemmansche* η*-Einstein-Metrik und es gilt*

$$\mathrm{Ric}^{g_t}(X,Y) = 2\left((k+1)\tfrac{1}{t} - 1\right) g_t(X,Y) + 2(k+1)\left(1 - \tfrac{1}{t}\right)\eta_t(X)\eta_t(Y) .$$

Beweis. Der Zusammenhang $\nabla^g + (1-t)(\eta\otimes\varphi + \eta\otimes\varphi)$ ist torsionsfrei, da seine Differenz zum torsionsfreien Zusammenhang ∇^g ein symmetrischer Tensor ist. Um zu sehen, dass der angegebene Zusammenhang auch metrisch bezüglich g_t ist, leiten wir mit ihm g_t kovariant ab. Hierfür verwenden wir in den nächsten Zeilen die Schreibweise

$$[\nabla^g_X + (1-t)\left(\eta(X)\varphi + \eta\varphi(X)\right), tg + (t^2 - t)\eta\otimes\eta] .$$

Ausnutzung der Linearität beider Argumente liefert für den Ausdruck diese Summanden:

$$\begin{aligned}
[\nabla^g_X, tg] &= t\nabla^g_X g = 0\\
\left[\nabla^g_X, (t^2-t)\eta\otimes\eta\right](Y,Z) &= (t^2-t)(((\nabla^g_X\eta)\otimes\eta)(Y,Z) + (\eta\otimes\nabla^g_X\eta)(Y,Z))\\
&= (t-t^2)(\eta(Z)g(\varphi(X),Y) + \eta(Y)g(\varphi(X),Z))\\
[(1-t)(\eta(X)\varphi + \eta\varphi(X)), tg](Y,Z) &= (t^2-t)g(\eta(X)\varphi(Y) + \eta(Y)\varphi(X), Z)\\
&\quad +(t^2-t)g(Y, \eta(X)\varphi(Z) + \eta(Z)\varphi(X))\\
&= (t^2-t)(\eta(Z)g(\varphi(X),Y) + \eta(Y)g(\varphi(X),Z))\\
\left[(1-t)(\eta(X)\varphi + \eta\varphi(X)), (t^2-t)\eta\otimes\eta\right] &= 0, \quad \text{da} \quad \eta(\varphi) = 0 .
\end{aligned}$$

Also ist die Metrik g_t tatsächlich parallel, und der angegebene torsionsfreie Zusammenhang ist ihr Levi-Civita-Zusammenhang.
Wir beweisen den Ausdruck für den Ricci-Tensor. Seien zuerst allgemein $\widetilde{\nabla}$ und ∇ zwei kovariante Ableitungen. Man prüft dann, dass die Beziehung zwischen den Krümmungstensoren $\widetilde{\mathcal{R}}$ und $\mathcal{R}$ sich durch die Differenz $L := \widetilde{\nabla} - \nabla$ und durch die Torsion T von ∇ wie folgt ausdrückt:

$$\widetilde{\mathcal{R}}(X,Y)Z = \mathcal{R}(X,Y)Z + (\nabla_X L)(Y,Z) - (\nabla_Y L)(X,Z) + [L_X, L_Y](Z) + L(T(X,Y),Z) .$$

Wir wenden dies an für $L(X,Y) = (1-t)\left(\eta(X)\varphi(Y) + \eta(Y)\varphi(X)\right)$. In unserem Fall ist $T = 0$ und die verbleibenden einzelnen Terme sind:

$$\begin{aligned}
(\nabla_X L)(Y,Z) &= (1-t)\left(F(X,Y)\varphi(Z) + (\eta(Y)g(X,Z) + \eta(Z)g(X,Y))\xi - 2\eta(Z)\eta(Y)X + F(X,Z)\varphi(Y)\right)\\
(\nabla_Y L)(X,Z) &= (1-t)\left(F(Y,X)\varphi(Z) + (\eta(X)g(Y,Z) + \eta(Z)g(X,Y))\xi - 2\eta(Z)\eta(X)Y + F(Y,Z)\varphi(X)\right)\\
[L_X, L_Y](Z) &= (1-t)^2\eta(Z)(\eta(Y)X - \eta(X)Y) .
\end{aligned}$$

Wir erhalten insgesamt

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^{g_t}(X,Y)Z - \mathcal{R}^g(X,Y)Z &= (1-t)\left(2F(X,Y)\varphi(Z) + F(X,Z)\varphi(Y) - F(Y,Z)\varphi(X)\right)\\
&\quad +(1-t)\left(\eta(Y)g(X,Z) - \eta(X)g(Y,Z)\right)\xi\\
&\quad +(1-t^2)\eta(Z)\left(\eta(X)Y - \eta(Y)X\right) .
\end{aligned}$$

Sei e_j ein Orthonormalreper bezüglich g. Da die Spurbildung unabhängig von der Metrik ist, haben wir

$$\mathrm{Ric}^{g_t}(X,Y) = \mathrm{Ric}^g(X,Y) + \sum_{j=1}^{2k+1} g(\mathcal{R}^{g_t}(e_j,X)Y - \mathcal{R}^g(e_j,X)Y, e_j)\,.$$

Wir berechnen den letzen Term weiter. Mit dem schon vorhandenen Ausdruck für die Differenz der Krümmungstensoren erhalten wir als einzelne Summanden:

$$\begin{aligned}
2(1-t)\sum F(e_j,X)g(\varphi(Y),e_j) &= 2(1-t)\,(g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y)) \\
(1-t)\sum F(e_j,Y)g(\varphi(X),e_j) &= (1-t)\,(g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y)) \\
-(1-t)\sum F(X,Y)g(\varphi(e_j),e_j) &= 0 \\
(1-t)\sum \eta(X)g(e_j,Y)g(\xi,e_j) &= (1-t)\eta(X)\eta(Y) \\
-(1-t)\sum \eta(e_j)g(X,Y)g(\xi,e_j) &= -(1-t)g(X,Y) \\
(1-t^2)\eta(Y)\sum g(\eta(e_j)X-\eta(X)e_j,e_j) &= -2k(1-t^2)\eta(X)\eta(Y)\,.
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt die behauptete Formel für Ric^{g_t},

$$\mathrm{Ric}^{g_t}(X,Y) = \mathrm{Ric}^g(X,Y) - 2(t-1)g(X,Y) + 2(t-1)(kt+k+1)\eta(X)\eta(Y)\,.$$

Mit ihr lässt sich die Beziehung zwischen Scal^{g_t} und Scal^g berechnen: Sei $e_j = e_j(t)$ ein ON-Reper bezüglich g_t mit $e_{2k+1} = \frac{1}{t}\xi$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_j \mathrm{Ric}^g(e_j,e_j) &= \tfrac{1}{t}\mathrm{Scal}^g + \left(\tfrac{1}{t^2}-\tfrac{1}{t}\right)\mathrm{Ric}^g(\xi,\xi) = \tfrac{1}{t}\mathrm{Scal}^g + \left(\tfrac{1}{t^2}-\tfrac{1}{t}\right)2k, \\
-2(t-1)\textstyle\sum_j g(e_j,e_j) &= 4k\left(\tfrac{1}{t}-1\right) + 2\left(\tfrac{1}{t^2}-\tfrac{1}{t}\right), \\
2(t-1)(kt+k+1)\textstyle\sum_j \eta(e_j)\eta(e_j) &= 2\left(\tfrac{1}{t}-\tfrac{1}{t^2}\right),
\end{aligned}$$

und es folgt $\mathrm{Scal}^{g_t} = \frac{1}{t}\mathrm{Scal}^g + 2k\left(\frac{1}{t}-1\right)$. □

Mit der eben bewiesenen Beziehung für die Ricci-Tensoren Ric^{g_t} und Ric^g lässt sich zur Krümmungsbedingung $\mathrm{Ric}^g = (2k+8s(k-1))\,g - 8s(k-1)\eta\otimes\eta$ aus Satz 2.16 Folgendes sagen:

- Ist g eine Riemannsche Einstein-Metrik, dann erfüllt für $t > 0$ die Riemannsche Mannigfaltigkeit (M^{2k+1}, g_t) die Krümmungsbedingung aus Satz 2.16 für den Parameter $s = \frac{k+1}{4(k-1)}\left(\frac{1}{t}-1\right)$.

- Ist g eine semi-Riemannsche Einstein-Metrik mit Lorentz-Signatur $g(\xi,\xi)=1$, $g(X,X)<0$ für $0 \neq X \perp \xi$, dann erfüllt für $t < 0$ die Riemannsche Mannigfaltigkeit (M^{2k+1}, g_t) die Krümmungsbedingung aus Satz 2.16 für den Parameter $s = \frac{k+1}{4(k-1)}\left(\frac{1}{t}-1\right)$.

- Umgekehrt: Erfüllt die Riemannsche Mannigfaltigkeit (M^{2k+1}, g_t) die Krümmungsbedingung aus Satz 2.16 für den Parameter s, dann ist g_t für $t = \frac{4(k-1)}{(k+1}s+1$ eine Einstein-Metrik. Dabei erhalten wir für $s > -\frac{1}{4}\frac{k+1}{k-1}$ eine Riemannsche Einstein-Metrik, und für $s < -\frac{1}{4}\frac{k+1}{k-1}$ erhalten wir eine Lorentz-Metrik derart, wie sie im letzten Punkt bereits beschrieben wurde.

Im kommenden Abschnitt geben wir ein Beispiel für den Fall $s = -\frac{1}{4}\frac{k+1}{k-1}$, und zwar existieren auf der fünfdimensionalen Heisenberg-Gruppe H^5 Torsions-Killing-Spinoren zum Parameter $s = -\frac{3}{4}$.

Wir beschreiben jetzt die Beziehung zwischen den Riemannschen Killing-Spinoren auf einer Einstein-Sasaki-Mannigfaltigkeit und den Torsions-Killing-Spinoren zum Parameter $s > -\frac{1}{4}\frac{k+1}{k-1}$ auf derselben Mannigfaltigkeit, die wir nach einer D-homothetischen Deformation der Metrik mit dem Parameter t erhalten, auf andere Weise, und zwar auf Ebene der Killing-Gleichung.

Lemma 2.20.
Sei $(M^{2k+1}, g, \xi, \eta, \varphi)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einer metrischen K-Kontakt-Struktur und

$$g_t := t\,g + (t^2 - t)\eta \otimes \eta, \quad t > 0$$

eine Deformation der Metrik. Wir betrachten die Riemannsche Mannigfaltigkeit $(M^{2k+1}, g_t, \xi_t, \eta_t, \varphi)$ mit der neuen K-Kontakt-Struktur $\xi_t := \frac{1}{t}\xi$ und $\eta_t := t\eta$. Im Tangentialbündel haben wir dann die Isometrie

$$j : (TM, g) \longrightarrow (TM, g_t), \quad j(X) = \tfrac{1}{\sqrt{t}}X + \left(\tfrac{1}{t} - \tfrac{1}{\sqrt{t}}\right)\eta(X)\xi\,.$$

Wenn M^{2k+1} eine Spin-Mannigfaltigkeit ist, dann existiert zum Spinorbündel Σ von (M^{2k+1}, g) ein Spinor-Bündel $\widetilde{\Sigma}$ von (M^{2k+1}, g_t) und eine isometrische Identifizierung $\sim\colon \Sigma \longrightarrow \widetilde{\Sigma}$ derart, dass für alle $X \in TM$ und für alle $\psi \in \Sigma$ gilt

$$j(X)\widetilde{\psi} = \widetilde{X\psi}\,.$$

Der Lift des Levi-Civita-Zusammenhangs ∇^{g_t} ins Spinor-Bündel $\widetilde{\Sigma}$ ist

$$\nabla^{g_t}_X \widetilde{\psi} = \widetilde{\nabla^g_X \psi} + \tfrac{1}{2}a_X \widetilde{\psi},$$

wobei für ein $X \in TM$ die 2-Form a_X mittels der fundamentalen 2-Form $F := g(\cdot, \varphi\cdot)$ definiert ist durch

$$a_X := (t^2 - t)\eta(X)F + (t^2 - t\sqrt{t})\eta \wedge (X \lrcorner F)\,.$$

Beweis. Der Levi-Civita-Zusammenhang im Tangentialbündel (TM, g) ist nach 2.19 gegeben durch

$$\nabla^g + (1 - t)\,(\eta \otimes \varphi + \eta \otimes \varphi)\,.$$

Durch die Isometrie $j : (TM, g) \longrightarrow (TM, g_t)$ erhalten wir aus ∇^g eine neue kovariante Ableitung, die nun metrisch bezüglich g_t ist, und zwar die kovariante Ableitung $j \circ \nabla^g \circ j^{-1}$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
j(\nabla^g_X(j^{-1}(Y))) &= j(\nabla^g_X(\sqrt{t}Y + (t - \sqrt{t})\eta(Y)\xi)) \\
&= \sqrt{t}j(\nabla^g_X Y) + (t - \sqrt{t})j(\nabla^g_X(\eta(Y)\xi)) \\
&= \nabla^g_X Y + \left(\tfrac{1}{\sqrt{t}} - 1\right)\eta(\nabla^g_X Y)\xi + (t - \sqrt{t})j(X(\eta(Y))\xi + \eta(Y)\nabla^g_X \xi) \\
&= \nabla^g_X Y + \left(\tfrac{1}{\sqrt{t}} - 1\right)(g(\varphi(X), Y) + X(\eta(Y)))\xi + \left(1 - \tfrac{1}{\sqrt{t}}\right)X(\eta(Y))\xi + (1 - \sqrt{t})\eta(Y)\varphi(X) \\
&= \nabla^g_X Y + \left(\tfrac{1}{\sqrt{t}} - 1\right)g(Y, \varphi(X))\xi + (1 - \sqrt{t})\eta(Y)\varphi(X) \\
&= \nabla^g_X Y + \left(1 - \tfrac{1}{\sqrt{t}}\right)F(X, Y)\xi + (1 - \sqrt{t})\eta(Y)\varphi(X)\,.
\end{aligned}$$

Sei jetzt (M^{2k+1}, g) eine Spin-Mannigfaltigkeit mit Spinor-Bündel Σ. Dann besitzt (M^{2k+1}, g_t) ein Spinor-Bündel $\widetilde{\Sigma}$, das als Vektorbündel mit Σ übereinstimmt, aber dessen Clifford-Multiplikation durch die neue Metrik g_t bestimmt ist. Wir identifizieren diese beiden Spinorbündel miteinander durch die Isometrie $\sim\colon\ \Sigma \longrightarrow \widetilde{\Sigma}$. Es gilt $j(X)\widetilde{\psi} = \widetilde{X\psi}$. Wir zeigen auch im Folgenden die Clifford-Multiplikation nicht durch Punkte an – eine Verwechslung der Clifford-Multiplikation des Bündels Σ mit der Clifford-Multiplikation des Bündels $\widetilde{\Sigma}$ ist nicht möglich, da wir Elemente des Bündels $\widetilde{\Sigma}$ immer mit einer Tilde versehen. Liften wir $j \circ \nabla^g \circ j^{-1}$ ins Spinor-Bündel $\widetilde{\Sigma}$, erhalten wir als kovariante Ableitung von $\widetilde{\psi} \in \Gamma(\widetilde{\Sigma})$ in Richtung X das Spinorfeld $\widetilde{\nabla^g_X \psi}$. Die Differenz der beiden Zusammenhänge $j \circ \nabla^g \circ j^{-1}$ und ∇^{g_t} wird für festes X durch eine 2-Form a_X beschrieben:

$$\begin{aligned} a_X(Y,Z) &:= g_t(\nabla^{g_t}_X Y - j(\nabla^g_X(j^{-1}(Y))), Z) \\ &= g_t((1-t)\eta(X)\varphi(Y) + (\sqrt{t}-t)\eta(Y)\varphi(X) + \left(\tfrac{1}{\sqrt{t}} - 1\right) F(X,Y)\xi, Z) \\ &= (t^2-t)\eta(X)F(Y,Z) + (t^2 - t\sqrt{t})\eta(Y)F(X,Z) + (t\sqrt{t} - t^2)\eta(Z)F(X,Y), \end{aligned}$$

also $a_X = (t^2-t)\eta(X)F + (t^2 - t\sqrt{t})\eta \wedge (X \lrcorner F)$. Da das Differential der Überlagerungsabbildung $\mathrm{Spin}(n) \longrightarrow \mathrm{SO}(n)$ die Abbildung $e_j e_l \mapsto 2E_{jl}$ ist, erhalten wir für die Wirkung von a_X auf Spinoren den Faktor 1/2, und der Lift des Levi-Civita-Zusammenhangs ∇^{g_t} in das Spinor-Bündel ist gegeben durch

$$\nabla^{g_t}_X \widetilde{\psi} = \widetilde{\nabla^g_X \psi} + \tfrac{1}{2} a_X \widetilde{\psi}\,.$$

□

Bevor wir zur Formulierung und dem Beweis des Satzes kommen, fassen wir noch einige wiederholt benötigte Rechenergebnisse in einem Lemma zusammen. Es handelt sich dabei zum Teil um eine Verallgemeinerung von Lemma 2.12 für das Spinorbündel $\widetilde{\Sigma}$ einer deformierten Metrik g_t. Der Wert von $\varepsilon \in \{+1, -1\}$ sei wie in Lemma 2.12 bestimmt.

Lemma 2.21.
Sei $(M^{2k+1}, g, \xi, \eta, \varphi)$ eine metrische Fast-Kontakt-Struktur. Sei $(M^{2k+1}, g_t, \xi_t, \eta_t, \varphi)$ für $t > 0$ die deformierte metrische Fast-Kontakt-Struktur mit Spinorbündel $\widetilde{\Sigma}$, wie sie durch eine transverse Homothetie entsteht. Wie in Lemma 2.12 seien

$$L_1(\widetilde{\Sigma}) := \{\, \widetilde{\psi} \in \widetilde{\Sigma} \mid \varphi(X)\widetilde{\psi} = -iX\widetilde{\psi} \quad \forall X \perp \xi_t \,\}, \quad L_2(\widetilde{\Sigma}) := \{\, \widetilde{\psi} \in \widetilde{\Sigma} \mid \varphi(X)\widetilde{\psi} = iX\widetilde{\psi} \quad \forall X \perp \xi_t \,\}$$

zwei komplexe eindimensionale Vektorbündel über M^{2k+1}.
Sei $F_t := g_t(\cdot, \varphi\cdot)$ die fundamentale 2-Form der deformierten Struktur, sei $T^{g_t} := 2\eta_t \wedge F_t$ und sei $a_X := (t^2-t)\eta(X)F + (t^2 - t\sqrt{t})\eta \wedge (X \lrcorner F)$. Dann gilt für alle $\widetilde{\psi}_1 \in L_1$ und für alle $\widetilde{\psi}_2 \in L_2$:

$$\begin{aligned} &\xi_t\widetilde{\psi}_1 = \varepsilon i\widetilde{\psi}_1, && \varphi(X)\widetilde{\psi}_1 = -iX\widetilde{\psi}_1 - \varepsilon t\eta(X)\widetilde{\psi}_1 \\ &F_t\widetilde{\psi}_1 = -ki\widetilde{\psi}_1, && (X \lrcorner F_t)\widetilde{\psi}_1 = iX\widetilde{\psi}_1 + \varepsilon t\eta(X)\widetilde{\psi}_1 \\ &T^{g_t}\widetilde{\psi}_1 = \varepsilon 2k\widetilde{\psi}_1, && (X \lrcorner T^{g_t})\widetilde{\psi}_1 = -\varepsilon 2X\widetilde{\psi}_1 - 2(k-1)ti\eta(X)\widetilde{\psi}_1 \\ &a_X\widetilde{\psi}_1 = \varepsilon(1 - 1/\sqrt{t})X\widetilde{\psi}_1 + (k(1-t) - t - \sqrt{t})i\eta(X)\widetilde{\psi}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\xi_t\widetilde{\psi}_2 = \varepsilon(-1)^k i\widetilde{\psi}_2, && \varphi(X)\widetilde{\psi}_2 = iX\widetilde{\psi}_2 + \varepsilon(-1)^k t\eta(X)\widetilde{\psi}_2 \\ &F_t\widetilde{\psi}_2 = ki\widetilde{\psi}_2, && (X \lrcorner F_t)\widetilde{\psi}_2 = -iX\widetilde{\psi}_2 - \varepsilon(-1)^k t\eta(X)\widetilde{\psi}_2 \\ &T^{g_t}\widetilde{\psi}_2 = -\varepsilon(-1)^k 2k\widetilde{\psi}_2, && (X \lrcorner T^{g_t})\widetilde{\psi}_2 = \varepsilon(-1)^k 2X\widetilde{\psi}_2 + 2(k-1)ti\eta(X)\widetilde{\psi}_2 \\ &a_X\widetilde{\psi}_2 = -\varepsilon(-1)^k(1 - 1/\sqrt{t})X\widetilde{\psi}_2 - (k(1-t) - t - \sqrt{t})i\eta(X)\widetilde{\psi}_2\,. \end{aligned}$$

Beweis. Wir geben die Rechnungen für $\widetilde{\psi}_1 \in L_1$ an. Für die Wirkung von $\varphi(X)$ gilt

$$\varphi(X)\widetilde{\psi}_1 = -iX\widetilde{\psi}_1 + i\eta_t(X)\xi_t\widetilde{\psi}_1 = -iX\widetilde{\psi}_1 - \varepsilon\eta_t(X)\widetilde{\psi}_1 = -iX\widetilde{\psi}_1 - \varepsilon t\eta(X)\widetilde{\psi}_1\,.$$

Die fundamentale 2-Form $F_t = g_t(\cdot, \varphi\cdot)$ wirkt durch

$$\begin{aligned} F_t\widetilde{\psi}_1 &= \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{j,l} g_t(e_j, \varphi(e_l))e_j e_l\widetilde{\psi}_1 = \tfrac{1}{2}\sum_j \varphi(e_j)e_j\widetilde{\psi}_1 \\ &= -\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_j e_j\varphi(e_j)\widetilde{\psi}_1 = -\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{2k} e_j(-ie_j)\widetilde{\psi}_1 \\ &= -ki\widetilde{\psi}_1\,. \end{aligned}$$

Die Wirkung von $X \lrcorner F_t$ ist für beliebiges $X \in TM$:

$$(X \lrcorner F_t)\widetilde{\psi}_1 = \sum_j g_t(X, \varphi(e_j))e_j\widetilde{\psi}_1 = -\sum_j g_t(\varphi(X), e_j)e_j\widetilde{\psi}_1 = -\varphi(X)\widetilde{\psi}_1 = iX\widetilde{\psi}_1 + \varepsilon t\eta(X)\widetilde{\psi}_1 \,.$$

Die 3-Form T^{g_t} wirkt durch $\quad T^{g_t}\widetilde{\psi}_1 = 2\eta_t \wedge F_t\widetilde{\psi}_1 = 2\xi_t F_t\widetilde{\psi}_1 = \varepsilon 2k\widetilde{\psi}_1$.

Eine 2-Form $X \lrcorner T^{g_t}$ wirkt durch

$$\begin{aligned}
(X \lrcorner T^{g_t})\widetilde{\psi}_1 &= 2\eta_t(X)F_t\widetilde{\psi}_1 - 2\eta_t \wedge (X \lrcorner F_t)\widetilde{\psi}_1 \\
&= -2kti\eta(X)\widetilde{\psi}_1 - 2\xi_t(iX + \varepsilon t\eta(X))\widetilde{\psi}_1 \\
&= -2kti\eta(X)\widetilde{\psi}_1 + 2iX\xi_t\widetilde{\psi}_1 + 4ti\eta(X)\widetilde{\psi}_1 - 2ti\eta(X))\widetilde{\psi}_1 \\
&= -\varepsilon 2X\widetilde{\psi}_1 - 2(k-1)ti\eta(X)\widetilde{\psi}_1 \,.
\end{aligned}$$

Die Wirkung einer 2-Form a_X ist

$$\begin{aligned}
a_X\widetilde{\psi}_1 &= (t^2 - t)\eta(X)F\widetilde{\psi}_1 + (t^2 - t\sqrt{t})\eta \wedge (X \lrcorner F)\widetilde{\psi}_1 \\
&= (t-1)\eta(X)F_t\widetilde{\psi}_1 + (1 - 1/\sqrt{t})\eta_t \wedge (X \lrcorner F_t)\widetilde{\psi}_1 \\
&= k(1-t)i\eta(X)\widetilde{\psi}_1 - (1 - 1/\sqrt{t})\xi_t\varphi(X)\widetilde{\psi}_1 \\
&= k(1-t)i\eta(X)\widetilde{\psi}_1 - \varepsilon(1 - 1/\sqrt{t})i(iX\widetilde{\psi}_1 + \varepsilon t\eta(X)\widetilde{\psi}_1) \\
&= \varepsilon(1 - 1/\sqrt{t})X\widetilde{\psi}_1 + (k(1-t) - t - \sqrt{t})i\eta(X)\widetilde{\psi}_1 \,.
\end{aligned}$$

Die Wirkungen auf den Spinor $\widetilde{\psi}_2$ berechnen sich analog. □

Mit dieser Vorbereitung können wir den zentralen Satz beweisen. Es sei noch einmal an die Bezeichnungen erinnert: Die beiden komplexen eindimensionalen Vektorbündel über M^{2k+1} sind

$$L_1(\Sigma) := \{\, \psi \in \Sigma \,|\, \varphi(X)\psi = -iX\psi \;\forall\, X \perp \xi \,\}, \quad L_2(\Sigma) := \{\, \psi \in \Sigma \,|\, \varphi(X)\psi = iX\psi \;\forall\, X \perp \xi \,\} \,.$$

Die Zahl $\varepsilon \in \{+1, -1\}$ ist so gewählt, dass, wenn $(e_1, \varphi(e_1), ..., e_k, \varphi(e_k), \xi)$ ein lokales Orthonormalreper ist, für alle $\psi \in \Sigma$ gilt $e_1\varphi(e_1)e_2\varphi(e_2)...e_k\varphi(e_k)\xi\psi = \varepsilon i^{k+1}\psi$.

Satz 2.22.
Sei $(M^{2k+1}, g, \xi, \eta, \varphi)$ eine Riemannsche Einstein-Sasaki-Mannigfaltigkeit der Dimension $2k+1$ mit Spinorbündel Σ und Riemannschen Killing-Spinoren $\psi_1 \in \Gamma(L_1(\Sigma))$ und $\psi_2 \in \Gamma(L_2(\Sigma))$. Dann hat auf der Riemannschen Sasaki-Mannigfaltigkeit $(M, g_t, \varphi, \xi_t, \eta_t)$ der Zusammenhang

$$\nabla^s_X = \nabla^{g_t}_X + s(X \lrcorner T^{g_t}), \quad T^{g_t} = \eta_t \wedge d\eta_t,$$

für $s = \frac{k+1}{4(k-1)}\left(\frac{1}{t} - 1\right)$ die Spinoren $\widetilde{\psi}_1 \in \Gamma(L_1(\widetilde{\Sigma}))$ und $\widetilde{\psi}_2 \in \Gamma(L_2(\widetilde{\Sigma}))$ als Torsions-Killing-Spinoren zu den Killing-Zahlen

$$\beta_1 = \tfrac{\varepsilon}{2}\tfrac{2kt-(k+1)}{t(k-1)} \quad \text{bzw.} \quad \beta_2 = -\varepsilon\tfrac{(-1)^k}{2}\tfrac{2kt-(k+1)}{t(k-1)} \,.$$

Beweis. Der Zusammenhang, den wir auf Torsions-Killing-Spinoren untersuchen wollen, ist

$$\begin{aligned}
\nabla^s_X\widetilde{\psi} &= \nabla^{g_t}_X\widetilde{\psi} + s(X \lrcorner T^{g_t})\widetilde{\psi} \\
&= \widetilde{\nabla^g_X\psi} + \tfrac{1}{2}a_X\widetilde{\psi} + 2st^2 X \lrcorner(\eta \wedge F)\widetilde{\psi} \,.
\end{aligned}$$

Nach Lemma 2.20 und den Rechnungen von Lemma 2.21 ist der Levi-Civita-Zusammenhang ∇^{g_t}, ausgewertet auf dem Spinor $\widetilde{\psi}_1$ zum Riemannschen Killing-Spinor ψ_1, gegeben durch

$$\begin{aligned}
\nabla^{g_t}_X\widetilde{\psi}_1 &= \widetilde{\nabla^g_X\psi_1} + \tfrac{1}{2}a_X\widetilde{\psi}_1 \\
&= \tfrac{\varepsilon}{2}j(X)\widetilde{\psi}_1 + \tfrac{1}{2}(k(1-t)-t+\sqrt{t})i\eta(X)\widetilde{\psi}_1 + \tfrac{\varepsilon}{2}\left(1-\tfrac{1}{\sqrt{t}}\right)X\widetilde{\psi}_1 \\
&= \tfrac{\varepsilon}{2}\left(\tfrac{1}{\sqrt{t}}X + \left(\tfrac{1}{t}-\tfrac{1}{\sqrt{t}}\right)\eta(X)\xi\right)\widetilde{\psi}_1 + \tfrac{1}{2}(k(1-t)-t+\sqrt{t})i\eta(X)\widetilde{\psi}_1 + \tfrac{\varepsilon}{2}\left(1-\tfrac{1}{\sqrt{t}}\right)X\widetilde{\psi}_1 \\
&= \tfrac{\varepsilon}{2}X\widetilde{\psi}_1 + \tfrac{\varepsilon}{2}(1-\sqrt{t})\eta(X)\varepsilon i\widetilde{\psi}_1 + \tfrac{1}{2}(k(1-t)-t+\sqrt{t})i\eta(X)\widetilde{\psi}_1 \\
&= \tfrac{\varepsilon}{2}X\widetilde{\psi}_1 + \tfrac{1}{2}(1-t)(k+1)i\eta(X)\widetilde{\psi}_1\,.
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich für $\nabla^s_X\widetilde{\psi}_1 = \nabla^{g_t}_X\widetilde{\psi}_1 + sX\lrcorner T^{g_t}\widetilde{\psi}_1$:

$$\nabla^s_X\widetilde{\psi}_1 = \tfrac{\varepsilon}{2}(1-4s)X\widetilde{\psi}_1 + \tfrac{1}{2}((1-t)(k+1)-4st(k-1))i\eta(X)\widetilde{\psi}_1\,.$$

Diese Gleichung wird zur Killing-Gleichung genau dann, wenn zwischen den Parametern t und s diese Beziehung besteht:

$$s = \tfrac{k+1}{4(k-1)}\left(\tfrac{1}{t}-1\right)\,.$$

□

Wir weisen auf frühere Ergebnisse hin, die dem eben bewiesenen Satz ähnlich sind:

- In der Arbeit [FrKi00] haben Th. Friedrich und E. C. Kim quasi-Killing-Spinoren auf Sasaki-Mannigfaltigkeiten eingeführt. Deren definierende Gleichung ist

  $$\nabla^g_X\psi = aX\psi + b\eta(X)\xi\psi\,,$$

  wobei a und b reelle Zahlen sind. Die beiden Autoren geben in [FrKi00, Satz 6.9] Integrabilitätsbedingungen für die Existenz von quasi-Killing-Spinoren vom Typ $a = \pm\frac{1}{2}$ in gewissen Bündeln an, die den hier definierten Bündeln L_1 und L_2 entsprechen, und in [FrKi00, Satz 6.14] konstruieren sie durch eine D-homothetische Deformation g_t einer Einstein-Sasaki-Metrik g Beispiele von quasi-Killing-Spinoren vom Typ $a = \pm\frac{1}{2}$, $b = \pm\frac{1}{2}(k+1)(t-1)$. Aus dem Beweis von Satz 2.22 ist zu sehen, dass die so konstruierten quasi-Killing-Spinoren auf Sasaki-Mannigfaltigkeiten genau die Torsions-Killing-Spinoren des Satzes sind. Die entscheidende Gleichung ist

  $$\nabla^{g_t}_X\widetilde{\psi}_1 = \tfrac{\varepsilon}{2}X\widetilde{\psi}_1 + \tfrac{\varepsilon}{2}(1-t)(k+1)\eta(X)\xi\widetilde{\psi}_1\,.$$

- Die Krümmungsbedingung von Satz 2.16 entspricht für $s = 1/4$ den Ergebnissen von [FrIv02, Satz 9.2] für die Existenz von ∇^c-parallelen Spinoren in den Bündeln L_1 und L_2 einer Sasaki-Mannigfaltigkeit.

Wir machen weitere Bemerkungen zu Satz 2.16 und 2.22:

- In der Twistor-Abschätzung aus Korollar 1.9 tritt die Gleichheit auf jeden Fall ein, wenn Torsions-Killing-Spinoren zum Parameter $s_{\mathrm{tw}} = \frac{n-1}{4(n-3)} = \frac{k}{4(k-1)}$ in einem Bündel Σ_μ existieren. Aus Satz 2.22 erhalten wir also in jeder ungeraden Dimension Geometrien, in denen der Gleichheitsfall der Abschätzung in einem Bündel Σ_μ realisiert wird. Eine ausführlichere Anwendung unserer Ergebnisse auf die Eigenwertabschätzungen des Operators $\not{D}$ ist in Kapitel 4 zu finden.

- In Abschnitt 3.2 geben wir auf der fünfdimensionalen Heisenberg-Gruppe H^5 ein Beispiel von Torsions-Killing-Spinoren zum Parameter $s = -\frac{1}{4}\frac{k+1}{k-1} = -\frac{3}{4}$ an. Insbesondere ist zu sehen, dass hier durch eine D-homothetische Deformation der Metrik keine Torsions-Killing-Spinoren zu einem anderen Parameter s entstehen.

3 Die Killing-Gleichung mit Torsion in Dimension fünf

Sei (M^5, g, Σ) eine fünfdimensionale Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit und ∇^c ein metrischer Zusammenhang mit ∇^c-paralleler antisymmetrischer Torsion $T \neq 0$. In diesem Kapitel beschreiben wir Torsions-Killing-Spinoren auf $(M^5, g, \Sigma, \nabla^c)$, die zugleich Eigenspinoren der Torsion T sind, d. h. wir betrachten Lösungen von

$$T\psi = \mu\psi, \quad \mu \in \mathbb{R}, \qquad \nabla^s_X\psi := \nabla^g_X\psi + s(X \lrcorner T)\psi = \beta X\psi, \quad s, \beta \in \mathbb{R}\,.$$

Über die algebraische Gestalt der 3-Form T machen wir keine weiteren Voraussetzungen.

In Abschnitt 3.1 geben wir eine allgemeine Charakterisierung solcher Torsions-Killing-Spinoren, und in Abschnitt 3.2 beschreiben wir drei natürlich-reduktive Räume explizit, die in jener Charakterisierung eine besondere Stellung einnehmen.

3.1 Charakterisierung der Killing-Spinoren mit Torsion in fünf Dimensionen

Entscheidend für die Behandlung des fünfdimensionalen Falls ist, dass $\mathrm{Spin}(5)$ transitiv auf die Sphäre im Spinor-Vektorraum Δ_5 wirkt. Dies erlaubt uns, einem beliebigen Spinor $\psi \in \Sigma$ für $\delta \in \{+1, -1\}$ jeweils eine metrische Fast-Kontakt-Struktur (ξ, φ) zuzuordnen durch die Forderung

$$\xi\psi = i\psi, \quad \varphi(X)\psi = -\delta iX\psi \quad \forall X \perp \xi\,.$$

Wenn wir im Folgenden einen Torsions-Killing-Spinor ψ_o betrachten, dann bezeichnet (ξ, φ) immer die von ihm auf diese Weise definierte metrische Fast-Kontakt-Struktur. Die zu ξ duale 1-Form ist $\eta := g(\xi, \cdot)$. Die zum $(1,1)$-Tensor φ gehörige fundamentale 2-Form ist $F := g(\cdot, \varphi\cdot)$. Wichtig für unsere Untersuchung wird die durch $\omega := \xi \lrcorner T$ definierte 2-Form. Mit ω_1 bezeichnen wir den zu ihr gehörenden $(1,1)$-Tensor, $\omega(X, Y) =: g(X, \omega_1(Y))$.
Zuerst geben wir ein grundlegendes Lemma:

Lemma 3.1.
Es gilt

- $T = \eta \wedge \omega, \quad \sigma_T = \frac{1}{2}\omega \wedge \omega, \quad \omega\psi = -i\mu\psi$
- $\nabla^g_X\xi = -2\beta\delta\varphi(X)\psi - 2s\omega_1(X)$
- $(\nabla^g_X\eta) \wedge \omega = \frac{1}{2}(X \lrcorner \omega) \wedge \omega\,.$

Beweis. Wir betrachten die 3-Form $\rho := T - \eta \wedge \omega$. Es gilt $\xi \lrcorner \rho = 0$ und, falls $\rho \neq 0$, auch $\eta \wedge \rho \neq 0$. Nach Voraussetzung haben wir $\xi T\psi = i\mu\psi = T\xi\psi$. Für die Wirkung einer 3-Form T und eines Vektors ξ auf Spinoren gilt aber allgemein $\xi T = \eta \wedge T - \xi \lrcorner T$ und $T\xi = -\eta \wedge T - \xi \lrcorner T$, so dass in unserem Fall folgt $\eta \wedge T\psi = 0$. Da $\xi \wedge T$ eine 4-Form in einem 5-dimensionalen Raum ist,

existiert ein Vektor V derart, dass sich $\xi \wedge T$ mit Hilfe der Volumenform vol schreiben lässt als $\xi \wedge T = V \lrcorner \mathrm{vol}$. Es ist also $0 = \xi \wedge T\psi = V \lrcorner \mathrm{vol}\psi = -V \cdot \mathrm{vol}\psi$, und da mit ψ auch volψ ein nicht verschwindender Spinor ist, folgt $V = 0$ und $\xi \wedge T = V \lrcorner \mathrm{vol} = 0$. Also ist $\xi \wedge \rho = 0$ und damit $\rho = 0$ und $T = \xi \wedge \omega$. Es folgt $\sigma_T = \frac{1}{2}\omega \wedge \omega$ und $\omega\psi_o = -\xi T\psi_o = -i\mu\psi_o$.
Wir berechnen $\nabla^g_X \xi$. Dazu leiten wir $\xi\psi_o = i\psi_o$ kovariant ab und verwenden zunächst die Torsions-Killing-Gleichung für ψ_o, dann $(i - \xi)\omega\psi_o = i\mu(i - \xi)\psi_o = 0$ und danach $\varphi(X)\psi_o = -\delta i X\psi_o - \delta\eta(X)\psi_o$:

$$\begin{aligned}
(\nabla^g_X \xi)\psi_o &= (i - \xi)\nabla^g_X \psi_o \\
&= (i - \xi)\left(\beta X\psi_o - s\,(X \lrcorner T)\,\psi_o\right) \\
&= (i - \xi)\left(\beta X\psi_o - s\eta(X)\omega\psi_o + s\eta \wedge (X \lrcorner \omega)\,\psi_o\right) \\
&= (i - \xi)\left(\beta X\psi_o + s\xi\,(X \lrcorner \omega)\,\psi_o\right) \\
&= i\beta X\psi_o - \beta\xi X\psi_o + si\xi(X \lrcorner \omega)\psi_o + sX \lrcorner \omega\psi_o \\
&= i\beta X\psi_o - \beta\xi X\psi_o - si(X \lrcorner \omega)\xi\psi_o + sX \lrcorner \omega\psi_o \\
&= i\beta X\psi_o + \beta X\xi\psi_o + 2\beta\eta(X)\psi_o + 2sX \lrcorner \omega\psi_o \\
&= 2i\beta X\psi_o + 2\beta\eta(X)\psi_o + 2sX \lrcorner \omega\psi_o \\
&= -2\beta\delta\varphi(X)\psi_o + 2sX \lrcorner \omega\psi_o \\
&= -2\beta\delta\varphi(X)\psi_o - 2s\omega_1(X)\psi_o\,.
\end{aligned}$$

Damit ist $d\eta(X, Y) = (\nabla^g_X \eta)(Y) - (\nabla^g_Y \eta)(X) = 4\beta\delta F(X, Y) + 4s\omega(X, Y)$. Welche Beziehung besteht zwischen s, β und μ? Ab hier machen wir Gebrauch von der Voraussetzung $\nabla^c T \equiv 0$. Mit $\nabla^c T \equiv 0$ ist $\nabla^g_X T = \frac{1}{2} X \lrcorner \sigma_T = \frac{1}{2}(X \lrcorner \omega) \wedge \omega$. Leiten wir andererseits $T = \eta \wedge \omega$ kovariant ab, erhalten wir die Identität

$$(\nabla^g_X \eta) \wedge \omega - \tfrac{1}{2}(X \lrcorner \omega) \wedge \omega = -\eta \wedge (\nabla^g_X \omega)\,.$$

Einsetzen von ξ in diese Gleichung liefert auf der linken Seite Null, also

$$0 = \xi \lrcorner (\eta \wedge (\nabla^g_X \omega)) = \nabla^g_X \omega - \eta \wedge (\xi \lrcorner (\nabla^g_X \omega))\,.$$

Hieraus folgt $\eta \wedge (\nabla^g_X \omega) = 0$, und damit $(\nabla^g_X \eta) \wedge \omega = \frac{1}{2}(X \lrcorner \omega) \wedge \omega$. □

Wir sehen an dieser Stelle, dass $d\eta$ genau dann zu F proportional ist, wenn ω proportional zu F ist. Im Fall $\mu = 0$ ist dies nicht möglich: Es gilt $\omega\psi_o = -\xi T\psi_o = -i\mu\psi_o$, aber $F\psi_o = -2\delta i\psi_o \neq 0$.

Lemma 3.2.
Gelte $\sigma_T \neq 0$ und $s \neq \frac{1}{4}$. Dann haben wir

- $\beta \neq 0, \quad \mu \neq 0, \quad (1 - 4s)\mu = 8\beta$
- $2\omega_1 = \delta\mu\varphi$
- $\nabla^g_X \xi = -\frac{1}{4}\delta\mu\varphi(X)\,.$

Insbesondere ist die Struktur (ξ, φ) proportional zu einer metrischen Kontakt-Struktur.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $\sigma_T = \frac{1}{2}\omega \wedge \omega \neq 0$. Für eine Form ω mit $\omega \wedge \omega \neq 0$ gilt: Ist α^1 eine 1-Form mit $\alpha^1 \wedge \omega = 0$, dann folgt $\alpha^1 = 0$. Also folgt mit $(\nabla^g_X \eta) \wedge \omega = \frac{1}{2}(X \lrcorner \omega) \wedge \omega$ aus dem vorhergehenden Lemma, dass

$$\nabla^g_X \eta = \tfrac{1}{2} X \lrcorner \omega, \quad \nabla^g_X \xi = -\tfrac{1}{2}\omega_1(X)\,.$$

Mit dem Ausdruck für $\nabla^g_X \xi$ aus dem vorherigen Lemma folgt:

$$\tfrac{1}{4}(1-4s)\omega_1(X) = \beta\delta\varphi(X)\,.$$

Wegen $s \neq 1/4$ muss $\beta \neq 0$ sein.
Weiter haben wir einerseits $\omega\psi = -i\mu\psi$, andererseits können wir für $s \neq 1/4$ auch mit der eben betrachteten Gleichung $\omega\psi$ berechnen:

$$\begin{aligned} \omega\psi &= \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{j=1}^5 \omega_1(e_j)e_j\psi = \tfrac{1}{2}\tfrac{4\beta\delta}{(1-4s)}\textstyle\sum_{j=1}^5 \varphi(e_j)e_j\psi \\ &= \tfrac{2\beta\delta}{(4s-1)}\textstyle\sum_{j=1}^4 e_j(-\delta i e_j)\psi = \tfrac{8\beta}{(4s-1)} i\psi\,. \end{aligned}$$

Also gilt $\mu = \frac{8\beta}{(1-4s)}$. Für $\nabla^g_X\xi$ haben wir insgesamt:

$$\nabla^g_X\xi = -\tfrac{1}{2}\omega_1(X) = -\tfrac{2\delta\beta}{(1-4s)}\varphi(X) = -\tfrac{1}{4}\delta\mu\varphi(X)\,.$$

□

Mit dieser Vorbereitung können wir nun den ersten Satz zeigen:

Satz 3.3. *Sei (M^5, g, Σ) eine fünfdimensionale Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit und ∇^c ein metrischer Zusammenhang mit antisymmetrischer paralleler Torsion T, für die $\sigma_T \neq 0$ gilt. Existiert ein Spinor $\psi_o \in \Gamma(\Sigma)$ mit*

$$T\psi_o = \mu\psi_o, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \nabla^s_X\psi_o := \nabla^g_X\psi_o + s(X\lrcorner T)\psi_o = \beta X\psi_o, \quad s,\beta \in \mathbb{R}, \quad s \neq \tfrac{1}{4},$$

so gilt: Es ist $\mu \neq 0$ und $\beta = \frac{1}{8}(1-4s)\mu$. Die von ψ_o definierte metrische Fast-Kontakt-Struktur (ξ, η, φ) ist proportional zu einer Sasaki-Struktur, die Torsion T hat die Gestalt $T = \eta\wedge d\eta$, und es gilt $\nabla^c\xi = 0$, $\nabla^c\varphi = 0$. Insbesondere gehört der Torsions-Killing-Spinor ψ_o zu den in Satz 2.22 beschriebenen Torsions-Killing-Spinoren.

Beweis. Schon aus Lemma 3.2 ist $\mu \neq 0$ und $\beta = \frac{1}{8}(1-4s)\mu$ bekannt. Ein Reskalieren der Metrik von g zu $c^2 g$, $c > 0$, ändert den Torsionseigenwert von μ zu $c^3\mu$. Durch entsprechende Wahl der Konstanten c können wir $|\mu| = 4$ erreichen. Dies gelte ohne Beschränkung der Allgemeinheit bereits für g. Die Zahl δ wählen wir so, dass $\delta\mu = 4$ gilt. Für die Killing-Zahl haben wir nach dieser Normierung $\beta = \frac{1}{2}(1-4s)$. Aus Lemma 3.2 erhalten wir $\omega = 2F$ und die Gestalt der Torsion $T = 2\eta\wedge F$. Die Killing-Gleichung $\nabla^g_X\psi_o + s(X\lrcorner T)\psi_o = \frac{1}{2}(1-4s)X\psi_o$ besagt dann, dass das komplexe Linienbündel

$$L := \{\,\psi \in \Sigma \,|\, \varphi(X)\psi = -\delta i X\psi \;\forall\, X \perp \xi\,\},$$

das ja von ψ_o aufgespannt wird, unter dem Zusammenhang $\nabla^g_X - \frac{1}{2}(1-4s)X + s(X\lrcorner T)$ invariant ist. Mit dem ersten Teil von Satz 2.16 folgt, dass (ξ, η, φ) eine Sasaki-Struktur ist. Es gilt also $d\eta = 2F$, und der Zusammenhang ∇^c ist genau jener in Satz 2.11 beschriebene metrische Zusammenhang mit paralleler antisymmetrischer Torsion, der die Sasaki-Struktur invariant lässt. □

In obigem Satz haben wir den Fall $s = 1/4$ ausgeschlossen. Tatsächlich lässt sich der Beweis aber für $s = 1/4$ dann ebenfalls durchführen, wenn wir die zusätzliche Voraussetzung machen, dass ω proportional zu F ist. Zur vollständigen Behandlung des Falls $s = 1/4$ benötigen wir folgende Beschreibung der Lie-Algebren $\mathfrak{u}(2)$ und $\mathfrak{su}(2)$:

Lemma 3.4.
Sei $\psi_o \in \Delta_5$ ein nicht verschwindender Spinor und sei (ξ, φ) die metrische Fast-Kontakt-Struktur auf $(\mathbb{R}^5, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, die durch $\xi\psi_o = i\psi_o$ und $\varphi(X)\psi_o = -i\delta X\psi_o \quad \forall X \perp \xi$ definiert wird. Zu einer 2-Form $\alpha \in \Lambda^5(\mathbb{R}^5)$ sei der zugehörige $(1,1)$-Tensor mit α_1 bezeichnet. Dann haben wir folgende Beschreibungen der Lie-Algebren $\mathfrak{u}(2)$ und $\mathfrak{su}(2)$:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{u}(2) &:= \left\{\alpha \in \Lambda^2 \,|\, \alpha_1 \circ \varphi = \varphi \circ \alpha_1,\, \alpha_1(\xi) = 0\right\} \\
&= \left\{\alpha \in \Lambda^2 \,|\, \alpha\psi_o = c\psi_o,\, c \in \mathbb{C},\, \alpha_1(\xi) = 0\,\right\} \\
\mathfrak{su}(2) &:= \{\alpha \in \mathfrak{u}(2) \,|\, \langle\alpha_1, \varphi\rangle = 0\,\} \\
&= \left\{\alpha \in \Lambda^2 \,|\, \alpha\psi_o = 0,\, \alpha_1(\xi) = 0\,\right\}.
\end{aligned}
$$

Beweis. Die 2-Form zum Endomorphismus φ sei wie hier immer $F := g(\cdot, \varphi\cdot)$. Es gilt allgemein für die Wirkung auf Spinoren: $\alpha_1(X) = -(X \lrcorner \alpha) = \frac{1}{2}(X\alpha - \alpha X)$. Zur Charakterisierung von $\mathfrak{u}(2)$: Gelte $\alpha_1(\xi) = 0$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
\alpha_1(\varphi(X))\psi_o &= \tfrac{1}{2}(\varphi(X)\alpha - \alpha\varphi(X))\psi_o \\
&= \tfrac{1}{2}(\varphi(X)\alpha + \delta i\alpha X)\psi_o \\
&= \tfrac{1}{2}(\varphi(X)\alpha + \delta iX\alpha - 2\delta i\alpha_1(X))\psi_o \\
&= \tfrac{1}{2}(\varphi(X)\alpha + \delta iX\alpha)\psi_o + \varphi(\alpha_1(X))\psi_o\,.
\end{aligned}
$$

Also kommutieren φ und α_1 genau dann, wenn gilt $\varphi(X)\alpha\psi_o = -\delta iX\alpha\psi_o$, und das ist wiederum äquivalent zu $\alpha\psi_o = c\psi_o$ für ein $c \in \mathbb{C}$ (vgl. Lemma 2.12).
Zur Charakterisierung von $\mathfrak{su}(2)$: Sei $\alpha \in \mathfrak{u}(2)$. Wir berechnen

$$
\begin{aligned}
\alpha\psi_o &= \tfrac{1}{2}\sum \alpha(e_j, e_l)e_je_l\psi_o \\
&= \tfrac{1}{2}\sum \alpha(\varphi(e_j), \varphi(e_l))\varphi(e_j)\varphi(e_l)\psi_o \\
&= -\tfrac{1}{2}\delta i\sum \alpha(\varphi(e_j), \varphi(e_l))\varphi(e_j)e_l\psi_o \\
&= \tfrac{1}{2}\delta i\sum \alpha(\varphi(e_j), \varphi(e_l))(e_l\varphi(e_j) + 2g(\varphi(e_j), e_l))\psi_o \\
&= \tfrac{1}{2}\sum \alpha(\varphi(e_j), \varphi(e_l))e_le_j\psi_o + \delta i\sum \alpha(\varphi(e_j), \varphi(e_l))g(\varphi(e_j), e_l)\psi_o \\
&= \tfrac{1}{2}\sum \alpha(e_j, e_l)e_le_j\psi_o - \delta i\sum \alpha(e_j, e_l)g(e_j, \varphi(e_l))\psi_o \\
&= -\alpha\psi_o - \delta i\sum g(e_j, \alpha_1(e_l))g(e_j, \varphi(e_l))\psi_o \\
&= -\alpha\psi_o - \delta i\langle\alpha_1, \varphi\rangle\psi_o\,.
\end{aligned}
$$

Also gilt $2\alpha\psi_o = -\delta i\langle\alpha_1, \varphi\rangle\psi_o$ und die Behauptung folgt. □

Bei der Behandlung des Falls $s = 1/4$ werden wir außerdem auf folgenen Satz von F. Tricerri und L. Vanhecke zurückgreifen:

Satz 3.5 ([TrVa84]).
Eine zusammenhängende, einfach-zusammenhängende und vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit (M^n, g) ist genau dann ein natürlich-reduktiver homogener Raum, wenn ein metrischer Zusammenhang ∇ mit antisymmetrischer Torsion T derart existiert, dass seine Torsion und seine Krümmung parallel sind: $\nabla T \equiv 0$, $\nabla\mathcal{R}^\nabla \equiv 0$.

Wir kommen jetzt dazu, den Satz für den Fall $s = 1/4$ zu formulieren. Wie bisher bezeichnet (ξ, η, φ) die vom Torsions-Killing-Spinor ψ_o definierte metrische Fast-Kontakt-Struktur, es ist $F := g(\cdot, \varphi\cdot)$, $\omega := \xi \lrcorner T$, und nach Lemma 3.1 muss $T = \eta \wedge \omega$ gelten.

Satz 3.6.
Sei (M^5, g, Σ) eine fünfdimensionale Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit und ∇^c ein metrischer Zusammenhang mit antisymmetrischer paralleler Torsion T, für die $\sigma_T \neq 0$ gilt. Existiert ein Spinor $\psi_o \in \Gamma(\Sigma)$ mit

$$T\psi_o = \mu\psi_o, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \nabla^c_X\psi_o = \beta X\psi_o, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

so gilt $\beta = 0$, $T = \eta \wedge \omega$, und es liegt einer dieser beiden Fälle vor:

- *ω ist proportional zu F: Es gilt $\mu \neq 0$, die von ψ_o definierte metrische Fast-Kontakt-Struktur (ξ, η, φ) ist proportional zu einer Sasaki-Struktur, die Torsion T hat die Gestalt $T = \eta \wedge d\eta$, und es gilt $\nabla^c\xi = 0$, $\nabla^c\varphi = 0$. Insbesondere gehört der Torsions-Killing-Spinor ψ_o zu den in Satz 2.22 beschriebenen Torsions-Killing-Spinoren und lässt sich durch eine D-homothetische Deformation der Metrik auf einen Riemannschen Killing-Spinor zurückführen.*

- *ω ist nicht proportional zu F: Der Raum ist lokal die Heisenberg-Gruppe H^5 $(\mu = 0)$ oder* $\mathrm{SO}(3) \times \mathrm{SO}(3)/\mathrm{SO}(2)$ *$(\mu \neq 0)$ oder* $\mathrm{SO}(3) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$ *$(\mu \neq 0)$ mit jeweils einer gewissen Einbettung von* $\mathrm{SO}(2)$.

Beweis. Unabhängig von der Beziehung zwischen ω und F erhalten wir auch für $s = 1/4$ die Gleichung $\frac{1}{4}(1 - 4s)\omega_1(X) = \beta\delta\varphi(X)$, wie sie im Beweis von Lemma 3.2 auftritt. Wenn $s = 1/4$ ist, folgt deshalb $\beta = 0$. Mit der zusätzlichen Voraussetzung, dass ω proportional zu F ist, behält der Beweis von Satz 3.3 auch für $s = 1/4$ seine Gültigkeit. Wir betrachten im Folgenden den Fall, dass ω nicht proportional zu F ist. Wegen $\omega\psi = -\xi T = -i\mu\psi$ gilt $\omega \in \mathfrak{u}(2)$, s. Lemma 3.4. Wir zerlegen $\omega = cF + \omega_0$, $\omega_0 \in \mathfrak{su}(2)$. Da $F\psi = -2\delta i\psi$ und $\omega_0\psi = 0$ gilt, ist also

$$\omega = \tfrac{1}{2}\delta\mu F + \omega_0\,.$$

Haben wir jetzt eine 2-Form $\alpha \in \mathfrak{su}(2)$, so dass für den zugehörigen $(1,1)$-Tensor α_1 gilt $[\alpha_1, F] = 0$ und $[\alpha_1, \omega] = 0$, dann ist auch $[\alpha_1, \omega_0] = 0$, und aus $\alpha, \omega_0 \in \mathfrak{su}(2)$ folgt, dass α und ω_0 proportional zueinander sind. Für zwei beliebige Vektoren X, Y ist die Krümmung $\mathcal{R}^c(X, Y)$ eine solche 2-Form, da wegen $\nabla^c T = 0$ und $\nabla^c\psi_o = 0$ auch ξ, φ und ω parallel bezüglich ∇^c sind. Damit hat der Krümmungstensor die Form $\mathcal{R}^c(X, Y) = \alpha(X, Y)\omega_0$ für eine gewisse 2-Form α. Da aber $\mathcal{R}^c$ symmetrisch ist, s. Lemma 1.14, folgt

$$\mathcal{R}^c = c_1\omega_0 \otimes \omega_0$$

für ein $c_1 \in \mathbb{R}$. Insbesondere gilt $\nabla^c\mathcal{R}^c = 0$. Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, die einen metrischen Zusammenhang mit paralleler antisymmetrischer Torsion und paralleler Krümmung besitzt, ist aber nach [TrVa84] lokal ein natürlich-reduktiver homogener Raum. Eine lokale Klassifizierung von natürlich-reduktiven homogenen Räumen in fünf Dimensionen findet sich in [KoVa85]. Wir folgen dieser Arbeit, um die in unserem Fall möglichen Räume zu bestimmen: Auch für $s = 1/4$ folgt wie am Anfang des Beweises von Lemma 3.2, dass $\nabla^g_X\eta = \frac{1}{2}X \lrcorner \omega$ ist. Wir wählen ein lokales Orthonormalreper e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 mit $e_5 = \xi$ und $\varphi(e_1) = e_2$, $\varphi(e_3) = e_4$, in dem gilt

$$F = -(e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4), \quad \omega_0 = c_2(e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4)\,.$$

Diese Basisdarstellung von ω_0 können wir fordern, da U(2), der Stabilisator von φ bzw. F, transitiv auf Geraden in $\mathfrak{su}(2)$ wirkt. Nach Voraussetzung ist $c_2 \neq 0$. Mit $\omega = \frac{1}{2}\delta\mu F + \omega_0$ liefert die erste Bianchi-Identität für die Krümmung (Lemma 1.14):

$$\begin{aligned}\overset{X,Y,Z}{\mathfrak{S}} \mathcal{R}^c(X,Y,Z,W) &= \sigma_T(X,Y,Z,W) \\ &= \tfrac{1}{2}\omega \wedge \omega \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\mu^2}{4}\varphi \wedge F + \omega_0 \wedge \omega_0\right) \\ &= \left(\tfrac{\mu^2}{4} - c_2^2\right) e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \,.\end{aligned}$$

Wegen $\omega \wedge \omega \neq 0$ verschwindet der Koeffizient $\frac{\mu^2}{4} - c_2^2$ nicht. Andererseits erhalten wir aus $\mathcal{R}^c = c_1\omega_0 \otimes \omega_0$, dass gilt

$$\begin{aligned}\overset{X,Y,Z}{\mathfrak{S}} \mathcal{R}^c(X,Y,Z,W) &= \tfrac{1}{2}c_1\omega_0 \wedge \omega_0 \\ &= -c_1c_2^2 e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \,.\end{aligned}$$

Also ist die Beziehung zwischen den Konstanten: $c_1 = 1 - \frac{\mu^2}{4c_2^2}$. In [KoVa85] sind weiter die Konstanten λ, ρ definiert durch

$$T(e_1,e_2) = \rho\xi, \quad T(e_3,e_4) = \lambda\xi \,.$$

Aus $T = \xi \wedge \omega$, $\omega = \frac{1}{2}\delta\mu F + \omega_0$, sowie obiger Darstellung von F und ω_0 in der gewählten Basis folgt

$$\rho = -\tfrac{1}{2}\delta\mu + c_2, \quad \lambda = -\tfrac{1}{2}\delta\mu - c_2 \,.$$

Die Größe P wird in [KoVa85] definiert als der Wert einer beliebigen Krümmung $\mathcal{R}^c(X,Y)$. Wir wählen $P := \omega_0$. Dann sind die Konstanten α, β, die im genannten Artikel definiert werden durch $P = \alpha e_1 \wedge e_2 + \beta e_3 \wedge e_4$, bei uns $\alpha = -\beta = c_2$. Weiter sind u, v definiert durch

$$\mathcal{R}^c(e_1,e_2) = uP, \quad \mathcal{R}^c(e_3,e_4) = vP \,.$$

In unserem Fall ist $u = -v = -\frac{1}{4}\frac{\mu^2}{c_2} + c_2$. Die nächste Größe aus der Arbeit ist $D := \lambda\alpha - \rho\beta$. Bei uns ist $D = -\delta\mu c_2$.
Im Fall $\mu = 0$ befinden wir uns in dem in [KoVa85] auf Seite 455 beschriebenen Fall $A1$ und unser Raum ist lokal die fünfdimensionale Heisenberg-Gruppe H^5.
Im Fall $\mu \neq 0$ befinden wir uns in dem in [KoVa85] auf Seite 456 beschriebenen Fall $A2$. Wir folgen der dortigen Klassifizierung weiter und berechnen die dazu notwendigen Ausdrücke

$$\rho^2 - u\alpha = \mu\left(\tfrac{\mu}{2} - c_2\right), \quad \lambda^2 - v\beta = \mu\left(\tfrac{\mu}{2} + c_2\right) \,.$$

Falls $|c_2| < \mu/2$ ist, sind diese beiden Ausdrücke positiv, und wir erhalten lokal den Raum $\mathrm{SO}(3) \times \mathrm{SO}(3)/\mathrm{SO}(2)$ mit einer gewissen Einbettung von SO(2). Falls $|c_2| > \mu/2$ ist, haben die beiden Ausdrücke unterschiedliche Vorzeichen, und wir erhalten lokal $\mathrm{SO}(3) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$ mit einer gewissen SO(2)-Einbettung. Aufgrund der Gestalt der Ausdrücke ist es nicht möglich, dass beide gleichzeitig negativ sind. Die Gleichheit $|c_2| = \mu/2$ ist durch die Voraussetzung $\omega \wedge \omega \neq 0$ ausgeschlossen. □

Die jeweiligen Einbettungen von SO(2) nach $\mathrm{SO}(3) \times \mathrm{SO}(3)$ und nach $\mathrm{SO}(3) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, für die ∇^c-parallele Spinoren existieren, sind im kommenden Abschnitt 3.2 explizit beschrieben.

Zuletzt betrachten wir den Fall $\sigma_T = 0$:

Satz 3.7.
Sei (M^5, g, Σ) *eine fünfdimensionale Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit und* ∇^c *ein metrischer Zusammenhang mit antisymmetrischer paralleler Torsion* T*, für die* $\sigma_T = 0$ *gilt. Existiert ein Spinor* $\psi_o \in \Gamma(\Sigma)$ *mit*

$$T\psi_o = \mu\psi_o, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \nabla^s_X \psi_o = \beta X \psi_o, \quad s, \beta \in \mathbb{R},$$

so ist M^5 *lokal die Lie-Gruppe* $\mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R}^2$.

Beweis. Die Torsion hat nach 3.1 wieder die Gestalt $T = \xi \wedge \omega$ für $\omega := \xi \lrcorner T$. Wegen $\sigma_T = 0$ ist sie für alle $s \in \mathbb{R}$ parallel, $\nabla^s_X T = \frac{1}{2}(1-4s) X \lrcorner \sigma_T \equiv 0$. Insbesondere gilt

$$0 = \nabla^g_X T = (\nabla^g_X \eta) \wedge \omega + \eta \wedge (\nabla^g_X \omega)\,.$$

Im Beweis von Lemma 3.1 haben wir aber $\eta \wedge (\nabla^g_X \omega) = 0$ gezeigt. Also folgt $(\nabla^g_X \eta) \wedge \omega = 0$. Ebenfalls aus Lemma 3.1 wissen wir $\nabla^g \eta = 2\beta\delta F + 2s\omega$. Insgesamt erhalten wir

$$0 = (\nabla^g_X \eta) \wedge \omega = (2\beta\delta(X \lrcorner F + 2s(X \lrcorner \omega)) \wedge \omega\,.$$

Wegen $\omega \wedge \omega = 0$ verschwindet der zweite Summand, und wir erhalten $2\beta\delta(X \lrcorner F) \wedge \omega = 0$ für alle X. Die Abbildung $\Lambda^1 \ni \alpha^1 \mapsto \alpha^1 \wedge \omega$ hat einen zweidimensionalen Kern, aber die Ausdrücke der Form $X \lrcorner F$ spannen einen vierdimensionalen Raum auf. Also muss $\beta = 0$ gelten. Damit haben wir $\nabla^s T \equiv 0$ und $\nabla^s \psi \equiv 0$. Daraus folgt, dass auch gilt $\nabla^s \xi = 0$, $\nabla^s \varphi = 0$, $\nabla^s \omega = 0$. Wir spalten wie zuvor ω auf in

$$\omega = \tfrac{1}{2}\delta\mu F + \omega_0, \quad \omega_0 \in \mathfrak{su}(2)\,.$$

Mit der gleichen Argumentation wie im Beweis von Satz 3.6 zu ∇^c-parallelen Spinoren erhalten wir

$$\mathcal{R}^s = c\omega_0 \otimes \omega_0, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Angenommen es gilt $c \neq 0$: Die Bianchi-Summe von $\mathcal{R}^s$ ist proportional zu σ_T, also Null. Andererseits ist die Bianchi-Summe von $\mathcal{R}^s$ gleich $c\omega_0 \wedge \omega_0$, d. h. wir erhalten $c\omega_0 \wedge \omega_0 = 0$. Da $\omega_0 \in \mathfrak{su}(2)$ gilt (es existiert eine Basis, so dass ein nicht verschwindendes Element von $\mathfrak{su}(2)$ proportional zu $e_{12} - e_{34}$ ist), folgt $\omega_0 = 0$. Also gilt in jedem Fall $\mathcal{R}^s \equiv 0$. Ein Raum mit paralleler antisymmetrischer Torsion und verschwindender Krümmung ist aber eine Lie-Gruppe, und die Lie-Algebra-Struktur ist durch die Torsion gegeben. Dies wurde schon 1926 von Cartan und Schouten bemerkt, [CaSch26]. Ein moderner Beweis und weitere historische Referenzen finden sich in der Arbeit [AgFr10]. In unserem Fall erhalten wir: Da sich jede 2-Form ω mit $\omega \wedge \omega = 0$ für gewisse Vektoren v_1, v_2 als $\omega = v_1 \wedge v_2$ schreiben lässt, gilt für die Torsion $T = \xi \wedge v_1 \wedge v_2$, und der gesuchte Raum ist lokal $\mathrm{SO}(3) \times \mathbb{R}^2$. Aus der Gestalt der Torsion folgt außerdem $\mu \neq 0$. $\square$

3.2 Die Ausnahmeräume der Charakterisierung

In diesem Abschnitt beschreiben wir die in Satz 3.6 aufgeführten Räume mit parallelen Spinoren explizit. Außerdem geben wir mit der Heisenberg-Gruppe H^5 ein Beispiel für einen fünfdimensionalen Raum mit Torsions-Killing-Spinoren zum Parameter $s = -3/4$ an. Wie am Ende von Abschnitt 2.2 bemerkt, nimmt der Parameterwert $s = -\frac{1}{4}\frac{k+1}{k-1}$ eine Sonderstellung ein, da in diesem Fall die Metrik nicht durch eine D-homothetische Deformation aus einer Riemannschen oder semi-Riemannschen Einstein-Metrik konstruiert werden kann.

Die Heisenberg-Gruppe H^5

Die fünfdimensionale Heisenberg-Gruppe ist die folgende, global zu $\mathbb{R}^5$ diffeomorphe Lie-Gruppe:

$$H^5 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & u & v & z \\ 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid u, v, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Die Matrizenmultiplikation von Elementen aus H^5 entspricht folgender Produktstruktur:

$$(u,\, v,\, x,\, y,\, z) \circ (\tilde{u},\, \tilde{v},\, \tilde{x},\, \tilde{y},\, \tilde{z}) = (u + \tilde{u},\, v + \tilde{v},\, x + \tilde{x},\, y + \tilde{y},\, z + \tilde{z} + u\tilde{x} + v\tilde{y})\,.$$

Das neutrale Element ist $0 \in \mathbb{R}^5$. Als Basis der linksinvarianten Vektorfelder wählen wir

$$u_1 = \partial_u, \quad u_2 = \partial_x + u\partial_z, \quad u_3 = \partial_v, \quad u_4 = \partial_y + v\partial_z, \quad u_5 = \partial_z\,.$$

Die nicht verschwindenden Kommutatoren sind $[u_1, u_2] = u_5$ und $[u_3, u_4] = u_5$. Die Familie aller linksinvarianten Metriken auf H^5 wird durch die zwei reellen Parameter $\rho, \lambda > 0$ beschrieben, und alle diese Metriken sind natürlich-reduktiv, s. [KoVa85]. Im Punkt $(u, v, x, y, z) \in H^5$ ist diese Metrikfamilie

$$g = \tfrac{1}{\rho}(du^2 + dx^2) + \tfrac{1}{\lambda}(dv^2 + dy^2) + (dz - udx - vdy)^2\,.$$

Im Folgenden geben wir zu jeder dieser Metriken einen natürlich-reduktiven Zusammenhang an, d. h. einen metrischen Zusammenhang mit antisymmetrischer paralleler Torsion, dessen Krümmungstensor ebenfalls parallel ist. Bezüglich g sind die Vektorfelder $u_1, ..., u_5$ orthogonal. Wir normieren:

$$e_1 = \sqrt{\rho}u_1, \quad e_2 = \sqrt{\rho}u_2, \quad e_3 = \sqrt{\lambda}u_3, \quad e_4 = \sqrt{\lambda}u_4, \quad e_5 = u_5\,.$$

Die nicht verschwindenden Kommutatoren sind $[e_1, e_2] = \rho e_5$ und $[e_3, e_4] = \lambda e_5$. Wir berechnen den Levi-Civita-Zusammenhang der linksinvarianten Metrik g. Dieser ist nach [KN2, X.3.3] gegeben durch die lineare Abbildung $\Lambda^g : T_0H^5 \to \mathfrak{so}(T_0H^5)$ mit $\Lambda^g(X)Y = \frac{1}{2}[X, Y] + U(X, Y)$, wobei U die symmetrische bilineare Abbildung $U : T_0H^5 \times T_0H^5 \to T_0H^5$ ist, die definiert wird durch $2g(U(X, Y), Z) = g(X, [Z, Y]) + g([Z, X], Y)$. Die nicht verschwindenden Ausdrücke $U(e_j, e_l) = U(e_l, e_j)$ sind

$$U(e_1, e_5) = -\tfrac{\rho}{2}e_2, \quad U(e_2, e_5) = \tfrac{\rho}{2}e_1, \quad U(e_3, e_5) = -\tfrac{\lambda}{2}e_4, \quad U(e_4, e_5) = \tfrac{\lambda}{2}e_3\,.$$

Als Basis von $\mathfrak{so}(T_0H^5) \simeq \mathfrak{so}(5)$ wählen wir die schiefsymmetrischen Endomorphismen

$$E_{jl} := e_j^* \otimes e_l - e_l^* \otimes e_j, \quad j < l\,.$$

Der Levi-Civita-Zusammenhang zur Metrik g ist dann

$$\Lambda^g(e_1) = \tfrac{\rho}{2}E_{25}, \quad \Lambda^g(e_2) = -\tfrac{\rho}{2}E_{15}, \quad \Lambda^g(e_3) = \tfrac{\lambda}{2}E_{45}, \quad \Lambda^g(e_4) = -\tfrac{\lambda}{2}E_{35}, \quad \Lambda^g(e_5) = -\tfrac{\rho}{2}E_{12} - \tfrac{\lambda}{2}E_{34}.$$

Wir definieren die linksinvariante 3-Form

$$T := -\rho e_{125} - \lambda e_{345}\,.$$

Der linksinvariante metrische Zusammenhang $\nabla^c = \nabla^g + \frac{1}{2}T$ mit Torsion T wird durch die lineare Abbildung $\Lambda^c : T_0H^5 \to \mathfrak{so}(5)$ beschrieben, s. [KN2, X.2.1]:

$$\Lambda^c(e_1) = 0 = \Lambda^c(e_2) = \Lambda^c(e_3) = \Lambda^c(e_4), \quad \Lambda^c(e_5) = -\rho E_{12} - \lambda E_{34}\,.$$

Hieraus ist zu sehen, dass e_5 und die beiden 2-Formen $e_1 \wedge e_2$, $e_3 \wedge e_4$ parallel sind bezüglich ∇^c. Für alle Werte von ρ und λ gilt deshalb $\nabla^c T \equiv 0$. Der Krümmungstensor des Zusammenhangs ∇^c ist nach [KN2, X.2.3] im neutralen Element gegeben durch $\mathcal{R}^c_0(X,Y) = [\Lambda^c(X), \Lambda^c(Y)] - \Lambda^c([X,Y])$. Hiermit erhalten wir als nicht verschwindende Krümmungsausdrücke

$$\mathcal{R}^c_0(e_1,e_2) = \rho(\rho E_{12} + \lambda E_{34}), \quad \mathcal{R}^c_0(e_3,e_4) = \lambda(\rho E_{12} + \lambda E_{34})\,.$$

Global lässt sich der Krümmungstensor $\mathcal{R}^c$ also beschreiben als

$$\mathcal{R}^c = (\rho e_1 \wedge e_2 + \lambda e_3 \wedge e_4) \otimes (\rho e_1 \wedge e_2 + \lambda e_3 \wedge e_4)\,.$$

Für alle Werte von ρ und λ gilt $\nabla^c\mathcal{R} \equiv 0$.
Wir geben die Riemannschen Krümmungsgrößen an. Dazu verwenden wir die Abkürzung $e_{jl} := e_j \wedge e_l$. Es ist

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^g \;=\; & \tfrac{3}{4}\rho^2 e_{12}\otimes e_{12} + \tfrac{1}{2}\lambda\rho e_{12}\otimes e_{34} + \tfrac{1}{4}\lambda\rho e_{13}\otimes e_{24} - \tfrac{1}{4}\lambda\rho e_{14}\otimes e_{23}\\ & -\tfrac{1}{4}\rho^2 e_{15}\otimes e_{15} - \tfrac{1}{4}\lambda\rho e_{23}\otimes e_{14} + \tfrac{1}{4}\lambda\rho e_{24}\otimes e_{13} - \tfrac{1}{4}\rho^2 e_{25}\otimes e_{25}\\ & +\tfrac{1}{2}\lambda\rho e_{34}\otimes e_{12} + \tfrac{3}{4}\lambda^2 e_{34}\otimes e_{34} - \tfrac{1}{4}\lambda^2 e_{35}\otimes e_{35} - \tfrac{1}{4}\lambda^2 e_{45}\otimes e_{45}\,.\end{aligned}$$

Der Ricci-Tensor Ric^g ist im gewählten linksinvarianten Reper e_j diagonal und es gilt

$$\mathrm{Ric}^g = \mathrm{diag}\left(-\tfrac{1}{2}\rho^2, -\tfrac{1}{2}\rho^2, -\tfrac{1}{2}\lambda^2, -\tfrac{1}{2}\lambda^2, \tfrac{1}{2}(\lambda^2+\rho^2)\right).$$

Die Skalarkrümmung ist $\mathrm{Scal}^g \equiv -\frac{1}{2}(\lambda^2+\rho^2) < 0$. Keine der Metriken ist eine Einstein-Metrik.

Auf der Lie-Gruppe H^5 existiert eine linksinvariante Spin-Struktur derart, dass für alle Spinoren ψ des Spinor-Bündels Σ gilt $e_1e_2e_3e_4e_5\psi = i\psi$. Wir fixieren diese Spin-Struktur und definieren im Spinor-Bündel Σ ein linksinvariantes Orthonormalreper $\psi_{++}, \psi_{--}, \psi_{+-}, \psi_{-+}$ durch die Forderung

$$e_1e_2\psi_{\varepsilon\delta} = i\varepsilon\psi_{\varepsilon\delta}, \quad e_3e_4\psi_{\varepsilon\delta} = i\delta\psi_{\varepsilon\delta}\,.$$

Es gilt dann $e_5\psi_{\varepsilon\delta} = \varepsilon\delta i\psi_{\varepsilon\delta}$. (Zur Existenz dieses Repers vgl. Beweis von Lemma 2.12.) Jeder dieser vier Spinoren des Repers ist Eigenspinor der Torsion $T = -\rho e_{135} - \lambda e_{245}$:

$$\begin{aligned}T\psi_{++} &= (\rho+\lambda)\psi_{++}, \quad T\psi_{--} = -(\rho+\lambda)\psi_{--}\\ T\psi_{+-} &= (\lambda-\rho)\psi_{+-}, \quad T\psi_{-+} = (\rho-\lambda)\psi_{-+}\,.\end{aligned}$$

Der Lift der kovarianten Ableitung ∇^c ins Spinor-Bündel wird beschrieben durch die lineare Abbildung $\Lambda^c : T_0H^5 \to \mathfrak{spin}(5)$ mit

$$\Lambda^c(e_1) = 0 = \Lambda^c(e_2) = \Lambda^c(e_3) = \Lambda^c(e_4), \quad \Lambda^c(e_5) = -\tfrac{\rho}{2}e_1e_2 - \tfrac{\lambda}{2}e_3e_4\,.$$

Ein ∇^c-paralleler Spinor existiert genau dann, wenn für die Metrikparameter $\lambda = \rho$ gilt. In diesem Fall sind Linearkombinationen von ψ_{+-} und ψ_{-+} parallel.
Jetzt betrachten wir allgemeiner die Familie kovarianter Ableitungen im Tangentialbündel, die durch $\nabla^s = \nabla^g + 2sT$ definiert ist. Diese linksinvarianten Zusammenhänge werden beschrieben durch die linearen Abbildungen $\Lambda^s : T_0H^5 \to \mathfrak{so}(5)$ mit

$$\Lambda^s(e_1) = -\tfrac{\rho}{2}(4s-1)E_{25}, \quad \Lambda^s(e_2) = \tfrac{\rho}{2}(4s-1)E_{15}$$

$$\Lambda^s(e_3) = -\tfrac{\lambda}{2}(4s-1)E_{45}, \quad \Lambda^s(e_4) = \tfrac{\lambda}{2}(4s-1)E_{35}$$

$$\Lambda^s(e_5) = -\tfrac{\rho}{2}(4s+1)E_{12} - \tfrac{\lambda}{2}(4s+1)E_{34}\,.$$

Der Lift von ∇^s ins Spinorbündel ist die lineare Abbildung $\Lambda^s : T_0H^5 \to \mathfrak{spin}(5)$ mit

$$\Lambda^s(e_1) = -\tfrac{\rho}{4}(4s-1)e_2e_5, \quad \Lambda^s(e_2) = \tfrac{\rho}{4}(4s-1)e_1e_5$$

$$\Lambda^s(e_3) = -\tfrac{\lambda}{4}(4s-1)e_4e_5, \quad \Lambda^s(e_4) = \tfrac{\lambda}{4}(4s-1)e_3e_5$$

$$\Lambda^s(e_5) = -\tfrac{\rho}{4}(4s+1)e_1e_2 - \tfrac{\lambda}{4}(4s+1)e_3e_4\,.$$

Die Gleichung $\nabla^s_X\psi = \beta X\psi$ besitzt nur Lösungen, wenn $\rho = \lambda$ gilt. Für $s = 1/4$ und $\beta = 0$ sind Linearkombinationen von ψ_{+-} und ψ_{-+} Lösungen. Für $s = -3/4$ sind die Spinoren ψ_{++} und ψ_{--} Torsions-Killing-Spinoren mit Killing-Zahl ρ bzw. $-\rho$.

Wir beschreiben die metrischen Fast-Kontakt-Strukturen, die zu diesen speziellen Spinoren gehören. Sei $\xi := e_5$ und seien φ_1 und φ_2 diejenigen metrischen Fast-Kontakt-Strukturen, deren fundamentale 2-Formen diese Gestalt haben:

$$F_{\varphi_1} = e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4, \quad F_{\varphi_2} = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4\,.$$

Dann gilt

$$\psi_{+-} \in L_1(\varphi_1) = \{\,\psi \in \Sigma \,|\, \varphi_1(X)\psi = -iX\psi \ \forall X \perp \xi\,\}$$

$$\psi_{-+} \in L_2(\varphi_1) = \{\,\psi \in \Sigma \,|\, \varphi_1(X)\psi = iX\psi \ \forall X \perp \xi\,\}$$

$$\psi_{++} \in L_1(\varphi_2) = \{\,\psi \in \Sigma \,|\, \varphi_2(X)\psi = -iX\psi \ \forall X \perp \xi\,\}$$

$$\psi_{--} \in L_2(\varphi_2) = \{\,\psi \in \Sigma \,|\, \varphi_2(X)\psi = iX\psi \ \forall X \perp \xi\,\}$$

Die Form $\omega := \xi \lrcorner T = -\rho e_1 \wedge e_2 - \lambda e_3 \wedge e_4$ ist, wenn $\rho = \lambda$ gilt, proportional zu F_{φ_2}, aber nicht proportional zu F_{φ_1}.
Unabhängig von ρ und λ gilt für den Zusammenhang $\nabla^c = \nabla^g + 1/2T$

$$\nabla^c\xi = 0, \quad \nabla^c\varphi_1 = 0, \quad \nabla^c\varphi_2 = 0\,.$$

Es gilt

$$dF_{\varphi_1} = 0, \quad dF_{\varphi_2} = 0, \quad N_{\varphi_1} = 0, \quad N_{\varphi_2} = 0\,.$$

Die letztgenannten Eigenschaften machen die Strukturen zu sogenannten quasi-Sasaki-Strukturen. Es ist

$$\nabla^g\xi = -\tfrac{\rho}{2}E_{12} - \tfrac{\lambda}{2}E_{34}, \quad d\eta = -\rho e_1 \wedge e_2 - \lambda e_3 \wedge e_4.$$

Für $\rho = \lambda = 2$ gilt also $\nabla^g\xi = -\varphi_2$, und damit ist (ξ, φ_2) dann insgesamt eine Sasaki-Struktur.

Deformieren wir hier eine der linksinvarianten Metriken g für $t > 0$ mit einer transversen Homothetie zu $g_t = tg - (t^2 - t)\eta \otimes \eta$, dann ist die neue Metrik g_t wieder eine linksinvariante Metrik, da die Isometrie $X \mapsto \frac{1}{t}X + (\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t})\eta(X)\xi$ ein Automorphismus der Lie-Algebra von H^5

ist. Wie bereits bemerkt, ist keine der linksinvarianten Metriken auf H^5 eine Einstein-Metrik, und so existiert hier keine transverse Homothetie der Metrik, die eine Beziehung zwischen den beschriebenen Torsions-Killing-Spinoren zum Parameter $s = -3/4$ einerseits und zwischen Riemannschen Killing-Spinoren andererseits herstellt.

Für $\rho = \lambda$ berechnet man auf der Heisenberg-Gruppe (H^5, g) mit einer der beschriebenen natürlich-reduktiven Metriken

$$\not{D}\psi_{+-} = D^g\psi_{+-} = 0, \quad \not{D}\psi_{-+} = D^g\psi_{-+} = 0\,.$$

Also ist Null der kleinste Eigenwert des Operators $\not{D}^2$.

Der Raum $\mathrm{SO}(3) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$

Wir betrachten den Raum $\mathrm{SO}(3) \oplus \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$ mit der $\mathrm{SO}(2)$-Einbettung, die gegeben ist durch

$$\mathrm{SO}(2) \ni A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \mapsto \left(A(t), A\left(\tfrac{t}{2}\right)^{-1}\right),$$

gefolgt von der diagonalen Standardeinbettung nach $\mathrm{SO}(3) \oplus \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Als Basis der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3)$ wählen wir $u_1 = E_{23}, u_2 = -E_{13}, u_3 = E_{12}$. Dann gilt $[u_1, u_2] = u_3$, $[u_2, u_3] = u_1$, $[u_3, u_1] = u_2$. Als Basis der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ wählen wir

$$v_1 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Kommutatorbeziehungen sind $[v_1, v_2] = -v_3$, $[v_2, v_3] = v_1$, $[v_3, v_1] = v_2$. Die Lie-Unteralgebra von $\mathrm{SO}(2)$ mit der oben beschriebenen Einbettung ist $\mathfrak{so}(2) = \langle P := u_3 - v_3\rangle$. Sei $Q := c_1 u_3 + c_2 v_3$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mit $c_1 + c_2 \neq 0$. Dann ist $\mathfrak{m} := \langle u_1, u_2, v_1, v_2, Q\rangle$ eine zweiparametrige Familie reduktiver Komplemente von $\mathfrak{so}(2)$ in $\mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Es ist

$$u_3 = \tfrac{c_2}{c_1+c_2}\left(P + \tfrac{1}{c_1}Q\right), \quad v_3 = \tfrac{c_1}{c_1+c_2}\left(-P + \tfrac{1}{c_1}Q\right).$$

Die Isotropiedarstellung von $\mathrm{SO}(2)$ auf $\mathfrak{m}$ ist

$$\mathrm{Ad} : \mathrm{SO}(2) \longrightarrow \mathrm{SO}(5), \quad A(t) \mapsto \mathrm{diag}(A(t), A(t)^{-1}, 1)\,.$$

Wir definieren eine zweiparametrige Familie invarianter Metriken g durch die Festlegung, dass für $D_1, D_2 > 0$ eine Orthonormalbasis gegeben sei durch

$$e_1 = D_1 u_1, \quad e_2 = D_1 u_2, \quad e_3 = D_2 v_1, \quad e_4 = D_2 v_2, \quad e_5 = Q\,.$$

Der Vektor e_5 und die beiden 2-Formen $e_1 \wedge e_2$, $e_3 \wedge e_4$ sind invariant unter der Isotropiedarstellung Ad und damit global auf dem homogenen Raum definiert. Die nicht verschwindenden Kommutatorrelationen sind

$$[e_1, e_2] = D_1^2 \tfrac{c_2}{c_1+c_2}(P + \tfrac{1}{c_2}Q), \quad [e_1, e_5] = -c_1 e_2, \quad [e_2, e_5] = c_1 e_1$$

$$[e_3, e_4] = D_2^2 \tfrac{c_1}{c_1+c_2}(P - \tfrac{1}{c_1}Q), \quad [e_3, e_5] = -c_2 e_4, \quad [e_4, e_5] = c_2 e_3\,.$$

Für die symmetrische bilineare Abbildung $U : \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$, die durch

$$2g(U(X,Y), Z) = g([Z,X]_{\mathfrak{m}}, Y) + g(X, [Z,Y]_{\mathfrak{m}})$$

definiert wird, sind die nicht verschwindenden Ausdrücke $U(e_j, e_l) = U(e_l, e_j)$:

$$U(e_1, e_5) = \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{D_1^2}{c_1+c_2} + c_1\right) e_2, \qquad U(e_2, e_5) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{D_1^2}{c_1+c_2} - c_1\right) e_1$$
$$U(e_3, e_5) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{D_2^2}{c_1+c_2} + c_2\right) e_4, \qquad U(e_4, e_5) = -\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{D_2^2}{c_1+c_2} + c_2\right) e_3\,.$$

Nach [KN2, X.2.6] beschreibt die Abbildung $\Lambda_\mathfrak{m} : \mathfrak{m} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, $\Lambda_\mathfrak{m} \equiv 0$ auf einem reduktiven homogenen Raum einen invarianten Zusammenhang, dessen Torsion und Krümmung parallel sind. Dieser Zusammenhang wird kanonischer Zusammenhang genannt. Seine Torsion ist gegeben durch die Projektion des Kommutators auf den Unterraum $\mathfrak{m}$: $T = -[\cdot,\cdot]_\mathfrak{m}$. Diese Torsion ist genau dann antisymmetrisch bezüglich der Metrik g, wenn die zuvor bereits genannte Abbildung U verschwindet, $U \equiv 0$. In diesem Fall wird der kanonische Zusammenhang also natürlich-reduktiv. Das Verschwinden der bilinearen Abbildung U ist dem von uns betrachteten Raum äquivalent zu

$$D_1^2 = c_1(c_1 + c_2), \quad D_2^2 = -c_2(c_1 + c_2)\,.$$

Also erhalten wir genau dann zu einer reduktiven Zerlegung des Raumes eine natürlich-reduktive Metrik, wenn gilt, dass die drei Zahlen $c_1, -c_2$ und $c_1 + c_2$ das gleiche Vorzeichen haben.
Der Levi-Civita-Zusammenhang einer solchen natürlich-reduktiven Metrik wird beschrieben durch die lineare Abbildung $\Lambda^g_\mathfrak{m} : \mathfrak{m} \to \mathfrak{so}(5)$ mit

$$\begin{aligned} &\Lambda^g_\mathfrak{m}(e_1) = \tfrac{1}{2}c_1E_{25}, \quad \Lambda^g_\mathfrak{m}(e_2) = -\tfrac{1}{2}c_1E_{15}\\ &\Lambda^g_\mathfrak{m}(e_3) = \tfrac{1}{2}c_2E_{45}, \quad \Lambda^g_\mathfrak{m}(e_4) = -\tfrac{1}{2}c_2E_{35}\\ &\Lambda^g_\mathfrak{m}(e_5) = \tfrac{1}{2}c_1E_{12} + \tfrac{1}{2}c_2E_{34}\,. \end{aligned}$$

Die Torsion $T = -[\cdot,\cdot]_\mathfrak{m}$ des natürlich-reduktiven Zusammenhangs ist als 3-Form

$$T = -c_1e_{125} - c_2e_{345}\,.$$

Die Krümmung des Zusammenhangs $\Lambda_\mathfrak{m} \equiv 0$ im Punkt $o := \mathrm{SO}(2)$ des homogenen Raumes berechnet sich über $\mathcal{R}_o(X,Y) = -\mathrm{ad}\,([X,Y]_{\mathfrak{so}(2)})$. Wir erhalten

$$\mathcal{R}(e_1, e_2)_o = -c_1c_2(E_{12} - E_{34}), \quad \mathcal{R}(e_3, e_4)_o = c_1c_2(E_{12} - E_{34}),$$

also

$$\mathcal{R} = -c_1c_2(e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) \otimes (e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4)\,.$$

Die Isotropiedarstellung $\mathrm{Ad} : \mathrm{SO}(2) \to \mathrm{SO}(5)$ liftet sich zu $\widetilde{\mathrm{Ad}} : \mathrm{SO}(2) \to \mathrm{Spin}(5)$, und zwar ist

$$\widetilde{\mathrm{Ad}}\,(A(t)) = \left(\cos\tfrac{t}{2} + \sin\tfrac{t}{2}e_1e_2\right)\left(\cos\tfrac{t}{2} - \sin\tfrac{t}{2}e_3e_4\right)\,.$$

Wir wählen eine homogene Spin-Struktur derart, dass für alle Spinoren ψ des Spinor-Bündels Σ gilt $e_1e_2e_3e_4e_5\psi = i\psi$. Im Raum der Spinoren Δ_5 bezeichnen wir diejenige Orthonormalbasis mit $\psi_{++}, \psi_{--}, \psi_{+-}, \psi_{-+}$ die

$$e_1e_2\psi_{\varepsilon\delta} = i\varepsilon\psi_{\varepsilon\delta}, \quad e_3e_4\psi_{\varepsilon\delta} = i\delta\psi_{\varepsilon\delta}$$

erfüllt. Es gilt $e_5\psi_{\varepsilon\delta} = -\varepsilon\delta i\psi_{\varepsilon\delta}$. Die Spinoren ψ_{++} und ψ_{--} sind invariant unter der Isotropiedarstellung. Sie definieren also globale Spinorfelder und dieses sind parallel bezüglich des natürlich-reduktiven Zusammenhangs. Linearkombinationen der Spinoren ψ_{+-} und ψ_{-+} sind nicht invariant unter der Isotropiedarstellung. Für die Wirkung der Torsion gilt

$$T\psi_{++} = -(c_1 + c_2)\psi_{++}, \quad T\psi_{--} = (c_1 + c_2)\psi_{--}\,.$$

Die metrischen Fast-Kontakt-Struktur zu den Spinorfeldern ψ_{++} und ψ_{--} ist (ξ, φ) wobei $\xi := e_5$ ist und φ derart, dass die entsprechende fundamentale 2-Form diese Gestalt hat:

$$F_\varphi = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4\,.$$

Dann gilt

$$\psi_{++} \in L_1(\varphi) = \{\, \psi \in \Sigma \,|\, \varphi(X)\psi = -iX\psi \ \forall X \perp \xi \,\}$$

$$\psi_{--} \in L_2(\varphi) = \{\, \psi \in \Sigma \,|\, \varphi(X)\psi = iX\psi \ \forall X \perp \xi \,\}\,.$$

Die 2-Form $\omega := \xi \lrcorner T = -c_1 e_1 \wedge e_2 - c_2 e_3 \wedge e_4$ ist nicht proportional zu φ für $c_1 \neq c_2$. (Eine Bedingung für die Existenz des natürlich-reduktiven Zusammenhangs war, dass c_1 und $-c_2$ das gleiche Vorzeichen haben.)

Der Raum $\mathrm{SO}(3) \times \mathrm{SO}(3)/\mathrm{SO}(2)$

Wir betrachten den Raum $\mathrm{SO}(3) \oplus \mathrm{SO}(3)/\mathrm{SO}(2)$ mit der $\mathrm{SO}(2)$-Einbettung, die sich zusammensetzt aus

$$\mathrm{SO}(2) \ni A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \mapsto (A(t), A(t)^{-1})$$

und der diagonalen Standardeinbettung nach $\mathrm{SO}(3) \oplus \mathrm{SO}(3)$. Eine Basis von $\mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)$ ist $u_1 = E_{23}, u_2 = E_{31}, u_3 = E_{12}$ für den ersten Faktor, $v_1 = E_{23}, v_2 = E_{31}, v_3 = E_{12}$ für den zweiten Faktor. Die Kommutatorrelationen sind aus $[u_1, u_2] = u_3$ bzw. aus $[v_1, v_2] = v_3$ durch zyklische Vertauschung zu erhalten. Die Lie-Unteralgebra $\mathfrak{so}(2)$ der betrachteten Einbettung wird aufgespannt von $P := u_3 - v_3$. Wir geben eine Familie reduktiver Komplemente an: Sei $Q := c_1 u_3 + c_2 v_3$. Dann ist für alle reellen Werte c_1, c_2 mit $c_1 + c_2 \neq 0$ ein reduktives Komplement von $\mathfrak{so}(2)$ in $\mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)$ gegeben durch $\mathfrak{m} := \langle u_1, u_2, v_1, v_2, Q \rangle$. Wir setzen weiter $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$ voraus. (Man kann prüfen, dass für die so ausgeschlossenen reduktiven Komplemente keine natürlich-reduktive Metrik existiert.) Dann gilt

$$u_3 = \tfrac{c_2}{c_1+c_2}\left(P + \tfrac{1}{c_2}Q\right), v_3 = \tfrac{c_1}{c_1+c_2}\left(-P + \tfrac{1}{c_1}Q\right)\,.$$

Die Isotropiedarstellung ist

$$\mathrm{Ad}\, : \mathrm{SO}(2) \longrightarrow \mathrm{SO}(5), \quad A(t) \mapsto \mathrm{diag}(A(t), A(t)^{-1}, 1)\,.$$

Wir führen eine zweiparametrige Familie invarianter Metriken ein durch die Forderung, dass für $D_1, D_2 > 0$ eine Orthonormalbasis gegeben ist durch

$$e_1 = D_1 u_1, \quad e_2 = D_1 u_2, \quad e_3 = D_2 u_3, \quad e_4 = D_2 u_4, \quad e_5 = Q\,.$$

Der Vektor e_5 und die beiden 2-Formen $e_1 \wedge e_2$, $e_3 \wedge e_4$ sind invariant unter der Isotropiedarstellung Ad und damit global auf dem homogenen Raum definiert. Die nicht verschwindenden Kommutatorrelationen sind

$$[e_1, e_2] = D_1^2 \tfrac{c_2}{c_1+c_2}\left(P + \tfrac{1}{c_2}Q\right), \qquad [e_1, e_5] = -c_1 e_2, \quad [e_2, e_5] = c_1 e_1$$
$$[e_3, e_4] = D_2^2 \tfrac{c_1}{c_1+c_2}\left(-P + \tfrac{1}{c_1}Q\right), \quad [e_3, e_5] = -c_2 e_4, \quad [e_4, e_5] = c_2 e_3\,.$$

Die nicht verschwindenden Ausdrücke $U(e_j, e_l) = U(e_l, e_j)$ sind

$$U(e_1, e_5) = \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{D_1^2}{c_1+c_2} + c_1\right) e_2, \quad U(e_2, e_5) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{D_1^2}{c_1+c_2} - c_1\right) e_1$$
$$U(e_1, e_5) = \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{D_2^2}{c_1+c_2} + c_2\right) e_4, \quad U(e_1, e_5) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{D_2^2}{c_1+c_2} - c_2\right) e_3\,.$$

Eine natürlich-reduktive Metrik erhalten wir im Fall $U \equiv 0$, also für

$$D_1^2 = c_1(c_1 + c_2), \quad D_2^2 = c_2(c_1 + c_2)\,.$$

Diese Bedingung erfordert, dass die drei Zahlen c_1, c_1+c_2, c_2, also c_1 und c_2, das gleiche Vorzeichen haben. Die Torsion $T = -[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{m}}$ des natürlich-reduktiven Zusammenhangs einer solchen Metrik ist dann als 3-Form

$$T = -c_1 e_{125} - c_2 e_{345}\,.$$

Im Vergleich zum zuvor betrachteten Raum $\mathrm{SO}(3) \oplus \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$ haben wir hier jeweils ein anderes Vorzeichen beim Kommutator $[e_3, e_4]$ und bei dem Ausdruck für D_2^2. Bei der Torsion des natürlich-reduktiven Zusammenhangs führt das aber dazu, dass wir eben doch wieder die gleiche 3-Form erhalten. Ab dieser Stelle verhält sich alles wie beim letzten Raum $\mathrm{SO}(3)\oplus\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$: Die Krümmung des Zusammenhangs $\Lambda_{\mathfrak{m}} \equiv 0$ ist wieder

$$\mathcal{R} = -c_1 c_2 (e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) \otimes (e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4)\,.$$

Die Isotropiedarstellung $\mathrm{Ad} : \mathrm{SO}(2) \to \mathrm{SO}(5)$ liftet sich zu $\widetilde{\mathrm{Ad}} : \mathrm{SO}(2) \to \mathrm{Spin}(5)$, und zwar

$$\widetilde{\mathrm{Ad}}\,(A(t)) = \left(\cos\tfrac{t}{2} + \sin\tfrac{t}{2} e_1 e_2\right)\left(\cos\tfrac{t}{2} - \sin\tfrac{t}{2} e_3 e_4\right)\,.$$

Die Untersuchung der Spinorfelder verläuft genau wie beim letzten Raum, und wir erhalten zwei lineare unabhängige parallele Spinoren für jeden der beschriebenen natürlich-reduktiven Zusammenhänge.

4 Die Twistor-Abschätzung auf Sasaki-Mannigfaltigkeiten

Wir wenden die bisherigen Erkenntnisse über Torsions-Killing-Spinoren in ungeraden Dimensionen auf die Eigenwertabschätzungen des Dirac-Operators $\not{D}$ an. Wir zeigen, dass die Killing-Spinoren mit Torsion, die wir durch eine D-homothetische Deformation einer Einstein-Metrik auf einer Sasaki-Mannigfaltigkeit konstruiert haben (Satz 2.22), Eigenspinoren von $\not{D}$ sind. Im fünfdimensionalen Fall sehen wir, dass ausreichend kleine Deformationen dabei zu Killing-Spinoren mit Torsion führen, die den kleinsten Eigenwert des Operators $\not{D}$ realisieren.

Im Folgenden ist $(M^{2k+1}, g, \xi, \eta, \varphi)$ immer eine Riemannsche Einstein-Sasaki-Mannigfaltigkeit mit den in Satz 2.13 beschriebenen Killing-Spinoren $\psi_1 \in \Gamma(L_1)$ und $\psi_2 \in \Gamma(L_2)$. Die Struktur, die durch eine D-homothetische Deformation der Metrik g entsteht, ist $(M^{2k+1}, g_t, \xi_t, \eta_t, \varphi)$ und das Spinorbündel zur Metrik g_t ist $\widetilde{\Sigma}$ (vgl. Lemma 2.19 und Lemma 2.20). Aus den Spinoren $\psi_1 \in \Gamma(L_1(\Sigma))$ und $\psi_2 \in \Gamma(L_2(\Sigma))$ erhalten wir dabei die Spinoren $\widetilde{\psi}_1 \in \Gamma(L_1(\widetilde{\Sigma}))$ und $\widetilde{\psi}_2 \in \Gamma(L_2(\widetilde{\Sigma}))$. Die antisymmetrische Torsion ist durch die 3-Form $T^{g_t} = \eta_t \wedge d\eta_t$ gegeben.

Sasaki-Mannigfaltigkeiten beliebiger ungerader Dimension

Die Spinoren $\widetilde{\psi}_1 \in \Gamma(L_1(\widetilde{\Sigma}))$ und $\widetilde{\psi}_2 \in \Gamma(L_2(\widetilde{\Sigma}))$ sind für alle Deformationsparameter $t > 0$ Eigenspinoren des Riemannschen Dirac-Operators D^{g_t}, der Torsion T^{g_t} und des Dirac-Operators mit Torsion $\not{D}^t := D^{g_t} + \frac{1}{4}T^{g_t}$:

Lemma 4.1.
Ist $(M^{2k+1}, g, \xi, \eta, \varphi)$ eine Riemannsche Einstein-Sasaki-Mannigfaltigkeit mit den Killing-Spinoren $\psi_1 \in \Gamma(L_1(\Sigma))$ und $\psi_2 \in \Gamma(L_2(\Sigma))$ und $e_j = e_j(t)$ ein lokales Orthonormalreper bezüglich der Metrik g_t mit $e_{2j} = \varphi(e_{2j-1})$, $e_{2k+1} = \xi_t$, dann ist die Beziehung zwischen dem Riemannschen Dirac-Operator D^g und dem Riemannschen Dirac-Operator D^{g_t} für einen beliebigen Spinor $\psi \in \Gamma(\Sigma)$ gegeben durch

$$D^{g_t}\widetilde{\psi} = \tfrac{1}{\sqrt{t}}\widetilde{D^g\psi} + \left(\tfrac{1}{t} - \tfrac{1}{\sqrt{t}}\right)\xi_t\widetilde{\nabla^g_\xi\psi} + \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{\sqrt{t}} - 1\right)^2 \sum_{j=1}^{2k+1} e_j\varphi(e_j)\xi_t\widetilde{\psi}\,.$$

Sei der Wert von $\varepsilon \in \{+1, -1\}$ derart gewählt, dass für alle $\psi \in \Sigma$ gilt

$$e_1\varphi(e_1)e_2\varphi(e_2)...e_k\varphi(e_k)\xi\psi = \varepsilon i^{k+1}\psi\,.$$

Die Spinoren $\widetilde{\psi}_1 \in \Gamma(L_1(\widetilde{\Sigma}))$ und $\widetilde{\psi}_2 \in \Gamma(L_2(\widetilde{\Sigma}))$ sind für alle Parameter $t > 0$ Eigenspinoren des Riemannschen Dirac-Operators D^{g_t}. Es gilt

$$D^{g_t}\widetilde{\psi}_1 = -\tfrac{\varepsilon}{2}\left(\tfrac{k+1}{t} + k\right)\widetilde{\psi}_1, \quad D^{g_t}\widetilde{\psi}_2 = (-1)^k\tfrac{\varepsilon}{2}\left(\tfrac{k+1}{t} + k\right)\widetilde{\psi}_2\,.$$

Die Spinoren $\widetilde{\psi}_1$ und $\widetilde{\psi}_2$ sind für alle Parameter $t > 0$ Eigenspinoren der Torsion $T^{g_t} = \eta_t \wedge d\eta_t$. Es gilt

$$T^{g_t}\widetilde{\psi}_1 = \varepsilon 2k\widetilde{\psi}_1, \quad T^{g_t}\widetilde{\psi}_2 = (-1)^{k+1}\varepsilon 2k\widetilde{\psi}_2\,.$$

Damit sind die Spinoren $\widetilde{\psi}_1$ und $\widetilde{\psi}_2$ für alle Parameter $t > 0$ Eigenspinoren des Dirac-Operators $D^{s,t} = D^{g_t} + 3sT^{g_t}$ zum Zusammenhang $\nabla^{s,t} = \nabla^{g_t} + 2sT^{g_t}$:

$$D^{s,t}\widetilde{\psi}_1 = -\tfrac{\varepsilon}{2}\left((1+\tfrac{1}{t}-12s)k+\tfrac{1}{t}\right)\widetilde{\psi}_1, \quad D^{s,t}\widetilde{\psi}_2 = (-1)^k\tfrac{\varepsilon}{2}\left((1+\tfrac{1}{t}-12s)k+\tfrac{1}{t}\right)\widetilde{\psi}_2\,.$$

Insbesondere gilt für den Operator $\not{D}^t$ des Zusammenhangs $\nabla^{s,t}$ zum Parameter $s = \frac{1}{12}$:

$$\not{D}^t\widetilde{\psi}_1 = -\tfrac{\varepsilon}{2}\tfrac{1}{t}(k+1)\widetilde{\psi}_1, \quad \not{D}^t\widetilde{\psi}_2 = (-1)^k\tfrac{\varepsilon}{2}\tfrac{1}{t}(k+1)\widetilde{\psi}_2\,.$$

Unter Berücksichtigung von $\mathrm{Scal}^{g_t} = 2k\left(2(k+1)\frac{1}{t}-1\right)$ lassen sich diese Eigenwerte auch schreiben als

$$\not{D}^t\widetilde{\psi}_1 = -\tfrac{\varepsilon}{4}\left(\tfrac{1}{2k}\mathrm{Scal}^{g_t}+1\right)\widetilde{\psi}_1, \quad \not{D}^t\widetilde{\psi}_2 = (-1)^k\tfrac{\varepsilon}{4}\left(\tfrac{1}{2k}\mathrm{Scal}^{g_t}+1\right)\widetilde{\psi}_2\,.$$

Beweis. Wir berechnen mit Hilfe der Ergebnisse von Lemma 2.20 den Riemannschen Dirac-Operator zur deformierten Metrik g_t:

$$\begin{aligned}
D^{g_t}\widetilde{\psi} &= \sum_{j=1}^{2k+1} e_j\nabla^{g_t}_{e_j}\widetilde{\psi}\\
&= \sum_{j=1}^{2k+1} e_j(\widetilde{\nabla^g_{e_j}\psi}+\tfrac{1}{2}a_{e_j}\widetilde{\psi})\\
&= \tfrac{1}{\sqrt{t}}\sum_{j=1}^{2k+1} e_j(\widetilde{\nabla^g_{\sqrt{t}e_j}\psi}) + \left(\tfrac{1}{t}-\tfrac{1}{\sqrt{t}}\right)\xi_t\widetilde{\nabla^g_\xi\psi} + \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{2k+1} e_j a_{e_j}\widetilde{\psi}\\
&= \tfrac{1}{\sqrt{t}}\widetilde{D^g\psi} + \left(\tfrac{1}{t}-\tfrac{1}{\sqrt{t}}\right)\xi_t\widetilde{\nabla^g_\xi\psi} + \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{t}-1\right)\xi_t\sum_{j=1}^{2k+1} e_j\varphi(e_j)\widetilde{\psi} + \tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{\sqrt{t}})\sum_{j=1}^{2k+1} e_j\varphi(e_j)\xi_t\widetilde{\psi}\\
&= \tfrac{1}{\sqrt{t}}\widetilde{D^g\psi} + \left(\tfrac{1}{t}-\tfrac{1}{\sqrt{t}}\right)\xi_t\widetilde{\nabla^g_\xi\psi} + \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{\sqrt{t}}-1\right)^2\sum_{j=1}^{2k+1} e_j\varphi(e_j)\xi_t\widetilde{\psi}\,.
\end{aligned}$$

Für den Spinor $\widetilde{\psi}_1$ folgt hieraus:

$$\begin{aligned}
D^{g_t}\widetilde{\psi}_1 &= -\tfrac{\varepsilon}{2\sqrt{t}}(2k+1)\widetilde{\psi}_1 + \left(\tfrac{1}{t}-\tfrac{1}{\sqrt{t}}\right)\tfrac{\varepsilon}{2}\xi_t\xi_t\widetilde{\psi}_1 + \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{\sqrt{t}}-1\right)^2\varepsilon i2ki\widetilde{\psi}_1\\
&= -\tfrac{\varepsilon}{2}\left(\tfrac{1}{\sqrt{t}}(2k+1)+\tfrac{1}{t}-\tfrac{1}{\sqrt{t}}+k\left(\tfrac{1}{\sqrt{t}}-1\right)^2\right)\widetilde{\psi}_1\\
&= -\tfrac{\varepsilon}{2}\left(\tfrac{k+1}{t}+k\right)\widetilde{\psi}_1\,.
\end{aligned}$$

Für den Spinor $\widetilde{\psi}_2$ folgt analog:

$$D^{g_t}\widetilde{\psi}_2 = \varepsilon\tfrac{(-1)^k}{2}(\tfrac{k+1}{t}+k)\widetilde{\psi}_2\,.$$

Die Wirkung der Torsion $T^{g_t} = \eta_t\wedge d\eta_t$ auf $\widetilde{\psi}_1$ und auf $\widetilde{\psi}_2$ haben wir bereits in Lemma 2.21 beschrieben. Die entsprechenden Werte der Operatoren $D^{s,t}$ und $\not{D}^t$ berechnet man damit sofort. Der angegebene Ausdruck für die Skalarkrümmung Scal^{g_t} ergibt sich aus Lemma 2.19 und aus der Skalarkrümmung $\mathrm{Scal}^g = 2k(2k+1)$ der undeformierten Einstein-Metrik. □

Auf einer kompakten Sasaki-Mannigfaltigkeit $(M^{2k+1}, g, \xi, \eta, \varphi)$ mit Spinorbündel Σ und der Torsion $T = \eta\wedge d\eta$ gilt $\|T\|^2 = 4k$. Mit ähnlichen Überlegungen wie im Beweis von Lemma 2.12 lassen sich alle Eigenwerte der Torsion T berechnen, und man sieht, dass $\mu^2 = 4k^2$ der maximale Wert des Quadrats eines Torsionseigenwertes ist.

Die universelle Eigenwertabschätzung aus Lemma 1.5 liefert dann für einen beliebigen Eigenwert λ des Operators $\not{D}^2$

$$\lambda \geq \tfrac{1}{4}\mathrm{Scal}^g_{\min} - \tfrac{1}{2}(2k-1)k,$$

und die Twistor-Abschätzung aus Korollar 1.9 besagt

$$\lambda \geq \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8k}\right)\mathrm{Scal}^g_{\min} - \tfrac{1}{2}(2k+1)k\,.$$

Man prüft, dass die Twistor-Abschätzung stärker als die universelle Abschätzung ist, wenn für die Skalarkrümmung $\mathrm{Scal}^g_{\min} > 8k^2$ gilt.

Wir untersuchen diese beiden Abschätzungen mit Hilfe von Lemma 4.1 auf einer Mannigfaltigkeit $(M^{2k+1}, g_t, \xi_t, \eta_t, \varphi)$ mit der Torsion $T^{g_t} = \eta_t \wedge d\eta_t$, die aus einer Einstein-Sasaki-Mannigfaltigkeit $(M^{2k+1}, g, \xi, \eta, \varphi)$ durch eine D-homothetische Deformation der Metrik mit dem Parameter $t > 0$ entsteht. Es gilt hier $\mathrm{Scal}^{g_t} = \frac{2k}{t}(2k+2-t)$. Die universelle Eigenwertabschätzung liefert für einen beliebigen Eigenwert λ des Operators $(\not{D}^t)^2$ hier

$$\lambda(\not{D}^t)^2 \geq \tfrac{k}{t}(k(1-t)+1)\,.$$

Die Twistor-Abschätzung für einen Eigenwert λ des Operators $(\not{D}^t)^2$ ist

$$\lambda(\not{D}^t)^2 \geq \tfrac{2k+1}{4t}((2k+1)(1-t)+1)\,.$$

In Übereinstimmung mit Satz 2.22 erhalten wir für die Spinoren $\widetilde{\psi}_1$ und $\widetilde{\psi}_2$:

- Für $t = \frac{k+1}{2k}$ sind $\widetilde{\psi}_1$ und $\widetilde{\psi}_2$ parallel bezüglich des Zusammenhangs $\nabla^c = \nabla^{g_t} + \frac{1}{2}T^{g_t}$. In diesem Fall tritt bei der universellen Eigenwertabschätzung die Gleichheit auf den Bündeln Σ_μ mit $\mu^2 = 4k^2$ ein, und zwar wird die Gleichheit realisiert durch $\not{D}^t\widetilde{\psi}_1 = -\varepsilon k\widetilde{\psi}_1$ und $\not{D}^t\widetilde{\psi}_2 = \varepsilon k\widetilde{\psi}_2$.

- Für $t = \frac{k+1}{2k+1}$ sind $\widetilde{\psi}_1$ und $\widetilde{\psi}_2$ Torsions-Killing-Spinoren zum Abschätzungsparameter $s_{\mathrm{tw}} = \frac{n-1}{4(n-3)} = \frac{k}{4(k-1)}$. In diesem Fall tritt in der twistoriellen Abschätzung die Gleichheit auf den Bündeln Σ_μ mit $\mu^2 = 4k^2$ ein, und zwar wird die Gleichheit realisiert durch $\not{D}^t\widetilde{\psi}_1 = -\frac{\varepsilon}{2}(2k+1)\widetilde{\psi}_1$ und $\not{D}^t\widetilde{\psi}_2 = \frac{\varepsilon}{2}(2k+1)\widetilde{\psi}_2$.

Es existieren also in allen ungeraden Dimensionen Fälle, in denen die Twistor-Abschätzung des Operators $\not{D}$ optimal wird.

Sasaki-Mannigfaltigkeiten der Dimension fünf

Wir behandeln speziell den Fall einer fünfdimensionalen Sasaki-Mannigfaltigkeit $(M^5, g, \xi, \eta, \varphi, \Sigma)$ mit der Torsion $T = \eta \wedge d\eta$. Hier steht uns zusätzlich die Abschätzung aus [AFK08] zur Verfügung. Es gilt $\|T\|^2 = 8$. Die Zahlen 4 und -4 sind einfache Eigenwerte der Torsion, und 0 ist ein zweifacher Eigenwert. Da die Operatoren $\not{D} = D^g + \frac{1}{4}T$ und D^g auf dem Bündel Σ_0 übereinstimmen, gilt

$$\lambda_{\min}(\not{D}^2|_{\Sigma_0}) \geq \lambda_{\min}(D^g)\,.$$

In [AFK08, Prop. 4.1] wurde gezeigt, dass unter der Voraussetzung $\mathrm{Scal}^g_{\min} > -4$ gilt:

$$\lambda_{\min}(\not{D}^2|_{\Sigma_0}) \geq \lambda_{\min}(\not{D}^2|_{\Sigma_{\pm 4}})\,.$$

Eine besondere Schranke ist dann $\frac{1}{16}\left(1+\frac{1}{4}\mathrm{Scal}^g\right)^2$, und zwar wurde in derselben Arbeit bewiesen: Liegt $\lambda_{\min}(\not{D}^2|_{\Sigma_{\pm 4}})$ unterhalb dieses Wertes,

$$\lambda_{\min}(\not{D}^2|_{\Sigma_{\pm 4}}) < \frac{1}{16}\left(1+\frac{1}{4}\mathrm{Scal}^g\right)^2 ,$$

dann folgt $\lambda_{\min}(\not{D}^2|_{\Sigma_0}) = \lambda_{\min}(\not{D}^2|_{\Sigma_{\pm 4}})$. Da sich $\lambda_{\min}(\not{D}^2|_{\Sigma_0})$ nach der vorherigen Bemerkung durch den Wert der Friedrichschen Ungleichung, d. h. $\frac{5}{16}\mathrm{Scal}^g_{\min}$, nach unten abschätzen lässt, erhalten wir

$$\lambda_{\min}(\not{D}^2|_{\Sigma_{\pm 4}}) \geq \min\left\{\frac{1}{16}\left(1+\frac{1}{4}\mathrm{Scal}^g_{\min}\right)^2, \frac{5}{16}\mathrm{Scal}^g_{\min}\right\} .$$

Insgesamt lautet die in [AFK08] bewiesene Deformationsabschätzung:

$$\lambda_{\min}(\not{D}^2|_{\Sigma_{\pm 4}}) \geq \begin{cases} \frac{1}{16}\left(1+\frac{1}{4}\mathrm{Scal}^g_{\min}\right)^2, & \text{falls } -4 < \mathrm{Scal}^g_{\min} \leq 4(4\sqrt{5}+9) \\ \frac{5}{16}\mathrm{Scal}^g_{\min}, & \text{falls } 4(4\sqrt{5}+9) \leq \mathrm{Scal}^g_{\min} . \end{cases}$$

Des Weiteren wurde in der genannten Arbeit gezeigt: Der Abschätzung $\frac{1}{16}\left(1+\frac{1}{4}\mathrm{Scal}^g_{\min}\right)^2$ ist im Bereich $-4 < \mathrm{Scal}^g_{\min} \leq 4(4\sqrt{5}+9)$ optimal, und zwar wird der Gleichheitsfall genau dann realisiert, wenn die Metrik eine η-Einstein-Metrik ist. Die Spinoren des Gleichheitsfalls wurden als parallele Spinoren eines gewissen, mit einem symmetrischen Endomorphismus S deformierten, spinoriellen Zusammenhangs $\nabla^c_X - \frac{1}{2}(XS+SX)$ beschrieben.

Eine Metrik auf einer fünfdimensionalen Sasaki-Mannigfaltigkeit ist genau dann eine η-Einstein-Metrik, deren Skalarkrümmung größer als -4 ist, wenn sie durch eine D-homothetische Deformation g_t der Metrik aus einer Einstein-Metrik g entsteht (s. Abschnitt 2.2). Da dann $\mathrm{Scal}^{g_t} = 4\left(\frac{6}{t}-1\right)$ gilt, ist die Bedingung $\mathrm{Scal}^{g_t}_{\min} \leq 4(4\sqrt{5}+9) \approx 77,78$ äquivalent dazu, dass der Deformationsparameter $t \geq \frac{3}{5+2\sqrt{5}} \approx 0,32$ erfüllt. Tatsächlich sehen wir mit den Ergebnissen des vorherigen Lemmas 4.1, dass die von uns konstruierten Spinoren $\widetilde{\psi}_1$ und $\widetilde{\psi}_2$ den Eigenwert $\frac{1}{16}\left(1+\frac{1}{4}\mathrm{Scal}^g_{\min}\right)^2$ von $\not{D}^2$ realisieren: Es gilt

$$T^{g_t}\widetilde{\psi}_1 = \varepsilon 4\widetilde{\psi}_1, \quad \mathrm{Scal}^{g_t} = 4\left(\tfrac{6}{t}-1\right), \quad \not{D}^t\widetilde{\psi}_1 = -\varepsilon\tfrac{3}{2t}\widetilde{\psi}_1 = -\tfrac{\varepsilon}{4}\left(\tfrac{1}{4}\mathrm{Scal}^{g_t}+1\right)\widetilde{\psi}_1 .$$

Für alle Parameter $t > \frac{3}{5+2\sqrt{5}} \approx 0,32$ realisieren die Spinoren $\widetilde{\psi}_1$ und $\widetilde{\psi}_2$ also den kleinsten Eigenwert des Operators $\not{D}$.

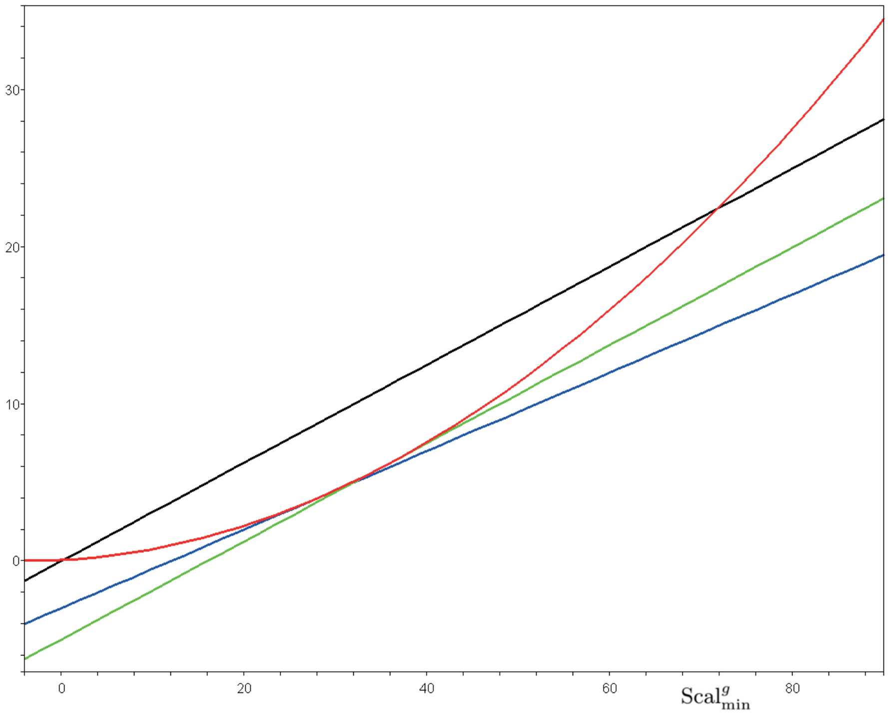
Wir fassen ein paar Gedanken zusammen und bemerken:

- Diese Interpretation der Spinoren des Gleichheitsfalls in der Deformationsabschätzung als Killing-Spinoren eines Zusammenhangs mit antisymmetrischer Torsion ist neu. Eine Beziehung zwischen diesem Zusammenhang mit antisymmetrischer Torsion und dem spinoriellen Zusammenhang $\nabla^c_X - \frac{1}{2}(XS+SX)$ aus [AFK08], für den die Grenzspinoren der Abschätzung parallel sind, ist nicht offensichtlich.

- Im Fall $t < \frac{3}{5+2\sqrt{5}}$ wissen wir, dass $\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4}\mathrm{Scal}^{g_t}_{\min}\right)$ immer noch ein Eigenwert des Operators $\not{D}^t$ ist, aber bisher können wir in diesem Bereich keine Aussage darüber treffen, ob dieser Eigenwert minimal ist. Es ist aber nicht anzunehmen, dass die Spinoren $\widetilde{\psi}_1$ und $\widetilde{\psi}_2$ für alle Parameter t den kleinsten Eigenwert von $\not{D}^t$ realisieren. Auch wenn sich die Eigenwerte eines Operators stetig unter einer Deformation ändern, können sich die Funktionen ihrer Werte so schneiden, dass die Eigenwerte ihre Reihenfolge tauschen.

- Die Vermutung liegt nahe, dass die Spinoren $\widetilde{\psi}_1$ und $\widetilde{\psi}_2$ auch in höheren Dimensionen für einen Bereich des Parameters t den kleinsten Eigenwert des Operators $\not{D}$ annehmen. Bisher haben wir für beliebige Dimensionen $2k+1$ aber nur durch die universelle Abschätzung und durch die Twistor-Abschätzung das Wissen, dass dies für $t = \frac{k+1}{2k}$ und für $t = \frac{k+1}{2k+1}$ der Fall ist.

Zuletzt illustrieren wir noch mit einem Bild die Eigenwertabschätzungen des Operators $\not{D}^2$ auf einer fünfdimensionalen kompakten Sasaki-Mannigfaltigkeit $(M^5, g, \xi, \eta, \varphi)$ mit Spinorbündel Σ und Torsion $T = \eta \wedge d\eta$.



(blaue Linie)	die universelle Abschätzung	$\frac{1}{4}\mathrm{Scal}^g_{\mathrm{min}} - 3$
(grüne Linie)	die Twistor-Abschätzung	$\frac{5}{16}\mathrm{Scal}^g_{\mathrm{min}} - 5$
(schwarze Linie)	Friedrichs Abschätzung	$\frac{5}{16}\mathrm{Scal}^g_{\mathrm{min}}$
(rote Linie)	der „Deformationswert“	$\frac{1}{16}\left(1 + \frac{1}{4}\mathrm{Scal}^g_{\mathrm{min}}\right)^2$.

Der rot dargestellte Wert $\frac{1}{16}\left(1 + \frac{1}{4}\mathrm{Scal}^g_{\mathrm{min}}\right)^2$, der auf η-Einstein-Mannigfaltigkeiten als Eigenwert angenommen wird, ist von $\mathrm{Scal}^g_{\mathrm{min}} = -4$ (Beginn des Schaubildes) bis zum Schnittpunkt mit Friedrichs Abschätzung bei $\mathrm{Scal}^g_{\mathrm{min}} = 4(4\sqrt{5} + 4) \approx 71,78$ der kleinste Eigenwert des Operators $\not{D}^2$. Jenseits dieses Punktes ist der Wert von Friedrichs Abschätzung die beste bekannte untere Schranke für den kleinsten Eigenwert von $\not{D}^2$.
Die universelle Eigenwertabschätzung stimmt für $\mathrm{Scal}^g_{\mathrm{min}} = 28$ mit dem rot dargestellten Wert $\frac{1}{16}\left(1 + \frac{1}{4}\mathrm{Scal}^g_{\mathrm{min}}\right)^2$ überein. Die Twistor-Abschätzung stimmt für $\mathrm{Scal}^g_{\mathrm{min}} = 36$ mit $\frac{1}{16}\left(1 + \frac{1}{4}\mathrm{Scal}^g_{\mathrm{min}}\right)^2$ überein. Wenn $\mathrm{Scal}^g_{\mathrm{min}} > 32$ gilt, liefert die Twistor-Abschätzung einen besseren Wert als die universelle Abschätzung.

Bezeichnungen

M^n	eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n
g	eine Riemannsche Metrik, falls nicht explizit eine andere Signatur genannt ist
TM	das Tangentialbündel der Mannigfaltigkeit M
$\Gamma(TM)$	ein glatter Schnitt im Bündel TM, d. h. ein glattes Vektorfeld
X, Y	Standardbezeichnung für Elemente von TM oder $\Gamma(TM)$
e_j	ein lokales Orthonormalreper $e_1, e_2, ..., e_n$ bezüglich der betrachteten Metrik
Σ	ein Spinorbündel einer Mannigfaltigkeit (M^n, g)
$\Gamma(\Sigma)$	ein glatter Schnitt im Bündel Σ, d. h. ein glattes Spinorfeld
ψ	Standardbezeichnung für ein Element von Σ oder $\Gamma(\Sigma)$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ oder Hermitesche Standardskalarprodukt auf dem Spinorbündel Σ
∇^g	der Levi-Civita-Zusammenhang der Metrik g
$\mathcal{R}^g$	der Krümmungstensor des Zusammenhangs ∇^g
Ric^g	der Ricci-Tensor des Zusammenhangs ∇^g
Scal^g	die Skalarkrümmung des Zusammenhangs ∇^g
D^g	der Riemannsche Dirac-Operator des Zusammenhangs ∇^g
Δ^g	der spinorielle Laplace-Operator des Zusammenhangs ∇^g
∇	eine kovariante Ableitung
∇^c	eine metrische kovariante Ableitung mit antisymmetrischer Torsion T, meist mit der Voraussetzung $\nabla^c T \equiv 0$
T	eine 3-Form, meist als antisymmetrische Torsion eines metrischen Zusammenhangs interpretiert
T^2	das Quadrat der 3-Form T in der Clifford-Algebra
$\lVert T \rVert^2$	der skalare Anteil der Wirkung von T^2
$\lVert T \rVert$	$\lVert T \rVert := \sqrt{\lVert T \rVert^2}$
μ	ein Eigenwert des Spinor-Endomorphismus T
σ_T	die 4-Form $\sigma_T = \frac{1}{2} \sum_j (e_j \lrcorner T) \wedge (e_j \lrcorner T)$

∇^s	$\nabla^s_X Y := \nabla^g_X Y + 2sT(X,Y)$
D^s	der Dirac-Operator des Zusammenhangs ∇^s
Δ^s	der spinorielle Laplace-Operator des Zusammenhangs ∇^s
$\not{D}$	der Dirac-Operator D^s für $s = 1/12$, für welchen $\not{D} = D^g + \frac{1}{4}T$ gilt
P^g	der Riemannsche Twistor-Operator
P^s	der Twistor-Operator des Zusammenhangs ∇^s
s_{tw}	der „Abschätzungsparameter“ $s_{\mathrm{tw}} = \frac{n-1}{4(n-3)}$, der bei der Twistor-Abschätzung des Operators $\not{D}^2$ auftritt
ξ	das spezielle Vektorfeld einer metrischen Fast-Kontakt-Struktur
η	die zu ξ gehörige 1-Form $\eta = g(\xi, \cdot)$
φ	der Endomorphismus des Tangentialbündels einer metrischen Fast-Kontakt-Struktur, für den $\varphi^2 = -\mathrm{Id}_{TM} + \xi \otimes \eta$ und $g(\varphi(X), \varphi(Y)) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$ gilt
L_1	das komplexe eindimensionale Bündel, das auf einer Mannigfaltigkeit (M^n, g) mit Spinorbündel Σ und metrischer Fast-Kontakt-Struktur (ξ, φ) definiert ist durch $L_1 := \{\, \psi \in \Sigma \,\vert\, \varphi(X)\psi = -iX\psi \ \forall\, X \perp \xi \,\}$
L_2	analog zu L_1 definiert, und zwar $L_2 := \{\, \psi \in \Sigma \,\vert\, \varphi(X)\psi = iX\psi \ \forall\, X \perp \xi \,\}$

Literaturverzeichnis

[Agr03] I. Agricola: *Connections on naturally reductive spaces, their Dirac operator and homogeneous models in string theory*, Comm. Math. Phys. 232 (2003), 535–563.

[ABBK] I. Agricola, J. Becker-Bender, H. Kim: *Twistorial eigenvalue estimates for generalized Dirac operators with torsion*, submitted.

[AgFr04] I. Agricola, Th. Friedrich: *On the holonomy of connections with skew-symmetric torsion*, Math. Ann. 328 (2004), 711–748.

[AgFr10] I. Agricola, Th. Friedrich: *A note on flat metric connections with antisymmetric torsion*, Diff. Geom. Appl. 28 (2010), 480–487.

[AFK08] I. Agricola, Th. Friedrich, M. Kassuba: *Eigenvalue estimates for Dirac operators with parallel characteristic torsion*, Diff. Geom. Appl. 26 (2008), 613–624.

[AFS05] B. Alexandrov, Th. Friedrich, N. Schoemann: *Almost hermitian 6-manifolds revisited*, Journ. Geom. Phys. 53 (2005), 1–30.

[AtSi63] M. F. Atiyah, I. M. Singer: *The index of elliptic operators on compact manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963), 422-433.

[Bär93] Ch. Bär: *Real Killing spinors and holonomy*, Comm. Math. Phys. 154 (1993), 509–521.

[BFGK91] H. Baum, Th. Friedrich, R. Grunewald, I. Kath: *Twistors and Killing spinors on Riemannian manifolds*, Teubner-Texte zur Mathematik, Band 124, Teubner Stuttgart/Leipzig (1991).

[Bis89] J. M. Bismut: *A local index theorem for non-Kählerian manifolds*, Math. Ann. 284 (1989), 681–699.

[BGM06] C. P. Boyer, K. Galicki, P. Matzeu: *On Eta-Einstein Sasakian geometry*, Comm. Math. Phys. 262 (2006), 177–208.

[Bla02] D. E. Blair: *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds*, Progress in Mathematics vol. 203, Birkhäuser Boston (2002).

[Boh98] Ch. Bohle: *Killing and twistor spinors on Lorentzian manifolds*, Diploma thesis, Freie Universität Berlin, advisor H. Baum (1998).

[CaSch26] E. Cartan, J. A. Schouten: *On Riemannian manifolds admitting an absolute parallelism*, Proc. Amsterdam 29 (1926), 933–946.

[Dir28a] P. A. M. Dirac: *The Quantum Theory of the Electron. Part I*, Proc. R. Soc. London A 117 (1928), 610–624.

[Dir28b] P. A. M. Dirac: *The Quantum Theory of the Electron. Part II*, Proc. R. Soc. London A 118 (1928), 351–361.

[Fer10] A. C. Ferreira: *Riemannian Geometry with Skew Torsion*, D. Phil. thesis, University of Oxford, advisor N. Hitchin (2010).

[Fri80] Th. Friedrich: *Der erste Eigenwert des Dirac-Operators einer kompakten, Riemannschen Mannigfaltigkeit nichtnegativer Skalarkrümmung*, Math. Nachr. 97 (1980), 117–146.

[FrIv02] Th. Friedrich, S. Ivanov: *Parallel spinors and connections with skew-symmetric torsion in string theory*, Asian J. Math. 6 (2002), 303–336.

[FrIv03] Th. Friedrich, S. Ivanov: *Almost contact manifolds, connections with torsion and parallel spinors*, J. Reine Angew/ Math. 559 (2003), 217–236.

[FrKa88] Th. Friedrich, I. Kath: *Variétés riemanniennes compactes de dimension 7 admettant des spineurs de Killing* C.R. Acad. Sci. Paris 307 (1988), 967–969.

[FrKa89] Th. Friedrich, I. Kath: *Einstein manifolds of dimension five with small first eigenvalue of the Dirac operator*, J. Diff. Geom. 29 (1989), 263–279.

[FrKa90] Th. Friedrich, I. Kath: 7*-dimensional compact Riemannian manifolds with Killing spinors* Commun. Math. Phys. 133 (1990), 543–561.

[FrKi00] Th. Friedrich, E. C. Kim: *The Einstein-Dirac Equation on Riemannian Spin Manifolds* Journ. Geom. Phys. 33 (2000), 128–172.

[FKMS97] Th. Friedrich, I. Kath, A. Moroianu, U. Semmelmann: *On nearly parallel G_2-structures* J. Geom. Phys. 3 (1997), 256–286.

[Gau97] P. Gauduchon: *Hermitian connections and Dirac operators*, Boll. Un. Mat. Ital. ser. VII 2 (1997), 257–289.

[Gra70] A. Gray: *Nearly Kähler manifolds*, J. Differential Geom. 4 (1970), 283–309.

[Gru90] R. Grunewald: *Six-dimensional Riemannian manifolds with a real Killing spinor*, Ann. Glob. Anal. Geom. 8 (1990), 43–59.

[Hij86b] O. Hijazi: *Caractérisation de la sphère par les premières valeurs propres de l'opérateur de Dirac en dimension 3, 4, 7, et 8*, C. R. Acad. Sci. Paris 303 (1986), 417–419.

[Hij94/98] O. Hijazi: *Twistor operators and eigenvalues of the Dirac operator*, Proceedings of the Conference on Quaternionic-Khler Geometry (Trieste, 1994), Int. Sch. Adv. Stud. (SISSA), Trieste (1998), 151–174.

[HKWY10] T. Houri, D. Kubiznak, C. Warnick, Y. Yasui: *Symmetries of the Dirac operator with skew-symmetric torsion*, Class. Quant. Grav. 27 (2010), 185019; hep-th:1002.3616.

[IvPa01] S. Ivanov, G. Papadopoulos: *Vanishing theorems and string background*, Class. Quant. Grav. 18 (2001), 1089–1110.

[Jen75] G. Jensen: *Imbeddings of Stiefel manifolds into Grassmannians*, Duke Math. J. 42 (1975), 397–407.

[Kas09] M. Kassuba: *b*, Ann. Glob. Anal. Geom. 37 (2010), 33–71.

[Kat99] I. Kath: *Killing spinors on pseudo-Riemannian manifolds*, Habilitation thesis, Humboldt-Universität zu Berlin, (1999).

[Kiri77] V. F. Kirichenko, *K-spaces of maximal rank*, Mat. Zametki 22 (1977), 465–476.

[Kos99] B. Kostant: *A cubic Dirac operator and the emergence of Euler number multiplets of representations for equal rank subgroups*, Duke Math. J. 100 (1999), 447–501.

[KN1] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of differential geometry I*, Wiley Classics Library, Wiley Inc., Princeton (1963, 1991).

[KN2] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of differential geometry II*, Wiley Classics Library, Wiley Inc., Princeton (1969, 1996).

[KoVa85] O. Kowalski, L. Vanhecke: *Classification of five-dimensional naturally reductive spaces*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 97 (1985), 445–463.

[KoWe87] O. Kowalski, S. Wegrzynowski: *A classification of* 5*-dimensional* φ*-symmetric spaces*, Tensor, N. S. 46 (1987), 379–386.

[Lich63] A. Lichnerowicz: *Spineurs harmoniques*, C. R. Acad. Sci. Paris 257 (1963), 7–9.

[Lich87] A. Lichnerowicz: *Spin manifolds, Killing spinors and universality of the Hijazi inequality*, Lett. Math. Phys. 13 (1987), 331–344.

[Lich88] A. Lichnerowicz: *Les spineurs-twisteurs sur une variété spinorielle compacte*, C. R. Acad. Sci. Paris Série I 306 (1988), 381–385.

[Oku62] M. Okumura: *Some remarks on space with a certain contact structure*, Tôhoku Math. J. 14 (1962), 135–145.

[Pen86] R. Penrose, W. Rindler: *Spinors and space-time Vol.2: Spinor and twistor methods in space-time geometry*, Cambridge University Press (1986).

[Raj06] H. Rajaniemi: *Conformal Killing spinors in supergravity and related aspects of spin geometry*, D. Phil. thesis, University of Edinburgh, advisor J. M. Figueroa-O'Farrill (2006).

[Schr32] E. Schrödinger: *Diracsches Elektron im Schwerefeld I*, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Phys.-Math. Klasse 1932, Verlag der Akademie der Wissenschaften Berlin (1932), 137–156.

[Sem98] U. Semmelmann: *A short proof of eigenvalue estimates for the Dirac operator on Riemannian and Kähler manifolds*, Differential Geometry and its applications, proceedings, Brno (1998), 137–140.

[Tak78] T. Takahashi: *Deformations of Sasakian structures and its application to the Brieskorn manifolds*, Tôhoku Math. J. 30 (1978), 37–43.

[Tan67] S. Tanno: *Harmonic forms and Betti numbers of certain contact Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan 19 (1967), 308–316.

[Tan68] S. Tanno: *The topology of contact Riemannian manifolds*, Illinois Journ. Math. 12 (1968), 700–717.

[TrVa84] F. Tricerri, L. Vanhecke: *Naturally reductive homogeneous spaces and generalized Heisenberg groups*, Compositio Math. 52 (1984), 389–408.

English summary

On a compact Riemannian spin manifold (M^n, g), equipped with a metric connection ∇^c with skew torsion T, we consider the Dirac-operator $\not{D}$ that differs from the usual Riemannian Dirac-operator D^g by a torsion term, namely

$$\not{D} := D^g + \tfrac{1}{4}T\,.$$

As the square of this operator $\not{D}$ commutes with the action of the torsion T on spinors, it is possible to restrict the operator $\not{D}^2$ to the subbundle Σ_μ of the spinorbundle Σ that is the eigenspace of the torsion T to the eigenvalue μ. Using the twistor operator P^s of a connection $\nabla^s_X Y = \nabla^g_X Y + 2sT(X,Y)$, we give the following estimate for the smallest eigenvalue λ of the operator $\not{D}^2$ on the bundle Σ_μ:

$$\lambda\big(\not{D}^2\big|_{\Sigma_\mu}\big) \geq \tfrac{n}{4(n-1)}\mathrm{Scal}^g_{\min} + \tfrac{n(n-5)}{8(n-3)^2}\|T\|^2 - \tfrac{n(n-4)}{4(n-3)^2}\mu^2\,.$$

Equality occurs iff the following conditions are satisfied:

(1) The Riemannian scalar curvature Scal^g is constant,

(2) the eigenspinor $\psi_o \in \Gamma(\Sigma_\mu)$ is a twistor spinor of the connection ∇^s for $s = \frac{n-1}{4(n-3)}$.

For the smallest eigenvalue λ of the operator $\not{D}^2$ on the whole bundle Σ, it follows that

$$\lambda \geq \tfrac{n}{4(n-1)}\mathrm{Scal}^g_{\min} + \tfrac{n(n-5)}{8(n-3)^2}\|T\|^2 - \tfrac{n(n-4)}{4(n-3)^2}\max(\mu_1^2,\dots,\mu_k^2)$$

holds and equality occurs iff the following conditions are satisfied:

(1) The Riemannian scalar curvature Scal^g is constant,

(2) the eigenspinor $\psi_o \in \Gamma(\Sigma_\mu)$ is a twistor spinor of the connection ∇^s for $s = \frac{n-1}{4(n-3)}$,

(3) the eigenspinor ψ_o lies in the subbundle Σ_μ belonging to the greatest eigenvalue μ of T.

As a first example, we describe a certain homogeneous metric on the five-dimensional Stiefel manifold $V_2(\mathbb{R}^4) = \mathrm{SO}(4)/\mathrm{SO}(2)$ for which this twistor estimate becomes optimal and the spinors corresponding to the smallest eigenvalue are Killing spinors for the torsion-connection ∇^s to the parameter $s = \frac{n-1}{4(n-3)}$.

In the case of a compact four-dimensional Riemannian spin manifold, we compare the twistor estimate for the operator $\not{D}^2$ with other known estimates and decribe under which conditions the twistor estimate is an improvement.

While in general those twistor spinors with torsion that realise the equality in the twistor estimate do not have to be Killing spinors with torsion, we see that this is the case in dimension six. We go on to show that on a compact six-dimensional nearly Kähler manifold (M^6, g, J) with the unique metric connection ∇^c with skew torsion T that satisfies $\nabla^c J = 0$, the following classes of spinors coincide:

(1) Riemannian Killing spinors

(2) ∇^c-parallel spinors

(3) twistor spinors of the connection ∇^s for $s_{\mathrm{tw}} = \frac{5}{12}$ that lie in a bundle Σ_μ

(4) Killing spinors of the connection ∇^s for $s_{\mathrm{tw}} = \frac{5}{12}$ that lie in a bundle Σ_μ.

In the last part of our considerations of the six-dimensional case, we compare the different known estimates for the operator $\not{D}^2$ in the case of an almost hermitian manifold of strict type $\mathcal{W}_3$ with abelian reduced isotropy group of the torsion.

Motivated by the twistor estimate, we consider in general solutions of the Killing equation $\nabla^s_X\psi_o = \beta X\psi_o$ that are also eigenspinors of the torsion. On a metric almost contact manifold $(M^{2k+1}, g, \xi, \eta, \varphi)$ with the torsion $T = \eta \wedge d\eta$, we define two complex line bundles L_1 and L_2, and we give a curvature condition on the Ricci tensor for Killing spinors with torsion to exist in these bundles. We explain that a manifold fulfilling this curvature condition is related to either a Riemannian Einstein Sasaki manifold or to a semi-Riemannian Einstein Sasaki manifold with a Lorentz signature $(M^{2k+1}, g, \xi, \eta, \varphi)$ through a D-homothetic deformation of the metric given by

$$g_t := tg + (t^2 - t)\eta \otimes \eta, \quad t \neq 0\,.$$

The Killing spinors with torsion arise under this deformation of the metric from the Riemannian (respectively semi-Riemannian) Killing spinors that exist on a Einstein Sasaki manifold.

In the case of a five-dimensional Riemannian Sasaki manifold, we generalise the setting and look for solutions of the Killing equation $\nabla^s_X\psi_o = \beta X\psi_o$ that are also eigenspinors of the torsion T when the torsion is allowed to be any 3-form that is parallel with respect to the connection $\nabla^c := \nabla^g + 1/2\,T$. We show that with the exception of the cases $s = -3/4$ and $s = 1/4$, all solutions are again obtained as described before, i. e. through a D-homothetic deformation of an Einstein metric on a Sasaki manifold. In the case $s = 1/4$ there exist additonally three exceptional spaces. Locally, they are the following naturally reductive spaces: the five-dimensional Heisenberg group H^5, the space $\mathrm{SO}(3) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$, and the space $\mathrm{SO}(3) \oplus \mathrm{SO}(3)/\mathrm{SO}(2)$. We give an explicit description of these spaces and their special spinor fields.
In the case $s = -3/4$, solutions cannot be obtained through a D-homothetic deformation of an Einstein metric on a Sasaki manifold, but we are able to give an example on the five-dimensional Heisenberg group H^5.

We then return to the operator $\not{D}^2$ and the estimates for its smallest eigenvalue. We compare the twistor estimate to other known estimates on a Sasaki manifold, with special focus on dimension five. It turns out that the Killing spinors with torsion that we constructed earlier on certain Sasaki manifolds are eigenspinors of the operator $\not{D}$. In dimension five, we obtain for a restricted range of the scalar curvature the result that the eigenvalue of these Killing spinors with torsion is minimal.

Erklärung

Hiermit versichere ich an Eides statt, dass ich die Dissertationsschrift „Dirac-Operatoren und Killing-Spinoren mit Torsion" selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Insbesondere habe ich die wörtlich oder dem Sinne nach anderen Veröffentlichungen entnommenen Stellen kenntlich gemacht und angemessen zitiert.

Ich erkläre, dass ich die Arbeit erstmalig und nur an der Philipps-Universität Marburg einreiche und andernorts weder ein Promotionsverfahren eingeleitet noch erfolglos beendet habe.

Der Inhalt der dem Verfahren zugrundeliegenden Promotionsordnung („Promotionsordnung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fachbereiche und des Medizinischen Fachbereichs für seine mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer der Philipps-Universität Marburg vom 15.07.2009") ist mir bekannt.

Marburg, den 31. August 2012 Julia Becker-Bender