Die metaplektische Darstellung: Holomorphe Fortsetzung und Jordan-theoretische Realisierung

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

vorgelegt dem

Fachbereich Mathematik und Informatik

der Philipps-Universität Marburg

von

Dipl.-Math. Karina Beatriz Bischoff

aus Buenos Aires, Argentinien

Vom Fachbereich Mathematik und Informatik der Phillips-Universität Marburg
als Dissertation angenommen am: 07.05 2010
Erstgutachter: Herr Prof. Dr. Upmeier
Zweitgutachter: Herr Prof. Dr. Knöller

Tag der mündlichen Prüfung: 14.06.2010

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Diese Arbeit ist ein Beitrag zur sogenannten „geometrischen Quantisierung“, welche ein zentrales Gebiet der modernen Analysis, mit Querverbindungen zur mathematischen Physik, harmonischen Analysis und auch Zahlentheorie darstellt. In ihrer einfachsten Form ist dies die Quantisierung des symplektischen Phasenraumes $T^\sharp(\mathbb{R}^r)$ zum Hilbertzustandsraum $L^2(\mathbb{R}^r)$, die sogenannte *reelle* Wellendarstellung der Heisenberg-Gruppe. Äquivalent dazu ist die *komplexe* Wellendarstellung durch die Identifizierungen $T^\sharp(\mathbb{R}^r) \simeq \mathbb{C}^r$ und $L^2(\mathbb{R}^r) \simeq H^2(\mathbb{C}^r)$, dem Fock-Raum. Dies hat seinen physikalischen Ursprung in der Hamiltonschen Mechanik, in der die Bewegung der Zustände eines physikalischen Systems untersucht wird. Der Phasenraum, in dem diese dargestellt werden, ist eine symplektische Mannigfaltigkeit. Nach gegebenen Anfangswerten (Positions- und Impulskoordinaten) bestimmt die Hamiltonfunktion durch die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen, wie sich Position und Impuls der Teilchen mit der Zeit ändern. *Kanonische Transformationen* spielen hier eine bedeutsame Rolle, sie wandeln die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen in andere (oftmals einfachere) Gestalt, und sie sind genau die Transformationen, welche die Poisson-Klammer invariant lassen. Dies schafft den Übergang zur Quantenmechanik: Die Poisson-Klammern der Phasenraumkoordinaten, als Koordinatenfunktionen aufgefasst, entsprechen den kanonischen Vertauschungsrelationen der Quantenmechanik nach der Quantisierung. Diese besteht darin, die physikalischen klassischen Observablen (glatte Funktionen oder Distributionen auf dem Phasenraum) zu „quantisieren“, das heißt ihnen projektionswertige Borel-Maße in einem Hilbertraum quadratintegrierbarer Funktionen (der Zustandsraum des Quantensystems) zuzuordnen. Durch den Spektralsatz und Funktionalkalkül kann man diese Maße mit selbstadjungierten (im Allgemeinen nicht beschränkten) Operatoren auf dem Hilbertraum identifizieren. Die quantisierten klassischen Phasenraumkoordinaten (Positions- und Impulsfunktionen) sollen den Vertauschungsrelationen genügen, welche die Analogie zur fundamentalen Poisson-Klammer geben. Die quantisierte Hamiltonfunktion ist der Hamilton-Operator, der die Zeitentwicklung in der Quantenmechanik bestimmt.

Die *geometrische Quantisierung* ist eine moderne, mehr geometrische Verallgemeinerung der oben beschriebenen „kanonischen“ Quantisierung. Sie ist in den Begriffen der Differentialgeometrie formuliert und entspricht ebenfalls den drei Axiomen P. Diracs (sie ist reell linear, konstante Funktionen werden (bis auf Vielfache) auf die Identität abgebildet und die Poisson-Klammer klassischer Observablen wird auf den Kommutator der entsprechenden Operatoren überführt). Es ist nun wohlbekannt, dass die geometrische Quantisierung auf einer *Polarisierung* (zum Beispiel im Komplexen mittels holomorpher Funktionen) beruht. Das Hauptproblem ist dann: Inwiefern hängt die Quantisierung „nur" von der klassischen symplektischen Struktur ab, und nicht von der Polarisierung (d. h. von einer reellen Polarisierung $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^r$, bzw. komplexen Polarisierung $\mathbb{C}^r$)? Was passiert insbesondere unter den Automorphismen der Heisenberg-Gruppe, welche auf dem Zustandsraum operiert? Entscheidend ist hier die Tatsache, dass die Automorphismen der Heisenberg-Gruppe genau der reellen *symplektischen Gruppe* $\mathrm{Sp}(2r, \mathbb{R})$ entsprechen, und der „Modulraum" der komplexen Polarisierungen genau der *Siegelschen oberen Halbebene* $\mathrm{Sp}(2r, \mathbb{R})/\mathrm{U}(\mathbb{C}^r)$. (Wird statt $\mathbb{R}^{2r}$ ein Torus quantisiert, erhält man die wichtigen, lokalsymmetrischen Räume, die hier aber nicht im Vordergrund stehen).

Der Übergang zur Analysis führt zur *metaplektischen Darstellung* von $\mathrm{Sp}(2r, \mathbb{R})$ und der Oszillator-Halbgruppe von R. Howe, welche in der modernen Formulierung (Θ-Korrespondenz) auch in engem Zusammenhang zu automorphen Formen steht. Besonders aktuell sind dabei folgende drei Problemkreise:

I **Analytische Fortsetzung der metaplektischen Darstellung auf eine Unterhalbgruppe der Komplexifizierung $\mathbf{Sp}(2r, \mathbb{C})$**: Dies ist Teil des allgemeinen Gelfand-Gindikin-Programms, welches irreduzible Darstellungen einer halb-einfachen Lie-Gruppe G in Kegel bzw. Halbgruppen in $\mathrm{G}^{\mathbb{C}}$ zusammenfasst, welche mit Hilfe allgemeiner Cauchy-Integralformeln analysiert werden. Von Gelfand-Gindikin ist nur der Fall $r = 1$ (das heißt $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$) behandelt worden. Für beliebiges r gelingt in Teil I dieser Arbeit eine *direkte Realisierung der analytischen Fortsetzung der metaplektischen Darstellung* auf eine Unterhalbgruppe der $\mathrm{Sp}(2r, \mathbb{C})$. Die Schwierigkeit liegt hier in der Tatsache, dass die metaplektische Darstellung nur auf Erzeugern gegeben ist und die in der mathematischen Physik verwendeten Integraloperatoren deshalb nicht zur Verfügung stehen.

II **Jordan-theoretische Realisierung der metaplektischen Darstellung**: Der Modulraum G/K für eine halb-einfache Lie-Gruppe G hermiteschen Typs (und die maximal kompakte Untergruppe K) ist fundamental für die Theorie der automorphen Formen und insbesondere der Θ-Reihen. Diese Theorie ist durch die Koecher-Schule in den „richtigen" Rahmen der *Jordan-Algebren* gestellt worden, als Verallgemeinerung des klassischen Falls der reell symmetrischen Matrizen $\mathcal{H}_r(\mathbb{R})$. Somit stellt sich die Frage, ob auch die metaplektische Darstellung eine neue Realisierung mittels Jordan-Algebren besitzt, welche prinzipiell auf alle Jordan-Algebren (auch auf die Ausnahme Jordan-Algebra) verallgemeinert werden könnte. Wohlbekannt ist, dass der Konfigurationsraum $E = \mathbb{R}^r$ eine *(lineare) Darstellung* der Jordan-Algebra $\mathcal{H}_r(\mathbb{R})$ zulässt. Als zweites Hauptergebnis wird eine *„nicht-lineare“ Realisierung der metaplektischen Darstellung mittels einer Determinantenvarietät* $\mathbb{S}$ gegeben, welche in die Jordan-Algebra (genauer in die Komplexifizierung) eingebettet ist. Zusätzlich wird eine „Quadratabbildung“ des Darstellungsraums E in die Mannigfaltigkeit $\mathbb{S}$ konstruiert. Dies führt zu einer kompatiblen Realisierung des Darstellungsraumes und des Modulraumes, welche unter einer Geometrie vereinigt werden. Die resultierende (reell-analytische) Aktion von G auf $\mathbb{S}$ ist nicht linear und auch nicht als Moebius Transformation zu deuten, dennoch gelingt die Bestimmung des zugehörigen invarianten Maßes auf $\mathbb{S}$. Genauer ist $\mathbb{S} = \mathbb{S}_1$ die Mannigfaltigkeit der Rang-1-Tripotenten und $\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}$ steht für ihre Komplexifizierung. Die Realisierung der metaplektischen Darstellung ist auf $L^2(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}})$ gelungen.

III **Flache Zusammenhänge und die Bogoliubov-Transformation**: In Teil III wird die Interpretation von G/K als Modulraum vertiefend aufgegriffen, indem (als drittes Hauptergebnis) gezeigt wird, dass die G-äquivariante Realisierung des neuartigen Darstellungsraumes $L^2(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}})$ zu einem *Hilbertraum-Bündel über dem Modulraum* führt, für das ein *projektiv-flacher Zusammenhang* konstruiert wird. Desweiteren wird dieser auf jeder Faser als Summe eines *Toeplitz-Operators* und eines getwisteten *Euler-Operators* dargestellt. Es wird überdies gezeigt, dass die Integralkerne der zugehörigen *Bogoliubov-* und *Segal-Bargmann-Transformationen*, in Abhängigkeit von der Zeit, *Lösungen von Wärmeleitungsgleichungen* sind. Als Anwendung erhält man eine *konkrete Realisierung des Shilov-Randes des Modulraums innerhalb von* $\mathrm{G}^{\mathbb{C}}$ führt.

Obwohl sich die vorliegende Arbeit hauptsächlich mit der Situation der Siegelschen oberen Halbebene und der metaplektischen Darstellung befasst, geben die hier vorgestellten neuen geometrischen Konstruktionen (in Teil II und Teil III) Anlass zu weitreichenden Verallgemeinerungen:

(i) Zunächst liegt es nahe, nicht nur die Rang-1-Tripotenten, sondern Tripotente höheren Ranges j zu betrachten, entsprechend dem Konfigurationsraum $\mathbb{R}^{r\times j}$. Diese Verallgemeinerung ist hier bereits ansatzweise durchgeführt.

(ii) Desweiteren sind die Hauptkonzepte der Arbeit rein Jordan-theoretisch formuliert, so dass die Verallgemeinerung auf beliebige Jordan-Algebren, einschließlich der Ausnahme Jordan-Algebra in den Bereich des Möglichen rückt, was insbesondere einen neuen Zugang zu multi-variablen Θ-Reihen eröffnen würde.

(iii) In Teil II ist die metaplektische Darstellung als eine „Randdarstellung" des holomorph-konvexen Orbits G/K realisiert worden. Nun bietet es sich an, *jede* offene G-Bahn in der Grassmann-Mannigfaltigkeit $\mathrm{G}^{\mathbb{C}}/P_+$ oder in einem noch allgemeineren Rahmen der Fahnenmannigfaltigkeiten der Form $\mathrm{G}^{\mathbb{C}}/\mathrm{Q}$ zu betrachten. Kann man zugehörige „metaplektische Darstellungen" für jede solche Bahn analog der hier vorgestellten Methode realisieren?

(iv) Da die komplexifizierte Gruppe $\mathrm{G}^{\mathbb{C}}$ auf der Grassmann-Mannigfaltigkeit bzw. Fahnenmannigfaltigkeit operiert, ergibt sich so auch ein neuer Zugang zum Gelfand-Gindikin-Programm: Kann man, wie in Teil I dieser Arbeit, für die Darstellungen der G-Bahnen eine Unterhalbgruppe von $\mathrm{G}^{\mathbb{C}}$ finden, so dass eine analytische Fortsetzung möglich ist? Diese Unterhalbgruppe sollte zum Beispiel mittels *holomorpher Kontraktionen* des offenen Orbits definiert werden.

Gliederung der Arbeit. Teil I ist der klassischen Theorie gewidmet. Kapitel 1 ist ein Grundlagenkapitel, in dem die symplektische Gruppe vorgestellt wird und ihre für diese Arbeit relevanten Eigenschaften dargestellt werden.

In Kapitel 2 wird die metaplektische Darstellung der symplektischen Gruppe angegeben und direkt gezeigt, dass diese als Limes der Darstellung von Howe einer Unterhalbgruppe, in deren Rande die symplektische Gruppe liegt, gesehen werden kann. Auf diese gleiche Unterhalbgruppe wird auch der in Kapitel 4 betrachtete Kozyklus stetig erweitert. Diese Erweiterung wird in Kapitel 2 erläutert.

Teil II der Arbeit ist die Jordan-theoretische Realisierung der metaplektischen Darstellung. Kapitel 3 ist ein weiteres Grundlagenkapitel, in dem die Theorie der Jordan-Algebren und Jordan-Tripelsysteme kurz dargestellt wird.

In Kapitel 4 wird eine Kozykluseigenschaft gezeigt, die ihren Ursprung in einem konkreten Beispiel hat, welches dort im Detail ausgearbeitet wird. Es wird ein Gebiet betrachtet, dessen Automorphismengruppe die symplektische Gruppe ist. Der Kozyklus nimmt Werte in der Komplexifizierung der (ausgezeichneten) maximal kompakten Untergruppe an und gibt Anlass zu einem Bündel.

Das Hauptaugenmerk des Kapitels 5 ist die wohlbekannte $\sim$ - Operation der symplektischen Gruppe auf Tripotenten eines Jordan-Tripelsystems. Für diese wird im Matrizenfall eine Formel gefunden. Hierfür wird eine $\sim$ - Operation auf Vektoren definiert. Auf dieser Formel aufbauend kann dann eine Aktion auf den komplexifizierten Mengen definiert und auch für diese eine Formel gefunden werden. Durch diese Operation wird die Darstellung definiert. Für einen Spezialfall liegt eine komplette Ausarbeitung vor, im allgemeinen Fall wird ein Ansatz zum weiteren Studium der $\sim$ - Operation gegeben.

Aufbauend auf Kapitel 4 und 5 wird in Teil III der Arbeit ein Hilbertraum-Bündel betrachtet und ein (projektiv-flacher) Zusammenhang auf diesem angegeben (Kapitel 6). Es wird gezeigt, dass dieser auf jeder Faser die Summe von einem Toeplitz-Operator und einem getwisteten Euler-Operator ist.

In Kapitel 7 wird die Fortsetzung der Identifikation vom Siegelschen oberen Halbraum mit den positiven, kompatiblen komplexen Strukturen in die jeweiligen Shilov-Ränder angegeben. Diese erfolgt durch das Betrachten gewisser Differentialgleichungen (Wärmeleitungsgleichungen), zu deren Lösungen zum Einen der Integralkern der Bogoliubov-Transformation zwischen zwei Fasern des Hilbertraum-Bündels und zum Anderen der Integralkern der Segal-Bargmann-Transformation, jeweils mit einer Zeitveränderlichen t versehen, gehören. Diese Transformationen entsprechen dem Paralleltransport entlang von Geodäten, im ersten Fall innerhalb der Basis-Mannigfaltigkeit, im zweiten nach der metaplektischen Korrektur und der Fortsetzung des einen Endes der Geodäte bis an den Rand. Betrachtet man die komplette Fortsetzung einer Geodäte bis an den Rand, so entspricht der Paralleltransport der Fourier-Transformation, dieser Aspekt wird hier aber keine Rolle spielen. Die Bogoliubov-Kerne konvergieren punktweise gegen den Segal-Bargmann-Kern, die Form der dazugehörigen Differentialoperatoren gibt Anlass zur genannten Identifikation.

A short introduction

The metaplectic representation: analytic continuation and a Jordan algebra theoretic realization

The present work is structured in three parts:

I The first, **analytic continuation of the metaplectic representation to a subsemigroup of the complexification $\mathbf{Sp}(2r, \mathbb{C})$** is in the spirit of classical harmonic analysis: this fits into the general Gelfand-Gindikin program which combines irreducible representations of semi-simple Lie groups G with cones, accordingly semigroups in $\mathrm{G}^{\mathbb{C}}$. Cauchy integral formulas are the key tools to study them. Geldand-Gindikin cover the case $r = 1$ (i.e. $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$). We give a direct realization of the analytic continuation of the metaplectic representation to a subsemigroup of $\mathrm{Sp}(2r, \mathbb{C})$, for arbitrary r. The challenge here is due to the fact that the metaplectic representation is just given on generators (no closed formula) and we don't have to our disposal integral operators. On the other hand, by giving this direct proof, we are able to exhibit the „correct“ subsemigroup which has to be considered.

II **Jordan theoretic realization of the metaplectic representation**: the modulspace G/K for a semi-simple Lie group G of hermitian type, and being K the maximal compact subgroup, is essential for the theory of automorphic forms, specially Θ-series. Due to the school of Koecher this theory was brought in the „right“ frame of Jordan algebras as a generalization of the classical case of real symmetric matrices $\mathcal{H}_r(\mathbb{R})$. Now the task is: does there exist a new realization of the metaplectic representation in terms of Jordan algebras, and which would allow a similar construction for all Jordan algebras. The configuration space $E = \mathbb{R}^r$ admits a linear representation of the Jordan algebra $\mathcal{H}_r(\mathbb{R})$. As second main achievement of this thesis we give a non-linear realization of the metaplectic representation via a Variety $\mathbb{S}$, which is imbedded in the complexification of the Jordan algebra. Making use of a quadratic mapping a copy of the configuration space E is also constructed in $\mathbb{S}$. This gives a compatible realization of the representation space and the modulspace, which are now unified under the same geometry. Though the resulting (real analytic) action of G on $\mathbb{S}$ is non-linear, nor of Moebius type, we succeeded in defining an invariant measure on $\mathbb{S}$. We work with $\mathbb{S} = \mathbb{S}_1$ the manifold of rank-1 tripotents and $\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}$ its complexification. The realization is done on $L^2(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}})$.

III **Flat connections and the Bogoliubov transformation** In part III we show that the G-equivariant realization of the representation space $L^2(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}})$ induces a projectively flat Hilbert space bundle over the modulspace. It is shown that the connection, restricted to each of the fibers, can be splitted as the sum of a Toeplitz operator and an Euler-type operator. Finally we consider time dependent Bogoliubov and Segal-Bargmann integral kernels that happen to be solutions of the heat equation. This gives rise to an explicit identification of the Shilov boundary of the modulspace in $\mathrm{G}^{\mathbb{C}}$.

Teil 1

Holomorphe Fortsetzung der metaplektischen Darstellung

KAPITEL 1

Die symplektische Gruppe

Die symplektische Gruppe und ihre Aktionen auf verschiedenen Gebieten bilden den Kern dieser Arbeit. In diesem Kapitel wird sie zunächst beschrieben und die Notation festgelegt. Wohlbekannte Eigenschaften werden kurz dargestellt, u.A. wird eine maximal kompakte Untergruppe ausgezeichnet und die Menge ihrer Ableitungen betrachtet. Gewisse komplexe Strukturen können mit einer Teilmenge der symplektischen Gruppe identifiziert werden, welche wiederum mit der Siegelschen oberen Halbebene einerseits und andererseits mit bestimmten Lagrange-Unterräumen in Verbindung gebracht wird. Diese Identifizierung wird erläutert.

1. Hamiltonsche Mechanik

Eine symplektische Mannigfaltigkeit M ist eine glatte Mannigfaltigkeit, zusammen mit einer symplektischen Form ω, das heißt einer globalen, glatten und geschlossenen 2-Form, die punktweise nicht ausgeartet ist.
Sie hat immer gerade Dimension und der Satz von Darboux [**Arn89**] besagt: In der Umgebung jedes Punktes einer symplektischen Mannigfaltigkeit gibt es lokale Koordinaten (q_j, p_j) mit

$$\omega = \sum_{j=1}^{r} dq_j \wedge dp_j.$$

In der Hamiltonschen Mechanik ist der Phasenraum eine symplektische Mannigfaltigkeit mit der global definierten symplektischen Form

$$\omega = \sum_{j=1}^{r} dq_j \wedge dp_j.$$

Hier werden Positionsvariablen und Impulse gleichbrechtigt behandelt. Die kanonischen Gleichungen oder auch Bewegungsgleichungen eines Systems sind eng mit kanonischen Transformationen verknüpft, welche den Übergang zur Quantenmechanik gestatten: Gegeben sei ein dynamisches System mit r Freiheitsgraden und der Hamilton-Funktion $H(q,p)$, die von den Positionsvariablen $q = (q_1, \dots, q_r)$ und Impulsvariablen $p = (p_1, \dots, p_r)$ (und eventuell auch von der Zeit) abhängt. Die *kanonischen Gleichungen* (Hamiltonsche Bewegungsgleichungen) lauten:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}.$$

Eine *kanonische Transformation* ist eine Koordinatentransformation $(q,p) \to (\tilde{q},\tilde{p})$ so dass eine neue Hamilton-Funktion $\tilde{H}(\tilde{q},\tilde{p})$ existiert, für welche die kanonischen Gleichungen

$$\dot{\tilde{q}}_j = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_j} \qquad \dot{\tilde{p}}_j = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_j}$$

in den transformierten Koordinaten $(\tilde{q},\tilde{p})$ erfüllt sind. Kanonische Transformationen erhalten die Poisson-Klammer

$$\{f,g\}_{p,q} = \omega(df,dg) = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial g}{\partial q_j},$$

das heißt $\{f,g\}_{p,q} = \{f,g\}_{\tilde{q},\tilde{p}}$, wenn $(q,p) \to (\tilde{q},\tilde{p})$ kanonisch ist, und können auch durch diese charakterisiert werden: Eine Transformation $(q,p) \to (\tilde{q},\tilde{p})$ ist genau dann kanonisch, wenn für die *fundamentalen Poisson-Klammern* gilt

$$\{\tilde{q}_j,\tilde{p}_k\}_{q,p} = \delta_{jk} \qquad \{\tilde{q}_j,\tilde{q}_k\}_{q,p} = \{\tilde{p}_j,\tilde{p}_k\}_{q,p} = 0.$$

Die symplektische Struktur der kanonischen Transformationen ist dadurch gegeben, dass ihre Funktionalmatrizen oder Darstellungsmatrizen

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} & \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} & \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2r \times 2r}$$

eine Gruppe bilden, sie haben die Eigenschaft

$$M^t[\omega]M = [\omega], \quad \text{wobei} \quad [\omega] = \begin{pmatrix} 0 & 1_r \\ -1_r & 0 \end{pmatrix}$$

die Darstellungsmatrix der Form ω ist. Hierbei bezeichnet 1_r eine $r \times r$ Identitätsmatrix. Diese Gruppe wird *symplektische Gruppe* genannt.
Die Grundlage für den Begriff symplektischer Mannigfaltigkeiten bilden symplektische Räume: Ein *symplektischer Raum* ist ein Vektorraum V zusammen mit einer nicht ausgearteten, alternierenden Bilinearform, die typischerweise auch mit ω bezeichnet wird. Sie kann als schiefsymmetrische, invertierbare Matrix dargestellt werden. Durch eine adaptierte Gram-Schmidt Methode kann immer eine (Darboux-)Basis des Raumes gegeben werden, in der die Form ω durch

$$[\omega] = \begin{pmatrix} 0 & 1_r \\ -1_r & 0 \end{pmatrix}$$

dargestellt ist.
Ein linearer Endomorphismus l heißt eine *lineare symplektische Transformation*, falls er die symplektische Form erhält:

$$\omega(l(u), l(v)) = \omega(u, v).$$

Eine lineare symplektische Transformation ist ein Isomorphismus und die Menge der linearen symplektischen Transformationen bildet eine (Lie-)Gruppe, die man *symplektische Gruppe* nennt und mit $\mathrm{Sp}(V,\omega)$ bezeichnet.

2. Die reelle symplektische Gruppe

Das Standardbeispiel eines symplektischen Raums ist $\mathbb{R}^{2r}$ mit der symplektischen Form ω, welche üblicherweise durch die $2r \times 2r$ Blockmatrix J,

$$J = [\omega] = \begin{pmatrix} 0 & 1_r \\ -1_r & 0 \end{pmatrix},$$

dargestellt ist. Jede 1_r ist eine $r \times r$ Identitätsmatrix. Im Folgenden lassen wir den Index r der Einheitsmatrix 1_r zur besseren Übersicht in den Formel weg.
Die *reelle symplektische Gruppe* $\mathrm{Sp} = \mathrm{Sp}(\mathbb{R}^{2r},\omega)$ ist die Gruppe der reellen Endomorphismen des $\mathbb{R}^{2r}$, welche die (standard-)symplektische Form ω invariant lassen. Dies ist

$$\mathrm{Sp} = \left\{ g \in \mathbb{R}^{2r\times 2r} : g^t J g = J \right\}.$$

Beschreiben wir die Elemente der symplektischen Gruppe über Blockmatrizen,

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}^{r\times r},$$

so gilt

$$C^t A = A^t C, \quad B^t D = D^t B \quad \text{und} \quad D^t A - B^t C = 1.$$

Dies ist äquivalent zu

$$BA^t = AB^t, \quad DC^t = CD^t \quad \text{und} \quad AD^t - BC^t = 1.$$

Das Produkt in Sp ist das Matrizenprodukt, Sp ist eine Untergruppe der $\mathrm{Gl}(\mathbb{R}^{2r})$. Die symplektische Gruppe ist geschlossen unter Transposition, das heißt $\mathrm{Sp}^t \subset \mathrm{Sp}$, und kann durch Erzeuger angegeben werden. Gruppenelemente der folgenden Matrixdarstellung erzeugen sie:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-t} \end{pmatrix} \text{mit } A \in \mathrm{Gl}(\mathbb{R}^r), \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix} \text{mit } C \in \mathbb{R}^{r\times r}_{sym}.$$

Wie man auf diese Zerlegung kommt, wird in Kapitel 3 von einer höheren Warte aus erläutert.

Die Komplexifizierung der reellen symplektischen Gruppe, ist die *komplexe symplektische Gruppe*

$$\mathrm{Sp}^{\mathbb{C}} = \mathrm{Sp}(\mathbb{C}^{2r},\omega) = \left\{ g \in \mathbb{C}^{2r\times 2r} : g^t J g = J \right\}.$$

3. Moebius-Transformationen

Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra mit Einselement und seien $m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22} \in \mathcal{A}$ und

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{A}^{2\times 2}.$$

Eine Moebius-Transformation, die im Allgemeinen durch eine Matrix $\mathcal{A}^{2\times 2}$ dargestellt wird, wirkt durch

$$MX = (m_{11}X + m_{12})(m_{21}X + m_{22})^{-1},$$

auf allen Elemente $X \in \mathcal{A}$, für welche Singularitäten vermieden werden, das heißt, auf den $X \in \mathcal{A}$ für die $m_{21}X + m_{22}$ ein Inverses hat. Diese Abbildung ist eine Aktion und soll desweiteren invertierbar sein.
Dies gilt insbesondere für $\mathcal{A} = \mathbb{C}^{r\times r}$.

Es sei

$$\mathfrak{P} = \left\{ \mathfrak{w} \in \mathbb{C}^{r\times r}_{sym} : Im\mathfrak{w} > 0 \right\}$$

der *Siegelsche obere Halbraum* oder *Siegelsche obere Halbebene*. Sp operiert, als (holomorphe) Moebius-Transformationen, transitiv auf $\mathfrak{P}$: Die Aktion von $g \in \mathrm{Sp}$ auf $\mathfrak{w} \in \mathfrak{P}$ ist

$$g\mathfrak{w} = (A\mathfrak{w} + B)(C\mathfrak{w} + D)^{-1} \quad \text{für} \quad g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Man beachte, dass $C\mathfrak{w}+D$ stets invertierbar ist, wie man an Erzeugern sehen kann. Die Transitivität der Aktion ist dadurch gegeben, dass der „Mittelpunkt“ $i\mathtt{1} = \mathfrak{i} \in \mathfrak{P}$, auf ganz $\mathfrak{P}$ durch Sp abgebildet wird:

$$\mathrm{Sp}\,\mathfrak{i} = \{g\,\mathfrak{i}, g \in \mathrm{Sp}\} = \mathfrak{P}.$$

Wir geben hier die Inverse Abbildung an, und zwar sei für jedes $\mathfrak{w} \in \mathfrak{P}$

$$g_{\mathfrak{w}} = \begin{pmatrix} Im\mathfrak{w}^{-1/2} & -Im\mathfrak{w}^{-1/2}Re\mathfrak{w} \\ 0 & Im\mathfrak{w}^{1/2} \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}. \quad \text{Es gilt} \quad g_{\mathfrak{w}}\mathfrak{w} = \mathfrak{i}.$$

Die Matrixdarstellung des Gruppenelements $g_{\mathfrak{w}}$ wird in Kapitel 4 eine Rolle spielen und mit $[T_{\mathfrak{w}}]$ bezeichnet, da dieses Gruppenelement einen Operator $T_{\mathfrak{w}}$ zwischen zwei Hilberträumen induziert.
Die symplektische Gruppe Sp ist die Automorphismengruppe des Siegelschen oberen Halbraumes $\mathfrak{P}$.

4. Die symplektische Gruppe im Beschränkten

Die Siegelsche obere Halbebene $\mathfrak{P}$ und das beschränkte Gebiet $\mathfrak{B} = \left\{ \mathfrak{z} \in \mathbb{C}^{r\times r}_{sym} : \mathtt{1} - \mathfrak{z}\mathfrak{z}^* > 0 \right\}$ sind durch eine *Cayley-Transformation* biholomorph äquivalent. Die Cayley-Transformation $c = c_{\mathfrak{B}\mathfrak{P}}$, die wir in dieser Arbeit betrachten, bildet $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{P}$ ab, operiert als Moebius-Transformation und ihre Blockmatrixdarstellung als solche ist die unitäre $2r \times 2r$ Matrix

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}.$$

Die Tatsache $c(\mathfrak{o}) = \mathfrak{i}$ verleiht dem Punkt $\mathfrak{i} \in \mathfrak{P}$ den eben schon erwähnten Namen „Mittelpunkt“. Man spricht oft von $\mathfrak{B}$ als die beschränkte Realisierung des Tubengebietes $\mathfrak{P}$. In Kapitel 3 wird dies im allgemeinen Rahmen erklärt.

Sei

$$\mathrm{Sp}_{\mathfrak{B}} = c^{-1}\mathrm{Sp}\, c$$

die „cayleyfizierte“ symplektische Gruppe. Aus der symplektischen Bedigung für $g \in \mathrm{Sp}$ folgt die symplektische Bedingung für $\gamma \in \mathrm{Sp}_{\mathfrak{B}}$: $\gamma^t J \gamma = J$ oder, da $g^t = g^*$, die üblichere

$$\gamma^* L \gamma = L \quad \text{mit} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

In der Blockmatrizendarstellung haben die Elemente $\gamma \in \mathrm{Sp}_{\mathfrak{B}}$ die Gestalt

$$\gamma = c^{-1} g c = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2r \times 2r}$$

mit $\alpha = 1/2(A + D + i(B - C))$ und $\beta = 1/2(A - D - i(B + C))$, und es gilt

$$\alpha^*\alpha - \beta^t\overline{\beta} = 1 \quad \text{und} \quad \alpha^*\beta = \beta^t\overline{\alpha}.$$

$\mathrm{Sp}_{\mathfrak{B}}$ operiert demzufolge auf $\mathfrak{B}$ transitiv und ist die Automorphismengruppe des beschränkten Gebietes $\mathfrak{B}$: $\mathrm{Aut}(\mathfrak{B}) = \mathrm{Sp}_{\mathfrak{B}}$.

Die inverse Cayley-Transformation hat als Moebius-Transformation folgende Matrixdarstellung:

$$c^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

5. Maximal kompakte Untergruppen

Die Isotropiegruppe von $\mathfrak{i} \in \mathfrak{P}$ unter der symplektischen Gruppe Sp ist eine maximal kompakte Untergruppe. Wir bezeichnen sie mit

$$\mathrm{K}_{\mathfrak{P}} = \{ g \in \mathrm{Sp} : g\,\mathfrak{i} = \mathfrak{i} \}.$$

Es gilt $\mathrm{K}_{\mathfrak{P}} = \mathrm{Sp} \cap \mathrm{O}(\mathbb{R}^{2r})$ und die Matrixdarstellung ihrer Elemente ist

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad B^t A = A^t B \quad \text{und} \quad A^t A + B^t B = 1.$$

Analog bildet die Isotropiegruppe von $\mathfrak{o} \in \mathfrak{B}$ unter $\mathrm{Sp}_{\mathfrak{B}}$ eine maximal kompakte Untergruppe von dieser und wird mit $\mathrm{K}_{\mathfrak{B}}$ bezeichnet. Im beschränkten Fall ist

$$\begin{aligned} \mathrm{K}_{\mathfrak{B}} &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \overline{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{C}^{r \times r}, \alpha^*\alpha = 1 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-t} \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{C}^{r \times r}, \alpha^*\alpha = 1 \right\}. \end{aligned}$$

So erhält man ihre Komplexifizierung

$$\mathrm{K}_{\mathfrak{B}}^{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-t} \end{pmatrix} : \alpha \in \mathrm{Gl}(\mathbb{C}^r) \right\},$$

und $\mathrm{K}_{\mathfrak{B}}^{\mathbb{C}} \subset \mathrm{Gl}(\mathbb{C}^{r\times r}_{sym})$, da ihre Elemente lineare Moebius-Transformationen sind. Es ergibt sich die Gleichheit $\mathrm{K}_{\mathfrak{B}}^{\mathbb{C}} = \mathrm{Sp}^{\mathbb{C}} \cap \mathrm{Gl}(\mathbb{C}^{r\times r}_{sym})$.

Nun kommen wir zur Beschreibung der Menge der Ableitungen der symplektischen Gruppen: Da die Operation von $g \in \mathrm{Sp}$ auf $\mathfrak{P}$ durch

$$g\mathfrak{w} = (A\mathfrak{w} + B)(C\mathfrak{w} + D)^{-1}$$

gegeben ist, hat ihre holomorphe Ableitung als Moebius-Transformation auf dem Tangentialraum $T_{\mathfrak{w}}(\mathfrak{P}) = C^{r\times r}_{sym}$ die Darstellung

$$g\mathfrak{w}' = \begin{pmatrix} (\mathfrak{w}C^t + D^t)^{-1} & 0 \\ 0 & C\mathfrak{w} + D \end{pmatrix}.$$

Dies folgt aus der Symmetrie von $g\mathfrak{w}$ und den symplektischen Bedingungen: Sei $\mathfrak{s}(\mathrm{t}), \mathrm{t} \in (-1,1)$ eine glatte Kurve in $\mathfrak{P}$, mit $\mathfrak{s}(0) = \mathfrak{w}$ und $\frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial \mathrm{t}}(0) = \dot{\mathfrak{s}}(0) = \dot{\mathfrak{w}} \in T_{\mathfrak{w}}(\mathfrak{P})$, so gilt

$$\frac{\partial g\mathfrak{s}(\mathrm{t})}{\partial \mathrm{t}}(0) = \lim_{\mathrm{t}\to 0} \frac{1}{\mathrm{t}}\big(g\mathfrak{s}(\mathrm{t}) - g\mathfrak{w}\big) = \lim_{\mathrm{t}\to 0} \frac{1}{\mathrm{t}}\big((g\mathfrak{s}(\mathrm{t}))^t - g\mathfrak{w}\big) =$$

$$= \lim_{\mathrm{t}\to 0} \frac{1}{\mathrm{t}} (\mathfrak{s}(\mathrm{t})C^t + D^t)^{-1} \big[(\mathfrak{s}(\mathrm{t})A^t + B^t)(C\mathfrak{w}+D) - (\mathfrak{s}(\mathrm{t})C^t + D^t)(A\mathfrak{w}+B)\big](C\mathfrak{w}+D)^{-1} =$$

$$= \lim_{\mathrm{t}\to 0} (\mathfrak{s}(\mathrm{t})C^t + D^t)^{-1} \frac{1}{\mathrm{t}} \big[\mathfrak{s}(\mathrm{t}) - \mathfrak{w}\big](C\mathfrak{w} + D)^{-1} =$$

$$= (\mathfrak{w}C^t + D^t)^{-1} \dot{\mathfrak{w}} (C\mathfrak{w} + D)^{-1}.$$

Auf $\mathfrak{B}$ operiert $\gamma \in \mathrm{Sp}_{\mathfrak{B}}$ ebenfalls als Moebius Transformation, und man erhält analog

$$\gamma\mathfrak{z}' = \begin{pmatrix} (\mathfrak{z}\beta^* + \alpha^*)^{-1} & 0 \\ 0 & \overline{\beta}\mathfrak{z} + \overline{\alpha} \end{pmatrix}$$

auf $T_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{B}) = \mathbb{C}^{r\times r}_{sym}$. Für $\gamma \in \mathrm{K}_{\mathfrak{B}}$ gilt insbesondere $\gamma\mathfrak{o}' = \gamma$, da die Transformationen in $\mathrm{K}_{\mathfrak{B}}$ schon linear sind und auf ganz $\mathbb{C}^{r\times r}_{sym}$ operieren. Desweiteren gilt: Für $\gamma \in \mathrm{Sp}_{\mathfrak{B}}$ ist $\gamma\mathfrak{z}' \in \mathrm{K}_{\mathfrak{B}}^{\mathbb{C}}$. Somit haben wir

$$\mathrm{Sp}'_{\mathfrak{B}} \subset \mathrm{K}_{\mathfrak{B}}^{\mathbb{C}}.$$

Es gilt auch $\mathrm{Sp}' \subset \mathrm{K}_{\mathfrak{B}}^{\mathbb{C}}$, was aus der Formel für $g\mathfrak{w}'$ folgt. Hier bezeichnet G' die Menge der Ableitungen der Gruppe der Moebius Transformationen $\mathrm{G} = \mathrm{Sp}$ bzw. $\mathrm{G} = \mathrm{Sp}_{\mathfrak{B}}$.

Die Komplexifizierung von $\mathrm{K}_{\mathfrak{P}}$ ist durch

$$\mathrm{K}_{\mathfrak{P}}^{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2r\times 2r} : B^tA = A^tB, A^tA + B^tB = 1 \right\}$$

gegeben.

Die Cayley-Transformation und ihre Umkehrung haben folgende holomorphe Ableitungen

$$c(\mathfrak{z})' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -2i(i\mathfrak{z}-i)^{-1} & 0 \\ 0 & i\mathfrak{z}-i \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{z} \in \mathfrak{B}$$

und

$$c^{-1}(\mathfrak{w})' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2i(\mathfrak{w}+i)^{-1} & 0 \\ 0 & (\mathfrak{w}+i) \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{w} \in \mathfrak{P}.$$

6. Komplexe Strukturen

Sei ω die standard-symplektische Form (eine nicht ausgeartete geschlossene 2 - Form auf $\mathbb{R}^{2r}$), die durch

$$\omega = \sum_{j=1}^{r} dx_j \wedge dy_j = dx^t \wedge dy$$

gegeben ist. Eine *komplexe Struktur* J auf $\mathbb{R}^{2r}$ ist ein Endomorphismus des $\mathbb{R}^{2r}$ mit der Eigenschaft $J^2 = -1$. Sie ist mit ω *kompatibel*, falls

$$\omega(J\cdot, J\cdot) = \omega(\cdot, \cdot)$$

gilt und man sagt, dass sie *positiv* ist, falls

$$w(\cdot, J\cdot) > 0.$$

Die Kompatibilität von J mit ω ist äquivalent zur Bedingung $J \in \mathrm{Sp}$, da die standard-symplektische Form ω durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Die Positivitätsbedingung ist folglich

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} J > 0.$$

Wir bezeichnen mit $\mathcal{J}$ die Menge der positiven komplexen Strukturen, welche mit der standard-symplektischen Form kompatibel sind. Sie wird als Teilmenge der symplektischen Gruppe realisiert

$$\mathcal{J} = \left\{ J \in Sp : \ J^2 = -1, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} J > 0 \right\}.$$

6.1. Identifikation $\mathcal{J} \longleftrightarrow \mathfrak{P}$. In den Kapiteln 6 und 7 arbeiten wir mit der Menge der positiven komplexen kompatiblen Strukturen $\mathcal{J}$ und ihrer Identifikation mit dem Siegelschen oberen Halbraum $\mathfrak{P}$, die wir jetzt erläutern werden.

Lemma 6.1. *Jedes $J \in \mathcal{J}$ liefert durch die Bedingung $J^2 = -1$ eine Aufspaltung des $\mathbb{C}^{2r}$ in seine $\pm i$ Eigenräume. Der Eigenraum zum Eigenwert i ist durch die Spalten einer Matrix der Form*

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{w} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathit{mit} \quad \mathfrak{w} \in \mathfrak{P}$$

aufgespannt:

$$E_i(J) = \langle \begin{bmatrix} \mathfrak{w} \\ 1 \end{bmatrix}^j \rangle_{j=1,\dots,r}.$$

Hierbei bezeichnet $[x]^j$ *die* j*-te Spalte der Matrix* x*.*

Beweis: Die Bedingungen

$$J = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}$$

und $J^2 = -1$ ergeben zusammen

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} D^t & -B^t \\ -C^t & A^t \end{pmatrix} = -J,$$

und aus

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} J > 0$$

folgt die Positivität (und somit Invertierbarkeit) des Matrizeneintrages C. So ist

$$J = \begin{pmatrix} A & -C^{-1} - AC^{-1}A^t \\ C & -A^t \end{pmatrix},$$

und der Eigenraum zum Eigenwert i ist

$$E_i(J) = \langle \begin{bmatrix} (A+i)C^{-1} \\ 1 \end{bmatrix}^j \rangle_{j=1,\dots,r}.$$

Durch die symplektischen Bedingungen ist $(A+i)C^{-1}$ eine symmetrische Matrix, deren Imaginärteil positiv ist, da $C > 0$.

□

Dies gibt Anlass zur Identifikation:

Satz 6.2.

$$\mathfrak{w} \in \mathfrak{P} \longleftrightarrow J \in \mathcal{J}, \quad \textit{falls} \quad E_i(J) = \langle \begin{bmatrix} \mathfrak{w} \\ 1 \end{bmatrix}^j \rangle_{j=1,\dots,r}.$$

Beweis: Es bleibt zu zeigen, dass für jedes $\mathfrak{w} \in \mathfrak{P}$ ein $J = J_\mathfrak{w} \in \mathcal{J}$ existiert, so dass $E_i(J_\mathfrak{w})$ durch die Spalten der Matrix

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{w} \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannt ist. Da $J_\mathfrak{w}$ insbesondere reell sein soll, muss gelten

$$E_{-i}(J_\mathfrak{w}) = \langle \begin{bmatrix} \overline{\mathfrak{w}} \\ 1 \end{bmatrix}^j \rangle_{j=1,\dots,r} = \overline{E_i(J_\mathfrak{w})}.$$

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{w} & \overline{\mathfrak{w}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist invertierbar, daraus folgt die Existenz eines Endomorphismusses $J_{\mathfrak{w}}$ mit den geforderten $\pm i$ Eigenräumen, und dieser ist errechenbar:

$$J_{\mathfrak{w}} = \begin{pmatrix} Re\mathfrak{w} Im\mathfrak{w}^{-1} & -Im\mathfrak{w} - Re\mathfrak{w} Im\mathfrak{w}^{-1} Re\mathfrak{w} \\ Im\mathfrak{w}^{-1} & -Im\mathfrak{w}^{-1} Re\mathfrak{w} \end{pmatrix} =$$

$$= i \begin{pmatrix} 1 + 2\overline{\mathfrak{w}}(\mathfrak{w} - \overline{\mathfrak{w}})^{-1} & -2\mathfrak{w}(\mathfrak{w} - \overline{\mathfrak{w}})^{-1}\overline{\mathfrak{w}} \\ 2(\mathfrak{w} - \overline{\mathfrak{w}})^{-1} & -2(\mathfrak{w} - \overline{\mathfrak{w}})^{-1}\overline{\mathfrak{w}} - 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist klar, dass $J_{\mathfrak{w}}$ eine komplexe Struktur ist. Zudem ist $J_{\mathfrak{w}}$ eine symplektische Transformation wie man durch direktes Nachrechnen der symplektischen Bedingungen.
Die Positivität folgt aus der Schreibweise

$$\begin{pmatrix} Im\mathfrak{w}^{1/2} & 0 \\ 0 & Im\mathfrak{w}^{-1/2} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} J_{\mathfrak{w}} \right] \begin{pmatrix} Im\mathfrak{w}^{-1/2} & 0 \\ 0 & Im\mathfrak{w}^{1/2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -Im\mathfrak{w}^{-1/2} Re\mathfrak{w} Im\mathfrak{w}^{-1/2} \\ -Im\mathfrak{w}^{-1/2} Re\mathfrak{w} Im\mathfrak{w}^{-1/2} & -Im\mathfrak{w}^{-1/2} Re\mathfrak{w} Im\mathfrak{w}^{-1} Re\mathfrak{w} Im\mathfrak{w}^{-1/2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

aus welcher

$$(x^*, y^*) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} J_{\mathfrak{w}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} > 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$(x - Im\mathfrak{w}^{-1/2} Re\mathfrak{w} Im\mathfrak{w}^{-1/2} y)^* (x - Im\mathfrak{w}^{-1/2} Re\mathfrak{w} Im\mathfrak{w}^{-1/2} y) = 0 \quad \wedge \quad y^* y = 0.$$

□

6.2. Lagrange-Unterräume. In einem symplektischen Raum V heißt ein Unterraum $W \subset V$ ein *Lagrange-Unterraum* wenn W seinem symplektischen Komplement

$$W^{\perp} = \{v \in V : \omega(v, w) = 0, \forall\, w \in W\}$$

gleich ist: $W = W^{\perp}$.

Hat man einen reeller symplektischen Raum V und betrachtet man auf seiner Komplexifizierung $V^{\mathbb{C}}$ die Hermitesche Form $B = -i\omega^{\mathbb{C}}$, wobei $\omega^{\mathbb{C}}$ die sesqui-holomorphe Fortsetzung von ω auf $V^{\mathbb{C}} \times V^{\mathbb{C}}$ ist, so gilt

$$-ImB(x, y) = \omega(x, y) \quad \text{auf } V \times V.$$

Ein Lagrange Unterraum W heißt *positiv* falls

$$B(u, v) > 0, \qquad u, v \in W$$

Insbesondere haben wir auf $\mathbb{C}^{2r}$ eine symplektische Form ω und eine Hermitesche Form $B = -i\omega^{\mathbb{C}}$, welche durch

$$[\omega] = J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad [B] = -iJ$$

gegeben sind.
Ein r- dimensionaler Unterraum $W \subset \mathbb{C}^{2r}$ ist demzufolge ein Lagrange-Unterraum falls

$$M^t[\omega]M = 0,$$

er ist außerdem positiv, falls

$$M^*[B]M > 0,$$

mit M einer beliebigen $(2r \times r)$ Matrix deren Spalten den Unterraum erzeugen.
Die Eigenräume $E_i(J_{\mathfrak{w}})$ und $E_{-i}(J_{\mathfrak{w}})$ sind Lagrange-Unterräume

$$E_i(J_{\mathfrak{w}})^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} E_i(J_{\mathfrak{w}}) = E_{-i}(J_{\mathfrak{w}})^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} E_{-i}(J_{\mathfrak{w}}) = 0.$$

$E_{-i}(J_{\mathfrak{w}})$ ist außerdem ein positiver Lagrange-Unterraum da

$$-iE_{-i}(J_{\mathfrak{w}})^* \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} E_{-i}(J_{\mathfrak{w}}) = 2Im\mathfrak{w} > 0.$$

wobei für $E_{-i}(J_{\mathfrak{w}})$ eine beliebige Matrix einsetzt wird, deren Spalten den Eigenraum aufspannen.
Dies gibt eine weitere, wohlbekannte Identifikation

$$\mathcal{J} \ni J \longleftrightarrow E_{-i}(J) \in \mathrm{LGr}_r(\mathbb{C}^{2r})_{>0}.$$

Hier steht $\mathrm{LGr}_r(\mathbb{C}^{2r})_{>0}$ für die positive (Lagrange-) Grassmannsche.

Satz 6.3. *Die Elemente J in $\mathcal{J}$ lassen sich mit der Menge der positiven Lagrange-Unterräume über ihre $-i$-Eigenräume $E_{-i}(J)$, identifizieren.*

Beweis: Es bleibt zu zeigen, dass jedem positiven Lagrange-Unterraum eine positive, kompatible komplexe Struktur zugeordnet werden kann. Sei

$$\langle \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^j \rangle_{j=1,\dots,r}$$

ein solcher. Dann ist auch

$$\langle \begin{bmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{bmatrix}^j \rangle_{j=1,\dots,r}$$

ein Lagrange-Unterraum. Die Positivität impliziert die Invertierbarkeit der Matrix $b^*a - a^*b$, so dass

$$\begin{pmatrix} a & \overline{a} \\ b & \overline{b} \end{pmatrix}$$

invertierbar ist, das heißt, ihre Spalten bilden eine Basis des $\mathbb{C}^{2r}$. Nun definieren wir einen Endomorphismus J vorerst des $\mathbb{C}^{2r}$ über

$$E_{-i}(J) = \langle \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^j \rangle_{j=1,\dots,r} \qquad E_i(J) = \langle \begin{bmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{bmatrix}^j \rangle_{j=1,\dots,r}.$$

J erfüllt $J^2 = -1$, und da seine $\pm i$-Eigenräume Lagrange Unterräume sind, gilt $J \in \mathrm{Sp}^{\mathbb{C}}$. Desweitern gilt $J \in \mathrm{Sp}$, da J und $\overline{J}$ die gleichen $\pm i$-Eigenräume besitzen, also die gleiche lineare Transformation sind, und zu den Endomorphismen des $\mathbb{R}^{2r}$ gehören. Schlußendlich gilt auch noch

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} J > 0,$$

da

$$(a^*, b^*)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -i(a^*, b^*)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} > 0$$

gilt und somit auch

$$(a^t, b^t)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{pmatrix} = i(a^t, b^t)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{pmatrix} > 0$$

folgt.

$\square$

Die Wirkung von Sp auf $\mathfrak{P}$ ergibt eine Aktion von Sp auf $\mathcal{J}$:

$$Sp \ltimes \mathcal{J} \to \mathcal{J} \qquad (g, J) \mapsto gJg^{-1}$$

und es gilt folgende Transformationregel:

$$gJ_{\mathfrak{w}}g^{-1} = J_{g\mathfrak{w}}. \tag{6.1}$$

Auf der linken Seite ist die Verknüpfung das (Matrizen-) Produkt in der Gruppe Sp und auf der rechten Seite steht $g\mathfrak{w}$ für die Aktion von g auf $\mathfrak{w}$. Man hat also eine Sp-äquivariante Identifizierung des Siegelschen oberen Halbraumes $\mathfrak{P}$ mit $\mathcal{J}$, den komplexen, kompatiblen Strukturen der symplektischen Form ω.

Bemerkung 6.4. Sei V ein r dimensionaler Vektorraum und V^* sein Dualraum. Man betrachtet nun auf $W := V \oplus V^*$ die Form

$$\omega(x \oplus \xi, y \oplus \eta) = \eta(x) - \xi(y).$$

Wählt man eine Basis $\{x_1, \ldots, x_r\}$ von V und nimmt dazu ihre Dualbasis $\{x_1^*, \ldots, x_r^*\}$, können diese Basisvektoren als Vektoren in W gedeutet werden

$$q_j = (x_j, 0) \qquad p_j = (0, x_j^*)$$

und man erhält eine Basis von W

$$\{q_1, \ldots, q_r, p_1, \ldots p_r\}.$$

Die Form ω hat in dieser Basis die Darstellung

$$[\omega] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

so dass W ein symplektischer Raum ist.
Jede symplektische Struktur ist isomorph zu einer der Gestalt $V \oplus V^*$. Der Unterraum V ist ein Lagrange-Unterraum und ist nicht eindeutig.

Die Wahl eines solchen nennt man *Polarisierung*.
Im Gegensatz hierzu ist jede komplexe Struktur isomorph zu einer der Gestalt $V \oplus V$.

KAPITEL 2

Howes Oszillator-Halbgruppe

In diesem Kapitel wird Howes Oszillator-Halbgruppe vorgestellt, und ihre klassische Darstellung in den beschränkten Operatoren des $L^2(\mathbb{R}^r)$ präsentiert. Die symplektische Gruppe Sp, deren metaplektische Darstellung angegeben wird, liegt im Rande dieser Halbgruppe. Wir zeigen, dass die metaplektische Darstellung als Erweiterung der Darstellung von Howe auf Sp gesehen werden kann. Hierfür muss mit der komplementären Halbgruppe gearbeitet werden. Diese Erweiterung ist in der strengen Operator-Topologie stetig.
Im Anschluß wird nochmals die (komplementäre) Halbgruppe betrachtet, in deren Rande Sp liegt. Wir erweitern Ein Kozyklus auf Sp der in einem anderen Kontext in Kapitel 4 erschienen wird, stetig auf diese Halbgruppe.

1. Eine Hermitesche Form auf $\mathbb{R}^{2r}$

Jedes Element g der symplektischen Gruppe

$$\mathrm{Sp} = \left\{ g \in \mathbb{R}^{2r\times 2r} : g^t J g = J \right\}$$

erfüllt trivialerweise auch die Gleichung

$$g^* iJg = iJ, \qquad \text{wobei} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist. Man betrachtet nun die Hermitesche Form auf $\mathbb{C}^{2r}$

$$H(u, v) = u^*(iJ)v,$$

und die Halbgruppe der Kontraktionen der Hermiteschen Form H

$$\mathrm{S}^{\leq} = \left\{ g \in \mathrm{Sp}^{\mathbb{C}} : g^* iJg \leq iJ \right\}.$$

Es gilt $\mathrm{Sp} \subset \mathrm{S}^{\leq} \subset \mathrm{Sp}^{\mathbb{C}}$, und das (nicht leere) Innere von $\mathrm{S}^{\leq}$ ist gegeben durch

$$\mathrm{S}^{<} = \left\{ g \in \mathrm{Sp}^{\mathbb{C}} : g^* iJg < iJ \right\}.$$

Die symplektische Gruppe Sp liegt im Rande von $\mathrm{S}^{<}$. Man betrachtet hier die standard Topologie von $\mathbb{C}^{2r\times 2r}$.

2. Die Darstellung von Howe

Sei $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^r))$ die Algebra der beschränkten Operatoren auf $L^2(\mathbb{R}^r)$, wobei $\mathbb{R}^r$ mit dem Lebesgue Maß versehen ist. Jedem Halbgruppenelement wird, in der folgenden Weise ein Operator zugeordnet:

$$\mathrm{S}^< \longrightarrow \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^r)), \qquad g \mapsto a_g T_g,$$

wobei a_g eine Konstante und T_g der Integral-Operator

$$f \mapsto T_g(f) : T_g(f)(y) = \int_{\mathbb{R}^r} e^{-\frac{1}{2}(x^t, y^t)\widetilde{Jc(g)}\binom{x}{y}} f(x)dx.$$

Hier ist $c(g) = (g+1)(ig-i)^{-1}$ die Cayley Transformation deren Darstellung als $(2r+2r) \times (2r+2r)$ Matrix durch

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Der Term $Jc(g)$ ist als Matrizenprodukt

$$Jc(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} c(g)$$

der $2r \times 2r$ Matrizen J und $c(g)$ zu verstehen. Die Weyl $\widetilde{\ }$ - Operation (welche durch den Weyl Operator induziert wird) wirkt auf dem Raum der symmetrischen Matrizen des $\mathbb{C}^{2r\times 2r}$, deren Realteil positiv definit ist, und ist durch

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & D \end{pmatrix} \mapsto \widetilde{X} = \begin{pmatrix} A-(B-i)D^{-1}(B^t-i) & -A+(B-i)D^{-1}(B^t+i) \\ -A+(B+i)D^{-1}(b^t-i) & A-(B+i)D^{-1}(B^t+i) \end{pmatrix}$$

gegeben. Die Konstante a_g erfüllt

$$a_g^2 = \frac{\det(i+c(g))}{(2\pi)^r \det_r(Jc(g))_{22}},$$

wobei $\det_r(Jc(g))_{22}$ die Determinante des $r \times r$ Blockes der Position 22 der Matrix $Jc(g)$ ist **[Hil89]**, **[How88]**.

Bemerkung 2.1. Die Cayley-Transformation $c(g)$ ist für alle $g \in \mathrm{S}^<$ wohl definiert, da $g \in \mathrm{S}^<$ niemals 1 als Eigenwert hat und $Jc(g)$ wegen $g \in \mathrm{Sp}^{\mathbb{C}}$ symmetrisch ist. Es gilt

$$Re(Jc(g)) = (-g^*+1)^{-1}[iJ - g^* iJg](-g+1)^{-1} > 0,$$

da

$$iJ - g^* iJg > 0.$$

Die Weyl $\widetilde{\ }$ - Operation ist in **[Hil89]** genauer beschrieben und ist die Weyl Transformation der Matrizen im Exponenten der Integralkerne,

$$\widetilde{\ }: \left\{X \in \mathbb{C}^{2r\times 2r}_{Re>0},\ X+iJ\,\text{invertierbar}\right\} \to \left\{X \in \mathbb{C}^{2r\times 2r}_{Re>0},\ \text{Block}\ 12\,\text{invertierbar}\right\}$$

ist eine Bijektion. Ihre inverse Abbildung ist

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & D \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\begin{pmatrix} A-(A+B)(A+B+B^t+D)^{-1}(A+B^t) & -2i(A+B)(A+B+B^t+D)^{-1}+i \\ -2i(A+B+B^t+D)^{-1}(A+B^t)+i & 4(A+B+B^t+D)^{-1} \end{pmatrix}.$$

T_g ist sogar ein Hilbert-Schmidt-Operator, da sein Integralkern in $L^2(R^{2r}, dxdy)$ liegt, d.h. auf dem Produktraum quadrat-integrierbar ist [**Fol89**].

Howe hat diese Halbgruppe und diese Realisierung betrachtet, um Abschätzungen für gewisse Pseudo-Differential Operatoren zu finden.

Durch die Bedingung

$$a_g^2 = \frac{\det(i+c(g))}{(2\pi)^r \det_r(Jc(g))_{22}}$$

haben wir eine doppelte Überlagerung:

$$\mathcal{B}(L^2) \to \mathrm{S}^>, \qquad a_g T_g \mapsto g.$$

Da $i+c(g) = 2(ig-i)^{-1}$ und der Block 22 der Matrix $Jc(g)$ invertierbar sind, gibt die Bedingung an die Konstante a_g 2 Blätter. Die Invertierbarkeit des Blocks 22 der Matrix $Jc(g)$ folgt aus ihrer Symmetrie und der Positivität ihres Realteils.

3. Die metaplektische Darstellung

Die symplektische Gruppe Sp wird durch

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-t} \end{pmatrix}, A \in \mathrm{Gl}(\mathbb{R}^r) \right\}$$

$$\text{und} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix}, C^t = C \in \mathbb{R}^{r\times r} \right\} \quad \text{erzeugt.}$$

Die Darstellung von Sp als unitäre Operatoren auf $L^2(\mathbb{R}^r)$ ist auf Erzeugern gegeben [**Fol89**]:

$$\mathrm{Sp} \xrightarrow{\pi} \mathcal{U}(L^2)$$

$$\begin{array}{cl} J & \longmapsto \pi[J] : \pi[J]f(y) = i^{r/2}\mathcal{F}^{-1}f(y) \\ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-t} \end{pmatrix} & \longmapsto \pi\left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-t} \end{pmatrix}\right] : \pi\left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-t} \end{pmatrix}\right] f(y) = \frac{f(A^{-1}y)}{(\det A)^{1/2}} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix} & \longmapsto \pi\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix}\right] : \pi\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix}\right] f(y) = \pm e^{-iy^tCy} f(y) \end{array}.$$

Die Fourier Transformation, die hier benutzt wurde, ist

$$\mathcal{F}f(y) = \frac{1}{\pi^{r/2}} \int_{\mathbb{R}^r} f(x) e^{-2ix^ty} dx.$$

Auch hier haben wir eine doppelte Überlagerung.

4. Fortsetzung Howes Realisierung

In der metaplektischen Darstellung werden die Gruppenelemente

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-t} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix}$$

nicht durch wirkliche Integral-Operatoren dargestellt. Durch den Gebrauch von δ-Integralkernen oder δ-Distributionen können

$$\pi\left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-t} \end{pmatrix}\right] \quad \text{und} \quad \pi\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix}\right]$$

jedoch als solche geschrieben werden:

$$\pi\left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-t} \end{pmatrix}\right] f(y) = (\det A)^{-1/2} f(A^{-1}y) =$$

$$= (\det A)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^r} \delta_y(Ax) f(x) dx$$

und

$$\pi\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix}\right] f(y) = \pm e^{-iy^tCy} f(x) = \pm \int_{\mathbb{R}^r} e^{-ix^tCx} \delta_y(x) f(x) dx.$$

Das ist die Startidee da Howe's Realisierung für $\mathrm{S}^<$ als Integral-Operatoren erfolgt. Als zweiten Schritt versucht man die Erzeuger der symplektischen Gruppe via $\tilde{}\circ M_J \circ c$ abzubilden, wobei M_J der Multiplikations-Operator mit Symbol J ist. Dies ist nur für den Erzeuger J möglich, da die C-Typ Elemente nicht im Definitionsbereich der Cayley Transformation liegen, und man bei der Hintereinanderausführung der Abbildungen bei den A-Typ Matrizen auf ähnliche Probleme stößt.
Die metaplektische Darstellung ist außerdem eine rechtsseitige Darstellung, das heißt

$$\pi[g_1] \circ \pi[g_2] = \pi[g_1 g_2]$$

und Howe's Realisierung ist linksseitig: $a_{g_1g_2} T_{g_1g_2} = a_{g_2} T_{g_2} \circ a_{g_1} T_{g_1}$.

Dies zusammen mit der Tatsache, dass der Erzeuger J sich unter $\tilde{}\circ M_J \circ c$ auf

$$\widetilde{Jc(J)} = 2i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

abbildet, mit $a_J^2 = (i/\pi)^r$ und somit den Operator $i^{-r/2}\mathcal{F}$ induziert, während

$$\widetilde{Jc(-J)} = 2i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $a_{-J}^2 = a_J^2 = (i/\pi)^r$ den Operator $i^{r/2}\mathcal{F}^{-1} = \pi[J]$ induziert, führt dazu, mit $\mathrm{S}^>$, der komplementären Halbgruppe, zu arbeiten und zuerst die Inversion (in $\mathrm{Sp}^{\mathbb{C}}$) und dann erst Howe's Realisierung anzuwenden.
Sei

$$\mathrm{S}^> = \left\{ g \in \mathrm{Sp}^{\mathbb{C}} : g^*(-iJ)g < -iJ \right\}.$$

Dann ist

$$\mathrm{S}^{>} \xrightarrow{(\cdot)^{-1}} \mathrm{S}^{<}$$

eine Bijektion, die sich auch auf Randelemente, insbesondere die Elemente der symplektischen Gruppe, erweitert. Die Realisierung ist

$$\mathrm{S}^{>} \longrightarrow \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^r)),$$

$$g \longmapsto \kappa[g] : f \mapsto b_g T_g f$$

hier ist T_g der Integral-Operator mit Kernfunktion

$$K_g = e^{-\frac{1}{2}(x^t,y^t)(\overline{\widetilde{-Jc(g)}})\binom{x}{y}} \quad \text{und}$$

$$b_g^2 = \frac{\det(i - c(g))}{(2\pi)^r \det_r(-Jc(g))_{22}},$$

da $c(g^{-1}) = (g^{-1}+1)(ig^{-1}-i)^{-1} = (1+g)g^{-1}g(i-ig)^{-1} = -c(g)$. Diese neue Realisierung, wieder eine doppelte Überlagerung, ist ordnungserhaltend,

$$g_1 g_2 \mapsto \kappa[g_1 g_2] = \kappa[g_1]\kappa[g_2].$$

Die involvierten Operationen sind auf $J \in \mathrm{Sp}$ anwendbar, und man erhält, durch triviale Erweiterung

$$J \mapsto \kappa[J] = \pi[J].$$

Für die A - Typ Erzeuger werden jetzt nacheinander die Inversion, dann Cayley-Transformation und dann die Multiplikation mit J angewendet. Dies ergibt

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-t} \end{pmatrix} \xrightarrow{M_J \circ c \circ (\cdot)^{-1} = M_{-J} \circ c} \begin{pmatrix} 0 & -c(A^{-t}) \\ -c(A^{-1}) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c(A^t) \\ c(A) & 0 \end{pmatrix},$$

wo angenommen wird, dass A nicht den Eigenwert 1 besitzt, das heißt $A-1$ invertierbar ist. Die $r \times r$ Matrixeinträge $c(A^t)$ und $c(A)$, sind die Bilder unter der $(2r \times 2r)$ Cayley Transformation c von A^t und A. Diese letzte Matrix ist zwar symmetrisch, hat aber Realteil 0. Für $\varepsilon > 0$ betrachten wir nun

$$-Jc\Big(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-t} \end{pmatrix}\Big) + \varepsilon 1 = \begin{pmatrix} \varepsilon & c(A^t) \\ c(A) & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Diese neue Matrix ist symmetrisch, hat positiven Realteil und

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & c(A^t) \\ c(A) & \varepsilon \end{pmatrix} + iJ$$

ist invertierbar, da dies für $\varepsilon = 0$ gilt und durch Offenheit also auch für $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. In **[Hil89]** wird gezeigt, dass

$$M_J \circ c : \mathrm{S}^{<} \to \big\{X \in C_{sym}^{2r\times 2r},\ ReX > 0,\ X + iJ \text{ invertierbar}\big\}$$

eine Bijektion ist. Es existiert also $g_\varepsilon \in \mathrm{S}^{>}$, so dass

$$Jc(g_\varepsilon^{-1}) = \begin{pmatrix} \varepsilon & c(A^t) \\ c(A) & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Die Weyl $\tilde{\ }$-Operation liefert nun

$$X_\varepsilon = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+4\varepsilon^{-1} \begin{pmatrix} -A^t(A^t-1)^{-1}(A-1)^{-1}A & A^t(A^t-1)^{-1}(A-1)^{-1} \\ (A^t-1)^{-1}(A-1)^{-1}A & -(A^t-1)^{-1}(A-1)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Der dazugehörige Operator ist

$$b_{g_\varepsilon} T_{g_\varepsilon} f(y) = b_{g_\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^r} e^{-\frac{1}{2}(x^t,y^t)X_\varepsilon\binom{x}{y}} f(x)dx,$$

und b_{g_ε} kann errechnet werden durch

$$b_{g_\varepsilon}^2 = \frac{\det\left(c(g_\varepsilon^{-1})+i\right)}{(2\pi)^r \det_r\left(Jc(g_\varepsilon^{-1})\right)_{22}}.$$

Wir erhalten $b_{g_\varepsilon}^2 = (2\pi\varepsilon)^{-r}\det(\varepsilon^2 + 4A(A-1)^{-1}(A^t-1)^{-1})$, da $c(A) - i = 2iA(-A+1)^{-1}$ und $c(A) + i = 2i(-A+1)^{-1}$.
Nun haben wir

$$g_\varepsilon \in \mathrm{S}^{>} \mapsto \kappa[g_\varepsilon] = b_{g_\varepsilon} T_{g_\varepsilon}, \qquad \text{mit}$$

$$b_{g_\varepsilon} T_{g_\varepsilon} f(y) = b_{g_\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^r} e^{-1/2\varepsilon(x^t,y^t)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\binom{x}{y}}.$$

$$\cdot e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^{-1}(x^t,y^t)\begin{pmatrix} 2A^t(A^t-1)^{-1}(A-1)^{-1}A2 & -2A^t(A^t-1)^{-1}(A-1)^{-1}2 \\ -2(A^t-1)^{-1}(A-1)^{-1}A2 & 2(A^t-1)^{-1}(A-1)^{-1}2 \end{pmatrix}\binom{x}{y}} f(x)dx.$$

Wir machen den folgenden Koordinatenwechsel $u = 2(A-1)^{-1}Ax$, und schreiben $v = 2(A-1)^{-1}y$. Dies ergibt

$$b_{g_\varepsilon} T_{g_\varepsilon} f(\tfrac{1}{2}(A-1)v) =$$

$$b_{g_\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^r} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon(u^t,v^t)\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(A^t-1)A^{-t}A^{-1}(A-1)\frac{1}{2} & -(A^t-1)A^{-t}(A-1)\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}(A^t-1)A^{-1}(A-1)\frac{1}{2} & \frac{1}{2}(A^t-1)(A-1)\frac{1}{2} \end{pmatrix}\binom{u}{v}}.$$

$$\cdot e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^{-1}(u^t,v^t)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\binom{u}{v}} f(\tfrac{1}{2}A^{-1}(A-1)u)\frac{|\det A - 1|}{2^r\,|\det A|}du.$$

Die erste Exponentialfunktion in der Intergration werden wir $h_1 = h_1(\varepsilon)$ nennen, und die zweite $h_2 = h_2(\varepsilon)$. Für die Konstanten gilt

$$b_{g_\varepsilon}^2 \frac{\det(A-1)^2}{2^{2r}\det A^2} = \frac{1}{(2\varepsilon\pi)^r}\det(\varepsilon^2 + 4A(A-1)^{-1}(A^t-1)^{-1})\frac{\det(A-1)^2}{2^{2r}\det A^2} =$$

$$= \frac{1}{(2\varepsilon\pi)^r} d_\varepsilon \quad \text{und} \quad d_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\det A}.$$

h_2 zusammen mit dem Faktor $\frac{1}{(2\varepsilon\pi)^{r/2}}$, der schon eben isoliert betrachtet wurde, ist eine approximierende Identität oder δ-Folge im folgenden Sinne: Sei $\phi(x) = (2\pi)^{-r/2}e^{-\frac{1}{2}xx^t}$. Wir haben $\phi \geq 0$ and $\int \phi = 1$. Die reskalierten Funktionen $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-r/2}\phi(\varepsilon^{-1/2}x)$ erfüllen $\phi_\varepsilon * f \to f$ in L^2 [**Duo01**]. Für die Funktion h_1 gilt

$$0 < h_1(\varepsilon)(u,v) \leq 1 \quad \forall\, \varepsilon > 0, \forall\, u, v \in \mathbb{R}^r$$

und $h_1(\varepsilon)(u,v)$ konvergiert kompakt gegen 1. Die Tatsache $\phi_\varepsilon(v-u) = (2\pi\varepsilon)^{-r/2}h_2(u,v)$, zusammen mit den Abschätzungen für h_1 und der kompakten Konvergenz, ergeben die Konvergenz in einem dichten Unterraum von L^2 [**Duo01**]

$$b_{g_\varepsilon}T_{g_\varepsilon}f(\tfrac{1}{2}(A-1)v) \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{\det A^{1/2}} f(\tfrac{1}{2}A^{-1}(A-1)v),$$

Durch ein Dichteargument, zusammen mit einer gleichmäßigen Schranke für die Operatoren $b_{g_\varepsilon}T_{g_\varepsilon}$ ergibt sich die Konvergenz für alle $f \in L^2$.

Für die C - Typ Gruppenelemente nehmen wir die gerade betrachtete δ-Folge ϕ_ε und argumentieren ähnlich, aber rückwärts: Für alle $f \in L^2$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^r} \phi_\varepsilon(x-y)e^{-ix^tCx}f(x)dx \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \pi\Big[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix}\Big]f(y)$$

in L^2. Nun ist

$$\phi_\varepsilon(x-y)e^{-ix^tCx} = (2\pi\varepsilon)^{-r/2}e^{-1/2(x^t,y^t)\begin{pmatrix} 1/\varepsilon + 2iC & -1/\varepsilon \\ -1/\varepsilon & 1/\varepsilon \end{pmatrix}\binom{x}{y}}.$$

Die Matrix im Exponenten

$$\begin{pmatrix} 1/\varepsilon + 2iC & -1/\varepsilon \\ -1/\varepsilon & 1/\varepsilon \end{pmatrix}$$

ist symmetrisch, hat aber keinen positiven Realteil. Ihr 12 Block ist allerdings invertierbar. Wir betrachten nun die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1/\varepsilon + 2iC & -1/\varepsilon \\ -1/\varepsilon & 1/\varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\varepsilon + 2iC + \varepsilon & -1/\varepsilon \\ -1/\varepsilon & 1/\varepsilon \end{pmatrix},$$

die symmetrisch ist, positiven Realteil hat und deren Block 12 immer noch invertierbar ist. Die inverse Weyl $\tilde{\ }$-Operation liefert

$$\begin{pmatrix} 1/\varepsilon + 2iC + \varepsilon & -1/\varepsilon \\ -1/\varepsilon & 1/\varepsilon \end{pmatrix} \overset{\sim^{-1}}{\to} \begin{pmatrix} 1/\varepsilon & -i \\ -i & 4(2iC+\varepsilon)^{-1} \end{pmatrix},$$

und die Anwendung von $c^{-1} \circ M_J$ ergibt

$$\begin{pmatrix} 1/\varepsilon & -i \\ -i & 4(2iC+\varepsilon)^{-1} \end{pmatrix} \overset{c^{-1}\circ M_J}{\to} \begin{pmatrix} 1+\varepsilon(2iC+\varepsilon) & 2i\varepsilon \\ -i/2(2iC+\varepsilon) & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{S}^>.$$

Für $\varepsilon \to 0$ liefert dies eine Approximation der C - Typ Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix}.$$

Sei somit

$$g_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon(2iC+\varepsilon) & 2i\varepsilon \\ -i/2(2iC+\varepsilon) & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{S}^>.$$

Sein assoziierter Operator hat den (konjugierten) Integralkern

$$e^{-\frac{1}{2}(x^t,y^t)\begin{pmatrix} 1/\varepsilon+2iC+\varepsilon & -1/\varepsilon \\ -1/\varepsilon & 1/\varepsilon \end{pmatrix}\binom{x}{y}} = (2\pi\varepsilon)^{r/2}\phi_\varepsilon(x-y)e^{-\varepsilon/2\,x^tx}e^{-ix^tCx},$$

und für alle $\varepsilon > 0$ und $x \in \mathbb{R}^r$ gilt

$$0 < e^{-\frac{\varepsilon}{2}x^tx} \leq 1.$$

Desweiteren haben wir die kompakte Konvergenz

$$e^{-\frac{\varepsilon}{2}x^tx} \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 1,$$

so dass die gewünschte Konvergenz gewährleistet ist [**Duo01**], da sich auch die Konstanten wohl verhalten: Der Operator zu g_ε trägt eine Konstante b_{g_ε}, für die

$$b_{g_\varepsilon}^2 = \frac{\det\left(c(g_\varepsilon^{-1})+i\right)}{(2\pi)^r\det_r\left(Jc(g_\varepsilon^{-1})\right)_{22}} =$$

$$= \frac{\det\begin{pmatrix} 2i & -4(2iC+\varepsilon)^{-1} \\ 1/\varepsilon & 0 \end{pmatrix}}{(2\pi)^r\det_r(4(2iC+\varepsilon)^{-1})} = \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^r}$$

gilt, was dem Faktor der reskalierten Funktion ϕ_ε entspricht.

Dies ist der Beweis für

Theorem 4.1. *Die Darstellung*

$$S^> \longrightarrow \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^r)),$$

$$g \longmapsto \kappa[g] : f \mapsto b_gT_gf(y) = b_g\int_{\mathbb{R}^r} e^{-\frac{1}{2}(x^t,y^t)-\widetilde{Jc(g)}\binom{x}{y}}f(x)dx$$

mit

$$b_g^2 = \frac{\det(i-c(g))}{(2\pi)^r\det_r(-Jc(g))_{22}},$$

lässt sich auf Sp *erweitern, und ergibt die metaplektische Darstellung, im folgenden Sinne: Für jedes $g \in$ Sp existiert eine Folge $\{g_n\} \subset$ S$^>$ mit $g_n \overset{n\to\infty}{\to} g$, und es gilt $\kappa[g_n] \overset{n\to\infty}{\to} \pi[g]$ in der strengen operator Topologie in $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^r))$.*

Bemerkung 4.2. Zur Geschichte: Kanonische Transformationen, insbesondere symplektische, die Position und Impuls im Phasenraum beschreiben, haben eine wichtige Rolle im Verstehen und Lösen der Probleme der klassischen Mechanik gespielt. 1920 wurden allgemeine kanonische Transformationen und neue (komplexe) Positions- und Impuls-Koordinaten eingeführt um die Fundamente der Quanten Mechanik festzulegen. Via der Darstellung bzw. Quantisierung wurden unitäre Transformationen der Zustände (in Hilberträumen analytischer Funktionen) betrachtet. Dies folgt aus dem Arbeiten mit $\mathrm{Sp}_{\mathfrak{B}}$ der „Cayleyfizierten" symplektischen Gruppe und mit ihrer Darstellung in $\mathcal{B}(H^2)$, wobei H^2 der Fock-Raum, quadrat integrierbarer (bzgl. des Gausschen Maßes) holomorpher Funktionen auf $\mathbb{C}^r$ ist, [**Bar61**] [**Bar**]. Diese Darstellung hat eine geschlossene Formel, als Intertwiner zur metaplektischen Darstellung operiert die Segal-Bargmann-Transformation. 1975 wurde der eindimensionale Fall [**KMS75**] untersucht um, unter anderem, mit dem 3 - Körper Problem und dem Kernanhäufungsansatz (Kernphysik) umzugehen. Im Rahmen von kanonischen Kommutatorrelationen und kanonischen Transfomationen und um r - Körperdynamik zu beschreiben, wurde diese Darstellung auf eine Unterhalbgruppe, von strengen Kontraktionen einer hermiteschen Form, der $\mathrm{Sp}^{\mathbb{C}}$ erweitert, in deren Rande $\mathrm{Sp}_{\mathfrak{B}}$ liegt [**Bru77**], [**Bru85**], [**BK79**], [**BK80**], [**BP77**], [**Kra77**], [**Ner96**]. Diese Erweiterung von Bargmanns Realisierung ist, aus mathematischer Warte, einfacher zu handhaben, nicht nur wegen ihrer geschlossenen Formel, sondern auch dadurch, dass der Hilbertraum H^2 einen reproduzierenden Kern besitzt und somit jeder beschränkte Operator ein Integral-Operator ist. Da die Notation nicht einheitlich ist, wird hier ein direkter Beweis der Erweiterung angegeben, und gezeigt, dass das Arbeiten mit der kompelmentären Halbgruppe nötig ist.

5. $\mathrm{S}^{>}$ und Kozykluseigenschaften

Seien $g \in \mathrm{Sp}$ und $\mathfrak{w} \in \mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{P} = \left\{\mathfrak{w} \in \mathbb{C}^{r\times r}_{sym} : Im\mathfrak{w} > 0\right\}$ dem Siegelschen oberen Halbraum. Sp operiert auf $\mathfrak{P}$ als Moebius Transformationen, wie in Kapitel 1 beschrieben. Für

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

schreiben wir

$$X_{g,\mathfrak{w}} = Im\mathfrak{w}^{-1/2}(\overline{\mathfrak{w}}C^t + D^t)Img\mathfrak{w}^{1/2}.$$

Diese Matrix ist unitär, da durch die symplektischen Bedingungen

$$Img\mathfrak{w} = (\overline{\mathfrak{w}}C^t + D^t)^{-1}Im\mathfrak{w}(C\mathfrak{w} + D)^{-1}$$

gilt.

Bemerkung 5.1. Die Matrix $X_{g,\mathfrak{w}}$ wird durch einen unitären Operator $U_{g,\mathfrak{w}}$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ induziert. Dies wird im Detail in Kapitel 4 erarbeitet, da

$$U_{g,\mathfrak{w}} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \quad \psi(\zeta) \mapsto \psi(X_{g,\mathfrak{w}}\zeta).$$

die Abbildung

$$\mathrm{Sp} \ltimes \mathfrak{P} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathrm{i}}) \qquad (g, \mathfrak{w}) \mapsto U_{g,\mathfrak{w}}$$

induziert, deren Bilder der Transformationregel

$$U_{g_1g_2,\mathfrak{w}} = U_{g_1,g_2\mathfrak{w}} \circ U_{g_2,\mathfrak{w}}$$

genügen, und diese somit mit einer Kozykluseigenschaft bestückt ist.
$\mathcal{H}$ ist der Hilbertraum der quadrat integrierbaren Funktionen (mit dem Lebesgue Maß) der Form

$$\psi(\zeta) = \phi(\zeta)e^{-1/2|\zeta|^2}, \quad \zeta = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\xi + i\eta),$$

mit ϕ einer ganzen Funktion und $\xi, \eta \in \mathbb{R}^r$.

Wir betrachten nun die Halbgruppe

$$\mathrm{S} = \left\{ g \in \mathrm{Sp}^{\mathbb{C}} : g^*(-iJ)g < (-iJ),\ g(\mathfrak{P}) \subset \mathfrak{P} \right\},$$

das heißt, für jedes $g \in \mathrm{S}$ ist $g\mathfrak{w}$ definiert und $g\mathfrak{w} \in \mathfrak{P}$.
Für $g \in \mathrm{S}$ und $\mathfrak{w} \in \mathfrak{P}$ betrachten wir den induzierten Operator

$$T_{g,\mathfrak{w}} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \qquad \psi(\zeta) \mapsto \psi(X_{g,\mathfrak{w}}\zeta),$$

wobei

$$X_{g,\mathfrak{w}} = Im(\mathfrak{w})^{-1/2}(\overline{\mathfrak{w}}C^* + D^*)Im(g\mathfrak{w})^{1/2} \text{ für } g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

So hat man eine Erweiterung auf $g \in \mathrm{S}$ und $\mathfrak{w} \in \mathfrak{P}$ der Abbildung

$$(g, \mathfrak{w}) \in \mathrm{Sp} \ltimes \mathfrak{P} \mapsto U_{g,\mathfrak{w}},$$

der symplektischen Gruppe und dem Siegelschen oberen Halbraum in unitäre Operatoren auf $\mathcal{H}$.
Der imaginär Teil von $g\mathfrak{w}$, für $g \in \mathrm{S}$ und $\mathfrak{w} \in \mathfrak{P}$ ist gegeben durch

$$Img\mathfrak{w} = (\overline{\mathfrak{w}}C^* + D^*)^{-1}Y(C\mathfrak{w} + D)^{-1}, \qquad \text{mit}$$

$$Y = \frac{1}{2i}[\overline{\mathfrak{w}}(C^*A - A^*C)\mathfrak{w} + D^*B - B^*D + (D^*A - B^*C)\mathfrak{w} + \overline{\mathfrak{w}}(C^*B - A^*D)].$$

Für $g \in \mathrm{Sp}$ erhält man die oben genannte Formel für $Img\mathfrak{w}$.

Ein paar Kommentare noch zur Definition der Halbgruppe S:

- S ist nicht leer, und man kann außerdem explizite Folgen g_n angeben, welche die Erzeuger der symplektischen Gruppe approximieren. Zum Beispiel ist

  $$g_n = \begin{pmatrix} 1 + 1/n(2iC + 1/n) & 2i/n \\ -i/2(2iC + 1/n) & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{S},$$

  und es gilt

  $$g_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix}.$$

  Diese Elemente g_n hatten wir schon in der Erweiterung von Howes Darstellung auf die komplementäre Oszillator Halbgruppe und auf die Randelemente, die in der symplektischen Gruppe Sp liegen, betrachtet.

  $$g_n = \begin{pmatrix} -i/n & 1 + 1/n^2 \\ -1 & -i/n \end{pmatrix} \in \mathrm{S}$$

  approximiert J.

- Die Bedingung an $g \in \mathrm{Sp}^{\mathbb{C}}$ den Siegelschen oberen Halbraum invariant zu lassen, impliziert nicht, dass $g \in \mathrm{S}^{>}$:

  $\left\{g \in \mathrm{Sp}^{\mathbb{C}} : g(\mathfrak{P}) \subset \mathfrak{P}\right\} \not\subseteq \left\{g \in \mathrm{Sp}^{\mathbb{C}} : g^*(-iJ)g < (-iJ)\right\}.$

  Alle Translationen t_λ in $i\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, gegeben durch
  $$t_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & i\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
  sind in $\left\{g \in \mathrm{Sp}^{\mathbb{C}} : g(\mathfrak{P}) \subset \mathfrak{P}\right\}$, doch
  $$t_\lambda^*(-iJ)t_\lambda - (-iJ) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda \end{pmatrix}$$
  ist nicht negativ definit.

Satz 5.2. *Der Operator $T_{g,\mathfrak{w}}$ ist eine Kontraktion für $g \in \mathrm{S}, \mathfrak{w} \in \mathfrak{P}$.*

Beweis: Wir zeigen, dass $T^*_{g,\mathfrak{w}} T_{g,\mathfrak{w}} < 1$. Dafür berechnen wir den zu $T_{g,\mathfrak{w}}$ adjungierten Operator:
$$\langle T_{g,\mathfrak{w}}(\psi_1), \psi_2\rangle = \langle \psi_1 \circ X_{g,\mathfrak{w}}, \psi_2\rangle = \langle \psi_1, \psi_2 \circ X^{-1}_{g,\mathfrak{w}}\rangle \left|\det X_{g,\mathfrak{w}}\right|^{-2},$$
wobei die zweite Gleichheit aus einem Koordinatenwechsel folgt, da $X_{g,\mathfrak{w}}$ invertierbar ist. Um dies zu zeigen brauchen wir eine Nebenrechnung, und zwar zeigen wir, dass $X_{g,\mathfrak{w}} X^*_{g,\mathfrak{w}} > 1$: Per Definition ist $Img\mathfrak{w} > 0$, und
$$Img\mathfrak{w} = (\overline{\mathfrak{w}}C^* + D^*)^{-1} Y (C\mathfrak{w} + D)^{-1} > 0 \iff$$
$$Y = \frac{1}{2i}[\overline{\mathfrak{w}}(C^*A - A^*C)\mathfrak{w} + D^*B - B^*D + (D^*A - B^*C)\mathfrak{w} + \overline{\mathfrak{w}}(C^*B - A^*D)] > 0.$$
Nun ist
$$X_{g,\mathfrak{w}} X^*_{g,\mathfrak{w}} = Im(\mathfrak{w})^{-1/2}(\overline{\mathfrak{w}}C^* + D^*) Im(g\mathfrak{w})(C\mathfrak{w} + D) Im(\mathfrak{w})^{-1/2} =$$
$$= Im(\mathfrak{w})^{-1/2} Y Im(\mathfrak{w})^{-1/2} > 1$$
genau dann, wenn $Y > Im(\mathfrak{w})$, und dies ist der Fall, da
$$0 > g^*(-iJ)g - (-iJ) = (-i)\begin{pmatrix} A^*C - C^*A & A^*D - C^*B - 1 \\ B^*C - D^*A + 1 & B^*D - D^*B \end{pmatrix}.$$
Somit ist auch
$$0 > \begin{pmatrix} \overline{\mathfrak{w}} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left[g^*(-iJ)g - (-iJ)\right]\begin{pmatrix} \mathfrak{w} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(Im\mathfrak{w} - Y) & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$
also gilt insbesondere für den 11 Block: $2(Im\mathfrak{w} - Y) < 0$.

Damit erhalten wir
$$T^*_{g,\mathfrak{w}}(\psi)(\zeta_i) = \psi(X^{-1}_{g,\mathfrak{w}}\zeta_i)\left|\det X_{g,\mathfrak{w}}\right|^{-2}$$
und $T^*_{g,\mathfrak{w}} T_{g,\mathfrak{w}} < 1$, da $\left|\det X_{g,\mathfrak{w}}\right|^2 = \det X_{g,\mathfrak{w}} X^*_{g,\mathfrak{w}} > 1$. Diese letzte Ungleichung folgt wiederum aus $X_{g,\mathfrak{w}} X^*_{g,\mathfrak{w}} > 1$.

□

Bemerkung 5.3. Aus dem Beweis ersieht man, dass die Bedingung $g(\mathfrak{P}) \subset \mathfrak{P}$ für $g \in \mathrm{S}$ überflüssig ist. Wir haben folgendes

Lemma 5.4. *Sei $g \in \mathrm{S}^>$, dann ist $g\mathfrak{w}$, für alle $\mathfrak{w} \in \mathfrak{P}$, definiert und es gilt $g\mathfrak{w} \in \mathfrak{P}$, das heißt $g\mathfrak{w}^t = g\mathfrak{w}$ und $Img\mathfrak{w} > 0$. S ist also eine triviale Unterhalbgruppe von $\mathrm{S}^>$, es gilt die Gleichheit*

$$\mathrm{S} = \mathrm{S}^>.$$

Beweis: Wir zeigen, dass $g\mathfrak{i}$ für alle $g \in \mathrm{S}^>$ existiert, und argumentieren dann mit der Transitivität von Sp auf $\mathfrak{P}$:
$C\mathfrak{i} + D$ ist invertierbar, dies folgt zum einen aus der Abgeschlossenheit von $\mathrm{S}^>$ unter *, das heißt $\mathrm{S}^{>*} \subset \mathrm{S}^>$, da

$$g \in \mathrm{S}^> \iff g^t \in \mathrm{S}^< \quad \text{und} \quad g \in \mathrm{S}^> \iff \overline{g} \in \mathrm{S}^<,$$

und somit gilt

$$0 > g(-iJ)g^* - (-iJ) = (-i)\begin{pmatrix} AB^* - BA^* & AD^* - BC^* - 1 \\ CB^* - DA^* + 1 & CD^* - DC^* \end{pmatrix},$$

also auch $i(CD^* - DC^*) > 0$. Zum anderen folgt dies aus der Positivität von

$$gg^* = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & CC^* + DD^* \end{pmatrix} > 0.$$

Man erhält $(C\mathfrak{i} + D)(C\mathfrak{i} + D)^* = CC^* + DD^* + i(CD^* - DC^*) > 0$.
Durch die Transitivität von Sp und dadurch, dass $gg_1 \in \mathrm{S}^>$, für $g \in \mathrm{S}^>$ und $g_1 \in \mathrm{Sp}$, ist auch $g\mathfrak{w}$ definiert, für alle $g \in \mathrm{S}^>, \mathfrak{w} \in \mathfrak{P}$.
Aus den symplektischen Bedingungen folgt $g\mathfrak{w}^t = g\mathfrak{w}$, für alle $g \in \mathrm{Sp}^{\mathbb{C}}$.
Desweiteren ist

$$Img\mathfrak{w} = (\overline{\mathfrak{w}}C^* + D^*)^{-1}Y(C\mathfrak{w} + D)^{-1} > 0 \iff Y > 0 \quad \text{mit}$$

$$Y = \frac{1}{2i}[\overline{\mathfrak{w}}(C^*A - A^*C)\mathfrak{w} + D^*B - B^*D + (D^*A - B^*C)\mathfrak{w} + \overline{\mathfrak{w}}(C^*B - A^*D)].$$

Wie schon gezeigt wurde, gilt

$$0 > g^*(-iJ)g - (-iJ) = (-i)\begin{pmatrix} A^*C - C^*A & A^*D - C^*B - 1 \\ B^*C - D^*A + 1 & B^*D - D^*B \end{pmatrix}$$

und somit auch

$$0 > \begin{pmatrix} \overline{\mathfrak{w}} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\big[g^*(-iJ)g - (-iJ)\big]\begin{pmatrix} \mathfrak{w} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(Im\mathfrak{w} - Y) & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

d. h. $Y > Im(\mathfrak{w}) > 0$.

$\square$

Satz 5.5. *Für $g \in \mathrm{S}$ und $\mathfrak{w} \in \mathfrak{P}$ ist*

$$\jmath : \mathrm{S} \ltimes \mathfrak{P} \to \left\{X \in \mathbb{C}^{n\times n} : 1 - XX^* < 0\right\}, \quad (g, \mathfrak{w}) \mapsto X_{g,\mathfrak{w}}$$

ein Kozyklus in $\{X \in \mathbb{C}^{n\times n} : 1 - XX^* < 0\}$ der Form

$$\jmath(g_1g_2, \mathfrak{w}) = \jmath(g_2, \mathfrak{w})\jmath(g_1, g_2\mathfrak{w})$$

und

$$\jmath : \mathrm{S} \ltimes \mathfrak{P} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad (g, \mathfrak{w}) \mapsto T_{g,\mathfrak{w}}$$

ist ein Kozyklus in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ *der Form*

$$\jmath(g_1 g_2, \mathfrak{w}) = \jmath(g_1, g_2\mathfrak{w})\jmath(g_2, \mathfrak{w}),$$

der sich für alle $\mathfrak{w} \in \mathfrak{P}$ *auf* $g \in \mathrm{Sp}$ *kontinuirlich erweitern lässt:*
Sei $\{ g_n\}$ *eine Folge in* S*, die gegen* $g \in \mathrm{Sp}$ *konvergiert, dann konvergieren die Operatoren* $T_{g_n,\mathfrak{w}}$ *gegen* $U_{g,\mathfrak{w}}$*, wobei die Konvergenz in der strengen operator Topologie ist, das heißt, für jedes feste* $\psi \in \mathcal{H}$*, konvergiert* $T_{g_n,\mathfrak{w}}(\psi)$ *gegen* $U_{g,\mathfrak{w}}(\psi)$ *in* $\mathcal{H}$*.*

Beweis: Für $g_1, g_2 \in \mathrm{S}$ und $\mathfrak{w} \in \mathfrak{P}$ erhält man durch Ausrechnen folgende Identität

$$X_{g_1 g_2,\mathfrak{w}} = X_{g_2,\mathfrak{w}} X_{g_1,g_2\mathfrak{w}}, \quad \text{also}$$
$$\jmath(g_1 g_2, \mathfrak{w}) = \jmath(g_2, \mathfrak{w})\jmath(g_1, g_2\mathfrak{w}).$$

Dies bedeutet für die dazugehörenden Operatoren

$$T_{g_1,g_2\mathfrak{w}} \circ T_{g_2,\mathfrak{w}} = T_{g_1 g_2,\mathfrak{w}},$$

das heißt

$$\jmath(g_1 g_2, \mathfrak{w}) = \jmath(g_1, g_2\mathfrak{w})\jmath(g_2, \mathfrak{w}).$$

Die Konvergenz der Operatoren ist durch die Konvergenz der Matrizen $X_{g_n,\mathfrak{w}} \to X_{g,\mathfrak{w}}$ und der Tatsache dass $X_{g_n,\mathfrak{w}}$ expansiv ist, gewährleistet:
Sei $1 > \varepsilon > 0$, so existiert $R > 0$, so dass für alle n

$$\int_{\{\|\zeta\|>R\}} |f(X_{g_n,\mathfrak{w}}\zeta)|^2\, d\zeta \le \int_{\{\|\zeta\|>R\}} |f(X_{g,\mathfrak{w}}\zeta)|^2\, d\zeta < \varepsilon$$

gilt. Da

$$\int |f(X_{g_n,\mathfrak{w}}\zeta) - f(X_{g,\mathfrak{w}}\zeta)|^2\, d\zeta =$$

$$= \int_{\{\|\zeta\|\le R\}} |f(X_{g_n,\mathfrak{w}}\zeta) - f(X_{g,\mathfrak{w}}\zeta)|^2\, d\zeta + \int_{\{\|\zeta\|>R\}} |f(X_{g_n,\mathfrak{w}}\zeta) - f(X_{g,\mathfrak{w}}\zeta)|^2\, d\zeta \le$$

erhält man durch die Hölder Ungleichung

$$\le \int_{\{\|\zeta\|\le R\}} |f(X_{g_n,\mathfrak{w}}\zeta) - f(X_{g,\mathfrak{w}}\zeta)|^2\, d\zeta + 2\int_{\{\|\zeta\|>R\}} |f(X_{g,\mathfrak{w}}\zeta)|^2\, d\zeta +$$
$$+ 2\,\Big(\int_{\{\|\zeta\|>R\}} |f(X_{g,\mathfrak{w}}\zeta)|^2\, d\zeta\Big)^2.$$

Gleichmässige Konvergenz auf Kompakta ergibt die Existenz von n_0, so dass für alle $n \ge n_0$

$$\int_{\{\|\zeta\|\le R\}} |f(X_{g_n,\mathfrak{w}}\zeta) - f(X_{g,\mathfrak{w}}\zeta)|^2\, d\zeta \le \varepsilon.$$

Dies gibt die Konvergenz den Operatoren $T_{g_n,\mathfrak{w}}$ gegen $U_{g,\mathfrak{w}}$, in der strengen operator Topologie.

□

Teil 2

Jordan-theoretische Realisierung

KAPITEL 3

Jordan-Algebren und Jordan-Tripelsysteme

Jordan-Algebren wurden 1933 durch P. Jordan eingeführt, um die Algebra der Observablen in der Quantenmechanik mathematisch zu modellieren. Er wollte sich von der bisherigen (hermiteschen) Matrizendarstellung der physikalischen Observablen lösen, und sein Bestreben die Quantentheorie zu axiomatisieren führte zur Feststellung, dass die Algebra der Observablen jedes Quantensystems eine „formal-reelle", kommutative und potenzassoziative Algebra sein soll. Solche Algebren sind Jordan-Algebren, doch nicht jede Jordan-Algebra ist formal-reell. 1934 wurden dann die formal-reellen, endlich dimensionalen und einfachen Jordan-Algebren durch P. Jordan, E. Wigner und J. von Neumann in drei Typen klassifiziert: hermitesche Matrizenalgebren (über $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$), dem Spin-Faktor, und der hermiteschen 3×3 Matrizenalgebra über den Cayley-Zahlen $\mathbb{O}$, einer Ausnahmealgebra der Dimension 27.
Dies zeigt, dass Jordan-Algebren die Essenz hermitescher Matrizenalgebren tragen (man kann sogar von „Diagonalisierbarkeit" und reellen „Eigenwerten" sprechen), assoziativen Algebren nahe sind und dennoch so allgemein sein können, dass die Ausnahmealgebra unter ihnen ist. Die Spin-Faktoren sind in der speziellen Relativitätstheorie vertreten. In der Stringtheorie wird die Quantentheorie der Strings (Bosonenstrings) und die Raumzeit durch die Ausnahmealgebra modelliert.
Die unterliegende assoziative Struktur ist somit in den Jordan-Algebra Typen vorhanden die sich auf unendliche Dimension erweitern lassen und welche aus diesem Grunde in der Quantenmechanik relevant sind. Die unendlich dimensionalen einfachen Jordan-Algebren wurden 1979 von E. Zelmanov klassifiziert und entsprechen den ersten beiden Typen (unendlicher Dimension).
Jordan-Algebren sind das Mittel, sich von der euklidischen Struktur zu lösen. In dieser Arbeit werden Jordantheoretische Formulierungen genutzt, so dass eine Verallgemeinerung möglich ist.

In diesem Abschnitt werden die Grundlagen zu Jordan-Algebren und Jordan-Tripelsystemen kurz dargestellt und die wichtigsten Sätze zitiert. Die Hauptquellen sind [**FK94**], [**Loo77**], [**Upm96**], [**McC78**] und [**Jac49**]. Unter anderem werden die Beziehung zwischen Jordan-Algebren und symmetrischen Kegeln, die Quadratdarstellung einer Jordan-Algebra und die Spektralzerlegung ihrer Elemente präsentiert.

Es wird die Pierce-Zerlegung für Idempotente angegeben, und die verschiedenen Randkomponenten werden betrachtet. Tubengebiete und Gebiete des Tubentyps werden eingeführt und Erzeuger ihrer Automorphismengruppe gegeben. Die Klassifikation einfacher euklidischer Jordan-Algebren wird angegeben.
Im Anschluss und in Analogie zur Theorie der Jordan-Algebren werden Jordan-Tripelsysteme kurz beschrieben.

1. Symmetrische Kegel

Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit Skalarprodukt, das $(\cdot|\cdot)$ notiert wird.

Definition 1.1. Eine Teilmenge $\Omega \subset V$ heißt *Kegel*, falls für alle $\lambda > 0$ und alle $x \in \Omega$ auch $\lambda x \in \Omega$ ist.
Eine Teilmenge $S \subset V$ heißt *konvex*, wenn die konvexen Kombinationen zweier ihrer Elemente auch wieder in S liegen:

$$x, y \in S, 0 < \lambda < 1 \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in S.$$

Ein Kegel $\Omega \in V$ ist also genau dann konvex, wenn für alle $x, y \in \Omega$ und alle $\lambda, \mu > 0$ auch $\lambda x + \mu y \in \Omega$.
Für einen (nicht-leeren) konvexen Kegel Ω ist die Menge

$$\Omega - \Omega = \{x - y, x, y \in \Omega\}$$

der kleinste Unterraum von V, der Ω enthält, und $\overline{\Omega} \cap (-\overline{\Omega})$ ist der größte Unterraum von V der in $\overline{\Omega}$ liegt.

Definition 1.2. Ein Kegel heißt *echt*, wenn $\overline{\Omega} \cap (-\overline{\Omega}) = \{0\}$.

Sei Ω° das Innere von Ω. Es ist klar, dass $\Omega^\circ \neq \emptyset$ genau dann, wenn Ω eine Basis von V enthält, was äquivalent zu $\Omega - \Omega = V$ ist.

Definition 1.3. Der *abgeschlossene duale Kegel* zu einem Kegel Ω ist

$$\Omega^\sharp = \{y \in V : (x|y) \geq 0 \text{ für alle } x \in \Omega\}.$$

Es ist klar, dass $\Omega^\sharp$ ein abgeschlossener konvexer Kegel ist, und falls Ω selbst schon abgeschlossen (und nicht leer) ist, so folgt $(\Omega^\sharp)^\sharp \subset \Omega$ und da $\Omega \subset (\Omega^\sharp)^\sharp$ immer gilt haben wir die Gleichheit.

Definition 1.4. Sei Ω ein nicht leerer, offener, konvexer Kegel. Dann ist

$$\Omega^* = \left\{y \in V : (x|y) > 0, \forall\, x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}\right\}$$

der *offene duale Kegel* zu Ω.

Ein offener, konvexer, nicht leerer Kegel Ω ist das Innere seines Abschlusses $\overline{\Omega}$, und Ω^* ist das Innere von $\overline{\Omega}^\sharp$. Falls der Kegel echt ist, das heißt, falls $\overline{\Omega} \cap (-\overline{\Omega}) = \{0\}$ so folgt

$$(\Omega^*)^* = \Omega,$$

und somit ist auch Ω^* ein echter Kegel, da sein offener dualer Kegel nicht leer ist. $\Omega \subset (\Omega^*)^*$ gilt immer.

Definition 1.5. Ein offener konvexer Kegel Ω heißt *selbst-dual* wenn gilt $\Omega^* = \Omega$.

Ein selbstdualer Kegel ist immer echt.

2. Die Automorphismengruppe des Kegels

Nun betrachten wir die Isomorphismen von V, die den Kegel Ω auf sich selbst abbilden: Die Automorphismengruppe von einem offenen konvexen Kegel Ω ist

$$\mathrm{G}(\Omega) = \{g \in \mathrm{Gl}(V) : g\Omega = \Omega\}\,.$$

$\mathrm{G}(\Omega)$ ist eine abgeschlossene Gruppe von $\mathrm{Gl}(V)$ und somit eine Lie Gruppe.

Definition 2.1. Ein offener Kegel Ω heißt *homogen*, falls seine Automorphismengruppe transitiv auf ihm operiert, das heißt, für alle $x, y \in \Omega$ existiert ein $g \in \mathrm{G}(\Omega)$, so dass $gx = y$ ist.
Ein offener Kegel Ω heißt *symmetrisch*, falls er homogen und selbst-dual ist.

Sei im Folgenden Ω nicht leer. Für echte, offene, konvexe Kegel gilt $\mathrm{G}(\Omega^*) = \mathrm{G}(\Omega)^*$, wobei g^* für die adjungierte Lineartransformation von g steht. Insbesondere gilt für selbst-duale Kegel, dass $\mathrm{G}(\Omega) = \mathrm{G}(\Omega)^*$. Diese letzte Eigenschaft charakterisiert die symmetrischen Kegel, unter den homogenen: Sei Ω ein echter homogener Kegel, und G_1 eine Untergruppe von $\mathrm{G}(\Omega)$, die transitiv auf Ω operiert, und so dass $\mathrm{G}_1^* = \mathrm{G}_1$, dann ist Ω selbst-dual [**FK94**]. Das zeigt, dass für echte homogene Kegel gilt

$$\Omega^* = \Omega \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{G}(\Omega) = \mathrm{G}(\Omega)^*.$$

Der Stabilisator oder die *Isotropiegruppe* eines Elementes $x \in \Omega$ wird $\mathrm{G}(\Omega)_x$ genannt und besteht aus den Automorphismen des Kegels g, für die $gx = x$ gilt.
Für offene, konvexe Kegel Ω und $x \in \Omega$ ist $\mathrm{G}(\Omega)_x$ kompakt, und jede kompakte Untergruppe der Automorphismengruppe von $\mathrm{G}(\Omega)$ ist in der Isotropiegruppe eines Elementes des Kegels enthalten [**FK94**]. Die Isotropiegruppen sind also genau die maximal kompakten Untergruppen von $\mathrm{G}(\Omega)$, und im Falle, dass Ω homogen ist, sind alle Isotropiegruppen konjugiert:

$$x, y \in \Omega,\, gx = y \quad \Longrightarrow \mathrm{G}(\Omega)_y = g\mathrm{G}(\Omega)_x g^{-1}.$$

Im homogenen Fall gilt außerdem, dass schon die Zusammenhangskomponente der Identität in $\mathrm{G}(\Omega)$, die im Folgenden G genannt wird, transitiv auf dem Kegel operiert, da Ω die disjunkte Vereinigung von G - Orbits ist, und jeder dieser Orbits offen ist. Da Ω zusammenhängend

ist, kann es also nur einen Orbit geben.
Der Stabilisator eines Elementes $x \in \Omega$ in der Gruppe G wird durch G_x notiert. Alle maximal kompakten Untergruppen von G sind der Form G_x und sind alle konjugiert. Da G/G_x homömorph zum Kegel Ω (konvex und zusammenhängend, also einfach-zusammenhängend) ist, sind alle G_x zusammenhängend.

Beispiel: Sei $V = \mathbb{R}^{r\times r}_{sym}$, der Vektorraum der reellen symmetrischen Matrizen mit dem Spur - Skalarprodukt

$$(X|Y) = tr(XY).$$

Der Kegel der positiv definiten reellen symmetrischen Matrizen $\Omega = \mathbb{R}^{r\times r}_{sym,>0}$ ist echt, offen und konvex und ein symmetrischer Kegel: Sei $\xi \in \mathbb{R}^{r\times 1}$, man betrachtet $X = \xi\xi^t \in \overline{\Omega}\setminus\{0\}$ und für $Y \in \Omega^*$ gilt

$$0 < (X|Y) = \sum_{i,j} Y_{ij}\xi_i\xi_j = \xi^t Y \xi.$$

Das bedeutet, dass $Y \in \Omega$ und $\Omega^* \subset \Omega$. Da ein Element $X \in \overline{\Omega}\setminus\{0\}$ des Ranges k als Summe von k Elementen des Ranges 1 der Form $\xi\xi^t$, für $\xi \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$ geschrieben werden kann, das wäre

$$X = \sum_{j=1}^{k} \xi_j \xi_j^t,$$

gilt für $Y \in \Omega$

$$(Y|X) = \sum_{j=1}^{k} (Y|\xi_j\xi_j^t) = \sum_{j=1}^{k} \xi_j^t Y \xi_j > 0,$$

das heißt, $Y \in \Omega^*$. Ω ist selbst-dual.
Die Homogenität folgt aus der Tatsache, dass für jedes $A \in \mathrm{Gl}(r,\mathbb{R})$ die Abbildung $X \mapsto AXA^t$ in $\mathrm{G}(\Omega)$ liegt und dass jede positiv definite Matrix eine Quadratwurzel hat: Sei $X \in \Omega$, dann existiert $A \in \Omega \subset \mathrm{Gl}(r,\mathbb{R})$, so dass $AA = AA^t = X$. Somit ist $X = A1A^t \in Orb(1) = \{g1, g \in \mathrm{G}(\Omega)\}$.

3. Jordan-Algebren

In diesem Abschnitt wird die Definition einer Jordan-Algebra gegeben und ihre grundlegenden Eigenschaften werden angegeben.
Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, und V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$, der auch eine Algebra ist. Diese Algebra braucht nicht assoziativ zu sein.

Definition 3.1. Eine Algebra über $\mathbb{K}$ ist eine *Jordan-Algebra*, wenn sie kommutativ ist, das heißt, für alle $x, y \in V$ gilt $xy = yx$, und wenn

$$x(x^2y) = x^2(xy)$$

für alle $x, y \in V$ gilt.

Für ein Element $x \in V$ bezeichnet $L(x)$ die lineare Abbildung der Linksmultiplikation mit x auf V:

$$L(x)y = xy.$$

Die zweite definierende Eigenschaft einer Jordan-Algebra ist also die Kommutativität der Endomorphismen $L(x)$ und $L(x^2)$. Mit der Kommutatornotation ist dies die Bedingung $[L(x), L(x^2)] = 0$.
Im Allgemeinen ist eine Jordan Algebra nicht assoziativ. Aus assoziativen Algebren lassen sich allerdings Jordan-Algebren konstruieren:
Sei A eine assoziative Algebra über $\mathbb{K}$, wenn diese nicht kommutativ ist, definiert man eine Jordan-Struktur auf A durch ein neues Produkt, welches A kommutativ macht

$$x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx),$$

behält aber die additive Struktur des Vektorraumes bei. Dieses Produkt nennt man *Jordan-Produkt* und Jordan-Algebren dieser Art (und ihre Unteralgebren) nennt man *spezielle Jordan-Algebren*. Alle anderen Jordan-Algebren heißen *Ausnahme-Jordan-Algebren*.

Beispiel: Sei V ein (linearer) Unterraum einer assoziativen Algebra der stabil unter Quadratur ist, das heißt, für jedes $x \in V$ ist auch $x^2 \in V$. Dann ist V mit dem Jordan-Produkt eine Jordan-Algebra, da

$$x \circ y = \frac{1}{4}((x + y)^2 - (x - y)^2).$$

Insbesondere ist die Algebra der reellen symmetrischen Matrizen eine Jordan-Algebra.

3.1. Der Rang einer Jordan-Algebra. Wir betrachten im Folgenden unitale Jordan-Algebren mit Einselement e.
Jede Jordan-Algebra ist *Potenz-assoziativ*, das heißt, für $x \in V$ gilt $x^p x^q = x^{p+q}$ für $p, q \in \mathbb{N}_0$, und somit ist die Unteralgebra die durch ein Element $x \in V$ erzeugt wird assoziativ. Hier werden die Potenzen rekursiv definiert: $x^{n+1} = xx^n$.
Wir kommen jetzt zur Definition des Ranges einer Potenz-assoziativen Algebra V. Das neutrale Elment (bzgl. des Produktes) ist e. Wir schreiben $\mathbb{K}[X]$ für die Polynomalgebra in einer Veränderlichen über $\mathbb{K}$. Für ein Element $x \in V$ sei

$$\mathbb{K}[x] = \{p(x), p \in \mathbb{K}[X]\}.$$

Dies ist die Unteralgebra von V, die durch x und e erzeugt ist. Sie ist kommutativ und assoziativ und isomorph zum Quotienten von $\mathbb{K}[X]$ über dem Ideal $\mathcal{I}(x) = \{p \in \mathbb{K}[X] : p(x) = 0\}$

$$\mathbb{K}[x] \simeq \mathbb{K}[X]/\mathcal{I}(x).$$

Die Potenzen von x können nicht alle linear unabhängig sein, also ist $\mathcal{I}(x) \neq 0$, und da $\mathbb{K}[X]$ eine Hauptidealring ist, ist $\mathcal{I}(x)$ durch ein normiertes Polynom erzeugt. Dieses heißt *Minimalpolynom* von x.

Definition 3.2. Für ein Element $x \in V$ sei $m(x)$ der Grad seines Minimalpolynoms.

Es gilt

$$m(x) = \min \big\{ k > 0, \text{ so dass } (e, x, x^2, \dots, x^k) \text{ linear abhängig sind} \big\}.$$

Es ist klar, dass diese Zahl durch die Dimension von V beschränkt ist.

Definition 3.3. Der *Rang* von V ist

$$Rg(V) = r = \max \{m(x), x \in V\}.$$

Ein Element $x \in V$ heißt *regulär*, wenn $m(x) = r$, es also maximalen Rang hat.

Für jedes reguläre Element kann man das Minimalpolynom in eindeutiger Weise schreiben als

$$f(\lambda, x) = \lambda^r - a_1(x)\lambda^{r-1} + a_2(x)\lambda^{r-2} + \dots + (-1)^r a_r(x),$$

wobei jedes a_j eine homogene Polynomfunktion des Grades j auf V ist.

3.2. Jordan-Spur und Jordan-Determinante von Elementen einer Jordan-Algebra. Invertierbarkeit.

Definition 3.4. Sei $x \in V$, regulär, und

$$f(\lambda, x) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j a_j(x) \lambda^{r-j}$$

sein Minimal Polynom, mit $a_0(x) = 1$, dann ist $a_1(x)$ die *Spur* von x,

$$\operatorname{tr}(x) = a_1(x),$$

und $a_r(x)$ die *Determinante* von x,

$$\det(x) = a_r(x).$$

Diese kann man errechnen: Sei $L_0(x)$ die Einschränkung von $L(x)$ auf $\mathbb{K}[x]$. Für reguläre Elemente x ist die Matrix des Endomorphismusses $L_0(x)$ in der Basis $\{e, x, x^2, \dots, x^{r-1}\}$ durch

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & (-1)^{r-1} a_r(x) \\ 1 & 0 & \dots & 0 & (-1)^{r-2} a_{r-1}(x) \\ 0 & 1 & \dots & 0 & (-1)^{r-3} a_{r-2}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_1(x) \end{pmatrix}$$

gegeben. Man erhält $\operatorname{Tr}(L_0(x)) = a_1(x) = \operatorname{tr}(x)$ und $\operatorname{Det}(L_0(x)) = a_r(x) = \det(x)$, wobei Tr für die Spur der linearen Abbildung steht und Det für ihre Determinante.

Für reguläre Elemente gilt außerdem $f(\lambda, x) = \det(\lambda e - x)$, da auch $\lambda e - x$ regulär ist.

Die Menge der regulären Elemente ist offen und dicht in $\mathbb{K}[u]$, durch ein Stetigkeitsargument lassen sich Spur und Determinante auf die ganze Jordan-Algebra fortsetzen.

Proposition 3.5. *Für alle $u \in V$ und für alle $x, y \in \mathbb{K}[u]$ ist die Determinante multiplikativ, das heißt*

$$\det(xy) = \det(x)\det(y).$$

Für das Einselement e gilt:

$$\mathrm{tr}(e) = r \qquad \det(e) = 1.$$

Definition 3.6. Ein Element $x \in V$ heißt *invertierbar*, falls $y \in \mathbb{K}[x]$ existiert, so dass $xy = e$.

Da $\mathbb{K}[x]$ assoziativ ist, ist so ein y eindeutig, und man schreibt $y = x^{-1}$.

Proposition 3.7. *Falls $L(x)$ invertierbar ist, dann ist auch x invertierbar, und es gilt $x^{-1} = L(x)^{-1}e$.*

x ist genau dann invertierbar, wenn $\det(x) \neq 0$.

Generell bedeutet $xy = e$ nicht, dass y das Inverse von x ist, und dass x invertierbar ist impliziert nicht, dass $L(x)$ invertierbar ist.

Beispiel: Sei $V = \mathbb{C}^{r\times r}_{sym}$, die komplexen symmetrischen Matrizen mit Jordan-Produkt

$$x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx).$$

Der Rang von V ist r, und die Spur und die Determinante sind die gewohnten Spur- und Determinantenfunktionen für Matrizen. Das Inverse eines Elementes ist ebenso die inverse Matrix.

Generell erhält man für invertierbare Elemente eine Formel für das Inverse, welche die Cramersche-Regel im Matrizen-Fall verallgemeinert:

$$x^{-1} = \frac{Q(x)}{\det(x)},$$

$Q(x)$ ist ein Polynom des Grades $r - 1$ mit Werten in V, ist.
Die Spur und die Determinante sind invariant unter Automorphismen von V, da x und Ax, für $A \in \mathrm{Aut}(V)$ das gleiche Minimal Polynom haben.

3.3. Die quadratische Darstellung. Für $x \in V$ wird

$$P(x) = 2L(x)^2 - L(x^2)$$

definiert. Diese Abbildung P heißt die *quadratische Darstellung* von V. Durch Polarisierung definiert man

$$P(x, y) = L(x)L(y) + L(y)L(x) - L(xy).$$

Den Namen quadratische Darstellung erhält die Abbildung P durch ihre Form im Matrizenfall $V = \mathbb{C}^{r\times r}_{sym}$, in welchem sie wie folgt operiert:

$$P(x)y = xyx, \quad P(x,y)z = \frac{1}{2}(xzy+yzx) \quad \text{und} \quad P(xyx) = P(x)P(y)P(x).$$

Generell gilt

Proposition 3.8. *Ein Element x ist genau dann invertierbar, wenn $P(x)$ invertierbar ist, und es gilt*

$$P(x)x^{-1} = x, \qquad P(x)^{-1} = P(x^{-1}).$$

Dadurch ist die Menge der invertierbaren Elemente $\mathcal{I}$ durch

$$\mathcal{I} = \{x \in V : \mathrm{Det}P(x) \neq 0\}$$

gegeben.

4. Symmetrische Kegel und euklidische Jordan-Algebren

Es werden euklidische (oder formal reelle) Jordan-Algebren eingeführt. Für diese gibt es eine Spektralzerlegung ihrer Elemente. Es wird gezeigt, dass euklidische Jordan-Algebren in direkter Beziehung zu symmetrischen Kegeln stehen.
Wir betrachten unitale Jordan-Algebren über $\mathbb{R}$.

Definition 4.1. Eine Jordan-Algebra V (über $\mathbb{R}$) heißt *euklidisch*, falls eine assoziative, positiv-definite Bilinear Form existiert. Dies ist ein inneres Produkt $(u|v)$, so dass

$$(L(x)u|v) = (u|L(x)v), \qquad \text{für alle}\, x, u, v \in V$$

gilt.

Eine euklidische Jordan-Algebra ist *formal reell*, das heißt,

$$x^2 + y^2 = 0 \Longrightarrow x = y = 0.$$

Jede formal reelle Jordan-Algebra ist euklidisch [**FK94**].

Beispiel: Die Algebra der reellen symmetrischen Matrizen $\mathbb{R}^{r\times r}_{sym}$, mit dem Jordan-Produkt

$$x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$$

ist euklidisch. Die Bilinearform $tr(xy)$ ist positiv-definit und assoziativ.

Ein Element $c \in V$ wird ein *Idempotent* genannt, falls $c^2 = c$ gilt. Man sagt, dass zwei Idempotente c, d *orthogonal* zueinander sind, wenn $cd = 0$. Orthogonale Idempotente sind orthogonal zueinander im Sinne des inneren Produktes, da

$$(c|d) = (c^2|d) = (L(c)c|d) = (c|L(c)d) = (c|cd) = 0.$$

$c_1, \ldots, c_k$ ist ein *komplettes System von orthogonalen Idempotenten* falls

$$c_j^2 = c_j, \quad c_i c_j = 0 \text{ für } i \neq j, \quad c_1 + \cdots c_k = e$$

Definition 4.2. Ein Idempotent nennt man *primitiv*, wenn es nicht Null ist und sich nicht als Summe von zwei Idempotenten, von denen keines Null ist, darstellen lässt.
$c_1, \ldots, c_m$ ist ein *Jordan-Rahmen* oder ein komplettes System von orthogonalen primitiven Idempotenten, falls jedes der c_j ein primitives Idempotent ist, und

$$c_i c_j = 0 \text{ für } i \neq j, \qquad c_1 + \cdots c_m = e.$$

Nun kann der Spektralsatz formuliert werden [**FK94**].

Satz 4.3. *Sei V eine Jordan-Algebra des Ranges r. Dann existiert für jedes $x \in V$ ein Jordan-Rahmen $c_1, \ldots, c_r$ und reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ so dass*

$$x = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j c_j.$$

Die Zahlen λ_j (mit Multiplizität) sind eindeutig bestimmt durch x. Desweiteren gilt

$$\det(x) = \prod_{j=1}^{r} \lambda_j, \qquad tr(x) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j.$$

Auch die anderen Koeffizienten des Minimalpolynoms $a_k, 1 \leq k \leq r$, ausgewertet in x, sind durch die λ_j´s erhältlich.

Durch den Spektralsatz hat man eine Charakterisierung der euklidischen Jordan-Algebren [**FK94**]:

Proposition 4.4. *Sei V eine Jordan-Algebra über $\mathbb{R}$ mit Einselement e. Es sind äquivalent:*

(i) *V ist euklidisch*
(ii) *die symmetrische Bilinearform $tr(xy)$ ist positiv-definit.*

Es kann außerdem gezeigt werden, dass jede assoziative Bilinearform auf einer euklidischen Jordan-Algebra positiv-definit ist.

4.1. Der Kegel der Quadrate in einer euklidischen Jordan-Algebra. Sei V eine euklidische Jordan-Algebra und Q die Menge der Quadrate in V

$$Q = \left\{ x^2 : x \in V \right\}.$$

Dann ist Q ein Kegel in V und sein abgeschlossener dualer Kegel $Q^\sharp$ ist der abgeschlossene konvexe Kegel

$$Q^\sharp = \left\{ y \in V : (y|x^2) \geq 0 \right\} = \{ y \in V : L(y) \text{ ist positiv-semidefinit} \}.$$

Theorem 4.5. *$\Omega = Q^\circ$ das Innere von Q ist ein symmetrischer Kegel. Genauer ist Ω die Zusammenhangskomponente der Identität e in der Menge der invertierbaren Elemente. Ω entspricht auch der Menge der $x \in V$ für die $L(x)$ positiv-definit ist.*

Man erhält im Beweis noch zusätzlich die Beschreibung

$$\Omega = \left\{x^2 : x \in V\right\}^\circ = \left\{x^2 : x \,\text{invertierbar}\right\} = \exp V,$$

und dass für ein invertierbares $x \in V$ der Operator $P(x)$ in $\mathrm{G}(\Omega)$ liegt.

Beispiel: Der symmetrische Kegel, der zur Jordan-Algebra $\mathbb{R}^{r\times r}_{sym}$ (bzw. $\mathbb{C}^{r\times r}_{herm}$) assoziiert ist, besteht aus den reell symmetrischen positiv-definiten (bzw. komplexhermiteschen) Matrizen.

4.2. Die assoziierte Jordan-Algebra eines symmetrischen Kegels. Die Beziehung zwischen Jordan-Algebren und symmetrischen Kegeln kann man über Lie Algebren beschreiben. Hierzu wird eine Untergruppe der Automorphismengruppe des Kegels und dessen Lie Algebra betrachtet.

Sei Ω ein symmetrischer Kegel in einem euklidischen Raum V, und seien G die Zusammenhangskomponente der Identität in $\mathrm{Gl}(\Omega)$ und

$$\mathrm{K} = \mathrm{G} \cap \mathrm{O}(V),$$

wobei $\mathrm{O}(V)$ die orthogonale Gruppe von V ist. Die Lie Algebren von G und K werden mit $\mathfrak{g}$ bzw.$\mathfrak{k}$ notiert. Sei

$$\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} : X^* = X\}.$$

Dann kann man $\mathfrak{g}$ als direkte Summe von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{k}$ aufspalten und $\mathfrak{k}$ wie folgt beschreiben [**FK94**]

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} : X^* = -X\}, \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}.$$

Lemma 4.6. *Sei Ω ein symmetrischer Kegel. Es existiert $e \in \Omega$, so dass*

$$\mathrm{Gl}(\Omega) \cap \mathrm{O}(V) \subset \mathrm{Gl}(\Omega)_e.$$

Für dieses $e \in \Omega$ gilt auch

$$\mathrm{K} = \mathrm{G}_e,$$

und K *ist zusammenhängend. Für ein Element $X \in \mathfrak{g}$ gilt*

$$X \in \mathfrak{k} \Longleftrightarrow X \cdot e = 0.$$

Sei nun $e \in \Omega$, wie im vorherigen Lemma. da $\mathrm{G} \cdot e = \Omega$, haben wir $\mathfrak{g} \cdot e = V$, und $\mathfrak{g} \cdot e = \mathfrak{p} \cdot e$, so dass die Abbildung $X \mapsto X \cdot e$ eine Bijektion ist. Wir schreiben L für die inverse Abbildung: Für $x \in V$ ist $L(x)$ das einzige Element in $\mathfrak{p}$, so dass $L(x)e = x$. Unter diesen Voraussetzungen haben wir

Theorem 4.7. *Sei Ω ein symmetrischer Kegel in einem euklidischen Vektorraum V, und $e \in \Omega$ so dass $\mathrm{K} = \mathrm{G}_e$. Sei auf V ein Produkt definiert durch*

$$xy = L(x)y,$$

dann ist V eine euklidische Jordan-Algebra mit Einselement e und

$$\overline{\Omega} = \left\{x^2 : x \in V\right\}.$$

Durch den Beweis [**FK94**] erhält man noch zusätzlich, dass

$$\Omega = \exp V = \{\exp L(X) \cdot e,\, x \in V\} = \{\exp X \cdot e,\, X \in \mathfrak{p}\}.$$

Wir haben eine Korrespondenz zwischen Jordan-Algebren und symmetrischen Kegeln, die aber von der Wahl des Basispunktes e abhängt.

4.3. Die Peirce-Zerlegung. Nun kommen wir zu Zerlegungen des Raumes V, zuerst eine für jedes feste Idempotent c und dann eine für jeden Jordan-Rahmen [**FK94**].

Proposition 4.8. *Sei c ein Idempotent, dann sind $0, 1/2$ und 1 die einzigen möglichen Eigenwerte von $L(c)$.*

Dies ist eine Konsequenz der Tatsache, dass $L(c)$ Lösung der Gleichung $2X^3 - 3X^2 + X = 0$ ist.
Für Idempotente $c \neq 0$ gilt insbesondere $TrL(c) > 0$.

So erhält man eine Aufspaltung des Raumes als direkte Summe der Unterräume (= Eigenräume, falls nicht Null) $V_0(c), V_{1/2}(c)$ und $V_1(c)$:

$$V = V_0(c) \oplus V_{1/2}(c) \oplus V_1(c).$$

Diese Zerlegung des Raumes heißt *Peirce-Zerlegung*. Sie ist orthogonal in jeder assoziativen Bilinearform, da die Transformationen $L(x)$ bezüglich einer solchen Form symmetrisch sind.

Beispiel: Sei $V = \mathbb{R}^{r\times r}_{sym}$, mit dem Jordan-Produkt. Jedes Idempotent ist eine Orthogonalprojektion. Bis auf Konjugation mit orthogonalen Transformationen ist jedes Idempotent der Form

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei die Matrix hier als $(p+q) \times (p+q)$ Blockmatrix geschrieben wurde, das heißt $1 = Id_p$, usw. Dann sind

$$\begin{aligned} V_1(c) &= \left\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : A \in \mathbb{R}^{p\times p}_{sym}\right\}, \\ V_0(c) &= \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} : B \in \mathbb{R}^{q\times q}_{sym}\right\}, \\ V_{1/2} &= \left\{\begin{pmatrix} 0 & D \\ D^t & 0 \end{pmatrix} : D \in \mathbb{R}^{p\times q}\right\}. \end{aligned}$$

Proposition 4.9. *Sei V eine Jordan-Algebra und c ein Idempotent, dann sind die Unterräume $V_0(c)$, $V_{1/2}(c)$ und $V_1(c)$ Unteralgebren von V. $V_0(c)$ und $V_1(c)$ stehen außerdem orthogonal zueinander im folgenden Sinne:*

$$V_0(c) \cdot V_1(c) = 0.$$

Man hat also, dass $V_0(c) + V_1(c)$ eine direkte Summe von Unteralgebren ist. Diese Orthogonalität gibt Orthogonalität in beliebigen assoziativen inneren Produkten. Die Projektionen auf die Unterräume sind:

$$\begin{array}{lrl} \text{auf}\, V_1(c): & L(c)(2L(c)-I) = & P(c) \\ \text{auf}\, V_{1/2}(c): & 4L(c)(I-L(c)) = & I - P(c) - P(e-c) \\ \text{auf}\, V_0(c): & (L(c)-I)(2L(c)-I) = & P(e-c). \end{array}$$

Im Folgenden wird angenommen, dass die Jordan-Algebra V euklidisch ist und dass das innere Produkt durch

$$(x|y) = tr(xy)$$

definiert ist.
Durch den Spektralsatz ist ein Idempotent c genau dann primitiv, wenn $\dim V_1(c) = 1$ ist, und jedes Idempotent ist Summe von primitiven orthogonal zueinander stehenden Idempotenten.
Desweiteren gilt, dass für zwei orthogonale Idempotente a und b, die Linksmultiplikationsoperatoren $L(a)$ und $L(b)$ kommutieren. Somit gilt für einen Jordan-Rahmen $c_1, \dots, c_r$, dass die dazugehörigen Operatoren simultan diagonalisierbar sind. Wir betrachten die Unterräume

$$V_{jj} = V_1(c_j) = \mathbb{R}c_j, \qquad V_{ij} = V_{1/2}(c_i) \cap V_{1/2}(c_j).$$

Theorem 4.10. *V spaltet sich als orthogonale direkte Summe der Unterräume $V_{ij}, i \leq j$, auf:*

$$V = \bigoplus_{i \leq j} V_{ij}.$$

Die orthogonalen Projektionen P_{ij} auf die Unterräume V_{ij} sind

$$P_{jj} = P(c_j), \qquad P_{ij} = 4L(c_i)L(c_j).$$

Außerdem gilt

$$V_{ij} \cdot V_{ij} \subset V_{ii} + V_{jj}, \qquad V_{ij} \cdot V_{jk} \subset V_{ik}, \quad \textit{falls } i \neq k,$$
$$V_{ij} \cdot V_{kl} = \{0\}, \quad \textit{falls } \{i,j\} \cap \{k,l\} = \emptyset.$$

So kann man jedes $x \in V$ zerlegen in

$$x = \sum_j x_{jj} + \sum_{i<j} x_{ij},$$

und somit als symmetrische $r \times r$ Matrix, mit Diagonalelementen x_{jj} und Außerdiagonalelementen $x_{ij}, i \neq j$, deuten. Das Produkt in V hat viele der formalen Eigenschaften des Matrizenproduktes.

4.4. Randstruktur eines symmetrischen Kegels. In diesem Abschnitt wird angenommen, dass V eine einfache euklidische Jordan-Algebra des Ranges r ist. Der *Rang eines Elementes* x ist die Anzahl der Eigenwerte (mit Multiplizität) in seiner Spektralzerlegung die nicht Null sind:

$$rg(x) = \# \left\{ \lambda_j : \lambda_j \neq 0, x = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j e_j \right\}.$$

Bemerkung 4.11. Für alle $x \in \Omega$ gilt $rg(x) = r$ und für die Elemente des Randes des Kegels $x \in \partial\Omega$ ist $rg(x) < r$.

Im Folgenden sei $c_1, \dots, c_r$ ein gewählter Jordan-Rahmen und

$$e_j = c_1 + \dots + c_j, \quad e_0 = 0, \quad V^{(j)} = V_1(e_j) \quad \text{für} \quad j = 0, \dots, r.$$

Sei $\Omega^{(j)}$ der symmetrische Kegel zur Jordan-Algebra $V^{(j)}$, also das Innere der Menge der Quadrate in $V^{(j)}$. Durch die vorherige Bemerkung ist $rg(x) \leq j$ für alle $x \in \overline{\Omega^{(j)}}$, so dass $\overline{\Omega^{(j)}} \subset \partial\Omega$, für $j < r$.

Proposition 4.12. *Sei $x \in \overline{\Omega}$, dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

(i) $rg(x) = j$,
(ii) $x \in k\Omega^{(j)}$, *für ein* $k \in \mathrm{K}$,
(iii) $x = ge_j$, *für ein* $g \in \mathrm{G}$, *das heißt* $x \in \mathrm{G}e_j = Orb(e_j)$.

Bemerkung 4.13. Der Abschluss von $\mathrm{G}e_j$ ist

$$\overline{\mathrm{G}e_j} = \mathrm{G}e_j \cup \mathrm{G}e_{j-1} \cup \ldots \cup \mathrm{G}e_0.$$

Dies ist die Menge der Elemente in $\overline{\Omega}$ dessen Rang $\leq j$ ist.

Die *Extremalerzeuger* eines abgeschlossenen konvexen Kegels sind Halbgeraden $E = \{\lambda a, \lambda > 0\}$, so dass für $x \in E$ und y, z im (abgeschlossenen) Kegel aus der Gleichung $x = y + z$, folgt dass auch y, z in E liegen.

Proposition 4.14. *Die Extremalerzeuger von $\overline{\Omega}$ sind die Halbgeraden die durch ein primitives Idempotent erzeugt werden.*

Auch die anderen Ränder können beschrieben werden: Eine *Facette* $F \subset \overline{\Omega}$ ist ein abgeschlossener konvexer Kegel, der die Extremalbedingung erfüllt:

$$x \in F, \, x = y + z \, \text{mit} \, y, z \in \overline{\Omega} \Longrightarrow y, z \in F.$$

Es gilt: [**Upm96**]

Theorem 4.15. *Ω ist ein symmetrischer Kegel in einer euklidischen Jordan-Algebra V. Dann ist für jedes Idempotent $c \in V$ die Menge*

$$\overline{\Omega}_c := \overline{\Omega} \cap V_0(c)$$

eine Facette von $\overline{\Omega}$ und alle Facetten erhält man auf diese Weise.

Die trivialen Facetten $F = \overline{\Omega}$ und $F = \{0\}$ erhält man durch die Idempotenten $c = 0$, bzw. $c = e$.
Die offenen Facetten $\Omega_c := \overset{\circ}{\overline{\Omega}_c}$ (innerhalb von $V_0(c)$) sind paarweise disjunkt und geben eine Aufspaltung des Randes des Kegels [**Upm96**]

$$\partial\Omega = \bigcup_{1\leq k\leq r} \bigcup_{c\in\mathbb{S}_k} \Omega_c,$$

wobei die Menge $\mathbb{S}_k$ die (kompakte Mannigfaltigkeit der) Idempotente des Ranges k ist. Man spricht von den *partiellen Rändern*

$$\partial_k\Omega := \bigcup_{c\in\mathbb{S}_k} \Omega_c.$$

$\partial_1\Omega$ sind die maximalen offenen Facetten, und $\partial_r\Omega = \{0\}$ ist der Eckpunkt des Kegels.

4.5. Komplexe Jordan-Algebren, Tubengebiete und symmetrische Gebiete des Tubentyps. Sei V eine Jordan-Algebra über $\mathbb{R}$, dann ist ihre Komplexifizierung

$$V^{\mathbb{C}} := V \otimes \mathbb{C} = V \oplus iV$$

eine Jordan-Algebra über $\mathbb{C}$.
Das gleiche gilt für Lie Algebren, in diesem Fall kann man das aber konkret machen: Für eine Lie Algebra $\mathfrak{g}$ von linearen Transformationen eines reellen Vektorraumes V, ist ihre Komplexifizierung die Menge aller $X+iY$, mit $X, Y \in \mathfrak{g}$, wobei man die komplex-lineare Erweiterung von X, Y auf $V^{\mathbb{C}}$ betrachtet.
Für $\mathrm{G} \subset \mathrm{Gl}(V)$ und $\mathrm{H} \subset \mathrm{Gl}(V^{\mathbb{C}})$ Lie Gruppen, mit $\mathrm{G} \subset \mathrm{H}$, heißt H eine Komplexifizierung von G falls die Lie Algebra von H die Komplexifizierung der Lie Algebra von G ist.
Für reelle Vektorräume V mit innerem Produkt $(\cdot|\cdot)$ wird dieses sesquilinear auf $V^{\mathbb{C}}$ fortgesetzt. Auf der Komplexifizierung $V^{\mathbb{C}}$ der euklidischen Jordan-Algebra V haben wir die assoziativen, komplex linearen Formen $tr(xy)$ und $\tau(x, y) = TrL(xy)$, die eingeschränkt auf V, mit denen auf V übereinstimmen.

Definition 4.16. Eine reelle oder komplexe Jordan-Algebra heißt *halb-einfach* falls die Bilinearform $\tau(x, y) = TrL(xy)$ nicht ausgeartet auf ihr ist.
Eine Jordan-Algebra heißt *einfach*, falls sie halb-einfach ist und es keine nicht trivialen Ideale gibt.

euklidische Jordan-Algebren und ihre Komplexifizierungen sind somit halb-einfach.
Halb-einfache Jordan-Algebren haben immer ein Einselement. Jedes Ideal in einer halb-einfachen Jordan-Algebra ist selber eine halb-einfache Jordan-Algebra. So kann man jede halb-einfache Jordan-Algebra als direkte Summe von einfachen Idealen schreiben.

Definition 4.17. Ein Gebiet $T \subset V^{\mathbb{C}} \sim \mathbb{C}^n$ ist ein *Tubengebiet*, wenn es invariant unter reellen Translationen ist, das heißt, $z \in T \Longrightarrow z + b \in T$, für alle $b \in V$.

Jedes Tubengebiet kann in der Form $T = V + iD$ geschrieben werden, wobei D ein Gebiet in V ist. Insbesondere erhält man für einen echten, konvexen, offenen Kegel Ω in V das Tubengebiet $T = T_\Omega = V + i\Omega$. Falls der Kegel Ω homogen ist, ist auch das Tubengebiet homogen, das heißt die *Automorphismengruppe*

$$\mathrm{Aut}(T_\Omega) = \{\Phi : T_\Omega \to T_\Omega, \Phi \text{ biholomorph}\}$$

operiert transitiv auf T_Ω: Sei $g \in \mathrm{G}(\Omega)$, komplex linear erweitert auf $V^{\mathbb{C}}$, und $a \in V$, dann ist die Abbildung

$$z \mapsto gz + a$$

ein holomorpher Automorphismus, also ein Automorphismus des Tubengebietes T_Ω und schon die Gruppe dieser Transformationen operiert transitiv auf T_Ω.

Definition 4.18. Ein Gebiet $D \subset V^{\mathbb{C}} \sim \mathbb{C}^n$ heißt *symmetrisch*, wenn es homogen ist, und ein $s \in \mathrm{Aut}(D)$ und ein $z_0 \in D$ existieren, so dass $s \circ s = id$, und z_0 ein isolierter Fixpunkt von s ist.

Sei V eine einfache euklidische Jordan-Algebra und Ω ihr assoziierter symmetrischer Kegel. $V^{\mathbb{C}}$ ist die Komplexifizierung mit hermiteschem inneren Produkt $(x|y) = tr(xy^*)$, wobei y^* die kanonische Konjugation ist.

Theorem 4.19. *Das Tubengebiet T_Ω ist symmetrisch, wenn Ω ein symmetrischer Kegel ist.*

Die Abbildung $z \mapsto -z^{-1}$ ist ein involutiver Automorphismus von T_Ω, dessen einziger Fixpunkt ie ist [**FK94**].

Mit einer Cayley-Transformation kann das Tubengebiet T_Ω über einem symmetrischen Kegel Ω in ein beschräntes (symmetrisches) Gebiet abgebildet werden, die Harish-Chandra Realisierung des symmetrischen Gebietes.
Der Shilov-Rand von T_Ω ist $V \subset V^{\mathbb{C}}$.
Sei

$$D(c) := \left\{ z \in V^{\mathbb{C}} : e - z \text{ ist invertierbar} \right\}$$

und sei

$$c(z) := i(e+z)(e-z)^{-1},$$

dann ist $c : D(c) \to \left\{ w \in V^{\mathbb{C}} : w + ie \text{ ist invertierbar} \right\}$ eine Bijektion die *Cayley Transformation* genannt wird. Es gilt

$$\overline{T_\Omega} \subset \left\{ w \in V^{\mathbb{C}} : w + ie \, \text{ist invertierbar} \right\}$$

und $c^{-1}(w) := (w - ie)(w + ie)^{-1}$.
Dies verallgemeinert die Cayley Transformation aus Kapitel 1 auf Tubengebiete in (komplexen) Jordan-Algebren.

Sei

$$\Sigma = \left\{ z \in V^{\mathbb{C}} : \exists z^{-1} \,\text{und}\, z^{-1} = z^* \right\}$$

Theorem 4.20. *Σ ist der Shilov-Rand von $B = c^{-1}(T_\Omega)$ und ist eine (abgeschlossene) Teilmenge der Sphäre mit Zentrum 0 und Radius $\sqrt{r}$ in $V^{\mathbb{C}}$, wobei r der Rang von V ist.*

Bemerkung 4.21. Man kann zeigen, dass $\Sigma = \exp(iV)$.

Sei nun

$$\mathrm{G}(\Sigma) = \left\{ g \in \mathrm{Gl}(V^{\mathbb{C}}) : g\Sigma = \Sigma \right\}$$

und U ihre Identitätskomponente.

Proposition 4.22. *Sei $U(V^{\mathbb{C}})$ die unitäre Gruppe von $V^{\mathbb{C}}$, dann ist*

$$\mathrm{G}(\Sigma) \subset U(V^{\mathbb{C}}),$$

und der Stabilisator von e in $\mathrm{G}(\Sigma)$ ist

$$\mathrm{G}(\Sigma)_e = \mathrm{Aut}(V).$$

Σ ist ein symmetrisches Gebiet, da die Gruppe U transitiv auf Σ operiert, und $\sigma \mapsto \sigma^*$ holomorph und involutiv ist und e als isolierten Fixpunkt hat.

Man hat nun auch eine Spektralzerlegung für alle Elemente einer komplexifizierten Jordan-Algebra $V^{\mathbb{C}}$.

Proposition 4.23. *Sei $c_1, \ldots, c_r$ ein fester Jordan-Rahmen in V. Jedes $z \in V^{\mathbb{C}}$ schreibt sich als*

$$z = u \sum_{j=1}^{r} \lambda_j c_j,$$

mit $u \in U$ und $0 \leq \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_r$.

Seien $x, y \in V$, man schreibt

$$x \Box y := L(xy) + [L(x), L(y)].$$

Es gilt $(x \Box y)z = P(x, y)z$. Für $z \in V^{\mathbb{C}}$ ist der Endomorphismus

$$z \Box z^* : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$$

hermitesch. Die Abbildung

$$z \mapsto |z| = \left\| z \Box z^* \right\|^{1/2}$$

ist eine Norm auf $V^{\mathbb{C}}$, die invariant unter der Gruppe U ist. Für

$$z = u \sum_{j=1}^{r} \lambda_j c_j$$

mit $u \in U, \lambda_j \geq 0$ und einem Jordan-Rahmen $c_1, \ldots, c_r$ in V ist

$$|z| = \max \lambda_j.$$

Die Norm $|z|$ wird deswegen die *Spektralnorm* von z genannt.
Die offene Einheitskugel in der Spektralnorm

$$\left\{z \in V^{\mathbb{C}} : |z| < 1\right\}$$

ist genau das Cayley Bild B unter c^{-1} des Tubengebietes T_Ω und kann über den Box Operator beschrieben werden:

$$B = \left\{z \in V^{\mathbb{C}} : |z| < 1\right\} = \left\{z \in V^{\mathbb{C}} : 1 - z\Box z^* > 0\right\}.$$

Beispiel: Im Matrizenfall $V = \mathbb{R}^{r\times r}_{sym}$ ist $V^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^{r\times r}_{sym} = \{z \in \mathbb{C}^{r\times r} : z^t = z\}$, und die Konjugation die übliche. Das Tubengebiet zum Kegel der Quadrate der invertierbaren Elemente ist $\mathfrak{P}$. Der Box Operator $z\Box z^*$ operiert wie folgt

$$(z\Box z^*)w = \frac{1}{2}(zz^*w + wz^*z),$$

und das beschränkte Gebiet zu $\mathfrak{P}$ ist $\mathfrak{B}$ wie in Kapitel 1. Dies folgt aus den Eigenschaften des Spektrums.

Die Automorphismengruppe des Tubengebietes kann man durch die Automorphismengruppe des Kegels $\mathrm{G}(\Omega)$ und $\mathrm{G}(\Sigma)$, der des Shilov-Randes des beschränkten Gebietes B, konjugiert mit der Cayley Transformation, und der Gruppe der reellen Translationen

$$N^+ = \{\tau_u : z \mapsto z + u,\ u \in V\}$$

beschreiben:

$$\mathrm{G}(T_\Omega) = N^+\mathrm{G}(\Omega)(c\mathrm{G}(\Sigma)c^{-1}).$$

Außerdem ist $c\mathrm{G}(\Sigma)c^{-1}$ die Isotropiegruppe des Mittelpunktes ie in $\mathrm{G}(T_\Omega)$, $c\mathrm{G}(\Sigma)c^{-1} = \mathrm{G}(T_\Omega)_{ie}$. Genauso wie im Matrizenfall, $T_\Omega = \mathfrak{P}$ kann man Erzeuger der Automorphismengruppe $\mathrm{G}(\mathfrak{P}) = Sp$ angeben:

Theorem 4.24. *Die Untergruppen* $\mathrm{G}(\Omega)$ *und* N^+*, zusammen mit dem Element* $j : z \mapsto -z^{-1}$ *erzeugen* $\mathrm{G}(T_\Omega)$.

Sp wird, wie in Kapitel 1 beschrieben, durch

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-t} \end{pmatrix}, \forall A \in \mathrm{Gl}(\mathbb{R}^r), \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix}, \forall C \in \mathbb{R}^{r\times r}_{sym}.$$

erzeugt. J entspricht hier der Transformation j,

$$\left\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-t} \end{pmatrix},\ A \in \mathrm{Gl}(\mathbb{R}^r)\right\} = \mathrm{G}(\Omega)$$

und

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix},\ C \in \mathbb{R}^{r\times r}_{sym}\right\}^t = N^+,$$

da Sp invariant unter Transposition ist, das heißt $Sp^t = Sp$.

4.6. Klassifikation euklidischer Jordan-Algebren. Alle euklidischen Jordan-Algebren sind halb-einfach und somit direkte Summe irreduzibler Ideale, oder einfacher euklidischer Jordan-Algebren, und einfache euklidische Jordan-Algebren sind klassifiziert worden [**FK94**].

Theorem 4.25. *Sei V eine einfache euklidische Jordan-Algebra, dann gehört V zu einer der folgenden Familien:*
(i) *Der hermiteschen $r \times r$ Matrizen über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$,*
(ii) *dem Spin-Faktor, einer Algebra des Ranges 2, die isomorph zu $\mathbb{R} \times W$ ist, wobei W ein euklidischer Vektorraum ist,*
(iii) *der Ausnahmealgebra der hermiteschen 3×3 Matrizen über den Cayley Zahlen $\mathbb{O}$.*

Dies zeigt wieso der hier bearbeitete Matrizenfall so ein wichtiges Beispiel für eine Jordan-Algebra ist. Und dies ist auch die Ursache ihres Erscheinens: Sie tragen die algebraische Essenz hermitescher Matrizen, sind assotiativen Algebren nahe und sind dennoch so allgemein, dass auch die Ausnahmealgebra unter ihnen ist.

5. Jordan-Tripelsysteme

Bevor wir zur Definition eines Jordan-Tripelsystems kommen, wird intuitiv einiges zum Ursprung des Tripelprodukts gesagt: Durch die Beziehung zwischen symmetrischen Kegel und Jordan-Algebren gab die eben genannte Klassifizierung Anlass zur Untersuchung einer Klassifizierung beschränkter symmetrischer Gebiete (E. Cartan, Harish-Chandra) [**Hel62**], die auf Lie theoretischem Niveau gemacht wurde. Beschränkte symmetrische Gebiete sind die natürliche Verallgemeinerung der Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$. Wir betrachten die Einheitskugel B eines komplexen Vektorraumes Z (mit innerem Produkt) und nehmen an, B sei symmetrisch. Dann hat die Lie Algebra $\mathfrak{aut}(B)$ von $\mathrm{Aut}(B)$ eine Cartan-Zerlegung

$$\mathfrak{aut}(B) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

mit

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{gl}(B) = \{X \in \mathfrak{gl}(Z) : \exp(tX)B = B, \forall\, t \in \mathbb{R}\},$$

der Lie Algebra von $\mathrm{Gl}(B)$, und

$$\mathfrak{p} = \left\{ h(z)\frac{\partial}{\partial z} \in \mathfrak{aut}(B) : h'(0) = 0 \right\}.$$

Die Vektorfelder in $\mathfrak{p}$ haben die Form

$$(a - \{z, a, z\})\frac{\partial}{\partial z},$$

für ein eindeutiges $a \in Z$. Die Abbildung

$$Z \times Z \times Z \to Z \qquad z, a, w \mapsto \{z, a, w\}$$

ist linear und symmetrisch in z und w und antilinear in a. Das Tripelprodukt $\{\ \}$ nennt man das zu B assoziierte *Jordan-Tripelprodukt* auf Z, und Z zusammen mit diesem Produkt nennt man *hermitesches Jordan-Tripelsystem*. Das Gebiet B kann durch das Tripelprodukt rekonstruiert werden: Für $a, b \in Z$ betrachtet man den linearen Endomorphismus

$$a\Box b^* : Z \to Z, \qquad w \mapsto (a\Box b^*)w := \{a, b, w\} .$$

Dann hat $z\Box z^*$, für jedes $z \in Z$ reelles positives Spektrum und

$$B = \{z \in Z : 1 - z\Box z^* > 0\} ,$$

wobei die Positivität als Operatoren zu verstehen ist. Nun kommen wir zur formalen

Definition 5.1. Ein *hermitesches Jordan-Tripelsystem* über $\mathbb{C}$ ist ein komplexer Vektorraum Z versehen mit einer trilinearen Operation, die $\mathbb{C}$ - linear und symmetrisch im 1. und 3. Eintrag und $\mathbb{C}$ - antilinear im 2. ist,

$$\{\ \} : Z \times Z \times Z \to Z,$$

so dass folgenden Identitäten gelten:

$$\{x, y, z\} = \{z, y, x\} \qquad \text{und}$$

$$\{a, b, \{x, y, z\}\} = \{\{a, b, x\} , y, z\} - \{x, \{b, a, y\} , z\} + \{x, y, \{a, b, z\}\} .$$

Die hermitizität fordert dass die Abbildung

$$(x, y) \mapsto \mathrm{Tr} x\Box y^*$$

ein positiv definites Skalarprodukt definiert.

Bemerkung 5.2. Jede komplexifizierte euklidische Jordan-Algebra $V^{\mathbb{C}}$ ist ein hermitesches Jordan-Tripelsystem mit der Definition

$$\{x, y, z\} = (xy^*)z + x(y^*z) - y^*(xz),$$

wobei * die Konjugation in $V^{\mathbb{C}}$ ist, und da die Algebra ein Einselement e hat, ist

$$xy = \{x, e, y\} .$$

Man erhält außerdem $V = \left\{z \in V^{\mathbb{C}} : \{e, z^* e\} = z\right\}$ Ein hermitesches Jordan-Tripelsystem ist somit die natürliche Verallgemeinerung von euklidischen Jordan-Algebren. Der Box Operator, der für Jordan-Tripelsysteme definiert wurde

$$x\Box y^* : Z \to Z, \qquad z \mapsto (x\Box y^*)z := \{x, y, z\}$$

stimmt in diesem Falle mit dem Jordan-Algebra Box Operator überein, da dieser die Abbildung

$$z \mapsto (L(xy^*) + [L(x), L(y^*)])z$$

ist.

Definition 5.3. Eine symmetrische Einheitskugel in $V^{\mathbb{C}}$ ist des *Tubentyps*, falls sie biholomorph äquivalent zu einem symmetrischen Tubengebiet $T = V + i\Omega$ ist.

Beispiele: Sei $V^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^{p\times q}$, dann ist die Einheitskugel (in der üblichen Operatornorm)

$$B = \mathfrak{B}_{p,q} = \left\{ z \in \mathbb{C}^{p\times q} : 1 - zz^* > 0 \right\},$$

wobei 1 die $p \times p$ Identität ist. Die Gruppe

$$SU_{p,q}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sl_{p+q}(\mathbb{C}) : \begin{array}{rl} A^*A - C^*C & = 1 \\ B^*B - D^*D & = 1 \\ A^*B & = C^*D \end{array} \right\}$$

operiert transitiv auf $\mathfrak{B}_{p,q}$ durch Moebius Transformationen

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} z = (Az + B)(Cz + D)^{-1}.$$

Das zu $\mathfrak{B}_{p,q}$ assoziierte Jordan-Tripelprodukt auf $\mathbb{C}^{p\times q}$ ist

$$\{z, a, w\} := \frac{1}{2}(za^*w + wa^*z).$$

Das Gebiet $\mathfrak{B}_{p,q}$ ist genau dann vom Tubentyp wenn $p = q$ gilt. Auch nur in diesem Falle ist $V^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^{p\times q}$ eine Jordan-Algebra, mit dem Jordan-Produkt.

Definition 5.4. Sei Z das zu einer symmetrischen Kugel B assoziierte hermitesche Jordan-Tripelsystem. Für jedes Paar $(a, b) \in Z \times Z$ sei $B(a, b)$ der lineare Endomorphismus von Z

$$z \mapsto B(a, b)z := z - 2\{a, b, z\} + \{a, \{b, z, b\}, a\}.$$

$B(a, b)$ heißt der *Bergman Operator* zum Paar (a, b).

Für $z, w \in B$ ist der assoziierte Bergman Operator invertierbar, $B(z, w) \in \mathrm{Gl}(Z)$, und man definiert

$$z^w := B(z, w)^{-1}(z - \{z, w, z\}).$$

z^w nennt man das *Quasi-Inverse* von z bezüglich w.

Das Quasi-Inverse ist dicht definiert und eine sesqui-rationale Abbildung auf $Z \times Z$ die man, ähnlich wie im Jordan-Algebra Falle, wie

$$z^w = \frac{p(z, w)}{\Delta(z, w)}$$

darstellen kann, wobei

$$\Delta : Z \times Z \to \mathbb{C}$$

ein sesqui-Polynom mit $\Delta(0, 0) = 1$ ist, und $p(z, w)$ ein Z - wertiges sesqui-Polynom ist. Falls der Ausdruck

$$\frac{p(z, w)}{\Delta(z, w)}$$

vollständig reduziert ist und $\Delta(z, w)$ normiert ist Δ die *Jordan-Tripeldeterminante* assoziiert zu B.

Durch den Bergman Operator erhält man den Bergman Kern des beschränkten symmetrischen Gebietes B, wodurch er seine Bedeutung gewinnt: Man betrachtet auf Z das auf B normalisierte Haarmaß und $\mathcal{H}(B)$ den (separablen) Unterraum der quadratintegrierbaren holomorphen Funktionen auf B. Da die Einsetzungsmorphismen stetige Funktionale sind existiert ein reproduzierender Kern $K_w(z) = K(z, w^*)$ in $\mathcal{H}(B)$ und dieser ist

$$K(z, w^*) = DetB(z, w)^{-1}.$$

Da allgemein ein reproduzierender Kern über eine Basis $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ des Hilbert Raumes $\mathcal{H}(B)$ als

$$K(z, w^*) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \phi_k(z)\overline{\phi_k(w)}$$

dargestellt werden kann, ist klar, dass $K(z, z^*) > 0$, für alle $z \in B$. Man definiert eine Kähler Metrik auf B wie folgt

$$h_z(a, b^*) = \partial_a\partial_{b^*} \log K(z, z^*),$$

die *Bergman Metrik* genannt wird. Hier ist ∂_a die holomorphe Richtungsableitung in Richtung a.

Beispiel: Im Matrizenbeispiel $\mathbb{C}^{p\times q}$ sind die Bergman Operatoren

$$B(a, b)z = (1 - ab^*)z(1 - b^*a)$$

und das Quasi-Inverse

$$z^w = (1 - zw^*)^{-1}z.$$

Man erhält die Jordan-Tripel-Determinante $\Delta(z, w) = Det(1 - zw^*)$, als die Matrizendeterminante.

Die Randstruktur einer symmetrischen Kugel B kann durch das hermitesche Jordan-Tripelsystem Z beschrieben werden.

Definition 5.5. Ein Element $e \in Z$ heißt *Tripotent* falls

$$\{e, e, e\} = e.$$

Sei

$$Z_\alpha(e) = \{z \in Z : \{e, e, z\} = \alpha z\},$$

der Eigenraum zum Eigenwert α des Endomorphismusses $e\Box e^*$, falls $Z_\alpha(e)$ nicht Null ist. Genauso wie im Falle für Jordan-Algebren (und Idempotente) hat man hier nur $0, 1/2$ und 1 als mögliche Eigenwerte, und die durch e induzierte Zerlegung des Raumes

$$Z = Z_0(e) \oplus Z_{1/2}(e) \oplus Z_1(e).$$

Sei Z ein irreduzibles hermitesches Jordan-Tripelsystem (im algebraischen Sinne) und e, c Tripotente. e und c sind *orthogonal* falls $\{e, e, c\} = 0$ (was äquivalent zu $\{c, c, e\} = 0$ ist [**Loo77**]) und ein Tripotent $e \neq 0$ nennt man *primitiv*, falls es nicht als nicht triviale

Summe von zwei Tripotenten geschrieben werden kann. Eine maximale Familie von primitiven, paarweise orthogonalen Tripotenten $e_1, \ldots, e_r$ ist ein *Rahmen* für Z. r hängt nur von Z ab und heißt der *Rang* von Z.
Für einen Rahmen erhält man die gemeinsame *Peirce-Zerlegung* des Raumes

$$Z = \bigoplus_{0 \leq i \leq j \leq r} Z_{ij},$$

mit

$$Z_{ij} = \left\{ z \in Z : \{e_k, e_k, z\} = \frac{\delta_{ik} + \delta_{jk}}{2} z, \forall\, 1 \leq k \leq r \right\}.$$

Ähnlich wie bei Jordan-Algebren haben wir auch hier einen Spektralsatz [**Loo77**].

Satz 5.6. *Für jedes $z \in Z$ existieren $e_1, \ldots, e_n$ orthogonale Tripotente ($\neq 0$) und $0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n$, so dass*

$$z = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$$

Beispiele:

- Im Matrizenfall $Z = \mathbb{C}^{p \times q}$ sind die Tripotenten genau die partiellen Isometrien.
- Das Jordan-Tripel $Z = \mathbb{C}^{r \times r}_{sym}$ hat einen kanonischen Rahmen $e_1, \ldots, e_r$, wobei $e_k = E_{kk}$, das heißt $[e_k]_{lm} = \delta_{lk}\delta_{km}$. Der Rang ist somit r, und $Z_{0j}(e_k) = \{0\}$ für alle $k = 1, \ldots, r$. Wir haben

$$Z = \bigoplus_{1 \leq i \leq j \leq r} Z_{ij},$$

und Z_{ij} sind die (symmetrischen) Matrizen die außer in den Einträgen (i, j) (und (j, i)) verschwinden.

Definition 5.7. Eine *Facette* F von $\overline{B}$ ist eine nicht-leere abgeschlossene, konvexe Teilmenge $F \subset \overline{B}$, so dass für jedes abgeschlossene Segment $[a, b] = \{tb + (1-t)a,\ 0 \leq t \leq 1\}$ das in $\overline{B}$ liegt und deren offenes Segment $(a, b) = \{tb + (1-t)a,\ 0 < t < 1\}$ nicht leeren Schnitt mit F hat, schon ganz in F liegt:

$$[a, b] \subset \overline{B}, \quad (a, b) \cap F \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad [a, b] \subset F.$$

Es gilt [**Loo77**]

Theorem 5.8. *Sei B eine symmetrische Kugel in einem hermiteschen Jordan-Tripelsystem Z. Dann ist für jedes Tripotent $e \in Z$ die Menge*

$$e + (\overline{B} \cap Z_0(e))$$

eine Facette von $\overline{B}$ und alle Facetten sind dieser Form.

Die triviale Facette $F = \overline{B}$ gehört zum trivialen Tripotent $e = 0$.

Für jedes Tripotent $e \in Z$ sind $Z_0(e)$ und $Z_1(e)$ hermitesche Jordan-Untertripel von Z. Man definiert den *Rang eines Tripontentes* e als den Rang von $Z_1(e)$

$$rg(e) = Rg(Z_1(e)),$$

und in $Z_0(e)$ hat man die Einheitskugel

$$B_e = B \cap Z_0(e),$$

die auch eine symmetrische Kugel, niederer Dimension, ist.
Die *offenen Facetten*, oder auch affine Randkomponenten genannt,

$$e + (B \cap Z_0(e)) = e + B_e = \partial_e B$$

sind paarweise disjunkt und geben somit eine Zerlegung des Randes **[Loo77]**

$$\partial B = \bigcup_{1 \leq k \leq r} \bigcup_{e \in \mathbb{S}_k} e + B_e = \bigcup_{1 \leq k \leq r} \bigcup_{e \in \mathbb{S}_k} \partial_e B,$$

wobei r ist der Rang des Jordan-Tripelsystems ist und $\mathbb{S}_k$ die (kompakte) Mannigfaltigkeit der Tripotenten des Ranges k bezeichnet. Man nennt $\partial_k B$ den k partiellen Rand von B,

$$\partial_k B = \bigcup_{e \in \mathbb{S}_k} e + B_e.$$

$\partial_r B$ ist der Shilov Rand, und ist gleich der Menge der Tripotenten maximalen Ranges, und $\partial_1 B$ die maximalen (offenen) Facetten.
Die Struktur des Randes von B ist „affin“: Das Bild einer holomorphen Abbildung der Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$ nach Z ist eine holomorphe Kurve, und die Äquivalenzklassen unter der Relation $z, w \in \partial B$

$$z \sim w \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} z, w \quad \text{können durch Verkettung} \\ \text{holomorpher Kurven verbunden werden} \end{array}$$

nennt man die *holomorphen Randkomponenten* von B. Führt man diese allgemeinere Randstruktur ein, und nennt *affinen Randkomponenten* die holomorphen Randkomponenten, die man erhält, wenn man holomorphe Kurven durch offene Segmente ersetzt, so erhält man **[Loo77]** dass holomorphe und affine Randkomponenten übereinstimmen. Diese sind genau die offenen Facetten.

Auch die hermiteschen Jordan-Tripelsysteme stehen in eins-zu-eins Beziehung mit beschränkten symmetrischen Gebieten und sind klassifiziert:

Theorem 5.9. *Sei Z einfaches hermitesches Jordan-Tripelsystem, dann gehört Z zu einer der folgenden Familien:*

(i) $\mathbb{C}^{p \times q}$,
(ii) *der hermiteschen $r \times r$ Matrizen über $\mathbb{C}$,*
(iii) *der schief-hermiteschen $r \times r$ Matrizen über $\mathbb{C}$*

(iv) $\mathbb{C}^r$,
(v) *der Ausnahme Fall* $\mathbb{O}^2$,
(vi) *der Ausnahme Fall der hermiteschen* 3×3 *Matrizen über den Cayley Zahlen* $\mathbb{O}$.

KAPITEL 4

Eine Kozykluseigenschaft

In diesem Kapitel wird aus einem gegeben Kozyklus ein neuer konstruiert. Im Zentrum steht ein wichtiges Beispiel, welches wir im Detail ausarbeiten und welches das Grundgerüst für die allgemeine Formel gibt: Aus dem klassischen Kozyklus gewinnen wir, dank der Kompatibilität mit dem Bergman-Kern, in eleganter Weise ein neuen.
Eine Kozykluseigenschaft ist eine Transformationsregel, die das Verhalten der Hintereinanderausführung zweier Abbildungen angibt, und zeigt, dass diese Hintereinanderausführung wieder eine Abbildung des gleichen Typs ist. Das elementarste Beispiel ist die Kettenregel für die Ableitung. Kozyklen geben Anlass zur Konstruktion von Bündeln über Mannigfaltigkeiten, wobei die Kozykluseigenschaft im Verhalten der Übergangs-funktionen enthalten ist.
Kozykluseigenschaften können auch zu Gruppenerweiterungen führen, wie es der Fall der metaplektischen Gruppe zeigt, welche eine (doppelte) Überlagerung der symplektischen Gruppe ist und als ihre zentrale Erweiterung betrachtet werden kann.

1. Das Setting und der Satz

Sei V eine einfache euklidische (reelle) Jordan-Algebra und $Z = V^{\mathbb{C}}$ ihre Komplexifizierung. Sei $B \subset Z$ ein beschränktes symmetrisches Gebiet des Tubentyps.
$\mathrm{G} = \mathrm{Aut}(B)$ operiert transitiv auf B. Und K ist eine maximal kompakte Untergruppe von G, genauer, sie besteht aus Automorphismen von B, die einen ausgezeichneten (festen) Punkt $e \in B$ fixieren.

Beispiel: Sei Ω der assoziierte Kegel der Algebra V, das heißt, Ω ist der Kegel der Quadrate der invertierbaren Elemente, und auch die Zusammenhangskomponente des Einselements der invertierbaren Elemente. In Z haben wir das Tubengebiet $T_\Omega = V + i\Omega$, dessen beschränkte Realisierung, via der inversen Cayley-Transformation c^{-1} : $w \mapsto (w - ie)(w + ie)^{-1}$, das Gebiet $B = \{z \in Z : 1 - z\Box z^* > 0\}$ ist. Man kann hier $e = \mathfrak{o}$, der „Mittelpunkt“ wählen. K und $\mathrm{K}^{\mathbb{C}}$ sind Untergruppen von $\mathrm{Gl}(Z)$ [**FK94**].

Sei $A \in \mathrm{Gl}(Z)$, der *unitäre Anteil* von A ist $\lfloor A \rfloor = A(A^*A)^{-1/2} = A\,|A|^{-1}$.

Satz 1.1. *Seien $\mathcal{J}$ ein Kozyklus in $\mathrm{K}^{\mathbb{C}} \subset \mathrm{Gl}(Z)$, d. h.*

$$\mathcal{J} : \mathrm{G} \ltimes B \to \mathrm{K}^{\mathbb{C}}$$

mit

$$\mathcal{J}(g_1 g_2, z) = \mathcal{J}(g_2, z)\mathcal{J}(g_1, g_2 z),$$

und

$$R : B \times B \to \mathrm{K}^{\mathbb{C}}$$

eine Abbildung für die $R(z,z) > 0$ für alle $z \in B$ gilt und welche kompatibel mit dem Kozyklus $\mathcal{J}$ ist:

$$R(z,w) = \mathcal{J}(g,z)R(gz,gw)\mathcal{J}(g,w)^*.$$

Dann ist

$$\jmath(g,z) = \lfloor R(z,z)^{-\frac{1}{2}}\mathcal{J}(g,z)\rfloor \in \mathrm{K}$$

auch ein Kozyklus der gleichen Form. Es gilt also

$$\jmath(g_1 g_2, z) = \jmath(g_2, z)\jmath(g_1, g_2 z).$$

Vor dem Beweis ein paar

2. Beispiele

- Sei B ein beschränktes symmetrisches Gebiet des Tubentyps und für $z, w \in B$ $B(z,w) \in \mathrm{Gl}(Z)$ der polarisierte Bergman Kern. Man definiert $\mathcal{J}(g,z) = (g(z)')^{-1}$ für $g \in \mathrm{Aut}(B), z \in B$. Durch die Kettenregel ist klar, dass

  $$\mathcal{J}(g_1 g_2, z) = ((g_1 g_2)(z)')^{-1} = (g_2(z)')^{-1}(g_1(g_2 z)')^{-1} =$$
  $$= \mathcal{J}(g_2, z)\mathcal{J}(g_1, g_2 z)$$

  gilt, d. h. $\mathcal{J}$ ist ein Kozyklus der genannten Form. Dann ist $\jmath(g,z) = \lfloor B(z)^{-1/2}(g(z)')^{-1}\rfloor$ ein Kozyklus, wobei $B(z) =: B(z,z)$ der Bergmann Kern des Gebietes B ist, soweit dieser in $\mathrm{K}^{\mathbb{C}}$ liegt. Dies ergibt sich schnell aus Satz 1.1 und der Kompatibilität von B mit $\mathcal{J}$ [**Loo77**].

  Nimmt man als beschränkes Tubengebiet die Einheitskugel in der Spektralnorm

  $$B = \mathfrak{B} = \{\mathfrak{z} \in Z : 1 - \mathfrak{z}\Box\mathfrak{z}^* > 0\}$$

  so hat dieses im Matrizenfall die bekannte Form

  $$\mathfrak{B} = \left\{\mathfrak{z} \in \mathbb{C}^{r\times r}_{sym} : \mathbb{1} - \mathfrak{z}\mathfrak{z}^* > 0\right\}.$$

  Dies ist Konsequenz der Eigenschaften des Spektrums und des stetigen Funktionalkalküls für Banach-Algebren.
  Die Blockmatrixdarstellung des Bergmann Kerns ist

  $$B(z,w) = \begin{pmatrix} 1 - zw^* & 0 \\ 0 & (1 - w^* z)^{-1} \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall erhält man noch einen Kozyklus auf $\mathfrak{B}$: Unter Betrachtung der Cayley-Transformation aus Kapitel 1 die $\mathfrak{B}$ auf den Siegelschen Oberhalbraum

$$\mathfrak{P} = \left\{\mathfrak{w} \in \mathbb{C}^{r\times r}_{sym} : Im\mathfrak{w} > 0\right\}$$

abbildet, dabei $c(\mathfrak{o}) = \mathfrak{i}$ erfüllt und deren $2r \times 2r$ Blockmatrix Darstellung als Moebius Transformation

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \quad \text{ist,}$$

definiert

$$\mathcal{J}_{\mathfrak{B}}(\gamma, \mathfrak{z}) = \lfloor (c(\mathfrak{z})' B(\mathfrak{z})(c(\mathfrak{z})')^*)^{-1/2}(c(\mathfrak{z})'(\gamma\mathfrak{z}')^{-1}(c(\gamma\mathfrak{z})')^{-1})\rfloor$$

einen weiteren Kozyklus, wobei $\gamma \in \mathrm{Sp}_{\mathfrak{B}} = c^{-1}\mathrm{Sp}\, c = \mathrm{Aut}(\mathfrak{B})$ und $B(\mathfrak{z}) := B(\mathfrak{z}, \mathfrak{z})$ der Bergman Kern des Gebietes $\mathfrak{B}$ sind. $Sp = Sp(2r, \mathbb{R})$ ist die reelle symplektische Gruppe aus Kapitel 1 die als Moebius-Transformationen auf $\mathfrak{P}$ operiert und die Automorphismen Gruppe von $\mathfrak{P}$ ist.
Durch die Kompatibilität des Bergman Kernes mit Automorphismen,

$$B(\gamma\mathfrak{z}_1, \gamma\mathfrak{z}_2) = \gamma\mathfrak{z}_1' B(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2)(\gamma\mathfrak{z}_2')^*,$$

ist somit

$$\mathcal{J}_{\mathfrak{B}}(\gamma, \mathfrak{z}) = [c(\mathfrak{z})' B(\mathfrak{z})(c(\mathfrak{z})')^*]^{-1/2} c(\mathfrak{z})'(\gamma\mathfrak{z}')^{-1}(c(\gamma\mathfrak{z})')^{-1} \cdot$$
$$\cdot [c(\gamma\mathfrak{z})' B(\gamma\mathfrak{z})(c(\gamma\mathfrak{z})')^*]^{1/2}.$$

- Sei $\mathfrak{P} = \left\{\mathfrak{w} \in \mathbb{C}^{r\times r}_{sym} : Im\mathfrak{w} > 0\right\}$ der Siegelsche Oberhalbraum und sei G die reelle symplektische Gruppe G = Sp. Aus Kapitel 1 gilt $g\mathfrak{w}' \in \mathrm{K}^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{B}}$ für alle $g \in \mathrm{G}$ und alle $\mathfrak{w} \in \mathfrak{P}$. Betrachtet man nun

$$(g, \mathfrak{w}) \mapsto \mathcal{J}_{\mathfrak{P}}(g, \mathfrak{w}) = \left(g\mathfrak{w}'\right)^{-1}$$

so erhält man einen Kozyklus. Sei $R(\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2) = P(\frac{1}{2i}(\mathfrak{w}_1 - \mathfrak{w}_2{}^*))$, wobei P die quadratische Darstellung der Jordan-Algebra $\mathbb{C}^{r\times r}_{sym}$ ist. $R(\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2) \in \mathrm{K}^{\mathbb{C}}$ und die Kompatibilitätseigenschaft von $R(\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2)$ mit $\mathcal{J}_{\mathfrak{P}}(g, \mathfrak{w})$ kann direkt nachgewiesen werden: Durch die Formel **[KW06]**

$$g\mathfrak{w}_1 - g\mathfrak{w}_2^* = (\mathfrak{w}_2^* C^t + D^t)^{-1}(\mathfrak{w}_1 - \mathfrak{w}_2^*)(C\mathfrak{w}_1 + D)^{-1} \quad \text{für} \quad g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

gilt für R

$$R(g\mathfrak{w}_1, g\mathfrak{w}_2) = P(\frac{1}{2i}(g\mathfrak{w}_1 - g\mathfrak{w}_2^*)) =$$

$$= \begin{pmatrix} (\mathfrak{w}_2^* C^t + D^t)^{-1}\frac{1}{2i}(\mathfrak{w}_1 - \mathfrak{w}_2^*)(C\mathfrak{w}_1 + D)^{-1} & 0 \\ 0 & (C\mathfrak{w}_2^* + D)2i(\mathfrak{w}_1 - \mathfrak{w}_2^*)^{-1}(\mathfrak{w}_1 C^t + D^t), \end{pmatrix}$$

da $\frac{1}{2i}(g\mathfrak{w}_1 - g\mathfrak{w}_2^*)$ (reell-)symmetrisch ist. Die Formel für $g\mathfrak{w}'$ als Moebius-Transformation ist aus Kapitel 1,

$$g\mathfrak{w}_1{}' = \begin{pmatrix} (\mathfrak{w}_1 C^t + D^t)^{-1} & 0 \\ 0 & C\mathfrak{w}_1 + D \end{pmatrix},$$

und es gilt

$$R(g\mathfrak{w}_1, g\mathfrak{w}_2) = \overline{g\mathfrak{w}_2'} R(\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2)(g\mathfrak{w}_1')^t.$$

R ist hermitesch im Sinne von $\overline{R(\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2)} = R(\mathfrak{w}_2, \mathfrak{w}_1)$, so dass man die Kompatibilität mit $\mathcal{J}$ erhält:

$$R(\mathfrak{w}_2, \mathfrak{w}_1) = (g\mathfrak{w}_2{}')^{-1} R(g\mathfrak{w}_2, g\mathfrak{w}_1)(g\mathfrak{w}_1{}')^{-*}.$$

Wir schreiben

$$\jmath_{\mathfrak{P}}(g, \mathfrak{w}) = \lfloor R(\mathfrak{w})^{-1/2} \mathcal{J}_{\mathfrak{P}}(g, \mathfrak{w}) \rfloor.$$

Nach Umfolmulierung in γ und $\mathfrak{z}$, gilt die Formel $\jmath_{\mathfrak{P}}(g, \mathfrak{w}) = \jmath_{\mathfrak{B}}(\gamma, \mathfrak{z})$, aus dem ersten Beispiel, da

$$\big(g\mathfrak{w}'\big)^{-1} = c(\mathfrak{z})'(\gamma\mathfrak{z}')^{-1}(c(\gamma\mathfrak{z})')^{-1},$$

für $\mathfrak{w} = c(\mathfrak{z})$ und $g = c\gamma c^{-1}$, und

$$R(\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2) = P(\frac{1}{2i}(\mathfrak{w}_1 - \mathfrak{w}_2{}^*)) = c'(\mathfrak{z}_1)B(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2)c'(\mathfrak{z}_2)^*.$$

Es ist klar, dass auch

$$\jmath^c_{\mathfrak{P}}(g, \mathfrak{w}) = c\jmath_{\mathfrak{P}}(g, \mathfrak{w})c^{-1} = c\lfloor P(Im\mathfrak{w})^{-1/2}\big(g'(\mathfrak{w})\big)^{-1}\rfloor c^{-1}$$

ein Kozyklus ist. Dieser erscheint durch die folgende Konstruktion:

Wir haben ein Hilbertraum-Bündel $\mathcal{H} \to \mathfrak{P}$, auf das wir in Kapitel 6 zurückkommen werden, dessen Faser $\mathcal{H}_{\mathfrak{w}}$ über jedem $\mathfrak{w} \in \mathfrak{P}$ der Hilbertraum der „$\mathfrak{w}-$ holomorphen“, quadrat-integierbaren (Lebesgue Maß auf $\mathbb{R}^{2r\times 1}$) Funktionen ist. Konkret sind das quadrat-integrierbare Funktionen der Form $\psi(\zeta_{\mathfrak{w}}) = \varphi(\zeta_{\mathfrak{w}})e^{-1/2|\zeta_{\mathfrak{w}}|^2}$, wobei φ eine ganze Funktion auf $\mathbb{C}^{r\times 1}$ ist, der Koordinaten

$$\zeta_{\mathfrak{w}} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} Im\mathfrak{w}^{-1/2}(\xi - \overline{\mathfrak{w}}\eta), \qquad \xi, \eta \in \mathbb{R}^{r\times 1}.$$

Wir schreiben

$$\zeta_{\mathfrak{w}} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1, i)\begin{pmatrix} Im\mathfrak{w}^{-1/2} & -Im\mathfrak{w}^{-1/2}Re\mathfrak{w} \\ 0 & Im\mathfrak{w}^{1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1, i)[T_{\mathfrak{w}}]\tbinom{\xi}{\eta}.$$

Sei nun $T_{\mathfrak{w}}$ der Operator von $\mathcal{H}_{\mathfrak{i}}$ nach $\mathcal{H}_{\mathfrak{w}}$, „Koordinatenwechsel“, das heißt, Verkettung mit der Matrix $[T_{\mathfrak{w}}]$.
Wir schreiben $\zeta_{\mathbb{R}} = \binom{\xi}{\eta} \in \mathbb{R}^{2r\times 1}$.

$$T_{\mathfrak{w}} : \mathcal{H}_{\mathfrak{i}} \to \mathcal{H}_{\mathfrak{w}}$$

$$\psi(\zeta_{\mathfrak{i}}) = \psi(\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1, i)[T_{\mathfrak{i}}]\zeta_{\mathbb{R}}) \mapsto \psi(\zeta_{\mathfrak{w}}) = \psi(\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1, i)[T_{\mathfrak{w}}]\zeta_{\mathbb{R}})$$

$T_{\mathfrak{i}}$ ist natürlich die Identität, genauso wie die Matrix $[T_{\mathfrak{i}}]$. $T_{\mathfrak{w}}$ ist ein Isomorphismus. Auf $L^2 = L^2(\mathbb{R}^{2r\times 1})$ operiert Sp unitär durch

$$f(\zeta_{\mathbb{R}}) \mapsto f(g^{-1}\zeta_{\mathbb{R}}).$$

So ist auch der Operator $T_{\mathfrak{w}}$ unitär und ein isometrischer Isomorphismus, da $[T_{\mathfrak{w}}] \in \mathrm{Sp}$.
Für jedes $g \in \mathrm{Sp}$ haben wir einen (unitären) Isomorphismus von L^2, der eingeschränkt auf $\mathcal{H}_w$, diesen Raum auf $\mathcal{H}_{g\mathfrak{w}}$ abbildet, da die Operation von Sp auf $\mathcal{J}$ der Transformationsregel 6.1 aus Kapitel 1 $gJ_{\mathfrak{w}}g^{-1} = J_{g\mathfrak{w}}$ genügt.

$$U_g : \mathcal{H}_w \longrightarrow \mathcal{H}_{g\mathfrak{w}}$$

$$\psi(\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,i)[T_{\mathfrak{w}}]\zeta_{\mathbb{R}}) = \psi(\zeta_{\mathfrak{w}}) \mapsto \psi(\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,i)[T_{\mathfrak{w}}][g^{-1}]\zeta_{\mathbb{R}})$$

Dies ist ein (unitärer) Isomorphismus. Diese beiden, zusammen mit dem Operator

$$T_{g\mathfrak{w}}^{-1} : \mathcal{H}_{g\mathfrak{w}} \to \mathcal{H}_{\mathfrak{i}},$$

geben einen unitären Operator $U_{\mathfrak{i}}^{g,\mathfrak{w}} : \mathcal{H}_{\mathfrak{i}} \to \mathcal{H}_{\mathfrak{i}}$.

$$\begin{array}{ccc}
\psi(\zeta_{\mathfrak{i}}) = \psi(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,i)[T_{\mathfrak{i}}]\zeta_{\mathbb{R}}) & \longmapsto & \psi(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,i)[T_{\mathfrak{w}}]\zeta_{\mathbb{R}}) = \psi(\zeta_{\mathfrak{w}}) \\
\Big\downarrow & \begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{\mathfrak{i}} & \xrightarrow{T_{\mathfrak{w}}} & \mathcal{H}_{\mathfrak{w}} \\ {\scriptstyle U_{\mathfrak{i}}^{g,\mathfrak{w}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle U_g} \\ \mathcal{H}_{\mathfrak{i}} & \xleftarrow[T_{g\mathfrak{w}}^{-1}]{} & \mathcal{H}_{g\mathfrak{w}} \end{array} & \Big\downarrow \\
\psi(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,i)[T_{\mathfrak{w}}][g^{-1}][T_{g\mathfrak{w}}^{-1}]\zeta_{\mathbb{R}}) & \longleftarrow & \psi(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,i)[T_{\mathfrak{w}}][g^{-1}]\zeta_{\mathbb{R}})
\end{array}$$

$$U_{\mathfrak{i}}^{g,\mathfrak{w}}(\psi)(\zeta_{\mathbb{R}}) = T_{g\mathfrak{w}}^{-1} \circ U_g \circ T_{\mathfrak{w}}(\psi)(\zeta_{\mathbb{R}}) =$$

$$= \psi(\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,i)[T_{\mathfrak{w}}][g^{-1}][T_{g\mathfrak{w}}^{-1}]\zeta_{\mathbb{R}})$$

Definiert man

$$\dot{\mathfrak{j}}_{\mathfrak{P}}(g,\mathfrak{w}) = [T_{\mathfrak{w}}][g^{-1}][T_{g\mathfrak{w}}^{-1}], \tag{2.1}$$

so ist $\dot{\mathfrak{j}}_{\mathfrak{P}}$ ein Kozyklus der Form $\dot{\mathfrak{j}}_{\mathfrak{P}}(g_2,\mathfrak{w})\dot{\mathfrak{j}}_{\mathfrak{P}}(g_1,g_2\mathfrak{w}) = \dot{\mathfrak{j}}_{\mathfrak{P}}(g_1g_2,\mathfrak{w})$. Es ist nun auch eine explizitere Formel für den Kozyklus $\dot{\mathfrak{j}}_{\mathfrak{P}}(g,\mathfrak{w})$ zu errechnen: $\dot{\mathfrak{j}}_{\mathfrak{P}}(g,\mathfrak{w}) =$

$$= \begin{pmatrix} Im\mathfrak{w}^{-1/2} & 0 \\ 0 & Im\mathfrak{w}^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Re\mathfrak{w}C^t + D^t & Im\mathfrak{w}C^t \\ -Im\mathfrak{w}C^t & Re\mathfrak{w}C^t + D^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Im\, g\mathfrak{w}^{1/2} & 0 \\ 0 & Im\, g\mathfrak{w}^{1/2} \end{pmatrix}.$$

Wir zeigen nun, dass $\dot{\mp}_{\mathfrak{P}}$ und der schon betrachtete Kozyklus

$$\dot{\jmath}^{c}_{\mathfrak{P}}(g,\mathfrak{w}) = c\dot{\jmath}_{\mathfrak{P}}(g,\mathfrak{w})c^{-1} = c\lfloor P(Im\mathfrak{w})^{-1/2}\big(g'(\mathfrak{w})\big)^{-1}\rfloor c^{-1}$$

übereinstimmen.

Satz 2.1. *Der Kozyklus* $\dot{\mp}_{\mathfrak{P}}(g,\mathfrak{w}) =$

$$= \begin{pmatrix} Im\mathfrak{w}^{-1/2} & 0 \\ 0 & Im\mathfrak{w}^{-1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Re\mathfrak{w}C^t + D^t & Im\mathfrak{w}C^t \\ -Im\mathfrak{w}C^t & Re\mathfrak{w}C^t + D^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Im\, g\mathfrak{w}^{1/2} & 0 \\ 0 & Im\, g\mathfrak{w}^{1/2} \end{pmatrix}$$

lässt sich durch $g' \in \mathrm{Sp}^{\mathbb{C}}$ *und* $\mathfrak{w} \in \mathfrak{P}$ *und der Cayley Transformation* c *beschreiben, genauer gilt*

$$\dot{\mp}_{\mathfrak{P}}(g,\mathfrak{w}) = c\lfloor P(Im\mathfrak{w})^{-1/2}\big(g'(\mathfrak{w})\big)^{-1}\rfloor c^{-1} = c\dot{\jmath}_{\mathfrak{P}}(g,\mathfrak{w})c^{-1}.$$

Beweis:

$$g'(\mathfrak{w}) = \begin{pmatrix} (\mathfrak{w}C^t + D^t)^{-1} & 0 \\ 0 & C\mathfrak{w} + D \end{pmatrix},$$

und der unitäre Anteil von $A = P(Im\mathfrak{w})^{-1/2}\big(g'(\mathfrak{w})\big)^{-1}$ ist $A(A^*A)^{-1/2}$. Wobei $(A^*A)^{-1/2} =$

$$= \left[\begin{pmatrix} (\mathfrak{w}C^t + D^t)^{*} & 0 \\ 0 & (C\mathfrak{w} + D)^{-*} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Im\mathfrak{w}^{-1} & 0 \\ 0 & Im\mathfrak{w} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathfrak{w}C^t + D^t & 0 \\ 0 & (C\mathfrak{w} + D)^{-1} \end{pmatrix}\right]^{-1/2}.$$

Dadurch, dass $Im\, g\mathfrak{w} = (\overline{\mathfrak{w}}C^t+D^t)^{-1}Im\mathfrak{w}(C\mathfrak{w}+D)^{-1}$ **[KW06]** und reell (und symmetrisch) ist, ist

$$(A^*A)^{-1/2} = \begin{pmatrix} Im\, g\mathfrak{w}^{1/2} & 0 \\ 0 & Im\, g\mathfrak{w}^{-1/2} \end{pmatrix},$$

und $\lfloor P(Im\mathfrak{w})^{-1/2}\big(g'(\mathfrak{w})\big)^{-1}\rfloor =$

$$= \begin{pmatrix} Im\mathfrak{w}^{-1/2}(\mathfrak{w}C^t + D^t)Im\, g\mathfrak{w}^{1/2} & 0 \\ 0 & Im\mathfrak{w}^{1/2}(C\mathfrak{w} + D)^{-1}Im\, g\mathfrak{w}^{-1/2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} Im\mathfrak{w}^{-1/2}(\mathfrak{w}C^t + D^t)Im\, g\mathfrak{w}^{1/2} & 0 \\ 0 & Im\mathfrak{w}^{-1/2}(\overline{\mathfrak{w}}C^t + D^t)Im\, g\mathfrak{w}^{1/2} \end{pmatrix}.$$

Nun ist $c\lfloor P(Im\mathfrak{w})^{-1/2}\big(g'(\mathfrak{w})\big)^{-1}\rfloor c^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} Im\mathfrak{w}^{-1/2} & 0 \\ 0 & Im\mathfrak{w}^{-1/2} \end{pmatrix} c \begin{pmatrix} \mathfrak{w}C^t + D^t & 0 \\ 0 & \overline{\mathfrak{w}}C^t + D^t \end{pmatrix} c^{-1}\begin{pmatrix} Im\, g\mathfrak{w}^{1/2} & 0 \\ 0 & Im\, g\mathfrak{w}^{1/2} \end{pmatrix},$$

und

$$c\begin{pmatrix} \mathfrak{w}C^t + D^t & 0 \\ 0 & \overline{\mathfrak{w}}C^t + D^t \end{pmatrix}c^{-1} = \begin{pmatrix} Re\mathfrak{w}C^t + D^t & Im\mathfrak{w}C^t \\ -Im\mathfrak{w}C^t & Re\mathfrak{w}C^t + D^t \end{pmatrix}$$

gibt die gewünschte Gleichung.

$\square$

Bemerkung 2.2. Man kann zeigen, dass

$$\psi(\zeta_{\mathfrak{i}}) \mapsto \psi(Im\mathfrak{w}^{-1/2}(\overline{\mathfrak{w}}C^t + D^t)Im\, g\mathfrak{w}^{1/2}\zeta_{\mathfrak{i}})$$

mit der Abbildung $U_{\mathfrak{i}}^{g,\mathfrak{w}}$ übereinstimmt, sie „schiebt“ also nur den Vorfaktor $Im\mathfrak{w}^{-1/2}(\overline{\mathfrak{w}}C^t + D^t)Im\, g\mathfrak{w}^{1/2}$ vor die $\mathcal{H}_{\mathfrak{i}}$ Koordinate $\zeta_{\mathfrak{i}}$. Damit haben wir in Kapitel 2 gearbeitet, dabei $\mathcal{H}$ für $\mathcal{H}_{\mathfrak{i}}$, ζ für $\zeta_{\mathfrak{i}}$ und $U_{g,\mathfrak{w}}$ für $U_{\mathfrak{i}}^{g,\mathfrak{w}}$ geschrieben.

Sei $\mathfrak{B} = \left\{\mathfrak{z} \in \mathbb{C}^{r\times r}_{sym} : \mathbb{1} - \mathfrak{z}\mathfrak{z}^* > 0\right\}$, genauso wie im ersten Beispiel. Durch pullback der Cayley-Transformation c, erhält man das pullback-Hilbertraum-Bündel über $\mathfrak{B}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H} \arrow[d, "\pi"'] & c^*(\mathcal{H}) \arrow[l, "c_2"'] \arrow[d, "\pi'"] & \sim & \mathcal{H} \\
\mathfrak{P} & \mathfrak{B} \arrow[l, "c"']
\end{tikzcd}$$

hier ist c_2 die Projektion auf die zweite Koordinate des pullback–Bündels

$$c^*(\mathcal{H}) = \{(\mathfrak{z}, \psi) \in \mathfrak{B} \times \mathcal{H} : c(\mathfrak{z}) = \pi(\psi)\}.$$

Die pullback-Schnitte in $c^*(\mathcal{H})$, sind der Form $c^*s = s \circ c$, für einen Schnitt s im Bündel $\mathcal{H}$. Man kann also auch hier die Fasern angeben:

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{z}} = \left\{\psi(\zeta_{\mathfrak{z}}) = \varphi(\zeta_{\mathfrak{z}})e^{-1/2|\zeta_{\mathfrak{z}}|^2} \text{ mit } \varphi \text{ ganz auf } \mathbb{C}^{r\times 1}\right\},$$

die Koordinaten sind

$$\zeta_{\mathfrak{z}} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} Imc(\mathfrak{z})^{-1/2}(\xi - \overline{c(\mathfrak{z})}\eta), \qquad \xi, \eta \in \mathbb{R}^{r\times 1}.$$

So erhält man durch die Konstruktion im zweiten Beispiel den Kozyklus aus dem ersten Beispiel:

$$\jmath_{\mathfrak{B}}(\gamma, \mathfrak{z}) = \lfloor((c'(\mathfrak{z})B(\mathfrak{z})(c'(\mathfrak{z}))^*))^{-1/2}(c'(\mathfrak{z})(\gamma'(\mathfrak{z}))^{-1}c'(\gamma\mathfrak{z})^{-1})\rfloor.$$

3. Der Beweis

Beweis: des Satzes 1.1. Sei $R(z) = R(z, z)$. Durch die Kompatibilität von $\mathcal{J}$ mit R gilt

$$\jmath(g, w) = \lfloor R(z)^{-1/2}\mathcal{J}(g, z)\rfloor = R(z)^{-1/2}\mathcal{J}(g, z)\left|R(z)^{-1/2}\mathcal{J}(g, z)\right|^{-1} =$$
$$= R(z)^{-1/2}\mathcal{J}(g, z)R(gz)^{1/2},$$

da $\left|R(z)^{-1/2}\mathcal{J}(g, z)\right|^{-1} = R(gz)^{1/2}$. Dies folgt aus

$$\left|R(z)^{-1/2}\mathcal{J}(g, z)\right|^2 = \mathcal{J}(g, z)^*R(z)^{-1/2}R(z)^{-1/2}\mathcal{J}(g, z) =$$
$$= \mathcal{J}(g, z)^*R(z)^{-1}\mathcal{J}(g, z) = R(gz)^{-1}.$$

Nun folgt auch die Kozykluseigenschaft

$$\jmath(g_1g_2, z) = R(z)^{-1/2}\mathcal{J}(g_1g_2, z)R(g_1g_2z)^{1/2} =$$

$$= R(z)^{-1/2}\mathcal{J}(g_2, z)\mathcal{J}(g_1, g_2 z)R(g_1 g_2 z)^{1/2} =$$
$$= R(z)^{-1/2}\mathcal{J}(g_2, z)R(g_2 z)^{1/2}R(g_2 z)^{-1/2}\mathcal{J}(g_1, g_2 z)R(g_1 g_2 z)^{1/2} =$$
$$= \jmath(g_2, z)\jmath(g_1, g_2 z).$$

□

Bemerkung 3.1. Im Beweis braucht man lediglich nur die Kompatibilität von R mit $\mathcal{J}$ auf der Diagonalen, das heißt

$$R(z, z) = R(z) = \mathcal{J}(g, z)R(gz)\mathcal{J}(g, z)^* = \mathcal{J}(g, z)R(gz, gz)\mathcal{J}(g, z)^*.$$

Falls $R : Z \times Z \to \mathrm{K}^{\mathbb{C}}$ sesqui-holomorph und die Abhängigkeit von $\mathcal{J}$ von z holomorph ist, erhält man die Kompatibilität

$$R(z, w) = \mathcal{J}(g, z)R(gz, gw)\mathcal{J}(g, w)^*, \qquad \forall\, z, w \in Z.$$

durch sesqui-holomorphe Fortsetzung auf $Z \times Z$.

Somit haben wir eine andere Formulierung für Satz 1.1:

Satz 3.2. *Sei $\mathcal{J}$ ein (in $z \in B$) holomorpher Kozyklus in $\mathrm{K}^{\mathbb{C}} \subset \mathrm{Gl}(Z)$, das heißt*

$$\mathcal{J} : \mathrm{G} \ltimes B \to \mathrm{K}^{\mathbb{C}},$$

so dass $z \mapsto \mathcal{J}(g, z)$ für alle $g \in G$ holomorph ist, und mit

$$\mathcal{J}(g_1 g_2, z) = \mathcal{J}(g_2, z)\mathcal{J}(g_1, g_2 z).$$

Und sei

$$R : B \times B \to \mathrm{K}^{\mathbb{C}}$$

eine Abbildung für die $R(z, z) > 0$ und die Kompatibilität mit $\mathcal{J}$

$$R(z, z) = \mathcal{J}(g, z)R(gz, gz)\mathcal{J}(g, z)^*,$$

für alle $z \in B$ gilt, und welche sesqui-holomorph auf $B \times B$ ist. Dann ist

$$\jmath(g, z) = \lfloor R(z)^{-\frac{1}{2}}\mathcal{J}(g, z)\rfloor \in \mathrm{K}$$

auch ein Kozyklus der gleichen Form. Es gilt also

$$\jmath(g_1 g_2, z) = \jmath(g_2, z)\jmath(g_1, g_2 z).$$

KAPITEL 5

Wirkungen der symplektischen Gruppen

In diesem Abschnitt betrachten wir die wohlbekannte $\sim$ - Operation auf den Tripotenten (des Ranges 1) $\mathbb{S}_1(Z)$ eines Jordan-Tripelsystems Z. Für G = Sp und $Z = \mathbb{C}^{r\times r}_{sym}$ geben wir eine explizite Formel für diese an. Basierend auf dieser definieren wir eine neue Operation auf allen Rang- 1 Elementen $\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{r\times r}_{sym})$ des Jordan-Tripelsystems für welche wir auch eine Formel finden. Wir geben den Raum $L^2(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{r\times r}_{sym}))$ der quadrat integrierbaren Funktionen auf den (Rang-1-) Elementen des Jordan-Tripelsystems an. Jedes der erhaltenen Resultate ist für sich interessant, und diese führen zu einer Jordan theoretischen „metaplektischen Darstellung". Wir können G als Isometrien des $L^2(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{r\times r}_{sym}))$ darstellen, und die Techniken und Rechnungen sind Vorarbeit für das nächste Kapitel in dem wir ein Hilbertraum-Bündel holomorpher Funktionen betrachten und zeigen, dass sein Zusammenhang, eingeschränkt auf jede Faser des Bündels, als Verknüpfung einer Projektion mit der Summe eines Toeplitz Operators und einem getwisteten Euler Operator gedeutet werden kann.
Als Ausblick betrachten wir die $\sim$ - Operation auf den Tripotenten beliebigen Ranges, und geben wiederum ihre Formel an. Wir bilden die Vorgehensweise im Rang-1-Fall für beliebigen Rang nach.

1. Eine Operation auf den Tripotenten

Die symplektische Gruppe Sp = Sp$(2r, \mathbb{R})$ operiert reell linear auf $\mathbb{C}^{r\times 1}$. Seien

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp} \quad \text{und} \quad \zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C}^{r\times 1}$$

mit $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{r\times 1}$, dann ist $g\cdot\zeta = (A + iC)\xi + (B + iD)\eta$, gemäß der reell linearen Aktion

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\xi + B\eta \\ C\xi + D\eta \end{pmatrix}$$

gegeben.

Wir fangen mit einer einfachen Rechnung an, welche die Idee für das Errechnen der ersten wichtigen Formel ist:
Für $\xi_1 = (1, 0, \ldots, 0)^t$ ist $g\cdot\xi_1 = [A + iC]^1$ die erste Spalte der $r \times r$ Matrix $A + iC$.

$\mathrm{Sp}_{\mathfrak{B}} = c^{-1}\mathrm{Sp}\, c$ operiert als Moebius Transformation auf $\mathfrak{B}$, sogar auf $\overline{\mathfrak{B}}$, wobei $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{z} \in \mathbb{C}^{r\times r}_{sym} : \mathfrak{z}\mathfrak{z}^* < \mathfrak{1}\}$. Für

$$\gamma = c^{-1} g c \in \mathrm{Sp}_{\mathfrak{B}}, \quad \text{mit} \quad g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

ist

$$\gamma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \text{wobei} \quad \begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{2}(A + D + i(B - C)), \\ \beta = \frac{1}{2}(A - D - i(B + C)). \end{array}$$

Demzufolge ist für das Tripotent $e_1 = \xi_1 \xi_1^t$

$$\gamma(e_1) = ([\alpha]^1 + \beta)([\overline{\beta}]^1 + \overline{\alpha})^{-1}.$$

Wenn man vorerst den Fall $r = 1$ betrachtet, erhält man $g\cdot 1 = A + iC$ und $\gamma(1) = (\alpha + \beta)(\overline{\alpha} + \overline{\beta})^{-1} = (A - iC)^2 \left\|A - iC\right\|^{-2}$. Also ist $\overline{g\cdot 1} g\cdot 1^*$ ein Vielfaches von $\gamma(1)$, genauer gilt

$$\frac{\overline{g\cdot 1} g\cdot 1^*}{\left\|g\cdot 1\right\|^2} = \gamma(1)$$

Wir definieren nun eine Involution auf den Elementen der symplektischen Gruppe durch welche die letzte Gleichung sich eleganter schreiben lässt.

Definition 1.1. Sei $g \in \mathrm{Sp}$ und

$$s_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die Spiegelung in $\mathfrak{B}$. Dann ist

$$\overline{g} := s_0 g s_0 = \begin{pmatrix} A & -B \\ -C & D \end{pmatrix}, \quad \text{für}\, g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 1.2. Es gilt $\overline{g} \in \mathrm{Sp}$, falls $g \in \mathrm{Sp}$, und $\overline{g\cdot\xi_1} = \overline{g}\cdot\xi_1$.

Im Falle $r = 1$ erhalten wir die Gleichheit

$$\frac{\overline{g}\cdot 1 \overline{g}\cdot 1^t}{\left\|\overline{g}\cdot 1\right\|^2} = \gamma(1).$$

Nun kommen wir zur Definition der $\sim$ - Operation: Im Allgemeinen, das heißt für $r > 1$, operiert $\mathrm{Sp}_{\mathfrak{B}}$ nicht auf den Tripontenten des Jordan Tripel Systems $\mathbb{C}^{r\times r}_{sym}$, wie das bei $r = 1$ der Fall ist. Man hat aber, für jedes $\gamma \in \mathrm{Sp}_{\mathfrak{B}}$ eine Abbildung $\widetilde{\gamma}$ die das tut, und $\sim$ ist eine Aktion [**Loo77**], [**Upm96**]: Wir schreiben

$$\partial\mathfrak{B} = \bigcup_{0 \neq e\, Tripotent} \partial_e \mathfrak{B} = \bigcup_{1 \le k \le r} \bigcup_{e \in \mathbb{S}_k} \partial_e \mathfrak{B},$$

wobei $\partial_e \mathfrak{B}$ die affine Randkomponente (= holomorphe Randkomponente, [**Loo77**][9.7]) um e, genauer $\partial_e \mathfrak{B} = e + (\mathfrak{B} \cap Z_0(e)) \subset \partial\mathfrak{B}$ ist. Die Vereinigung ist disjunkt. Sei $\mathfrak{B}_0(e) = \mathfrak{B} \cap Z_0(e)$, wobei $Z_0(e)$ der

Pierce-0-Raum zum Tripotent e ist. Mit $\mathbb{S}_k$ bezeichnen wir die Untermannigfaltigkeit der Tripontenten des Ranges k. Außerdem sei

$$\mathbb{S}(Z) = \bigcup_{1 \leq k \leq r} \mathbb{S}_k(Z)$$

die kompakte Mannigfaltigkeit aller Tripontenten welche als disjunkte Vereinigung der Untermannigfaltigkeiten der Tripotenten des Ranges k geschrieben wird.
$\gamma \in \mathrm{Sp}_{\mathfrak{B}}$ operiert auf den Randkomponenten, das heißt $\gamma(\partial_e \mathfrak{B})$ ist eine Randkomponente, zu einem (eindeutigen) Tripotent, das $\widetilde{\gamma}(e)$ geschrieben wird und welches den gleichen Rang wie e hat

$$\partial_e \mathfrak{B} \xrightarrow{\gamma} \partial_{\widetilde{\gamma}(e)} \mathfrak{B}.$$

Da γ eine Diffeomorphismus ist, bleibt der Rang affinen Ränder (komplementär zum Rang des jeweiligen Tripotents) und auch der der dazugehörigen Tripotenten, erhalten.

Für die Randkomponenten-Zerteilung und das Verhalten von γ auf ihnen ist oft folgende Matrizendarstellung hilfreich [**Loo77**](6.3)

$$\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & \mathfrak{B}_0(e) \end{pmatrix}.$$

Durch Eindeutigkeit der Abbildung $\sim$ und der Wirkung von $\mathrm{Sp}_{\mathfrak{B}}$ auf den Randkomponenten, erhält man

$$\partial_e \mathfrak{B} \xrightarrow{\gamma} \partial_{\widetilde{\gamma}(e)} \mathfrak{B} \xrightarrow{\eta} \partial_{\widetilde{\eta}(\widetilde{\gamma}(e))} \mathfrak{B} = \partial_{\widetilde{\eta \circ \gamma}(e)} \mathfrak{B}.$$

Dies zeigt, dass $\sim$ eine Aktion auf $\mathbb{S}(Z)$ und insbesondere auch auf $\mathbb{S}_k$ ist.
Man kann $\widetilde{\gamma}(e)$ als Limes sehen und zwar gilt

$$\widetilde{\gamma}(e) = lim_{n \to \infty} \{u, u, u\}^n,$$

für jedes u in der Randkomponente des Tripotents $\widetilde{\gamma}(e)$, insbesondere für $u = \gamma(e)$. Hier ist $\{a, b, c\} = (a \Box b^*)(c)$ das Jordan Tripel Produkt.

Mit dieser Formel errechnen wir im kommenden Abschnitt $\widetilde{\gamma}(e_1)$.

2. $\widetilde{\gamma}(e_1)$

$\gamma(e_1)$ ist eine (symmetrische) Matrix, man kann sie, durch Polarzerlegung und dann Spektralzerlegung ihres Absolutanteils $|\gamma(e_1)| = (\gamma(e_1)^* \gamma(e_1))^{1/2}$, als

$$\gamma(e_1) = WU \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix} U^*, \quad \Lambda = Diag(\lambda_j) \in \mathbb{R}^{r-1 \times r-1},$$

mit Eigenwerten $1 > \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r \geq 0$, $U \in \mathrm{U}(\mathbb{C}^r)$ und W einer partiellen Isometrie, mit $KerW = Ker\,|\gamma(e_1)|$, schreiben. Der größte Eigenwert ist 1, da $e_1 \in \partial \mathfrak{B}$, und $\gamma : \overline{\mathfrak{B}} \to \overline{\mathfrak{B}}$

$$\gamma|_{\partial \mathfrak{B}} \colon \partial \mathfrak{B} \to \partial \mathfrak{B}$$

erfüllt. Es gilt mehr: γ induziert eine Isometrie (in der Bergman Metrik) auf den Tangentialräumen und erhält so den Rand **[FK94]**(169). Außerdem ist kein weiterer Eigenwert von $|\gamma(e_1)|$ gleich 1, da

$$\{\gamma(e_1), \gamma(e_1), \gamma(e_1)\}^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{\gamma}(e_1),$$

und $\widetilde{\gamma}$ eine Aktion auf den Tripotenten definiert, die Rang-erhaltend ist.
Man erhält im Limes $\widetilde{\gamma}(e_1) = WUe_1U^*$, da

$$\{\gamma(e_1), \gamma(e_1), \gamma(e_1)\}^n = WU \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix}^{3^n} U^*$$

und W^*W die orthogonale Projektion auf $Ker\gamma(e_1)^\perp$ ist **[Con90]**. Aus dieser Tatsache folgt auch, dass WUe_1U^* ein Tripotent ist.
Um $\widetilde{\gamma}(e_1)$ errechnen zu können, benötigen wir die erste Spalte der Matrix WU und die erste Zeile der Matrix U^*, das ist die erste Spalte der Matrix U, somit einen normierten Eigenvektor des Eigenwertes 1 von $|\gamma(e_1)|$. Dies machen wir zuerst:
Da die Eigenräume zum Eigenvektor 1 die gleichen für $|\gamma(e_1)|$ und $|\gamma(e_1)|^2 = \gamma(e_1)^*\gamma(e_1)$ sind, arbeiten wir mit $\gamma(e_1)^*\gamma(e_1)$. Durch die Symmetrie von $\gamma(e_1)$ und den symplektischen Bedingungen erhält man

$$\gamma(e_1)^*\gamma(e_1) - 1 = (e_1\beta^t + \alpha^t)^{-1}(e_1 - 1)(\overline{\beta}e_1 + \overline{\alpha})^{-1}$$

und ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist $(\overline{\beta}e_1 + \overline{\alpha})\xi_1 = (\overline{\beta}e_1 + \overline{\alpha})^1$, dies ist die erste Spalte von $\overline{\beta}e_1 + \overline{\alpha}$. Wir schreiben

$$U^1 = \frac{[\overline{\beta} + \overline{\alpha}]^1}{\|[\beta + \alpha]^1\|} = \frac{[A + iC]^1}{\|[A - iC]^1\|}.$$

Nun schreiben wir $M = WU$ und errechnen die erste Spalte der Matrix M:

$$M^1 = M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix} U^*U\xi_1 = \gamma(e_1)U^1 = \gamma(e_1)\frac{[\overline{\beta} + \overline{\alpha}]^1}{\|[\beta + \alpha]^1\|}.$$

Wir nutzen nochmals die Symmetrie von $\gamma(e_1)$ und suchen v so, dass

$$\gamma(e_1)\frac{[\overline{\beta} + \overline{\alpha}]^1}{\|[\beta + \alpha]^1\|} = (e_1\beta^* + \alpha^*)^{-1}(e_1\alpha^t + \beta^t)\frac{[\overline{\beta} + \overline{\alpha}]^1}{\|[\beta + \alpha]^1\|} = \frac{1}{\|[\beta + \alpha]^1\|}v.$$

Dies ist äquivalent zu

$$(e_1\alpha^t + \beta^t)[\overline{\beta} + \overline{\alpha}]^1 = (e_1\beta^* + \alpha^*)v$$

und durch die symplektischen Bedingungen erhält man

$$v = [\alpha + \beta]^1 = \left\|[\alpha + \beta]^1\right\| M^1.$$

Demzufolge ist

$$\widetilde{\gamma(e_1)} = Me_1U^* = M^1(U^1)^* = \frac{[\alpha + \beta]^1}{\|[\alpha + \beta]^1\|}\frac{([\alpha + \beta]^1)^t}{\|[\alpha + \beta]^1\|} =$$

$$= \frac{[A-iC]^1}{\|[A-iC]^1\|}\frac{([A-iC]^1)^t}{\|[A-iC]^1\|}.$$

Im Falle $r \geq 1$ ist demzufolge $\overline{g}\cdot\xi_1\overline{g}\cdot\xi_1^t$ auch ein Vielfaches von $\widetilde{\gamma}(e_1)$. Genauer haben wir

Satz 2.1. *Seien $g \in \mathrm{Sp}$ und $\gamma = c^{-1}gc \in \mathrm{Sp}_{\mathfrak{B}}$, dann ist*

$$\widetilde{\gamma}(e_1) = \frac{1}{\|\overline{g}\cdot\xi_1\|^2}\overline{g}\cdot\xi_1\overline{g}\cdot\xi_1^t = \frac{1}{\|[A-iC]^1\|^2}[A-iC]^1([A-iC]^1)^t,$$

mit

$$\overline{g} = s_0 g s_0 = \begin{pmatrix} A & -B \\ -C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}, \ \textit{für}\ g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

und s_0 der Spiegelung.

Sei Q die *Quadratabbildung* von der Einheitssphäre $\mathbb{S}^{2r-1}$ auf $\mathbb{S}_1(Z)$ der Mannigfaltigkeit der Rang 1 Tripotenten des Jordan Tripel Systems $Z = \mathbb{C}^{r\times r}_{sym}$

$$Q : \mathbb{S}^{2r-1} \to \mathbb{S}_1(\mathbb{C}^{r\times r}_{sym}), \quad \sigma \mapsto \sigma\sigma^t.$$

Wir haben folgendes Schema für ξ_1

$$\begin{tikzcd}
\xi_1 \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] & & & \xi_1\xi_1^t = e_1 \arrow[ddd, mapsto] \\
& \mathbb{S}^{2r-1} \arrow[r, "Q"] \arrow[d] & \mathbb{S}_1(\mathbb{C}^{r\times r}_{sym}) \arrow[d, "\widetilde{\gamma}"] & \\
& \mathbb{S}^{2r-1} \arrow[r, "Q"'] & \mathbb{S}_1(\mathbb{C}^{r\times r}_{sym}) & \\
\frac{\overline{g}\cdot\xi_1}{\|\overline{g}\cdot\xi_1\|} \arrow[rrr, mapsto] & & & \frac{\overline{g}\cdot\xi_1}{\|\overline{g}\cdot\xi_1\|}\frac{\overline{g}\cdot\xi_1{}^t}{\|\overline{g}\cdot\xi_1\|} = \widetilde{\gamma}(e_1)
\end{tikzcd}$$

Bemerkung 2.2. Für $\sigma = \xi \in \mathbb{S}^{2r-1}$ reell, kann man ähnlich vorgehen wie im Fall $\sigma = \xi_1$. Hier sind

$$g\cdot\xi = (A+iC)\xi \quad \text{und} \quad Q(g\cdot\xi) = (A-iC)\xi\xi^t(A-iC)^t.$$

Da $\xi\xi^t = oe_1o^t$ mit $o \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^r)$, ist

$$\overline{g}\cdot\xi\overline{g}\cdot\xi^t = (A-iC)\xi\xi^t(A-iC)^t = (A-iC)oe_1o^t(A-iC)^t =$$
$$= [(A-iC)o]e_1[(A-iC)o]^t,$$
$$\gamma(\xi\xi^t) = (\alpha\xi\xi^t + \beta)(\overline{\beta}\xi\xi^t + \overline{\alpha})^{-1} = (\alpha oe_1o^t + \beta oo^t)(\overline{\beta}oe_1o^t + \overline{\alpha}oo^t)^{-1} =$$
$$= (\alpha oe_1 + \beta o)(\overline{\beta}oe_1 + \overline{\alpha}o)^{-1}.$$

Es gilt $(\alpha o)(\alpha o)^* - (\beta o)(\beta o)^* = 1, (\alpha o)(\beta o)^t = (\beta o)(\alpha o)^t$, das heißt

$$\begin{pmatrix} \alpha o & \beta o \\ \overline{\beta}o & \overline{\alpha}o \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_{\mathfrak{B}}, \quad \text{da} \quad o \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^r) \quad \text{ist.}$$

Somit ist

$$\widetilde{\gamma}(\xi\xi^t) = \widetilde{\gamma}(oe_1o^t) = \frac{[\alpha o + \beta o]^1([\alpha o + \beta o]^1)^t}{\|[\alpha o + \beta o]^1\|^2} = \frac{[(A - iC)o]e_1[(A - iC)o]^t}{\|[(A - iC)o]^1\|^2}.$$

3. Die $\sim$ - Aktion von Sp auf $\mathbb{S}^{2r-1}$

Nun wird gezeigt, dass generell für $\sigma \in \mathbb{S}^{2r-1}$ das eben für $\sigma = \xi_1$ angegebene Diagramm kommutiert. Dafür definieren wir zuerst eine $\sim$ - Operation von Sp auf $\mathbb{S}^{2r-1}$:

$$\sim : \mathrm{Sp} \ltimes \mathbb{S}^{2r-1} \to \mathbb{S}^{2r-1}, \qquad (g, \sigma) \mapsto \widetilde{g}(\sigma)$$

mit

$$\widetilde{g} : \mathbb{S}^{2r-1} \to \mathbb{S}^{2r-1}, \quad \sigma \mapsto \frac{\overline{g} \cdot \sigma}{\|\overline{g} \cdot \sigma\|} = \frac{s_0 g s_0 \cdot \sigma}{\|s_0 g s_0 \cdot \sigma\|}.$$

Lemma 3.1. $\sim$ *ist eine Aktion von* Sp *auf* $\mathbb{S}^{2r-1}$

Beweis: Es ist klar dass $\widetilde{1} = 1$, wobei jeweils die Identität in Sp und die Identität auf $\mathbb{S}^{2r-1}$ gemeint ist, und es bleibt $\widetilde{hg} = \widetilde{h}\widetilde{g}$ zu zeigen:

$$\widetilde{h}\widetilde{g}(\sigma) = \frac{s_0 h s_0 \cdot (\widetilde{g}(\sigma))}{\|s_0 h s_0 \cdot (\widetilde{g}(\sigma))\|} = \frac{s_0 h s_0 \cdot (s_0 g s_0 \cdot (\sigma)) / \|s_0 g s_0 \cdot (\sigma)\|}{\|s_0 h s_0 \cdot (s_0 g s_0 \cdot (\sigma)) / \|s_0 g s_0 \cdot (\sigma)\|\|} =$$

$$= \frac{s_0 h g s_0 \cdot (\sigma)}{\|s_0 h g s_0 \cdot (\sigma)\|} = \widetilde{hg}(\sigma).$$

□

Nun können wir das erste Hauptresultat formulieren: Dafür betrachten wir die eben definierte $\sim$- Aktion von Sp auf $\mathbb{S}^{2r-1}$

$$\widetilde{g} : \mathbb{S}^{2r-1} \to \mathbb{S}^{2r-1}, \quad \sigma \mapsto \widetilde{g}(\sigma) = \frac{\overline{g} \cdot \sigma}{\|\overline{g} \cdot \sigma\|},$$

die $\sim$- Aktion von $\mathrm{Sp}_{\mathfrak{B}}$ auf $\mathbb{S}_1(\mathbb{C}^{r \times r}_{sym})$,

$$\widetilde{\gamma} : \mathbb{S}_1(\mathbb{C}^{r \times r}_{sym}) \to \mathbb{S}_1(\mathbb{C}^{r \times r}_{sym}), \quad e \mapsto \widetilde{\gamma}(e) = lim_{n \to \infty} \{\gamma(e), \gamma(e), \gamma(e)\}^n,$$

welche durch $\gamma \in \mathrm{Sp}_{\mathfrak{B}}$, auf der Mannigfaltigkeit der Rang-1 Tripotenten $\mathbb{S}_1(\mathbb{C}^{r \times r}_{sym})$ induziert wird, zusammen mit der Quadratabbildung Q.

Theorem 3.2. *Sei $g \in \mathrm{Sp}$ und $\gamma = c^{-1}gc \in \mathrm{Sp}_{\mathfrak{B}}$, dann kommutiert das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
\sigma \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] & & & \sigma\sigma^t \arrow[ddd, mapsto] \\
& \mathbb{S}^{2r-1} \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "\widetilde{g}"'] & \mathbb{S}_1(\mathbb{C}^{r\times r}_{sym}) \arrow[d, "\widetilde{\gamma}"] & \\
& \mathbb{S}^{2r-1} \arrow[r, "Q"'] & \mathbb{S}_1(\mathbb{C}^{r\times r}_{sym}) & \\
\frac{\overline{g}\cdot\sigma}{\|\overline{g}\cdot\sigma\|} \arrow[rrr, mapsto] & & & \frac{\overline{g}\cdot\sigma}{\|\overline{g}\cdot\sigma\|}\frac{\overline{g}\cdot\sigma^t}{\|\overline{g}\cdot\sigma\|} = \widetilde{\gamma}(\sigma\sigma^t)
\end{tikzcd}$$

das heißt: Für $\sigma \in \mathbb{S}^{2r-1}$, $g \in \mathrm{Sp}$ und $\widetilde{\gamma}$ induziert durch $\gamma = c^{-1}gc$ gilt

$$\widetilde{\gamma}(\sigma\sigma^t) = \widetilde{\gamma}(Q(\sigma)) = Q(\widetilde{g}(\sigma)) = \frac{\overline{g}\cdot\sigma}{\|\overline{g}\cdot\sigma\|}\frac{\overline{g}\cdot\sigma^t}{\|\overline{g}\cdot\sigma\|}.$$

Vor dem Beweis eine

Bemerkung 3.3. Die maximal-kompakten Untergruppen $\mathrm{K}_{\mathfrak{P}}$ und $\mathrm{K}_{\mathfrak{B}}$ operieren auf $\mathbb{S}^{2r-1}$, bzw. $\mathbb{S}_1(\mathbb{C}^{r\times r}_{sym})$. Für die Elemente dieser Gruppen, welche wir hier mit k_o, bzw. k bezeichnen, gilt

$$\widetilde{k_o} = k_o \qquad \widetilde{k} = k$$

für die jeweiligen $\sim$ - Operationen.

Beweis: Nach Satz 2.1 kommutiert das Diagramm für $\sigma = \xi_1$. Da die jeweiligen maximal kompakten Untergruppen $\mathrm{K}_{\mathfrak{P}}, \mathrm{K}_{\mathfrak{B}}$ transitiv auf $\mathbb{S}^{2r-1}$ bzw. $\mathbb{S}_1(\mathbb{C}^{r\times r}_{sym})$ operieren, und $\sim$ Aktionen sind, gilt die Kommutativität des Diagrammes für jedes $\sigma \in \mathbb{S}^{2r-1}$: Sei $k_o \in \mathrm{K}_{\mathfrak{P}}$, mit $k_o\xi_1 = \sigma$, dann ist, dank der Bemerkung

$$\begin{aligned}
Q(\widetilde{g}(\sigma)) = Q(\widetilde{g}(k_o\xi_1)) = Q(\widetilde{gk_o}(\xi_1)) = \widetilde{\gamma k}Q(\xi_1) = \\
= \widetilde{\gamma}kQ(\xi_1) = \widetilde{\gamma}(Q(k_o\xi_1)) = \widetilde{\gamma}(Q(\sigma)),
\end{aligned}$$

wobei $g \leftrightarrow \gamma$ und $\mathrm{K}_{\mathfrak{P}} \ni k_o \leftrightarrow k \in \mathrm{K}_{\mathfrak{B}}$, worauf auch $gk_o \leftrightarrow \gamma k$, via Konjugation mit der Cayley-Transformation.

$\square$

Bemerkung 3.4. Dass $\sim$ eine Aktion auf $\mathbb{S}_1(\mathbb{C}^{r\times r}_{sym})$ ist, ist äquivalent zu unserer Formel, da $\sim$ eine Aktion auf $\mathbb{S}^{2r-1}$ ist:

$$\widetilde{\gamma_1\gamma_2}(\sigma\sigma^t) = Q(\widetilde{g_1g_2}(\sigma)) = Q(\widetilde{g}_1\widetilde{g}_2(\sigma))$$

und

$$\widetilde{\gamma}_1(\widetilde{\gamma}_2(\sigma\sigma^t)) = \widetilde{\gamma}_1(Q(\widetilde{g}_2(\sigma))) = \widetilde{\gamma}_1(\widetilde{g}_2(\sigma)\widetilde{g}_2(\sigma)^t) = Q(\widetilde{g}_1\widetilde{g}_2(\sigma)).$$

Nun betrachten wir die Komplexifizierungen der Räume $\mathbb{S}^{2r-1}$ und $\mathbb{S}_1(\mathbb{C}^{r\times r}_{sym})$. Diese sind jeweils $\mathbb{C}^{r\times 1}\setminus\{0\} = \mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{S}^{2r-1}$ und $\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{r\times r}_{sym}) = \mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{S}_1(\mathbb{C}^{r\times r}_{sym})$. Da wir uns, demnächst in diesem Kapitel, ausschließlich mit $Z = \mathbb{C}^{r\times r}_{sym}$ beschäftigen werden, schreiben wir von nun an $\mathbb{S}_1 = \mathbb{S}_1(\mathbb{C}^{r\times r}_{sym})$ und $\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}} = \mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{r\times r}_{sym})$.
Auf $\mathbb{C}^{r\times 1*} = \mathbb{C}^{r\times 1}\setminus\{0\}$ haben wir das gewöhnliche Lebesgue Maß von $\mathbb{C}^{r\times 1}$ und auf $\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}$ (bis auf ein konstantes Vielfaches) sein Bildmaß unter Q: $d\mu(tu) = t^{r-1}dtdu$. Hier ist du das normalisierte K - invariante Maß. Wohlbekannt ist die Transformations-Formel

$$\int_{\mathbb{S}_1} f(\tilde{\gamma}(u))\left|\det\dot{\tilde{\gamma}}(u)\right| du = \int_{\mathbb{S}_1} f(v)dv.$$

4. Die Aktion – von $\mathrm{Sp}_{\mathfrak{B}}$ auf $\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}$

Wir betrachten nochmals die Abbildung

$$g : \mathbb{C}^{r\times 1}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}^{r\times 1}\setminus\{0\}\,, \quad g(\zeta) = g\cdot\zeta,$$

und schreiben $\zeta = s\sigma$, wobei $s\in\mathbb{R}_{>0}$ und $\sigma\in\mathbb{S}^{2r-1}$, für $\zeta\in\mathbb{C}^{r\times 1*}$. Ferner betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \zeta = s\sigma & \longmapsto & s^2\sigma\sigma^t = \zeta\zeta^t \\ \Big\downarrow & \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{r\times 1*} & \xrightarrow{Q} & \mathbb{S}_1^{\mathbb{C}} \\ {\scriptstyle \overline{g}}\Big\downarrow & & \\ \mathbb{C}^{r\times 1*} & \xrightarrow[Q]{} & \mathbb{S}_1^{\mathbb{C}} \end{array} & \\ \overline{g}\cdot\zeta = \overline{g}\cdot s\sigma = s\overline{g}\cdot\sigma & \longmapsto & s^2\overline{g}\cdot\sigma\overline{g}\cdot\sigma^t = s^2\tilde{\gamma}(\sigma\sigma^t)\left\|\overline{g}\cdot\sigma\right\|^2 \end{array}$$

und bezeichnen $\overline{\gamma}(tu) = s^2\overline{g}\cdot\zeta\overline{g}\cdot\zeta^t$, für $u = \zeta\zeta^t$ und $t = s^2$.
Die Abbildung

$$\overline{\gamma} : \mathbb{S}_1^{\mathbb{C}} \to \mathbb{S}_1^{\mathbb{C}},$$

die das obige Diagramm kommutativ macht, ist unabhängig von Q, wenn man zeigen kann, dass $\left\|\overline{g}\cdot\sigma\right\|^2$ nur von $\tilde{\gamma}$ und $\sigma\sigma^t$ abhängt. Dies ist auch der Fall, wie wir gleich beweisen werden:

Satz 4.1.

$$\left\|\overline{g}\cdot\sigma\right\|^2 = \left|\det\dot{\tilde{\gamma}}(\sigma\sigma^t)\right|^{-1/r}, \quad \forall\,\sigma\in\mathbb{S}^{2r-1}.$$

Daraus folgt unmittelbar das Hauptresultat dieses Teils:

Theorem 4.2. *Die Abbildung*

$$\overline{\gamma} : \mathbb{S}_1^{\mathbb{C}} \to \mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}, \quad tu \longmapsto t\left|\det\dot{\tilde{\gamma}}(u)\right|^{-1/r}\tilde{\gamma}(u), \quad u\in\mathbb{S}_1, t>0$$

ist wohl definiert und macht aus dem obigen Diagramm ein kommutierendes, das heißt

$$\overline{\gamma}(Q(s\sigma)) = Q(\overline{g}(s\sigma)), \quad s > 0, \sigma \in \mathbb{S}^{2r-1}.$$

Beweis: von Satz 4.1: Wir zeigen, dass dies für $\zeta = \xi_1$ gilt, und benutzen dann, ähnlich wie im vorherigen Lemma, die Transitivität der maximal kompakten Untergruppen $\mathrm{K}_{\mathfrak{P}}$ und $\mathrm{K}_{\mathfrak{B}}$ auf $\mathbb{S}^{2r-1}$, bzw. $\mathbb{S}_1$. Die Idee stammt natürlich aus der Rechnung im Falle $r = 1$, die einfach ist.
Allgemein gilt sie ähnlich, mit ein paar technischen Details.
Zuerst arbeiten wir mit der Parabolischen Untergruppe $\mathrm{P} \subset \mathrm{Sp}$

$$\mathrm{P} = \left\{ g \in \mathrm{Sp} : \widetilde{\gamma}(e_1) = e_1,\, \widetilde{\gamma} \text{ induziert durch } \gamma = c^{-1}gc \right\}$$

Erst dann betrachtet man beliebiges $g \in \mathrm{Sp}$ und definiert $\left|\det \dot{\widetilde{\gamma}}(u)\right|$. Die Parabolische Untergruppe kann wie folgt, beschrieben werden: Im Fall $r = 1$, ist $\widetilde{\gamma} = \gamma$ für jedes $\gamma \in \mathrm{Sp}_{\mathfrak{B}}$. Und $\gamma(1) = 1$ gilt genau dann, wenn $A - iC = A + iC$, also genau dann, wenn $C = 0$. Das heißt,

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 1/A \end{pmatrix}, \qquad \overline{g}\cdot 1 = A.$$

Hier ist das Cayley Bild von P in $\mathrm{Sp}_{\mathfrak{B}}$ der Stabilisator von 1, $\mathrm{Sp}_{\mathfrak{B}1} = c^{-1}\mathrm{P}c$.

$$\dot{\widetilde{\gamma}}(1)(\dot{u}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}(\dot{u}) = A^{-2}\dot{u}, \quad \text{also} \quad \left|\det \dot{\widetilde{\gamma}}(1)\right|^{-1} = \|\overline{g}\cdot 1\|^2$$

Man beschränkt sich vorerst auf die Parabolische Untergruppe, da in diesem Falle $\dot{\widetilde{\gamma}}(e_1) : T_{e_1}\mathbb{S}_1 \to T_{e_1}\mathbb{S}_1$, und somit $\det \dot{\widetilde{\gamma}}(e_1)$ definiert ist.
Für beliebiges r bestimmen wir zuerst die Parabolische Untergruppe:

$$\widetilde{\gamma}(e_1) = \frac{1}{\|[A - iC]^1\|^2}[A - iC]^1([A - iC]^1)^t = e_1$$

gilt genau dann, wenn die Matrix $g \in \mathrm{Sp}$ der Form

$$g = \begin{pmatrix} A_{11} & * & B_{11} & * \\ 0 & A_1 & * & B_1 \\ 0 & 0 & A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & C_1 & * & D_1 \end{pmatrix}$$

ist. Hier sind die 11- Einträge reelle Zahlen und die 1- Einträge $(r-1) \times (r-1)$ Matrizen. $*$ steht für Vektoren oder Covektoren des $\mathbb{R}^{r-1\times 1}$. Insbesondere ist dann die $2(r-1) \times 2(r-1)$ Matrix

$$g^1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$$

in $\mathrm{Sp}(2(r-1),\mathbb{R})$.
Sei ξ rein reell, dann ergibt $\widetilde{\gamma}(\xi\xi^t) = \frac{\overline{g}\cdot\xi\overline{g}\cdot\xi^t}{\|\overline{g}\cdot\xi\|^2}$, abgeleitet nach ξ in $\xi = \xi_1$

$$\dot{\widetilde{\gamma}}(e_1)(\dot{\xi}\xi_1^t + \xi_1\dot{\xi}^t) = \frac{\overline{g}\cdot\dot{\xi}\overline{g}\cdot\xi_1^t}{\|\overline{g}\cdot\xi_1\|^2} + \frac{\overline{g}\cdot\xi_1\overline{g}\cdot\dot{\xi}^t}{\|\overline{g}\cdot\xi_1\|^2} - e_1\left[\frac{<\overline{g}\cdot\dot{\xi}, \overline{g}\cdot\xi_1>}{\|\overline{g}\cdot\xi_1\|^2} + \frac{<\overline{g}\cdot\xi_1, \overline{g}\cdot\dot{\xi}>}{\|\overline{g}\cdot\xi_1\|^2}\right].$$

Nun nimmt man eine Basis des Tangentialraumes an e_1, zum Beispiel $\mathcal{B}_{e_1} = \{E_1, E_j, -iE_j\}$, $j = 2, \ldots, r$, mit

$$E_1 = -2ie_1, \quad E_j = \begin{pmatrix} 0 & (\xi_j')^t \\ \xi_j' & 0 \end{pmatrix},$$

hier sind $\xi_j' \in \mathbb{R}^{r-1\times 1}$, $(\xi_j')_k = \delta_{jk}, 1 \le j, k \le r-1$. Dies ist das Bild der Kanonischen Basis des $\mathbb{C}^{r\times 1}$, als $\mathbb{R}$–Vektorraum, unter der Abbildung $\zeta \mapsto \dot{\zeta}\xi_1^t + \xi_1\dot{\zeta}^t$.
Für $j \ge 2$ sind

$$\dot{\widetilde{\gamma}}(e_1)(E_j) = \frac{A_{11}}{|A_{11}|^2}\begin{pmatrix} 0 & ([A_1 - iC_1]^{j-1})^t \\ [A_1 - iC_1]^{j-1} & 0 \end{pmatrix},$$

und

$$\dot{\widetilde{\gamma}}(e_1)(-iE_j) = \frac{A_{11}}{|A_{11}|^2}\begin{pmatrix} 0 & ([B_1 - iD_1]^{j-1})^t \\ [B_1 - iD_1]^{j-1} & 0 \end{pmatrix},$$

und für E_1 gilt

$$\dot{\widetilde{\gamma}}(e_1)(E_1) = \frac{A_{11}}{|A_{11}|^2}\begin{pmatrix} 1/A_{11} & v^t \\ v & 0 \end{pmatrix}, \quad v = v(g) \in \mathbb{R}^{r-1\times 1}.$$

Die Matrixdarstellung von $\dot{\widetilde{\gamma}}(e_1)$ in der Basis $\mathcal{B}_{e_1}$ ist nun

$$[\dot{\widetilde{\gamma}}(e_1)]_{\mathfrak{B}_{e_1}} = \frac{A_{11}}{|A_{11}|^2}\begin{pmatrix} 1/A_{11} & 0 & 0 \\ Re(v) & A_1 & B_1 \\ -Im(v) & C_1 & D_1 \end{pmatrix}.$$

Dies gibt

$$\left|\det \dot{\widetilde{\gamma}}(e_1)\right| = \frac{1}{|A_{11}|^{2r}} = \|\overline{g}\cdot\xi_1\|^{-2r},$$

da symplektische Matrizen Determinante ± 1 haben. Für jedes r und jedes $g \in \mathrm{P}$, der Parabolischen Untergruppe von Sp, haben wir also gezeigt, dass

$$\left|\det \dot{\widetilde{\gamma}}(e_1)\right| = \frac{1}{\|\overline{g}\cdot\xi_1\|^{2r}}, \quad e_1 = \xi_1\xi_1^t = Q(\xi_1)$$

wobei $\gamma = c^{-1}gc \in \mathrm{Sp}_{\mathfrak{B}}$ das Bild von g via der Cayley Transformation ist.
Sei nun $g \in \mathrm{Sp}$ beliebig, dann existiert $k \in \mathrm{K}_{\mathfrak{B}}$, so dass $k(\widetilde{\gamma}(e_1)) = \widetilde{k\gamma}(e_1) = e_1$. Daraus folgt

$$\left|\det \dot{k}(\widetilde{\gamma}(e_1))\dot{\widetilde{\gamma}}(e_1)\right| = \frac{1}{\left\|\overline{k_o g}\cdot\xi_1\right\|^{2r}},$$

wobei $k_o \in \mathrm{K}$, das Urbild von $k \in \mathrm{K}_{\mathfrak{B}}$ ist. Da $\mathrm{K} \subset \mathrm{Sp}$ aus Isometrien besteht, und s_0 unitär ist, ist letzteres $1/\left\|\overline{g}\cdot\xi_1\right\|^{2r}$. Der Ausdruck links ist unabhängig von der Wahl von k, und sorgt lediglich dafür, dass $\dot{\widetilde{k\gamma}}$ ein Endomorphismus des Tangentialraumes an e_1 ist:
Da $\mathrm{K}_{\mathfrak{B}} \subset \mathrm{Sp}_{\mathfrak{B}}$ lineare, sogar unitäre Transformationen sind, ist $\dot{k} = k$.
Seien $k_1, k_2 \in \mathrm{K}_{\mathfrak{B}}$, so dass $k_j(\widetilde{\gamma}(e_1)) = e_1$, dann ist

$$\dot{\widetilde{k_1\gamma}} = k_1\dot{\widetilde{k_2^{-1}k_2\gamma}} = k_1k_2^{-1}\dot{\widetilde{k_2\gamma}},$$

und durch Unitarität von $k_1k_2^{-1}$ ist

$$\left|\det \dot{\widetilde{k_1\gamma}}(e_1)\right| = \left|\det \dot{\widetilde{k_2\gamma}}(e_1)\right|.$$

Wir können nun für allgemeines g definieren

$$\left|\det \dot{\widetilde{\gamma}}(e_1)\right| := \left|\det k(\widetilde{\gamma}(e_1))\dot{\widetilde{\gamma}}(e_1)\right|,$$

für $k \in \mathrm{K}_{\mathfrak{B}}$, mit $\widetilde{k\gamma}(e_1) = e_1$.
Seien nun $u \in \mathbb{S}_1$ und g beliebig. Es existieren $k_1, k_2 \in \mathrm{K}_{\mathfrak{B}}$, so dass $k_1(e_1) = u$ und $k_2\widetilde{\gamma}k_1(e_1) = e_1$, das heißt, $k_{2o}gk_{1o} \in \mathrm{P}$, der Parabolischen Untergruppe von Sp.
Wiederrum ist

$$\left|\det k_2(\widetilde{\gamma}(u))\dot{\widetilde{\gamma}}(u)k_1(e_1)\right|$$

unabhängig von der Wahl von k_1, k_2, und wir definieren

$$\left|\det \dot{\widetilde{\gamma}}(u)\right| := \left|\det k_2(\widetilde{\gamma}(u))\dot{\widetilde{\gamma}}(u)k_1(e_1)\right|,$$

für $u = k_1(e_1)$.
Dieser letzte Ausdruck ist

$$\left|\det k_2(\widetilde{\gamma}(u))\dot{\widetilde{\gamma}}(u)k_1(e_1)\right| = \frac{1}{\left\|(\overline{k_{2o}gk_{1o}})\cdot\xi_1\right\|^{2r}} = \frac{1}{\left\|(\overline{gk_{1o}})\cdot\xi_1\right\|^{2r}},$$

da k_{2o} normerhaltend ist. Wir haben $\left|\det \dot{\widetilde{\gamma}}(u)\right| = \frac{1}{\left\|(\overline{gk_{1o}})\cdot\xi_1\right\|^{2r}}$, und schreiben $\overline{k_{1o}}\cdot\xi_1 = \sigma$. Es bleibt zu zeigen, dass $Q(\sigma) = u$:
Dies ist durch die Kommutativität des Q-$\sim$ Diagramms gewährleistet.

$$\begin{tikzcd}
\xi_1 \arrow[r, mapsto, "Q"] \arrow[d, mapsto, "\widetilde{k_o}=k_o"'] & e_1 \arrow[d, mapsto, "\widetilde{k}=k"] \\
\overline{k}_o\cdot\xi_1 = \frac{\overline{k}_0\cdot\xi_1}{\left\|\overline{k}_o\cdot\xi_1\right\|} = \sigma \arrow[r, mapsto, "Q"'] & k(e_1) = u
\end{tikzcd}$$

□

Lemma 4.3. – *ist eine Aktion auf* $\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}$.

Beweis: Dies folgt aus der Kettenregel und beruht auf der Tatsache, dass $\sim$ eine Aktion auf $\mathbb{S}_1$ ist.

$$\overline{\gamma}_1\big(\overline{\gamma}_2(tu)\big) = \overline{\gamma}_1\big(t\left|\det \dot{\widetilde{\gamma}}_2(u)\right|^{-1/r}\widetilde{\gamma}_2(u)\big) =$$

$$= t\left|\det \dot{\widetilde{\gamma}}_2(u)\right|^{-1/r}\left|\det \dot{\widetilde{\gamma}}_1(\widetilde{\gamma}_2(u))\right|^{-1/r}\widetilde{\gamma}_1\big(\widetilde{\gamma}_2(u)\big) = t\left|\det \dot{\widetilde{\gamma_1\gamma_2}}(u)\right|^{-1/r}\widetilde{\gamma_1\gamma_2}(u) =$$

$$= \overline{\gamma_1\gamma_2}(u).$$

$\square$

5. Der Raum $L^2(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}})$

Sei

$$L^2(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}) = \left\{ f : \mathbb{S}_1^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}, \text{messbar}, \int_{\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}} |f|^2\, d\mu < \infty \right\},$$

wobei das Maß $d\mu(tu) = t^{r-1}dtdu$ ist. Als nächstes zeigen wir, dass das Maß $d\mu(tu) = t^{r-1}dtdu$ auf $\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}$, welches ein konstantes Vielfaches des Bildmaßes unter Q des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{C}^{r\times 1}$ist, invariant unter den Transformationen $\overline{\gamma}$ ist.
$L^2(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}})$ ist ein Hilbert Raum. Durch die Abbildung Q kann man jedes $f \in L^2(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}})$ mit einer (geraden) Funktion aus $L^2(\mathbb{C}^{r\times 1 *}) = L^2(\mathbb{C}^{r\times 1}) = L^2$ identifizieren.

$$\begin{array}{ccc} L^2_{even} & \xleftarrow{Q_*} & L^2(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}) \\ \\ f \circ Q & \longleftarrow & f \end{array}$$

Satz 5.1. *Die Transformation $\overline{\gamma}$ induziert eine Isometrie auf $L^2(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}})$.*

Beweis:

$$\int_{\mathbb{R}_{>0}}\int_{\mathbb{S}_1} |f(tu)|^2\, t^{r-1}dtdu = \int_{\mathbb{R}_{>0}}\int_{\mathbb{S}_1} |f\overline{\gamma}(sv)|^2\, s^{r-1}dsdv,$$

durch Koordinatenwechsel, da

$$t = s\left|\det \dot{\widetilde{\gamma}}(v)\right|^{-1/r}, \qquad u = \widetilde{\gamma}(v)$$

und

$$dt = ds\left|\det \dot{\widetilde{\gamma}}(v)\right|^{-1/r}, \qquad du = \left|\det \dot{\widetilde{\gamma}}(v)\right| dv.$$

Somit ist $t^{r-1}dtdu = s^{r-1}dsdv$.

$\square$

Wir haben also folgendes kommutierendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
f\circ Q\circ\overline{g} = f\circ\overline{\gamma}\circ Q & & & f\circ\overline{\gamma} \arrow[lll, mapsto] \\
& L^2 & L^2(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}) \arrow[l, "Q_*"'] & \\
& L^2 \arrow[u] & L^2(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}) \arrow[l, "Q_*"'] \arrow[u] & \\
f\circ Q \arrow[uuu, mapsto] & & & f \arrow[lll, mapsto] \arrow[uuu, mapsto]
\end{tikzcd}$$

Dies induziert die Darstellung der symplektischen Gruppe Sp als Isometrien des $L^2(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}})$:

Theorem 5.2.

$$\mathrm{Sp} \to \mathcal{B}(L^2(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}})), \qquad g \mapsto \pi[g] : \pi[g](f) = f \circ \overline{\gamma^{-1}},$$

mit $\gamma = c^{-1}gc$, ist eine Darstellung:

$$\pi[g_1 g_2] = \pi[g_1]\pi[g_2].$$

Beweis: Dies folgt aus dem Obigen.

□

6. Ausblicke und Verallgemeinerung

In diesem Abschnitt wird zunächst die $\sim$ - Operation der reellen symplektischen Gruppe definiert, und dann durch diese und die schon vorher betrachtete Quadratabbildung Q eine Formel für die $\sim$ - Operation auf den Tripotenten beliebigen Ranges gegeben. Im Anschluss wird grob ein Ansatz zur Weiterarbeit gegeben.

6.1. Die verallgemeinerte $\sim$ - Operation. Die Aktionen der symplektischen Gruppe Sp auf $\mathbb{S}^{2r-1}$ und $\mathbb{C}^{r\times 1}$ können auf die Einheitskugel von $\mathbb{C}^{r\times j}_{rg=j}$ und auf ganz $\mathbb{C}^{r\times j}_{rg=j}$ verallgemeinert werden. Sei

$$\mathbb{S} = \mathbb{C}^{r\times j}_{rg=j} \cap \left\{\zeta \in \mathbb{C}^{r\times j} : \zeta^*\zeta = 1\right\}$$

und sei $\mathbb{S}_j = \mathbb{S}_j(\mathbb{C}^{r\times r}_{sym})$, die Mannigfaltigkeit der Tripotenten des Ranges j in $\mathbb{C}^{r\times r}_{sym}$. Die Quadratabbildung

$$Q : \mathbb{S} \to \mathbb{S}_j, \qquad \zeta \mapsto \zeta\zeta^t$$

ist wohl definiert und surjektiv ($\zeta\zeta^t$ ist ein Tripotent, da $\zeta^*\zeta = 1$), und bijektiv wenn man sie auf dem Quotienten

$$\mathbb{S}/\mathrm{O}(\mathbb{R}^j) \to \mathbb{S}_j, \quad [\zeta] \mapsto \zeta\zeta^t$$

betrachtet. $\mathrm{O}(\mathbb{R}^j)$ steht für die reelle orthogonale Gruppe, und die Äquivalenzrelation ist

$$\zeta_1 \sim \zeta_2 \Longleftrightarrow \zeta_1 = \zeta_2 o \text{ für ein } o \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^j).$$

Bemerkung 6.1. Die reelle Dimension von $\mathbb{S}/\mathrm{O}(\mathbb{R}^j)$ ist

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{S}/\mathrm{O}(\mathbb{R}^j) = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{U}(\mathbb{C}^r)/\mathrm{U}(\mathbb{C}^{r-j}) - \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{O}(\mathbb{R}^j) = r^2 - (r-j)^2 - \frac{j(j-1)}{2} =$$

$$= \frac{j(j+1)}{2} + 2j(r-j) = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{S}_j,$$

da $\mathbb{S} \simeq \mathrm{U}(\mathbb{C}^r)/\mathrm{U}(\mathbb{C}^{r-j})$, den Isometrien $\mathbb{C}^j \to \mathbb{C}^r$, ist.

Im Falle $j = 1$ ist $\mathbb{S} = \mathbb{S}^{2r-1}$ und $\mathrm{O}(\mathbb{R}^j) = \{\pm 1\}$.

Wie auch im Falle $j = 1$ operiert Sp reell linear und Rang erhaltend auf $\mathbb{C}^{r\times j}$

$$g\cdot\zeta = A\xi + B\eta + i(C\xi + D\eta) \quad \text{für } g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

und $\zeta = \xi + i\eta$, mit $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{r\times j}$. Wir definieren nun eine Operation der symplektischen Gruppe auf $\mathbb{S}/\mathrm{O}(\mathbb{R}^j)$

$$\mathrm{Sp} \ltimes \mathbb{S}/\mathrm{O}(\mathbb{R}^j) \to \mathbb{S}/\mathrm{O}(\mathbb{R}^j),$$
$$g, [\zeta] \mapsto [\overline{g}\cdot\zeta(\overline{g}\cdot\zeta^*\overline{g}\cdot\zeta)^{-1/2}],$$

hier ist $\overline{g} = s_0 g s_0 \in \mathrm{Sp}$, mit s_0 der schon vorher betrachteten Spiegelung.

Diese Abbildung ist wohl definiert, da $\overline{g}\cdot(\zeta o) = (\overline{g}\cdot\zeta)o$ und

$$\overline{g}\cdot(\zeta o)((\overline{g}\cdot(\zeta o))^*\overline{g}\cdot(\zeta o))^{-1/2} = \overline{g}\cdot\zeta(\overline{g}\cdot\zeta^*\overline{g}\cdot\zeta)^{-1/2}o$$

für alle reellen Matrizen o, und

$$\big(\overline{g}\cdot\zeta(\overline{g}\cdot\zeta^*\overline{g}\cdot\zeta)^{-1/2}\big)^*\overline{g}\cdot\zeta(\overline{g}\cdot\zeta^*\overline{g}\cdot\zeta)^{-1/2} = 1.$$

Wir schreiben

$$\widetilde{g} : \mathbb{S}/\mathrm{O}(\mathbb{R}^j) \to \mathbb{S}/\mathrm{O}(\mathbb{R}^j), \quad [\zeta] \mapsto \widetilde{g}[\zeta],$$

mit

$$\widetilde{g}[\zeta] = [\overline{g}\cdot\zeta(\overline{g}\cdot\zeta^*\overline{g}\cdot\zeta)^{-1/2}].$$

Satz 6.2.

$$\sim : \mathrm{Sp} \ltimes \mathbb{S}/\mathrm{O}(\mathbb{R}^j) \to \mathbb{S}/\mathrm{O}(\mathbb{R}^j) \quad \big(g, [\zeta]\big) \mapsto \widetilde{g}[\zeta] = [\overline{g}\cdot\zeta(\overline{g}\cdot\zeta^*\overline{g}\cdot\zeta)^{-1/2}]$$

ist eine Aktion.

Folgende Nebenrechnung ist der Kern des Beweises:

Lemma 6.3. *Seien $g \in \mathrm{Sp}$ und $\zeta \in \mathbb{S}$, dann ist*

$$(\overline{g}\cdot\zeta^*\overline{g}\cdot\zeta)^{-1/2}$$

eine reelle (symmetrische) Matrix.

Beweis: Da $\zeta \in \mathbb{S}$, gilt $\zeta^*\zeta = 1$. Durch Umschreiben dieser Bedingung in ξ und η erhält man:

$$\zeta^*\zeta = (\xi^t - i\eta^t)(\xi + i\eta) = \xi^t\xi - i\eta^t\xi + i\xi^t\eta + \eta^t\eta.$$

Dies ziegt

$$\zeta^*\zeta = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \xi^t\xi + \eta^t\eta = 1 \,\text{und}\, \eta^t\xi = \xi^t\eta.$$

Nun zeigen wir, dass $(\overline{g}\cdot\zeta)^*(\overline{g}\cdot\zeta)$ eine reelle Matrix ist. Da

$$\overline{g}\cdot\zeta = \begin{pmatrix} A & -B \\ -C & D \end{pmatrix}\cdot\zeta = (A - iC)\xi + (-B + iD)\eta$$

ist

$$(\overline{g}\cdot\zeta)^*(\overline{g}\cdot\zeta) = \big(\xi^t(A^t + iC^t) + \eta^t(-B^t - iD^t)\big)\big((A - iC)\xi + (-B + iD)\eta\big) =$$
$$= \xi^t(A^tA + C^tC)\xi + \eta^t(B^tB + D^tD)\eta - \xi^t(A^tB + C^tD)\eta - \eta^t(B^tA + D^tC)\xi.$$

Durch Diagonalisierung ist

$$(\overline{g}\cdot\zeta^*\overline{g}\cdot\zeta)^{-1/2} \in \mathbb{R}^{j\times j}_{sym}.$$

□

Beweis: von Satz 6.2:
Es ist zu zeigen, dass

$$\widetilde{1} = 1 \quad \text{und} \quad \widetilde{hg} = \widetilde{h}\widetilde{g}$$

für $g, h \in \mathrm{Sp}$.

$$\widetilde{h}\widetilde{g}[\zeta] = [\overline{h}\cdot(\overline{g}\cdot\zeta(\overline{g}\cdot\zeta^*\overline{g}\cdot\zeta)^{-1/2})\cdot$$
$$\cdot\big((\overline{h}\cdot(\overline{g}\cdot\zeta(\overline{g}\cdot\zeta^*\overline{g}\cdot\zeta)^{-1/2}))^*\overline{h}\cdot(\overline{g}\cdot\zeta(\overline{g}\cdot\zeta^*\overline{g}\cdot\zeta)^{-1/2})\big)^{-1/2}] =$$
$$= [\overline{h}\cdot(\overline{g}\cdot\zeta)(\overline{g}\cdot\zeta^*\overline{g}\cdot\zeta)^{-1/2}\big((\overline{g}\cdot\zeta^*\overline{g}\cdot\zeta)^{-1/2}(\overline{h}\cdot\overline{g}\cdot\zeta)^*(\overline{h}\cdot\overline{g}\cdot\zeta)(\overline{g}\cdot\zeta^*\overline{g}\cdot\zeta)^{-1/2}\big)^{-1/2}] =$$
$$= [\overline{hg}\cdot\zeta(\overline{hg}\cdot\zeta^*\overline{hg}\cdot\zeta)^{-1/2}],$$

da

$$\overline{hg}\cdot\zeta(\overline{hg}\cdot\zeta^*\overline{hg}\cdot\zeta)^{-1/2}o =$$
$$= \overline{hg}\cdot\zeta(\overline{g}\cdot\zeta^*\overline{g}\cdot\zeta)^{-1/2}\big((\overline{g}\cdot\zeta^*\overline{g}\cdot\zeta)^{-1/2}(\overline{h}\cdot\overline{g}\cdot\zeta)^*(\overline{h}\cdot\overline{g}\cdot\zeta)(\overline{g}\cdot\zeta^*\overline{g}\cdot\zeta)^{-1/2}\big)^{-1/2}$$

mit

$$o := (\overline{hg}\zeta^*\overline{hg}\zeta)^{1/2}(\overline{g}\zeta^*\overline{g}\zeta)^{-1/2}\big((\overline{g}\zeta^*\overline{g}\zeta)^{-1/2}(\overline{h}\overline{g}\zeta)^*(\overline{h}\overline{g}\zeta)(\overline{g}\zeta^*\overline{g}\zeta)^{-1/2}\big)^{-1/2}$$

und $o \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^j)$: Das obige Lemma garantiert $o \in \mathbb{R}^{j\times j}$ und

$$oo^* = (\overline{hg}\cdot\zeta^*\overline{hg}\cdot\zeta)^{1/2}\cdot$$
$$\cdot(\overline{g}\cdot\zeta^*\overline{g}\cdot\zeta)^{-1/2}\big((\overline{g}\cdot\zeta^*\overline{g}\cdot\zeta)^{-1/2}(\overline{h}\overline{g}\cdot\zeta)^*(\overline{h}\overline{g}\cdot\zeta)(\overline{g}\cdot\zeta^*\overline{g}\cdot\zeta)^{-1/2}\big)^{-1}\cdot$$
$$\cdot(\overline{g}\cdot\zeta^*\overline{g}\cdot\zeta)^{-1/2}(\overline{hg}\cdot\zeta^*\overline{hg}\cdot\zeta)^{1/2} = 1.$$

□

6.2. Eine Formel für die $\sim$ - Operation auf Tripotenten. Nun wird, genauso wie im 1 dimensionalen Fall, die Operation von $\widetilde{\gamma}$ auf den Tripotenten des Ranges j betrachtet, und für

$$\xi_J = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad Q(\xi_J) = \xi_J \xi_J^t = e_J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit 1 jeweils der $j \times j$ Identitätsmatrix, ergibt sich auch ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
{[\xi_J]} \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] & & & \xi_J\xi_J^t = e_J \arrow[ddd, mapsto] \\
& \mathbb{S}/\mathrm{O}(\mathbb{R}^j) \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "\widetilde{g}"'] & \mathbb{S}_j(\mathbb{C}^{r\times r}_{sym}) \arrow[d, "\widetilde{\gamma}"] & \\
& \mathbb{S}/\mathrm{O}(\mathbb{R}^j) \arrow[r, "Q"'] & \mathbb{S}_j(\mathbb{C}^{r\times r}_{sym}) & \\
{[\overline{g}\cdot\xi_J(\overline{g}\cdot\xi_J^*\overline{g}\cdot\xi_J)^{-1/2}]} \arrow[rrr, mapsto] & & & \overline{g}\cdot\xi_J(\overline{g}\cdot\xi_J^*\overline{g}\cdot\xi_J)^{-1}(\overline{g}\cdot\xi_J)^t = \widetilde{\gamma}(e_J)
\end{tikzcd}$$

da sich auch in diesem Falle $\widetilde{\gamma}(e_J)$ leicht errechnen lässt. Die Gruppe $\mathrm{K} \subset \mathrm{Sp}$ operiert transitiv auf $\mathbb{S}/\mathrm{O}(\mathbb{R}^j)$ und die Kommutativität des obigen Diagrammes gilt für alle $[\zeta] \in \mathbb{S}/\mathrm{O}(\mathbb{R}^j)$. Dies gibt eine Formel für die $\sim$ - Operation auf den Tripotenten beliebigen Ranges:

Satz 6.4. *Seien $g \in \mathrm{Sp}$ und $\gamma = c^{-1}gc \in \mathrm{Sp}_{\mathfrak{B}}$ und die Quadratabbildung*

$$Q : \mathbb{S}/\mathrm{O}(\mathbb{R}^j) \to \mathbb{S}_j, \quad [\zeta] \mapsto \zeta\zeta^t.$$

Dann gilt für die induzierten Abbildungen $\widetilde{g} : \mathbb{S}/\mathrm{O}(\mathbb{R}^j) \to \mathbb{S}/\mathrm{O}(\mathbb{R}^j)$ und $\widetilde{\gamma} : \mathbb{S}_j \to \mathbb{S}_j$

$$\widetilde{\gamma} \circ Q = Q \circ \widetilde{g}.$$

Beweis: Sei $\zeta = \xi_J$. Durch die Quadratabbildung Q wird $[\xi_J]$ auf $e_J = \xi_J\xi_J^t$ abgebildet und $\gamma(e_J)$ ist eine symmetrische Matrix, die durch Polarzerlegung und im Anschluss Spektralzerlegung ihres Absolutanteils $|\gamma(e_J)| = (\gamma(e_J)^*\gamma(e_J))^{1/2}$, als $(j+(r-j))\times(j+(r-j))$ Blockmatrix

$$\gamma(e_J) = WU\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix}U^*, \tag{6.1}$$

mit $U \in \mathrm{U}(\mathbb{C}^r)$, geschrieben werden kann. Λ ist eine $(r-j)\times(r-j)$ Diagonalmatrix deren Einträge $1 > \lambda_{j+1} \geq \lambda_r \geq 0$ sind.
Da $\widetilde{\gamma}(e_J) = lim_{n\to\infty}\{\gamma(e_J), \gamma(e_J), \gamma(e_J)\}^n$ ist

$$\widetilde{\gamma}(e_J) = WU\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U^* = WUe_JU^*,$$

als $(j+(r-j))\times(j+(r-j))$ Blockmatrix. Die ersten j Spalten von $M = WU$ und U sind, genauso wie im Fall $j = 1$, durch die Formel 6.1

für $\gamma(e_J) = (\alpha e_J + \beta)(\overline{\beta} e_J + \overline{\alpha})^{-1}$ errechenbar:
Man geht genauso, bis auf ein paar technischen Feinheiten, wie im Falle $j = 1$ vor. Der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist durch die ersten j Spalten der Matrix $\overline{\alpha}+\overline{\beta}$ erzeugt. Da U unitär ist, ist eine Orthonormalbasis dieses Eigenraumes anzugeben. Durch Triangulation ist

$$U^1 \cdots U^j = \big([\overline{\alpha} + \overline{\beta}]^1 \cdots [\overline{\alpha} + \overline{\beta}]^j\big)T,$$

mit T einer invertierbaren $j \times j$ Matrix. Aus $U^*U = 1$, folgt $e_J U^* U e_J = e_J$, dies bedeuted für T

$$T^* \begin{pmatrix} ([\alpha + \beta]^1)^t \\ \vdots \\ ([\alpha + \beta]^j)^t \end{pmatrix} \big([\overline{\alpha} + \overline{\beta}]^1 \cdots [\overline{\alpha} + \overline{\beta}]^j\big)T =$$

$$= T^* R^* R T = 1, \tag{6.2}$$

mit $R \in \mathbb{C}^{r\times j}_{rg=j}$.
Die ersten j Spalten von M erhalten wir durch

$$M^1 \cdots M^j = \gamma(e_J) U^1 \cdots U^j.$$

Dies ist äquivalent zu

$$(e_J\beta^* + \alpha^*)M^1 \cdots M^j = (e_J\alpha^t + \beta^t)\big([\overline{\alpha} + \overline{\beta}]^1 \cdots [\overline{\alpha} + \overline{\beta}]^j\big)T =$$

$$= \begin{pmatrix} [\alpha^t + \beta^t]_1[\overline{\alpha} + \overline{\beta}]^1 & \cdots & [\alpha^t + \beta^t]_1[\overline{\alpha} + \overline{\beta}]^j \\ \vdots & & \vdots \\ [\alpha^t + \beta^t]_j[\overline{\alpha} + \overline{\beta}]^1 & \cdots & [\alpha^t + \beta^t]_j[\overline{\alpha} + \overline{\beta}]^j \\ [\beta^t]_{j+1}[\overline{\alpha} + \overline{\beta}]^1 & \cdots & [\beta^t]_{j+1}[\overline{\alpha} + \overline{\beta}]^j \\ \vdots & & \vdots \\ [\beta^t]_r[\overline{\alpha} + \overline{\beta}]^1 & \cdots & [\beta^t]_r[\overline{\alpha} + \overline{\beta}]^j \end{pmatrix} T.$$

Die symplektischen Bedingungen sind $\alpha^t\overline{\alpha} - \beta^*\beta = 1$ und $\beta^t\overline{\alpha} = \alpha^*\beta$, und man erhält

$$M^1 \cdots M^j = \big([\alpha + \beta]^1 \cdots [\alpha + \beta]^j\big)T.$$

Demzufolge ist

$$\widetilde{\gamma(e_J)} = M^1 \cdots M^j \begin{pmatrix} (\overline{U}^1)^t \\ \vdots \\ (\overline{U}^j)^t \end{pmatrix} =$$

$$= \big([\alpha + \beta]^1 \cdots [\alpha + \beta]^j\big)TT^* \begin{pmatrix} ([\alpha + \beta]^1)^t \\ \vdots \\ ([\alpha + \beta]^j)^t \end{pmatrix}.$$

Da T die Bedingung $TT^* = (RR^*)^{-1}$ erfüllt, mit R aus 6.2, und $\alpha+\beta = A - iC$ ist, gilt

$$\widetilde{\gamma(e_J)} = \overline{g}\cdot\xi_J(\overline{g}\cdot\xi_J^*\overline{g}\cdot\xi_J)^{-1}(\overline{g}\cdot\xi_J)^t.$$

Die Gruppe K operiert transitiv auf $\mathbb{S}/\mathrm{O}(\mathbb{R}^j)$, da ihre Wirkung $[\zeta] \mapsto [k\zeta]$ ist, und sie transitiv auf $\mathbb{S}$ ist, so folgt

$$\widetilde{\gamma} \circ Q = Q \circ \widetilde{g}$$

auf $\mathbb{S}/\mathrm{O}(\mathbb{R}^j)$.

□

Nun kommen wir zur Komplexifizierung von $\mathbb{S}/\mathrm{O}(\mathbb{R}^j)$ und $\mathbb{S}_j$:
Sei $\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{S}$, dann ist $\zeta^*\zeta = 1$ und aus dieser Bedingung folgt

$$(\xi^t, \eta^t) J \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = 0, \quad \text{mit der symplektischen Matrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Durch die Schreibweise

$$\zeta_{\mathbb{R}} := \binom{\xi}{\eta} \quad \text{ist dies} \quad \zeta_{\mathbb{R}}^t J \zeta_{\mathbb{R}} = 0.$$

So ist

$$\mathbb{S}^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^{r\times j}_{rg=j} \cap \left\{ \zeta \in \mathbb{C}^{r\times j} : \zeta_{\mathbb{R}}^t J \zeta_{\mathbb{R}} = 0 \right\}.$$

Wir definieren

$$\big(\mathbb{S}/\mathrm{O}(\mathbb{R}^j)\big)^{\mathbb{C}} := \mathbb{S}^{\mathbb{C}}/\mathrm{O}(\mathbb{R}^j).$$

$\big(\mathbb{S}/\mathrm{O}(\mathbb{R}^j)\big)^{\mathbb{C}}$ ist ein komplexer Raum, es gilt

$$\lambda \in \mathbb{C}, [\zeta] \in \big(\mathbb{S}/\mathrm{O}(\mathbb{R}^j)\big)^{\mathbb{C}} \Longrightarrow \lambda[\zeta] := [\lambda\zeta] \in \big(\mathbb{S}/\mathrm{O}(\mathbb{R}^j)\big)^{\mathbb{C}}.$$

Dies folgt aus der Produktregel, für $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$,

$$((\lambda_1 + i\lambda_2)\zeta)_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} \zeta_{\mathbb{R}}$$

mit λ_k in der Matrix für die Skalaren Matrizen $\lambda_k \cdot 1$, und durch

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) J = |\lambda|^2 J.$$

Sei $\mathbb{S}_j^{\mathbb{C}}$ die Komplexifizierung von $\mathbb{S}_j$.
Die Quadratabbildung

$$Q : \big(\mathbb{S}/\mathrm{O}(\mathbb{R}^j)\big)^{\mathbb{C}} \to \mathbb{S}_j^{\mathbb{C}}, \quad [\zeta] \mapsto \zeta\zeta^t$$

ist wohl definiert und bijektiv. Die reelle Dimension von $\big(\mathbb{S}/\mathrm{O}(\mathbb{R}^j)\big)^{\mathbb{C}}$ ist

$$\dim_{\mathbb{R}} \big(\mathbb{S}/\mathrm{O}(\mathbb{R}^j)\big)^{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{S}^{\mathbb{C}} - \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{O}(\mathbb{R}^j) =$$
$$= 2(r-j)j + j^2 + 1/2j(j+1) - 1/2j(j-1) = 2(r-j)j + (j+1)j.$$

Und $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{S}_j^{\mathbb{C}} = j(r-j) + 1/2j(j+1)$, so ist anzunehmen, dass dieser Ansatz der zu betrachtende für die Weiterarbeit ist.

Teil 3

Flache Zusammenhänge und die Bogoliubov-Transformation

KAPITEL 6

Der Zusammenhang des Hilbertraum-Bündels $\mathcal{H}^1(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}) \to \mathfrak{P}$

Es wird zuerst ein holomorphes Hilbertraum-Bündel $\mathcal{H} \to \mathfrak{P}$ und dessen (projektiv-flacher) Zusammenhang betrachtet. Neu ist, dass dieser im Falle $r = 1$ in der Einschränkung auf jede der Fasern als Summe von einem Toeplitz-Operator und einem Vielfachen des Euler-Operators gedeutet werden kann. Im Allgemeinen erhalten wir diese Aufspaltung, bis auf Projektion, auf den Fasern der Unterbündel $\mathcal{H}^1 \to \mathfrak{P}$ und $\mathcal{H}^1_{even} \to \mathfrak{P}$. Anschließend übertragen wir, mit Hilfe der Quadratabbildung Q, dieser Zusammenhang und die Operatoren auf das Bündel $\mathcal{H}^1(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}) \to \mathfrak{P}$ und zeigen, dass auch dort die entsprechende Zerlegung gilt. Somit erhalten wir einen projektiv-flachen Zusammenhang auf $\mathcal{H}^1(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}) \to \mathfrak{P}$. Schließlich bestimmen wir dessen Krümmung.

1. Die Hilbertraum-Bündel $\mathcal{H} \to \mathfrak{P}$ und $\mathcal{H}^1 \to \mathfrak{P}$

Wir betrachten wie in [**KW06**]

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} = \bigcup_{J\in\mathcal{J}} \mathcal{H}_J & & \mathcal{H}_J\ , \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathcal{J} & \ni & J \end{array}$$

ein holomorphes Hilbertraum-Bündel über $\mathcal{J}$ den positiven komplexen Strukturen welche kompatibel mit der standard symplektischen Form ω sind. Durch die Identifikation $\mathcal{J} \longleftrightarrow \mathfrak{P}$ die in Kapitel 1 angegeben wird, arbeitet man mit

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} = \bigcup_{\mathfrak{w}\in\mathfrak{P}} \mathcal{H}_{\mathfrak{w}} & & \mathcal{H}_{\mathfrak{w}}\ , \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathfrak{P} & \ni & \mathfrak{w} \end{array}$$

wobei die Faser über dem Basispunkt $\mathfrak{i} \in \mathfrak{P} = \left\{\mathfrak{w} \in \mathbb{C}^{r\times r}_{sym} : Im\mathfrak{w} > 0\right\}$

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{i}} = \mathcal{H}_{\mathfrak{i}}(\mathbb{C}^{r\times 1}) = \left\{f \in L^2(\mathbb{C}^{r\times 1}) : \nabla_{\overline{\zeta_{\mathfrak{i}}}} f = 0\right\},$$

mit $\nabla_{\zeta_{\mathfrak{i}}} = \frac{\partial}{\partial\zeta_{\mathfrak{i}}} - \frac{1}{2}\overline{\zeta_{\mathfrak{i}}}$ und $\nabla_{\overline{\zeta_{\mathfrak{i}}}} = \frac{\partial}{\partial\overline{\zeta_{\mathfrak{i}}}} + \frac{1}{2}\zeta_{\mathfrak{i}}$ ist. Die Funktionen oder polarisierten Schnitte in $\mathcal{H}_{\mathfrak{i}}$ sind somit der Form $f(\zeta_{\mathfrak{i}}) = \varphi(\zeta_{\mathfrak{i}})e^{-1/2|\zeta_{\mathfrak{i}}|^2}$, mit φ einer ganzen Funktion auf $\mathbb{C}^{r\times 1}$ und $\zeta_{\mathfrak{i}} = 1/\sqrt{2}(\xi + i\eta) = 1/\sqrt{2}\zeta$,

mit $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{r\times 1}, \zeta = \xi + i\eta$.
Die Bergman Projektion $P_{\mathfrak{i}} : L^2 \to \mathcal{H}_{\mathfrak{i}}$ ist:

$$f \mapsto P_{\mathfrak{i}}(f), \quad P_{\mathfrak{i}}(f)(\zeta_{\mathfrak{i}}) = e^{-1/2|\zeta_{\mathfrak{i}}|^2} \int_{\mathbb{C}^{r\times 1}} f(\zeta) e^{<\zeta_{\mathfrak{i}}|\zeta>} e^{-1/2|\zeta|^2} d\zeta.$$

Wir können nun, durch die Quadratabbildung Q, $\mathcal{H}_{\mathfrak{i}}(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}})$ und eine dazugehörige Projektion $P_{\mathfrak{i}}^Q$, definieren, so dass das wir ein kommutatives Diagramm haben:

$$\begin{array}{ccc} L^2_{even} & \xleftarrow{Q_*} & L^2(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}) \\ {\scriptstyle P_{\mathfrak{i}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P_{\mathfrak{i}}^Q} \\ \mathcal{H}_{\mathfrak{i}even} & \xleftarrow{Q_*} & \mathcal{H}_{\mathfrak{i}}(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}) \end{array}$$

hier sind

Definition 1.1. $\mathcal{H}_{\mathfrak{i}even}$ ist der Unterraum der geraden Funktionen in $\mathcal{H}_{\mathfrak{i}}$, das heißt der Funktionen dessen holomorpher Anteil eine gerade Funktion ist und

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{i}}(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}) : f \circ Q \in \mathcal{H}_{\mathfrak{i}even} \right\}.$$

Wir werden mit einem Unterraum von $\mathcal{H}_{\mathfrak{i}}(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}})$ arbeiten und zwar dem Raum $\mathcal{H}_{\mathfrak{i}}^1(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}})$, der aus quadrat-integrierbaren Funktionen, dessen Erzeuger der Form $e^{-1/2\mathrm{tr}(z_{\mathfrak{i}} z_{\mathfrak{i}}^*)^{1/2}} \mathrm{tr}(z_{\mathfrak{i}} a^*)^m$, mit $m \in \mathbb{N}_0$ und $a \in \mathbb{C}^{r\times r}_{sym}, rg(a) \leq 1$ sind, besteht:

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{i}}^1(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}) = \langle e^{-1/2\mathrm{tr}(z_{\mathfrak{i}} z_{\mathfrak{i}}^*)^{1/2}} \mathrm{tr}(z_{\mathfrak{i}} a^*)^m, a \in \mathbb{C}^{r\times r}_{sym}, rg(a) \leq 1, m \in \mathbb{N}_0 \rangle^- =$$

$$= \langle e^{-1/2\|z_{\mathfrak{i}}\|} \mathrm{tr}(z_{\mathfrak{i}} a^*)^m, a \in \mathbb{C}^{r\times r}_{sym}, rg(a) \leq 1, m \in \mathbb{N}_0 \rangle^- \subset \mathcal{H}_{\mathfrak{i}}(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}).$$

Sei

$$\mathcal{H}^1_{\mathfrak{i}\ even} = \langle \psi_b^{2m}(\zeta_{\mathfrak{i}}) =< \zeta_{\mathfrak{i}}|b >^{2m} e^{-1/2|\zeta_{\mathfrak{i}}|}, b \in \mathbb{C}^{r\times 1}, m \in \mathbb{N}_0 \rangle^-.$$

und $z_{\mathfrak{i}} = \zeta_{\mathfrak{i}} \zeta_{\mathfrak{i}}^t = 1/2 \zeta \zeta^t$. So ist das Bild eines Erzeugers $\mathrm{tr}(z_{\mathfrak{i}} a^*)^m e^{-1/2\|z_{\mathfrak{i}}\|}$ via Q_*

$$< \zeta_{\mathfrak{i}}|b >^{2m} e^{-1/2|\zeta_{\mathfrak{i}}|} \in \mathcal{H}^1_{\mathfrak{i}\ even} \quad \text{für} \quad a = bb^t.$$

Wir haben $Q_*(\mathcal{H}_{\mathfrak{i}}^1(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}})) = \mathcal{H}^1_{\mathfrak{i}\ even}$. Nun lässt sich die Bergman Projektion auf die rechte Seite des obigen diagrammes übertragen:
Das Diagramm soll kommutativ sein, so muss $P_{\mathfrak{i}}^Q(f) \circ Q = P_{\mathfrak{i}}(f \circ Q)$ gelten, und

$$P_{\mathfrak{i}}(f \circ Q)(\zeta_{\mathfrak{i}}) = e^{-1/2|\zeta_{\mathfrak{i}}|^2} \int_{\mathbb{C}^{r\times 1}} f \circ Q(\zeta) e^{<\zeta_{\mathfrak{i}}|\zeta>} e^{-1/2|\zeta|^2} d\zeta.$$

Da wir, durch die Abbildung Q, nur mit geraden Funktionen des L^2 arbeiten ist

$$P_{\mathfrak{i}}(f \circ Q)(\zeta_{\mathfrak{i}}) = e^{-1/2|\zeta_{\mathfrak{i}}|^2} \int_{\mathbb{C}^{r\times 1}} f \circ Q(\zeta) \frac{1}{2} (e^{<\zeta_{\mathfrak{i}}|\zeta>} + e^{-<\zeta_{\mathfrak{i}}|\zeta>}) e^{-1/2|\zeta|^2} d\zeta =$$

$$= e^{-1/2|\zeta_{\mathfrak{i}}|^2} \int_{\mathbb{C}^{r\times 1}} f \circ Q(\zeta) \cosh < \zeta_{\mathfrak{i}}|\zeta > e^{-1/2|\zeta|^2} d\zeta.$$

Durch die Potenzreihendarstellung des $\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ und dadurch, dass $< \zeta_{\mathfrak{i}}|\zeta >^2 = \mathrm{tr}(\mathrm{t}u_{\mathfrak{i}} s v^*)$, für $\mathrm{t}u_{\mathfrak{i}} = \zeta_{\mathfrak{i}}\zeta_{\mathfrak{i}}^t$ und $sv = \zeta\zeta^t$, mit $u_{\mathfrak{i}}, v \in \mathbb{S}_1, \mathrm{t}, s \in \mathbb{R}_{>0}$, erhält man nun

$$P_{\mathfrak{i}}^Q(f)(\mathrm{t}u_{\mathfrak{i}}) = e^{-\mathrm{t}/2} \int_{\mathbb{R}_{>0}} \int_{\mathbb{S}_1} f(sv) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{tr}(\mathrm{t}u_{\mathfrak{i}} s v^*)^n}{(2n)!} e^{-s/2} s^{r-1} ds dv.$$

Bemerkung 1.2. Sei $f \in \mathcal{H}_{\mathfrak{i}}^1(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}})$, dann ist $f \circ Q \in \mathcal{H}_{\mathfrak{i}_{even}}^1$, demzufolge gilt $P_{\mathfrak{i}}(f \circ Q) = f \circ Q$ und somit ist $P_{\mathfrak{i}}^Q(f) = f$.

Die Faser über einem Punkt $\mathfrak{w} \in \mathfrak{P}$ im Bündel $\mathcal{H} \to \mathfrak{P}$ ist $\mathcal{H}_{\mathfrak{w}}$

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{w}} = \mathcal{H}_{\mathfrak{w}}(\mathbb{C}^{r\times 1}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{C}^{r\times 1}) : \nabla_{\overline{\zeta}} f = 0, \zeta = \zeta_{\mathfrak{w}} \right\},$$

wobei $\zeta_{\mathfrak{w}} = 1/\sqrt{2} Im\mathfrak{w}^{-1/2}(\xi - \overline{\mathfrak{w}}\eta)$ ist. Genauso wie im Fall $\mathfrak{w} = \mathfrak{i}$ kann man die Form dieser Funktionen explizit angeben:

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{w}} = \left\{ \varphi(\zeta_{\mathfrak{w}}) e^{-1/2|\zeta_{\mathfrak{w}}|^2}, \quad \text{mit}\, \varphi \,\text{ganz} \right\}.$$

Die geraden Funktionen in $\mathcal{H}_{\mathfrak{w}}$ entsprechen den Funktionen dessen φ eine gerade Funktion ist.
Wie im Falle $\mathfrak{i} \in \mathfrak{P}$ definieren wir nun für $\mathfrak{w} \in \mathfrak{P}$

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{w}}(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}) : f \circ Q \in \mathcal{H}_{\mathfrak{w}even} \right\}$$

und

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{w}}^1(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}) = \langle e^{-1/2\|z_{\mathfrak{w}}\|} \mathrm{tr}(z_{\mathfrak{w}} a^*)^m, a \in \mathbb{C}_{sym}^{r\times r}, rg(a) \leq 1, m \in \mathbb{N}_0 \rangle^-,$$

mit $z_{\mathfrak{w}} = \zeta_{\mathfrak{w}}\zeta_{\mathfrak{w}}^t$ und analog zu $\mathcal{H}_{\mathfrak{i}\,even}^1$ sei

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{w}even}^1 = \langle \psi_b^{2m}(\zeta_{\mathfrak{w}}) =< \zeta_{\mathfrak{w}}|b >^{2m} e^{-1/2|\zeta_{\mathfrak{w}}|}, b \in \mathbb{C}^{r\times 1}, m \in \mathbb{N}_0 \langle^-.$$

Die Bergman Projektion von L_{even}^2 auf $\mathcal{H}_{\mathfrak{w}even}$ ist

$$f \mapsto P_{\mathfrak{w}}(f), \quad P_{\mathfrak{w}}(f)(\zeta_{\mathfrak{w}}) = e^{-1/2|\zeta_{\mathfrak{w}}|^2} \int_{\mathbb{C}^{r\times 1}} f(\zeta) \cosh < \zeta_{\mathfrak{w}}|\zeta > e^{-1/2|\zeta|^2} d\zeta$$

und hierduch können wir das Analogon auf der rechten Seite angeben:

$$\begin{tikzcd} L_{even}^2 \arrow[d, "P_{\mathfrak{w}}"'] & L^2(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}) \arrow[l, "Q_*"'] \arrow[d, "P_{\mathfrak{w}}^Q"] \\ \mathcal{H}_{\mathfrak{w}even} & \mathcal{H}_{\mathfrak{w}}(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}) \arrow[l, "Q_*"'] \end{tikzcd}$$

$$P_{\mathfrak{w}}^Q(f)(\mathrm{t}u_{\mathfrak{w}}) = e^{-\mathrm{t}/2} \int_{\mathbb{R}_{>0}} \int_{\mathbb{S}_1} f(sv) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{tr}(\mathrm{t}u_{\mathfrak{w}} s v^*)^n}{(2n)!} e^{-s/2} s^{r-1} ds dv,$$

für $z_{\mathfrak{w}} = \mathrm{t}u_{\mathfrak{w}}$.

Wir betrachten ein Unterbündel des Hilbertraum-Bündels $\mathcal{H} \to \mathfrak{P}$, genauer

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^1_{even} = \bigcup_{\mathfrak{w}\in\mathfrak{B}} \mathcal{H}^1_{\mathfrak{w}_{even}} & & \mathcal{H}^1_{\mathfrak{w}_{even}}\ , \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{B} & \ni & \mathfrak{w} \end{array}$$

und das Hilbertraum-Bündel

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^1(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}) = \bigcup_{\mathfrak{w}\in\mathfrak{P}} \mathcal{H}^1_{\mathfrak{w}}(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}) & & \mathcal{H}^1_{\mathfrak{w}}(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}})\ . \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{P} & \ni & \mathfrak{w} \end{array}$$

2. Der Zusammenhang des Bündels $\mathcal{H}^1_{even} \to \mathfrak{P}$

In den Arbeiten [**APW91**], [**KW06**], [**Wit**], [**Woo92**], [**Woo81**] wird ein projektiv-flacher Zusammenhang des Bündels $\mathcal{H} \to \mathfrak{P}$ angegeben. Dieser ist in ξ, η Koordinaten geschrieben

$$\nabla^{\mathcal{H}} = d + \frac{1}{4}(\nabla^t_\xi, \nabla^t_\eta)\frac{i}{2}\big[\begin{pmatrix} \mathfrak{w} \\ 1 \end{pmatrix} Im\mathfrak{w}^{-1} d\overline{\mathfrak{w}} Im\mathfrak{w}^{-1}(\mathfrak{w}, 1)\big]\begin{pmatrix} \nabla_\xi \\ \nabla_\eta \end{pmatrix},$$

wobei $\nabla_{\xi_j} = \frac{\partial}{\partial \xi_j} + \frac{i}{2}\eta_j$ und $\nabla_{\eta_j} = \frac{\partial}{\partial \eta_j} - \frac{i}{2}\xi_j$ sind. Der Zusammenhang hat in $\zeta = \zeta_{\mathfrak{w}}$ Koordinaten folgende Gestalt

$$\begin{aligned} \nabla^{\mathcal{H}} &= d - \frac{i}{4}\nabla^t_\zeta Im\mathfrak{w}^{-1/2} d(\overline{\mathfrak{w}}) Im\mathfrak{w}^{-1/2}\nabla_\zeta = \\ &= d - \frac{i}{4}(\frac{\partial}{\partial\zeta} - \frac{1}{2}\overline{\zeta})^t Im\mathfrak{w}^{-1/2} d(\overline{\mathfrak{w}}) Im\mathfrak{w}^{-1/2}(\frac{\partial}{\partial\zeta} - \frac{1}{2}\overline{\zeta}). \end{aligned}$$

Im Fall $r = 1$ kann man diesen Zusammenhang mit einer 1 Form auf $\mathfrak{P}$ mit Werten in schiefhermiteschen Operatoren auf den jeweiligen Fasern $\mathcal{H}_{\mathfrak{w}}$, die der Form „Toeplitz-Operator + Vielfaches vom Euler-Operator“ sind, deuten:
Die Faser $\mathcal{H}_{\mathfrak{w}}$ hat eine Basis $\left\{\psi^m_{\mathfrak{w}}(\zeta_{\mathfrak{w}}) = \frac{\zeta^m_{\mathfrak{w}}}{\sqrt{m!}} e^{-1/2|\zeta_{\mathfrak{w}}|^2}\right\}_{m\in\mathbb{N}_0}$, und wir haben eine Basis von Schnitten des Bündels $\mathcal{H} \to \mathfrak{P}$: $\{\psi^m_{\mathfrak{w}}\}_{m\in\mathbb{N}_0, \mathfrak{w}\in\mathfrak{P}}$. Der Zusammenhang $\nabla^{\mathcal{H}}|_{\mathcal{H}_{\mathfrak{w}}}$ hat in dieser Basis folgende Matrixdarstellung [**KW06**]

$$\begin{aligned} [\nabla^{\mathcal{H}}_{\dot{\mathfrak{w}}}|_{\mathcal{H}_{\mathfrak{w}}}]_{kl} = \frac{i}{4}(Im\mathfrak{w})^{-1}[(k\delta_{k,l} - \sqrt{(k+1)(k+2)}\delta_{k+2,l})\dot{\mathfrak{w}} + \\ +(k\delta_{k,l} - \sqrt{k(k-1)}\delta_{k-2,l})\dot{\mathfrak{w}}^*]. \end{aligned}$$

Satz 2.1. *Fall $r = 1$. Der Zusammenhang $\nabla^{\mathcal{H}}$ eingeschränkt auf die Faser $\mathcal{H}_{\mathfrak{w}}$ ist*

$$\nabla^{\mathcal{H}}_{\dot{\mathfrak{w}}}|_{\mathcal{H}_{\mathfrak{w}}} = (T_{\dot{\mathfrak{w}},\mathfrak{w}} + E_{\dot{\mathfrak{w}},\mathfrak{w}})|_{\mathcal{H}_{\mathfrak{w}}},$$

wobei

$$T_{\dot{\mathfrak{w}},\mathfrak{w}} : L^2 \to \mathcal{H}_{\mathfrak{w}}$$

der Toeplitz-Operator mit Symbol $-\frac{i}{4}(Im\mathfrak{w})^{-1}(\dot{\mathfrak{w}}\zeta_{\mathfrak{w}}^2 + \dot{\mathfrak{w}}^*\overline{\zeta}_{\mathfrak{w}}^2)$, *mit* $\dot{\mathfrak{w}} \in T_{\mathfrak{w}}(\mathfrak{P})$, *der Tangentialraum zu* $\mathfrak{P}$ *an* $\mathfrak{w}$, *und*

$$E_{\dot{\mathfrak{w}},\mathfrak{w}} : \mathcal{H}_{\mathfrak{w}} \to \mathcal{H}_{\mathfrak{w}}$$

ein, von $\dot{\mathfrak{w}}$ *abhängiges Vielfaches des Euler-Operators des holomorphen Anteils (auf* $\mathcal{H}_{\mathfrak{w}}$*) ist, welcher auf den Basiselementen* $\psi_{\mathfrak{w}}^m$ *wie folgt operiert*

$$E_{\dot{\mathfrak{w}},\mathfrak{w}}(\psi_{\mathfrak{w}}^m) = \frac{i}{4}(Im\mathfrak{w})^{-1}(\dot{\mathfrak{w}} + \dot{\mathfrak{w}}^*)m\psi_{\mathfrak{w}}^m.$$

$m \in \mathbb{N}_0$ *ist der Grad des holomorphen Anteils von* $\psi_{\mathfrak{w}}^m$.

Beweis: Die Matrixdarstellung der Operatoren stimmt auf der Basis $\{\psi_{\mathfrak{w}}^m(\zeta_{\mathfrak{w}})\}_{m\in\mathbb{N}_0}$ überein:

$$T_{\dot{\mathfrak{w}},\mathfrak{w}}(\psi_{\mathfrak{w}}^m) = -\frac{i}{4}(Im\mathfrak{w})^{-1}\dot{\mathfrak{w}}\zeta_{\mathfrak{w}}^2\psi_{\mathfrak{w}}^m(\zeta_{\mathfrak{w}}) - \frac{i}{4}(Im\mathfrak{w})^{-1}P(\dot{\mathfrak{w}}^*\overline{\zeta}_{\mathfrak{w}}^2\psi_{\mathfrak{w}}^m)(\zeta_{\mathfrak{w}}) =$$

$$= -\frac{i}{4}(Im\mathfrak{w})^{-1}(\dot{\mathfrak{w}}\sqrt{(m+1)(m+2)}\psi_{\mathfrak{w}}^{m+2} + \dot{\mathfrak{w}}^*\sqrt{k(k-1)}\psi_{\mathfrak{w}}^{m-2}),$$

für $m \geq 2$ und für $m = 0, 1$ ist

$$T_{\dot{\mathfrak{w}},\mathfrak{w}}(\psi_{\mathfrak{w}}^m) = -\frac{i}{4}(Im\mathfrak{w})^{-1}\dot{\mathfrak{w}}\sqrt{(m+1)(m+2)}\psi_{\mathfrak{w}}^{m+2}.$$

□

Wir schreiben

$$T_{\dot{\mathfrak{w}},\mathfrak{w}}(f)(\zeta_{\mathfrak{w}}) = P_{\mathfrak{w}}(-\frac{i}{4}(Im\mathfrak{w})^{-1}(\dot{\mathfrak{w}}\zeta_{\mathfrak{w}}^2 + \dot{\mathfrak{w}}^*\overline{\zeta}_{\mathfrak{w}}^2)f)(\zeta_{\mathfrak{w}}) =$$

$$= [T_{q(\dot{\mathfrak{w}}),\mathfrak{w}} - T^*_{q(\dot{\mathfrak{w}}),\mathfrak{w}}](f)(\zeta_{\mathfrak{w}}),$$

hier ist

$$T_{q(\dot{\mathfrak{w}}),\mathfrak{w}}f(\zeta_{\mathfrak{w}}) = P_{\mathfrak{w}}(-\frac{i}{4}(Im\mathfrak{w})^{-1}(\dot{\mathfrak{w}}\zeta_{\mathfrak{w}}^2)f)(\zeta_{\mathfrak{w}}).$$

Auf $\mathcal{H}_{\mathfrak{w}}$ eingeschränkt ist $T_{q(\dot{\mathfrak{w}}),\mathfrak{w}}$ der Multiplikationsoperator

$$T_{q(\dot{\mathfrak{w}}),\mathfrak{w}}f(\zeta_{\mathfrak{w}}) = -\frac{i}{4}(Im\mathfrak{w})^{-1}(\dot{\mathfrak{w}}\zeta_{\mathfrak{w}}^2)f(\zeta_{\mathfrak{w}})$$

und sogar ein Endomorphismus des $\mathcal{H}_{\mathfrak{w}even}$. Auch $E_{\dot{\mathfrak{w}},\mathfrak{w}}$ lässt $\mathcal{H}_{\mathfrak{w}even}$ invariant.
Für $\mathfrak{w} = \mathfrak{i}$ schreiben wir $T_{q(\dot{\mathfrak{w}}),\mathfrak{w}} = T_{q(\dot{\mathfrak{w}})}$, $T^*_{q(\dot{\mathfrak{w}}),\mathfrak{w}} = T^*_{q(\dot{\mathfrak{w}})}$ und $E_{\dot{\mathfrak{w}},\mathfrak{w}} = E_{\dot{\mathfrak{w}}}$, mit $\dot{\mathfrak{w}} \in T_{\mathfrak{i}}(\mathfrak{P})$.

Allgemein, für $r \geq 1$, ist es nicht genau der Euler-Operator, sondern eine getwistete Version von ihm und es gilt eine ähnliche Formel. Wir werden desweiteren die Toeplitz-Operatoren auf $\mathcal{H}^1_{\mathfrak{i}\,even}$, oder allgemein auf $\mathcal{H}^1_{\mathfrak{w}even}$ eingeschränkt betrachten:

Satz 2.2. *Der Zusammenhang $\nabla^{\mathcal{H}}$, eingeschränkt auf die Faser $\mathcal{H}^1_{\mathfrak{i}\ even}$, ist*

$$\nabla^{\mathcal{H}}_{X(\mathfrak{i})}|_{\mathcal{H}^1_{\mathfrak{i}\ even}} = [T_{q(X(\mathfrak{i}))} - T^*_{q(X(\mathfrak{i}))} + E_{X(\mathfrak{i})}]|_{\mathcal{H}^1_{\mathfrak{i}\ even}} \qquad X(\mathfrak{i}) \in T_{\mathfrak{i}}(\mathfrak{P}),$$

wobei $T_{q(X(\mathfrak{i}))}$ der Toeplitz-Operator mit polynomiellen Symbol

$$\frac{-i}{4} < \dot{\mathfrak{w}}\zeta_{\mathfrak{i}}|\overline{\zeta_{\mathfrak{i}}} >$$

das heißt, auf $\mathcal{H}_{\mathfrak{i}}$ ist es ein Multiplikationsoperator, $T^*_{q(X(\mathfrak{i}))}$ sein adjungierter, und $E_{X(\mathfrak{i})}$ auf einer typischen Funktion $< \zeta_{\mathfrak{i}}|b >^{2m} e^{-1/2|\zeta_{\mathfrak{i}}|^2} \in \mathcal{H}^1_{\mathfrak{i}\ even}$

$$< \zeta_{\mathfrak{i}}|b >^{2m} e^{-1/2|\zeta_{\mathfrak{i}}|^2} \quad \mapsto \quad \frac{i}{4} 2m < (X(\mathfrak{i}) + X(\mathfrak{i})^*)\zeta_{\mathfrak{i}}|b >< \zeta_{\mathfrak{i}}|b >^{2m-1} e^{-1/2|\zeta_{\mathfrak{i}}|^2}$$

also ein Ableitungsoperator (des holomorphen Anteiles der Funktion) mal einen von $X(\mathfrak{i})$ abhängigen Twist.

Bemerkung 2.3. Der adjungierte des Toeplitz-Operators ist ein Differentialoperator [**Upm83**], der eingeschränkt auf $\mathcal{H}^1_{\mathfrak{i}\ even}$

$$T^*_{q(X(\mathfrak{i}))}|_{\mathcal{H}^1_{\mathfrak{i}\ even}} : \mathcal{H}^1_{\mathfrak{i}\ even} \to \mathcal{H}_{\mathfrak{i}}$$

$$e^{-1/2|\zeta_{\mathfrak{i}}|^2} \mapsto 0, \quad \text{falls } m = 0$$

und für $m \geq 1$

$$< \zeta_{\mathfrak{i}}|b >^{2m} e^{-1/2|\zeta_{\mathfrak{i}}|^2} \mapsto \frac{i}{4} 2m(2m-1) < X(\mathfrak{i})\overline{b}|b >< \zeta_{\mathfrak{i}}|b >^{2m-2} e^{-1/2|\zeta_{\mathfrak{i}}|^2}$$

ist. $T^*_{q(X(\mathfrak{i}))}|_{\mathcal{H}^1_{\mathfrak{i}\ even}}$ ist eine Endomorphismus des $\mathcal{H}^1_{\mathfrak{i}\ even}$.

Um die kovariante Ableitung eines Schnittes errechnen zu können, bestimmen wir zunächst $\frac{\partial Im\mathfrak{w}^{-1/2}}{\partial \mathfrak{w}}$:

Lemma 2.4. *Sei $\mathfrak{w}_0 \in \mathfrak{P}$, dann lässt sich*

$$\frac{\partial Im\mathfrak{w}^{-1/2}}{\partial \mathfrak{w}}|_{\mathfrak{w}_0}$$

mit der Quadratischen Darstellung der Jordan Algebra $P(Im\mathfrak{w}^{-1/4}) = P^{-1}(Im\mathfrak{w}^{1/4})$ und des Inversen des Box Operators $Im\mathfrak{w}^{1/4} \Box Im\mathfrak{w}^{1/4}$ beschreiben:

$$\frac{\partial Im\mathfrak{w}^{-1/2}}{\partial \mathfrak{w}}|_{\mathfrak{w}_0} = \frac{i}{4} P^{-1}(Im\mathfrak{w}_0^{1/4})\big(P^{-1}(Im\mathfrak{w}_0^{1/4})(Im\mathfrak{w}_0^{1/4} \Box Im\mathfrak{w}_0^{1/4})^{-1}\big).$$

Beweis: Sei $\mathfrak{w} \in \mathfrak{P}$, dann ist $Im\mathfrak{w}$ diagonalisierbar und hat positive Eigenwerte, und man hat $Im\mathfrak{w} = \sum_{j=1}^r \lambda_j C E_{jj} C^t = \sum_{j=1}^r \lambda_j e_j$ und für $Im\mathfrak{w}^{-1/4}$ gilt

$$Im\mathfrak{w}^{-1/4} = \sum_{j=1}^r \lambda_j^{-1/4} e_j.$$

Mit diesem Jordan Triple Rahmen $e_1, \ldots, e_r$ betrachten wir die Peirce Zerlegung

$$Z = \bigcup_{j \geq k = 1, \ldots, r} Z_{jk}$$

und $\dot{\mathfrak{w}} \in T_{\mathfrak{w}}(\mathfrak{P})$ wird in dieser Zerlegung

$$\dot{\mathfrak{w}} = \sum_{j \geq k = 1, \ldots, r} \dot{\mathfrak{w}}^{jk}$$

geschrieben. Man erhält [**Loo77**]

$$Im\mathfrak{w}^{-1/4} \Box Im\mathfrak{w}^{-1/4} \dot{\mathfrak{w}}^{jk} = \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_k})\dot{\mathfrak{w}}^{jk}$$

und

$$P(Im\mathfrak{w}^{1/4})P(Im\mathfrak{w}^{1/4})\dot{\mathfrak{w}}^{jk} = \sqrt{\lambda_j \lambda_k}\dot{\mathfrak{w}}^{jk}.$$

Diese Operatoren sind also „diagonalisierbar“, mit positiven Eigenwerten.

Andererseits [**Ara90**] ist

$$\frac{\partial Im\mathfrak{w}^{-1/2}}{\partial Im\mathfrak{w}}(\dot{\mathfrak{w}}) = \sum_{j \geq k = 1, \ldots, r} \frac{\partial Im\mathfrak{w}^{-1/2}}{\partial Im\mathfrak{w}}(\dot{\mathfrak{w}}^{jk}) =$$

$$= \sum_{j \geq k = 1, \ldots, r} \sum_{l, m = 1, \ldots, r} e_l \dot{\mathfrak{w}}^{kj} e_m \frac{-1}{\sqrt{\lambda_m \lambda_l}(\sqrt{\lambda_l} + \sqrt{\lambda_m})} =$$

$$= \sum_{j \geq k = 1, \ldots, r} \frac{-1}{\sqrt{\lambda_j \lambda_k}(\sqrt{\lambda_j} + \sqrt{\lambda_k})}(\dot{\mathfrak{w}}^{jk})$$

im Punkt $\mathfrak{w}$, wobei $Im\mathfrak{w} = \sum_{j=1}^r \lambda_j e_j$ ist. Wir erhalten

$$-\frac{1}{2}P^{-1}(Im\mathfrak{w}^{1/4})\big(P^{-1}(Im\mathfrak{w}^{1/4})(Im\mathfrak{w}^{1/4} \Box Im\mathfrak{w}^{1/4})^{-1}\big)(\dot{\mathfrak{w}}) = \frac{\partial Im\mathfrak{w}^{-1/2}}{\partial Im\mathfrak{w}}(\dot{\mathfrak{w}}),$$

und das Lemma ist bewiesen.

$\Box$

Wir schreiben desweiteren

$$D_{\mathfrak{w}_0} := \frac{i}{4}P^{-1}(Im\mathfrak{w}_0^{1/4})\big(P^{-1}(Im\mathfrak{w}_0^{1/4})(Im\mathfrak{w}_0^{1/4} \Box Im\mathfrak{w}_0^{1/4})^{-1}\big)$$

und

$$\overline{D}_{\mathfrak{w}_0} := -\frac{\partial Im\mathfrak{w}^{-1/2}}{\partial \overline{\mathfrak{w}}}|_{\mathfrak{w}_0} =$$

$$= \frac{i}{4}P^{-1}(Im\mathfrak{w}_0^{1/4})\big(P^{-1}(Im\mathfrak{w}_0^{1/4})(Im\mathfrak{w}_0^{1/4} \Box Im\mathfrak{w}_0^{1/4})^{-1}\big) = -D_{\mathfrak{w}_0}$$

Beweis: von Satz 2.2: Wir betrachten einen typischen Schnitt

$$\psi^{2m}_{\mathfrak{w},b}(\zeta_{\mathfrak{w}}) =< \zeta_{\mathfrak{w}}|b >^{2m} e^{-1/2|\zeta_{\mathfrak{w}}|^2}, \quad \text{mit} \quad \zeta_{\mathfrak{w}} = \frac{1}{\sqrt{2}} Im\mathfrak{w}^{-1/2}(\xi - \overline{\mathfrak{w}}\eta).$$

d ist die Ableitung in $\mathfrak{w} \in \mathfrak{P}$, und man erhält

$$d\psi^{2m}_{\mathfrak{w},b}(\zeta_{\mathfrak{w}}) =< \zeta_{\mathfrak{w}}|b >^{2m-1} e^{-1/2|\zeta_{\mathfrak{w}}|^2}.$$

$$\Big[2m < \frac{\partial Im\mathfrak{w}^{-1/2}}{\partial \mathfrak{w}} d\mathfrak{w} Im\mathfrak{w}^{1/2}\zeta_{\mathfrak{w}}|b > +2m < \frac{\partial Im\mathfrak{w}^{-1/2}}{\partial \overline{\mathfrak{w}}} d\overline{\mathfrak{w}} Im\mathfrak{w}^{1/2}\zeta_{\mathfrak{w}}|b > +$$
$$+ im(< Im\mathfrak{w}^{-1/2}\zeta_{\mathfrak{w}}|d\mathfrak{w}Im\mathfrak{w}^{-1/2}b > - < Im\mathfrak{w}^{-1/2}\overline{\zeta}_{\mathfrak{w}}|d\mathfrak{w}Im\mathfrak{w}^{-1/2}b >) +$$
$$+ \frac{-i}{4}(< Im\mathfrak{w}^{-1/2}\zeta_{\mathfrak{w}}|d\overline{\mathfrak{w}}Im\mathfrak{w}^{-1/2}\overline{\zeta}_{\mathfrak{w}} > - < Im\mathfrak{w}^{-1/2}\overline{\zeta}_{\mathfrak{w}}|d\mathfrak{w}Im\mathfrak{w}^{-1/2}\zeta_{\mathfrak{w}}) < \zeta_{\mathfrak{w}}|b >\Big] =$$
$$= \Big[2m\big(< D_{\mathfrak{w}}(d\mathfrak{w})Im\mathfrak{w}^{1/2}\zeta_{\mathfrak{w}}|b > + < \overline{D_{\mathfrak{w}}}(d\overline{\mathfrak{w}})Im\mathfrak{w}^{1/2}\zeta_{\mathfrak{w}}|b >\big)+$$
$$+ im(< Im\mathfrak{w}^{-1/2}\zeta_{\mathfrak{w}}|d\mathfrak{w}Im\mathfrak{w}^{-1/2}b > - < Im\mathfrak{w}^{-1/2}\overline{\zeta}_{\mathfrak{w}}|d\mathfrak{w}Im\mathfrak{w}^{-1/2}b >)\Big]\psi^{2m-1}_{\mathfrak{w},b}(\zeta_{\mathfrak{w}})+$$
$$+\frac{-i}{4}\Big[< Im\mathfrak{w}^{-1/2}\zeta_{\mathfrak{w}}|d\overline{\mathfrak{w}}Im\mathfrak{w}^{-1/2}\overline{\zeta}_{\mathfrak{w}} > - < Im\mathfrak{w}^{-1/2}\overline{\zeta}_{\mathfrak{w}}|d\mathfrak{w}Im\mathfrak{w}^{-1/2}\zeta_{\mathfrak{w}}\Big]\psi^{2m}_{\mathfrak{w},b}(\zeta_{\mathfrak{w}}) =$$
$$= \Big[2m < D_{\mathfrak{w}}(d\mathfrak{w} - d\overline{\mathfrak{w}})Im\mathfrak{w}^{1/2}\zeta_{\mathfrak{w}}|b > +$$
$$+ im(< Im\mathfrak{w}^{-1/2}\zeta_{\mathfrak{w}}|d\mathfrak{w}Im\mathfrak{w}^{-1/2}b > - < Im\mathfrak{w}^{-1/2}\overline{\zeta}_{\mathfrak{w}}|d\mathfrak{w}Im\mathfrak{w}^{-1/2}b >)\Big]\psi^{2m-1}_{\mathfrak{w},b}(\zeta_{\mathfrak{w}})+$$
$$+\frac{-i}{4}\Big[< Im\mathfrak{w}^{-1/2}\zeta_{\mathfrak{w}}|d\overline{\mathfrak{w}}Im\mathfrak{w}^{-1/2}\overline{\zeta}_{\mathfrak{w}} > - < Im\mathfrak{w}^{-1/2}\overline{\zeta}_{\mathfrak{w}}|d\mathfrak{w}Im\mathfrak{w}^{-1/2}\zeta_{\mathfrak{w}}\Big]\psi^{2m}_{\mathfrak{w},b}(\zeta_{\mathfrak{w}}).$$

Im Spezialfall $\mathfrak{w} = \mathfrak{i}$ ist dies

$$d\psi^{2m}_{\mathfrak{i},b}(\zeta_{\mathfrak{i}}) = \frac{im}{2}(< \zeta_{\mathfrak{i}}|(d\mathfrak{w} + d\overline{\mathfrak{w}})b > -2 < \overline{\zeta}_{\mathfrak{i}}|d\mathfrak{w} b >)\psi^{2m-1}_{\mathfrak{w},b}(\zeta_{\mathfrak{i}}) +$$
$$+ \frac{-i}{4}(< \zeta^t_{\mathfrak{i}}|d\overline{\mathfrak{w}}\overline{\zeta}_{\mathfrak{i}} > - < \overline{\zeta}_{\mathfrak{i}}|d\mathfrak{w}\zeta_{\mathfrak{i}} >)\psi^{2m}_{\mathfrak{i},b}(\zeta_{\mathfrak{i}}),$$

da hier $Im\dot{\mathfrak{w}}^{-1/2} = \frac{-1}{2}Im\dot{\mathfrak{w}} = \frac{-1}{4i}\dot{\mathfrak{w}}$.

Die 1 - Form

$$\frac{1}{4}(\nabla^t_\xi, \nabla^t_\eta)\frac{i}{2}\Big[\begin{pmatrix} \mathfrak{w} \\ 1 \end{pmatrix} Im\mathfrak{w}^{-1}d\overline{\mathfrak{w}}Im\mathfrak{w}^{-1}(\mathfrak{w}, 1)\Big]\begin{pmatrix} \nabla_\xi \\ \nabla_\eta \end{pmatrix}$$

angewandt auf $\psi^{2m}_{\mathfrak{w},b}(\zeta_{\mathfrak{w}}) =< \zeta_{\mathfrak{w}}|b >^{2m} e^{-1/2|\zeta_{\mathfrak{w}}|^2}$ ergibt

$$\frac{-i}{4}2m(2m-1) < Im\mathfrak{w}^{-1/2}\overline{b}|d\mathfrak{w}Im\mathfrak{w}^{-1/2}b > \psi^{2m-2}_{\mathfrak{w},b}(\zeta_{\mathfrak{w}}) +$$
$$+ im < Im\mathfrak{w}^{-1/2}\overline{b}|d\mathfrak{w}Im\mathfrak{w}^{-1/2}\zeta_{\mathfrak{w}} > \psi^{2m-1}_{\mathfrak{w},b}(\zeta_{\mathfrak{w}}) +$$
$$- \frac{i}{4} < Im\mathfrak{w}^{-1/2}\overline{\zeta}_{\mathfrak{w}}|d\mathfrak{w}Im\mathfrak{w}^{-1/2}\zeta_{\mathfrak{w}} > \psi^{2m}_{\mathfrak{w},b}(\zeta_{\mathfrak{w}}).$$

Dies erhält man durch Ausrechnen. Somit ist

$$\nabla^{\mathcal{H}}\psi^m_{\mathfrak{w},b}(\zeta_{\mathfrak{w}}) =$$
$$= \Big[2m < D_{\mathfrak{w}}(d\mathfrak{w} - d\overline{\mathfrak{w}})Im\mathfrak{w}^{1/2}\zeta_{\mathfrak{w}}|b > +$$
$$+ im < Im\mathfrak{w}^{-1/2}\zeta_{\mathfrak{w}}|d\mathfrak{w}Im\mathfrak{w}^{-1/2}b >\Big]\psi^{2m-1}_{\mathfrak{w},b}(\zeta_{\mathfrak{w}}) +$$
$$- \frac{i}{4} < Im\mathfrak{w}^{-1/2}\zeta_{\mathfrak{w}}|d\overline{\mathfrak{w}}Im\mathfrak{w}^{-1/2}\overline{\zeta}_{\mathfrak{w}} > \psi^{2m}_{\mathfrak{w},b}(\zeta_{\mathfrak{w}}) +$$

$$-\frac{i}{4}2m(2m-1) < Im\mathfrak{w}^{-1/2}\overline{b}|d\mathfrak{w}Im\mathfrak{w}^{-1/2}b > \psi^{2m-2}_{\mathfrak{w},b}(\zeta_{\mathfrak{w}}).$$

Im Falle $\mathfrak{w} = \mathfrak{i}$, gilt demzufolge für $\psi^{2m}_{\mathfrak{i},b} =< \zeta_{\mathfrak{i}}|b >^{2m} e^{-1/2|\zeta_{\mathfrak{i}}|^2}$

$$\nabla^{\mathcal{H}}_{\dot{\mathfrak{w}}}\psi^{2m}_{\mathfrak{i},b} = \frac{im}{2} < \zeta_{\mathfrak{i}}|(\dot{\mathfrak{w}} + \dot{\mathfrak{w}}^*)b > \psi^{2m-1}_{\mathfrak{i},b} +$$

$$-\frac{i}{4} < \zeta_{\mathfrak{i}}|\dot{\mathfrak{w}}^*\overline{\zeta}_{\mathfrak{i}} > \psi^{2m}_{\mathfrak{i},b} - \frac{i}{4}2m(2m-1) < \overline{b}|\dot{\mathfrak{w}}b > \psi^{2m-2}_{\mathfrak{i},b} =$$

$$= (E_{\dot{\mathfrak{w}}} + T_{q(\dot{\mathfrak{w}})} - T^*_{q(\dot{\mathfrak{w}})})\psi^{2m}_{\mathfrak{i},b},$$

für $\dot{\mathfrak{w}} \in T_{\mathfrak{i}}(\mathfrak{P})$.

□

Satz 2.5. *Sei P^1 der Projektionsoperator der auf jeder Faser $\mathcal{H}_{\mathfrak{w}\,even}$ die orthogonale Projektion auf $\mathcal{H}^1_{\mathfrak{w}\,even}$ ist*

$$P^1 : \mathcal{H}_{\mathfrak{w}\,even} \to \mathcal{H}^1_{\mathfrak{w}\,even}.$$

Dann ist

$$\nabla^{\mathcal{H}^1_{even}} := P^1[\nabla^{\mathcal{H}}|_{\mathcal{H}^1_{even}}]$$

ein Zusammenhang auf $\mathcal{H}^1_{even} \to \mathfrak{P}$, der auf jeder Faser $\mathcal{H}^1_{\mathfrak{w}\,even}$

$$\nabla^{\mathcal{H}^1_{even}}|_{\mathcal{H}^1_{\mathfrak{w}\,even}} = P^1[\nabla^{\mathcal{H}}|_{\mathcal{H}^1_{\mathfrak{w}\,even}}]$$

ist. Insbesondere gilt für $\mathfrak{w} = \mathfrak{i}$

$$\nabla^{\mathcal{H}^1_{even}}_{X(\mathfrak{i})}|_{\mathcal{H}^1_{\mathfrak{i}\,even}} := P^1[(T_{q(X(\mathfrak{i}))} - T^*_{q(X(\mathfrak{i}))} + E_{X(\mathfrak{i})})|_{\mathcal{H}^1_{\mathfrak{i}\,even}}]$$

für $X(\mathfrak{i}) \in T_{\mathfrak{i}}(\mathfrak{P})$.

Beweis: P^1 erhält die $\mathcal{C}^\infty$-Linearität und die Leibnizregel. Aus dem vorherigen Satz folgt die Formel.

□

Bemerkung 2.6. Der Zusammenhang ist nicht Null.
Für $\psi^{2m}_{\mathfrak{i},b} =< \zeta_{\mathfrak{i}}|b >^{2m} e^{-1/2|\zeta_{\mathfrak{i}}|^2}$ haben wir durch die Errechnungen

$$\nabla^{\mathcal{H}^1_{even}}_{\dot{\mathfrak{w}}}|_{\mathcal{H}^1_{\mathfrak{i}\,even}}\psi^{2m}_{\mathfrak{i},b} =$$

$$= P^1[\frac{im}{2} < \zeta_{\mathfrak{i}}|(\dot{\mathfrak{w}} + \dot{\mathfrak{w}}^*)b > \psi^{2m-1}_{\mathfrak{i},b} +$$

$$-\frac{i}{4} < \dot{\mathfrak{w}}\zeta_{\mathfrak{i}}|\overline{\zeta}_{\mathfrak{i}} > \psi^{2m}_{\mathfrak{i},b} +$$

$$-\frac{i}{4}2m(2m-1) < \overline{b}|\dot{\mathfrak{w}}b > \psi^{2(m-1)}_{\mathfrak{i},b}]$$

erhalten. Der letzte Summand ist

$$T^*_{q(\dot{\mathfrak{w}})}\psi^{2m}_{\mathfrak{i},b} = \frac{i}{4}2m(2m-1) < \overline{b}|\dot{\mathfrak{w}}b > \psi^{2(m-1)}_{\mathfrak{i},b} \in \mathcal{H}^1_{\mathfrak{i}\,even}$$

und, zum Beispiel im Falle, dass b ein Eigenvektor von $\dot{\mathfrak{w}} + \dot{\mathfrak{w}}^*$ ist, oder dass $\dot{\mathfrak{w}}$ eine skalare Matrix ist, ist auch $E_{\dot{\mathfrak{w}}}\psi^{2m}_{\mathfrak{i},b} \in \mathcal{H}^1_{\mathfrak{i}\,even}$.
Da $< \dot{\mathfrak{w}}\zeta_{\mathfrak{i}}|\overline{\zeta}_{\mathfrak{i}} > \psi^{2m}_{\mathfrak{i},b}$ homogen des Grades $2m+2$ ist, ist auch $P^1[< \dot{\mathfrak{w}}\zeta_{\mathfrak{i}}|\overline{\zeta}_{\mathfrak{i}} > \psi^{2m}_{\mathfrak{i},b}]$ homogen des Grades $2m+2$. Demzufolge ist der Zusammenhang nicht Null.
Man kann aber auch konkret $\nabla^{\mathcal{H}^1_{even}}_{\dot{\mathfrak{w}}}|_{\mathcal{H}^1_{\mathfrak{i}\,even}}\psi^0_{\mathfrak{i}}$ errechnen, und dies ist

$$\nabla^{\mathcal{H}^1_{even}}_{\dot{\mathfrak{w}}}|_{\mathcal{H}^1_{\mathfrak{i}\,even}}\psi^0_{\mathfrak{i}} = -\frac{i}{4}\sum_{j,k=1}^{r}\frac{1}{4}[\dot{\mathfrak{w}}]_{jk}(\psi^2_{\mathfrak{i},\xi_j+\xi_k} - \psi^2_{\mathfrak{i},\xi_j+\xi_k}) \neq 0,$$

mit $[\xi_j]_k = \delta_{jk}$.

Nun kommen wir zum Allgemeinen Fall ($r \geq 1, \mathfrak{w} \in \mathfrak{P}$)

Satz 2.7. *Seien $E_{\dot{\mathfrak{w}},\mathfrak{w}}, T_{q(\dot{\mathfrak{w}}),\mathfrak{w}}$ und $T^*_{q(\dot{\mathfrak{w}}),\mathfrak{w}}$ die Operatoren*

$$E_{\dot{\mathfrak{w}},\mathfrak{w}} : \mathcal{H}^1_{\mathfrak{w}\,even} \to \mathcal{H}_{\mathfrak{w}\,even}$$

$$\begin{aligned} E_{\dot{\mathfrak{w}},\mathfrak{w}}\big(\psi^{2m}_{\mathfrak{w},b}\big)(\zeta_{\mathfrak{w}}) &= \big[2m\big(< D_{\mathfrak{w}}(\dot{\mathfrak{w}} - \dot{\mathfrak{w}}^*)Im\mathfrak{w}^{1/2}\zeta_{\mathfrak{w}}|b > + \\ &+ im < Im\mathfrak{w}^{-1/2}\zeta_{\mathfrak{w}}|\dot{\mathfrak{w}}Im\mathfrak{w}^{-1/2}b >\big)\big]\psi^{2m-1}_{\mathfrak{w},b}(\zeta_{\mathfrak{w}}) = \\ &= m < (2D_{\mathfrak{w}}(\dot{\mathfrak{w}} - \dot{\mathfrak{w}}^*)Im\mathfrak{w}^{1/2} + Im\mathfrak{w}^{-1/2}\dot{\mathfrak{w}}^*Im\mathfrak{w}^{-1/2})\zeta_{\mathfrak{w}}|b >, \end{aligned}$$

$$T_{q(\dot{\mathfrak{w}}),\mathfrak{w}} : \mathcal{H}_{\mathfrak{w}} \to \mathcal{H}_{\mathfrak{w}}$$

$$\begin{aligned} T_{q(\dot{\mathfrak{w}}),\mathfrak{w}}(\psi) &= -\frac{i}{4} < Im\mathfrak{w}^{-1/2}\zeta_{\mathfrak{w}}|\dot{\mathfrak{w}}^*Im\mathfrak{w}^{-1/2}\overline{\zeta}_{\mathfrak{w}} > \psi = \\ &= -\frac{i}{4}\mathrm{tr}(Im\mathfrak{w}^{-1/2}\dot{\mathfrak{w}}Im\mathfrak{w}^{-1/2}\zeta_{\mathfrak{w}}\zeta^t_{\mathfrak{w}})\psi \end{aligned}$$

und $T^*_{q(\dot{\mathfrak{w}}),\mathfrak{w}}$, der Adjungierte von $T_{q(\dot{\mathfrak{w}}),\mathfrak{w}}$, welcher eingeschränkt auf $\mathcal{H}^1_{\mathfrak{w}even}$ ein Differentialoperator ist, $\mathcal{H}^1_{\mathfrak{w}even}$ invariant lässt und auf Erzeugern wie folgt operiert

$$T^*_{q(\dot{\mathfrak{w}}),\mathfrak{w}} : \mathcal{H}^1_{\mathfrak{w}\,even} \to \mathcal{H}^1_{\mathfrak{w}\,even},$$

$$\begin{aligned} \psi^{2m}_{\mathfrak{w},b} &\mapsto \frac{i}{4}2m(2m-1) < Im\mathfrak{w}^{-1/2}\overline{b}|\dot{\mathfrak{w}}Im\mathfrak{w}^{-1/2}b > \psi^{2(m-1)}_{\mathfrak{w},b}(\zeta_{\mathfrak{w}}) = \\ &= \frac{i}{4}2m(2m-1)\mathrm{tr}(Im\mathfrak{w}^{-1/2}\dot{\mathfrak{w}}^*Im\mathfrak{w}^{-1/2}\overline{b}b^*)\psi^{2(m-1)}_{\mathfrak{w},b}(\zeta_{\mathfrak{w}}). \end{aligned}$$

Dann gilt genauso wie im Falle $\mathfrak{w} = \mathfrak{i}$ die Aufspaltung des Zusammenhanges des Bündels $\mathcal{H}^1_{even} \to \mathfrak{P}$, eingeschränkt auf jede der Fasern $\mathcal{H}^1_{\mathfrak{w}even}$

$$\nabla^{\mathcal{H}^1_{even}}_{\dot{\mathfrak{w}}}|_{\mathcal{H}^1_{\mathfrak{w}even}} = P^1[(T_{q(\dot{\mathfrak{w}}),\mathfrak{w}} - T^*_{q(\dot{\mathfrak{w}}),\mathfrak{w}} + E_{\dot{\mathfrak{w}},\mathfrak{w}})|_{\mathcal{H}^1_{\mathfrak{w}even}}],$$

mit P^1 der Projektion von $\mathcal{H}_{\mathfrak{w}even}$ auf $\mathcal{H}^1_{\mathfrak{w}even}$.

Beweis: Dies wurde in den Beweisen der Sätze 2.2 und 2.5 gezeigt.

□

Dies lässt sich nun via der Quadratabbildung Q, und mit $P^Q_{\mathfrak{w}}$ auf $L^2(\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_1)$ übertragen:

$$\begin{array}{ccc} L^2_{even} & \xleftarrow{Q_*} & L^2(\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_1) \\ \downarrow{\scriptstyle T_{q(\dot{\mathfrak{w}}),\mathfrak{w}}} & & \downarrow{\scriptstyle T_{l(\dot{\mathfrak{w}}),\mathfrak{w}}} \\ \mathcal{H}_{\mathfrak{w}\,even} & \xleftarrow{Q_*} & \mathcal{H}_{\mathfrak{w}}(\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_1) \end{array},$$

dabei ist, im Falle $r = 1$

$$T_{l(\dot{\mathfrak{w}}),\mathfrak{w}}(f)(tu_{\mathfrak{w}}) = P^Q_{\mathfrak{w}}(\frac{-i}{4}(Im\mathfrak{w})^{-1}\dot{\mathfrak{w}}z_{\mathfrak{w}}f)(tu_{\mathfrak{w}}),$$

und $T_{l(\dot{\mathfrak{w}}),\mathfrak{w}}$ ist auf $\mathcal{H}_{\mathfrak{w}}(\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_1)$ eingeschränkt der Multiplikationsoperator mit Symbol $\frac{-i}{4}(Im\mathfrak{w})^{-1}\dot{\mathfrak{w}}z_{\mathfrak{w}}$.
Und generell, ist

$$T_{l(\dot{\mathfrak{w}}),\mathfrak{w}}(f)(tu_{\mathfrak{w}}) = P^Q_{\mathfrak{w}}(-\frac{i}{4}\mathrm{tr}(Im\mathfrak{w}^{-1/2}\dot{\mathfrak{w}}Im\mathfrak{w}^{-1/2}z_{\mathfrak{w}})f)(tu_{\mathfrak{w}}).$$

Also ist $T_{l(\dot{\mathfrak{w}}),\mathfrak{w}}$ ist auf $\mathcal{H}_{\mathfrak{w}}(\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_1)$ eingeschränkt der Multiplikationsoperator mit Symbol $-\frac{i}{4}\mathrm{tr}(Im\mathfrak{w}^{-1/2}\dot{\mathfrak{w}}Im\mathfrak{w}^{-1/2}z_{\mathfrak{w}})$.

Der Adjungierte des Toeplitz-Operators $T_{l(\dot{\mathfrak{w}}),\mathfrak{w}}$ ist tatsächlich der Übertrag des Operators $T^*_{q(\dot{\mathfrak{w}}),\mathfrak{w}}$ via der Quadratabbildung Q, da

$$< T_{l(\dot{\mathfrak{w}}),\mathfrak{w}}(f)\circ Q|g\circ Q >=< T_{q(\dot{\mathfrak{w}}),\mathfrak{w}}(f\circ Q)|g\circ Q >=$$
$$=< f\circ Q|T^*_{q(\dot{\mathfrak{w}}),\mathfrak{w}}(g\circ Q) >=$$
$$=< f\circ Q|P_{\mathfrak{w}}(\frac{i}{4} < Im\mathfrak{w}^{-1/2}\overline{\zeta}_{\mathfrak{w}}|\dot{\mathfrak{w}}Im\mathfrak{w}^{-1/2}\zeta_{\mathfrak{w}} > (g\circ Q)) >=$$
$$=< f\circ Q|P^Q_{\mathfrak{w}}(\frac{i}{4}\mathrm{tr}(Im\mathfrak{w}^{-1/2}\dot{\mathfrak{w}}^*Im\mathfrak{w}^{-1/2}\overline{z}_{\mathfrak{w}})g)\circ Q > .$$

Das heißt, dass Adjungieren mit dem Übertrag via Q kommutieren. Es gilt außerdem, für $m \geq 1$

$$T^*_{l(\dot{\mathfrak{w}}),\mathfrak{w}}(\mathrm{tr}(z_{\mathfrak{w}}a^*)^m e^{-1/2|z_{\mathfrak{w}}|})(z_{\mathfrak{w}}) =$$
$$= \frac{i}{4}2m(2m-1)\mathrm{tr}(Im\mathfrak{w}^{-1/2}\dot{\mathfrak{w}}^*Im\mathfrak{w}^{-1/2}a^*)\mathrm{tr}(z_{\mathfrak{w}}a^*)^{m-1}e^{-1/2|z_{\mathfrak{w}}|}$$

und für $m = 0$ ist

$$T^*_{l(\dot{\mathfrak{w}}),\mathfrak{w}}(e^{-1/2|z_{\mathfrak{w}}|})(z_{\mathfrak{w}}) = 0.$$

Ähnlich ist es für den Euler-Operator: Seien

$$E_{\dot{\mathfrak{w}},\mathfrak{w}} : \mathcal{H}^1_{\mathfrak{w}_{even}} \to \mathcal{H}_{\mathfrak{w}_{even}}$$

und

$$E^Q_{\dot{\mathfrak{w}},\mathfrak{w}} : \mathcal{H}^1_{\mathfrak{w}}(\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_1) \to \mathcal{H}_{\mathfrak{w}}(\mathbb{S}^{\mathbb{C}}_1)$$

im Falle $r = 1$ gilt

$$E_{\dot{\mathfrak{w}},\mathfrak{w}}(\psi^{2m}_{\mathfrak{w}}) = \frac{i}{4}(Im\mathfrak{w})^{-1}[(\dot{\mathfrak{w}}+\dot{\mathfrak{w}}^*)\zeta_{\mathfrak{w}}\frac{\partial\zeta^{2m}_{\mathfrak{w}}}{\partial\zeta_{\mathfrak{w}}}]e^{-1/2|\zeta_{\mathfrak{w}}|^2}, \quad \text{mit } \psi^{2m}_{\mathfrak{w}} = \zeta^{2m}_{\mathfrak{w}}e^{-1/2|\zeta_{\mathfrak{w}}|^2}$$

und man definiert

$$E^Q_{\dot{\mathfrak{w}},\mathfrak{w}}(z^m_{\mathfrak{w}} e^{-1/2|z_{\mathfrak{w}}|}) = \frac{i}{4}(Im\mathfrak{w})^{-1}[(\dot{\mathfrak{w}}+\dot{\mathfrak{w}}^*)z_{\mathfrak{w}}\frac{\partial z^m_{\mathfrak{w}}}{\partial z_{\mathfrak{w}}}]e^{-1/2|z_{\mathfrak{w}}|}.$$

Dann gilt $E_{\dot{\mathfrak{w}},\mathfrak{w}}Q_*(f) = Q_*(E^Q_{\dot{\mathfrak{w}},\mathfrak{w}}(f))$: Sei $f = \phi \cdot \exp$, wobei ϕ für den holomorphen Anteil steht und exp der Exponentialfaktor ist. Dann ist, für $\zeta = \zeta_{\mathfrak{w}}$,

$$E_{\dot{\mathfrak{w}},\mathfrak{w}}(f \circ Q)(\zeta) = \frac{i}{4}(Im\mathfrak{w})^{-1}(\dot{\mathfrak{w}}+\dot{\mathfrak{w}}^*)\zeta(\frac{\partial}{\partial \zeta}(\phi \circ Q)\cdot \exp \circ Q)(\zeta) =$$

$$= \frac{i}{4}(Im\mathfrak{w})^{-1}(\dot{\mathfrak{w}}+\dot{\mathfrak{w}}^*)\zeta\big[\big(\frac{\partial}{\partial z}\phi(z)\underbrace{\frac{\partial z}{\partial \zeta}}_{=\zeta} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\phi(z)\underbrace{\frac{\partial \overline{z}}{\partial \zeta}}_{=0}\big)\circ Q \cdot \exp \circ Q\big](\zeta) =$$

$$= \frac{i}{4}(Im\mathfrak{w})^{-1}(\dot{\mathfrak{w}}+\dot{\mathfrak{w}}^*)\zeta^2(\frac{\partial \phi}{\partial z}\circ Q \cdot \exp \circ Q)(\zeta) = E_{\mathfrak{w},\dot{\mathfrak{w}}}(f)\circ Q(\zeta).$$

Im Allgemeinen gilt

$$E_{\dot{\mathfrak{w}},\mathfrak{w}}(\psi^{2m}_{\mathfrak{w},b}) =$$

$$= [\sum_{l=1}^{r}\Big(\big(D_{\mathfrak{w}}(\dot{\mathfrak{w}}-\dot{\mathfrak{w}}^*)Im\mathfrak{w}^{1/2} +$$

$$+\frac{i}{2}Im\mathfrak{w}^{-1/2}\dot{\mathfrak{w}}^* Im\mathfrak{w}^{-1/2}(\overline{\dot{\mathfrak{w}}})Im\mathfrak{w}^{1/2}\big)\zeta_{\mathfrak{w}}\Big)_l \frac{\partial < \zeta_{\mathfrak{w}}|b>^{2m}}{\partial \zeta_{\mathfrak{w}l}}]e^{-1/2|\zeta_{\mathfrak{w}}|^2},$$

mit

$$\psi^{2m}_{\mathfrak{w},b} =< \zeta_{\mathfrak{w}}|b>^{2m} e^{-1/2|\zeta_{\mathfrak{w}}|^2}.$$

Und man definiert

$$E^Q_{\dot{\mathfrak{w}},\mathfrak{w}}(\mathrm{tr}(z_{\mathfrak{w}}a^*)^m e^{-1/2|z_{\mathfrak{w}}|}) =$$

$$= [\sum_{k,l=1}^{r}\Big(\big(D_{\mathfrak{w}}(\dot{\mathfrak{w}}-\dot{\mathfrak{w}}^*)Im\mathfrak{w}^{1/2}+$$

$$+\frac{i}{2}Im\mathfrak{w}^{-1/2}\dot{\mathfrak{w}}^* Im\mathfrak{w}^{-1/2}\big)z_{\mathfrak{w}}\Big)_{kl}\frac{\partial \mathrm{tr}(z_{\mathfrak{w}}a^*)^m}{\partial z_{\mathfrak{w}kl}}]e^{-1/2|z_{\mathfrak{w}}|},$$

dann gilt $E_{\dot{\mathfrak{w}},\mathfrak{w}}Q_*(f) = Q_*(E^Q_{\dot{\mathfrak{w}},\mathfrak{w}}(f))$:

$$E_{\dot{\mathfrak{w}},\mathfrak{w}}(\mathrm{tr}(z_{\mathfrak{w}}a^*)^m e^{-1/2|z_{\mathfrak{w}}|}\circ Q)(\zeta_{\mathfrak{w}}) =$$

$$= E_{\dot{\mathfrak{w}},\mathfrak{w}}(\mathrm{tr}(\zeta_{\mathfrak{w}}\zeta^t_{\mathfrak{w}}a^*)^m e^{-1/2|\zeta_{\mathfrak{w}}|^2}) =$$

$$= [\sum_{l=1}^{r}\Big(\big(D_{\mathfrak{w}}(\dot{\mathfrak{w}}-\dot{\mathfrak{w}}^*)Im\mathfrak{w}^{1/2} +$$

$$+\frac{i}{2}Im\mathfrak{w}^{-1/2}\dot{\mathfrak{w}}^* Im\mathfrak{w}^{-1/2}\big)\zeta_{\mathfrak{w}}\Big)_l\Big(\sum_{p,q}\frac{\partial \mathrm{tr}(z_{\mathfrak{w}}a^*)^m}{\partial z_{\mathfrak{w}pq}}\underbrace{\frac{\partial z_{wpq}}{\partial \zeta_{wl}}}_{=\zeta_{w_q}\delta_{lp}}\Big)\circ Q(\zeta_{\mathfrak{w}})\big]e^{-1/2|\zeta_{\mathfrak{w}}|^2} =$$

$$= [\sum_{p,q=1}^{r} \Big(\big(D_{\mathfrak{w}}(\dot{\mathfrak{w}} - \dot{\mathfrak{w}}^*)Im\mathfrak{w}^{1/2} +$$

$$+\frac{i}{2}Im\mathfrak{w}^{-1/2}\dot{\mathfrak{w}}^* Im\mathfrak{w}^{-1/2}\big)\zeta_{\mathfrak{w}}\Big)_p \zeta_{w_q}\Big(\frac{\partial \mathrm{tr}(z_{\mathfrak{w}}a^*)^m}{\partial z_{\mathfrak{w}pq}}\Big) \circ Q(\zeta_{\mathfrak{w}})\big]e^{-1/2|\zeta_{\mathfrak{w}}|^2} =$$

$$= [\sum_{p,q=1}^{r} \Big(\big(D_{\mathfrak{w}}(\dot{\mathfrak{w}} - \dot{\mathfrak{w}}^*)Im\mathfrak{w}^{1/2} +$$

$$+\frac{i}{2}Im\mathfrak{w}^{-1/2}\dot{\mathfrak{w}}^* Im\mathfrak{w}^{-1/2}\big) z_{\mathfrak{w}}\Big)_{pq} \Big(\frac{\partial \mathrm{tr}(z_{\mathfrak{w}}a^*)^m}{\partial z_{\mathfrak{w}pq}}\Big)\big] \circ Q \cdot (\zeta_{\mathfrak{w}})e^{-1/2|\zeta_{\mathfrak{w}}|^2} =$$

$$= E^Q_{\dot{\mathfrak{w}},\mathfrak{w}}(\mathrm{tr}(z_{\mathfrak{w}}a^*)^m e^{-1/2|z_{\mathfrak{w}}|}) \circ Q(\zeta_{\mathfrak{w}}).$$

Insbesondere gilt in der reduzierten schreibweise $E^Q_{X(\mathfrak{i}),\mathfrak{i}} = E^Q_{X(\mathfrak{i})}$ im Fall $\mathfrak{w} = \mathfrak{i}$

$$E^Q_{X(\mathfrak{i})}(\mathrm{tr}(z_{\mathfrak{i}}a^*)^m e^{-1/2|z_{\mathfrak{i}}|}) = \frac{im}{2}\mathrm{tr}((X(\mathfrak{i}) + X(\mathfrak{i})^*)a^* z_{\mathfrak{i}})\mathrm{tr}(z_{\mathfrak{i}}a^*)^{m-1}e^{-1/2|z_{\mathfrak{i}}|}.$$

3. Der Zusammenhang des Bündels $\mathcal{H}^1(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}) \to \mathfrak{P}$

Via der Quadratabbildung Q ist es möglich den Toeplitz-Operator, seinen Adjungierten und den Euler-Operator auf jeder Faser $\mathcal{H}^1_{\mathfrak{w}}(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}})$, in Abhängigkeit von $\dot{\mathfrak{w}} \in T_w(\mathfrak{P})$, zu definieren, so dass das Diagramm, versehen mit den entsprechenden Operatoren, kommutiert

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^1_{\mathfrak{w}\,even} & \xleftarrow{Q_*} & \mathcal{H}^1_{\mathfrak{w}}(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}_{\mathfrak{w}\,even} & \xleftarrow{Q_*} & \mathcal{H}_{\mathfrak{w}}(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}) \end{array} .$$

Dies ermöglicht nun auch einen Zusammenhang auf $\mathcal{H}^1(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}) \to \mathfrak{P}$ zu definieren, der sich auf jeder Faser als Projektion von Summen von Operatoren schreiben lässt und zwar genau die, die durch die Quadratabbildung schon eben definiert wurden.

Wir kommen nun zur Definition des Zusammenhanges auf $\mathcal{H}^1(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}) \to \mathfrak{P}$.

Für $\psi \in \mathcal{H}^1(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}})$ ist, per Definition, $\psi \circ Q \in \mathcal{H}^1_{even}$ und

$$\nabla_X^{\mathcal{H}^1_{even}}(\psi \circ Q) = P^1\big([T_{q(X),\cdot} - T^*_{q(X),\cdot} + E_{X,\cdot}](\psi \circ Q)\big) =$$

$$= P^{1,Q}\big([T_{l(X),\cdot} - T^*_{l(X),\cdot} + E^Q_{X,\cdot}](\psi) \circ Q\big).$$

P^1 steht hier für die Projektion auf die jeweilige Faser des Bündels $\mathcal{H}^1_{even}$ und $P^{1,Q}$ für die auf die Fasern des Bündels $\mathcal{H}^1(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}})$.

Sei nun

$$\nabla_X^{\mathcal{H}^1(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}})}(\psi) := \nabla_X^{\mathcal{H}^1_{even}}(\psi \circ Q) \circ Q^{-1}.$$

Da $Q : (\mathbb{C}^{r\times 1}\setminus\{0\})/\{\pm 1\} \to \mathbb{C}^{r\times r}_{sym,rg=1}$ bijektiv ist, und die Schnitte in $\mathcal{H}^1_{even}$ gerade sind, ist $\nabla^{\mathcal{H}^1(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}})}$ wohl definiert, und ein Zusammenhang auf $\mathcal{H}^1(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}) \to \mathfrak{P}$, da $\nabla^{\mathcal{H}^1_{even}}$ ein Zusammenhang auf $\mathcal{H}^1_{even} \to \mathfrak{P}$ ist.

Theorem 3.1. *Das Bündel $\mathcal{H}^1(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}) \to \mathfrak{P}$ trägt einen Zusammenhang, der eingeschränkt auf jede der Fasern sich als Summen von wohlbekannten Operatoren schreiben lässt*

$$\nabla^{\mathcal{H}^1(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}})}_{X(\mathfrak{w})}|_{\mathcal{H}^1_{\mathfrak{w}}(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}})} = P^{1,Q}[T_{l(X(\mathfrak{w})),\mathfrak{w}} - T^*_{l(X(\mathfrak{w})),\mathfrak{w}} + E^Q_{X(\mathfrak{w}),\mathfrak{w}}] =$$
$$= [T_{l(X(\mathfrak{w})),\mathfrak{w}} - T^*_{l(X(\mathfrak{w})),\mathfrak{w}} + E^Q_{X(\mathfrak{w}),\mathfrak{w}}]|_{\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}},$$

wobei

$$T_{l(X(\mathfrak{w})),\mathfrak{w}}(f)(z_{\mathfrak{w}}) = P^Q_{\mathfrak{w}}(-\frac{i}{4}\mathrm{tr}(Im\mathfrak{w}^{-1/2}X(\mathfrak{w})Im\mathfrak{w}^{-1/2}z_{\mathfrak{w}})f)(z_{\mathfrak{w}}) =$$
$$= -\frac{i}{4}\mathrm{tr}(Im\mathfrak{w}^{-1/2}X(\mathfrak{w})Im\mathfrak{w}^{-1/2}z_{\mathfrak{w}})f(z_{\mathfrak{w}})$$
$$T^*_{l(X(\mathfrak{w})),\mathfrak{w}}(f)(z_{\mathfrak{w}}) = P^Q_{\mathfrak{w}}(\frac{i}{4}\mathrm{tr}(Im\mathfrak{w}^{-1/2}X(\mathfrak{w})^*Im\mathfrak{w}^{-1/2}\overline{z}_{\mathfrak{w}})f)(z_{\mathfrak{w}}),$$

für $f \in \mathcal{H}^1_{\mathfrak{w}}(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}})$ und

$$E^Q_{X(\mathfrak{w}),\mathfrak{w}}(\mathrm{tr}(z_{\mathfrak{w}}a^*)^m e^{-1/2|z_{\mathfrak{w}}|})(z_{\mathfrak{w}}) =$$
$$= \mathrm{tr}(a^*(D_{\mathfrak{w}}(X(\mathfrak{w})-X(\mathfrak{w})^*)Im\mathfrak{w}^{1/2}+\frac{i}{2}Im\mathfrak{w}^{-1/2}X(\mathfrak{w})^*Im\mathfrak{w}^{-1/2})z_{\mathfrak{w}})m\mathrm{tr}(z_{\mathfrak{w}}a^*)^{m-1}e^{-1/2|z_{\mathfrak{w}}|}$$

auf Erzeugern definiert, sind. $P^{1,Q}$ steht für die (orthogonale) Projektion von $\mathcal{H}_{\mathfrak{w}}(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}})$ auf $\mathcal{H}^1_{\mathfrak{w}}(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}})$.

Beweis: Es bleibt zu zeigen, dass

$$P^{1,Q}[T_{l(X(\mathfrak{w})),\mathfrak{w}}-T^*_{l(X(\mathfrak{w})),\mathfrak{w}}+E^Q_{X(\mathfrak{w}),\mathfrak{w}}] = [T_{l(X(\mathfrak{w})),\mathfrak{w}}-T^*_{l(X(\mathfrak{w})),\mathfrak{w}}+E^Q_{X(\mathfrak{w}),\mathfrak{w}}]|_{\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}},$$

das heißt, für alle $f \in \mathcal{H}^1_{\mathfrak{w}}(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}})$ gilt

$$P^{1,Q}(T_{l(X(\mathfrak{w})),\mathfrak{w}}(f)) = (T_{l(X(\mathfrak{w})),\mathfrak{w}}(f))|_{\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}},$$

und

$$P^{1,Q}(E^Q_{X(\mathfrak{w}),\mathfrak{w}}(f)) = (E^Q_{X(\mathfrak{w}),\mathfrak{w}}(f))|_{\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}}.$$

Die Menge der Polynome $\mathcal{P}(Z)$ auf dem irreduziblen Jordan Tripelsystem $Z = \mathbb{C}^{r\times r}_{sym}$ lässt sich als (orthogonale) Summe von irreduziblen, unitären K Moduln schreiben

$$\mathcal{P}(Z) = \bigoplus_{\mathbf{m}} \mathcal{P}_{\mathbf{m}}(Z),$$

mit $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_r) \in \mathbb{N}_0^r$, und der Bedingung $m_1 \geq \cdots \geq m_r$. So ein $\mathbf{m}$ nennt man eine Partition (der Länge r) und die dazugehörigen $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$ sind irreduzible unitäre K Module, die aus $|\mathbf{m}| = m_1 + \cdots + m_r$ homogenen Polynome bestehen und die durch ein höchstes Gewichtspolynom und K erzeugt werden **[Upm83]**, **[Upm08b]**. Dieses ist der Form

$$\Delta_{\mathbf{m}} = \Delta_1^{m_1-m_2}\Delta_2^{m_2-m_3}\cdots\Delta_r^{m_r},$$

wobei Δ_k die Jordan Determinante (Hauptminor) von

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq k} Z_{ij},$$

aus der gemeinsamen Peirce Zerlegung eines Jordan Tripelrahmens ist [**Upm86**].
$\mathcal{P}_{(m,0,\ldots,0)}(Z)$ ist durch Polynome der Form $\mathrm{tr}(za^*)^m$, mit $a \in \mathbb{C}^{r\times r}_{sym,rg\leq 1}$ erzeugt [**Upm96**]. Dies gibt $\mathcal{H}^1_w(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}})$ als Abschluss der Menge

$$\sum_{m\in\mathbb{N}_0} \mathcal{P}_{(m,0,\ldots,0)}(Z)|_{\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}} \cdot e^{-1/2|z_{\mathfrak{w}}|}.$$

Allgemein gilt für $p \in \mathcal{P}_{\mathbf{m}}$

$$p|_{\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}}} = 0, \quad \text{falls } m_2 > 0,$$

da dies für das höchste Gewichtspolynom gilt und K transitiv auf $\mathbb{S}_1$ operiert.

$$T_{l(X(\mathfrak{w})),\mathfrak{w}}(\mathrm{tr}(z_{\mathfrak{w}}a^*)^m e^{-1/2|z_{\mathfrak{w}}|})(z_{\mathfrak{w}}) =$$
$$= -\frac{i}{4}\mathrm{tr}(Im\mathfrak{w}^{-1/2}X(\mathfrak{w})Im\mathfrak{w}^{-1/2}z_{\mathfrak{w}})\mathrm{tr}(z_{\mathfrak{w}}a^*)^m e^{-1/2|z_{\mathfrak{w}}|} =$$
$$= p(z)|_{z=z_{\mathfrak{w}}} e^{-1/2|z_{\mathfrak{w}}|}$$

mit

$$p(z) = -\frac{i}{4}\mathrm{tr}(Im\mathfrak{w}^{-1/2}X(\mathfrak{w})Im\mathfrak{w}^{-1/2}z_{\mathfrak{w}})\mathrm{tr}(za^*)^m \in \mathcal{P}(Z)$$

und

$$E^Q_{X(\mathfrak{w}),\mathfrak{w}}(\mathrm{tr}(z_{\mathfrak{w}}a^*)^m e^{-1/2|z_{\mathfrak{w}}|})(z_{\mathfrak{w}}) =$$
$$= \mathrm{tr}(a^*(D_{\mathfrak{w}}(X(\mathfrak{w})-X(\mathfrak{w})^*)Im\mathfrak{w}^{1/2}+\frac{i}{2}Im\mathfrak{w}^{-1/2}X(\mathfrak{w})^*Im\mathfrak{w}^{-1/2})z_{\mathfrak{w}})m\mathrm{tr}(z_{\mathfrak{w}}a^*)^{m-1}e^{-1/2|z_{\mathfrak{w}}|} =$$
$$= q(z)|_{z=z_{\mathfrak{w}}} e^{-1/2|z_{\mathfrak{w}}|}$$

mit

$$q(z) = \mathrm{tr}(a^*(D_{\mathfrak{w}}(X(\mathfrak{w})-X(\mathfrak{w})^*)Im\mathfrak{w}^{1/2}+\frac{i}{2}Im\mathfrak{w}^{-1/2}X(\mathfrak{w})^*Im\mathfrak{w}^{-1/2})z_{\mathfrak{w}})m\mathrm{tr}(za^*)^{m-1} \in \mathcal{P}(Z),$$

was den Beweis abschliesst.

□

Satz 3.2. *Der Zusammenhang $\nabla^{\mathcal{H}^1(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}})}$ ist projektiv-flach, und seine Krümmung eingeschränkt auf jede der Fasern $\mathcal{H}^1_{\mathfrak{w}}(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}})$ ist*

$$\mathcal{K}_{(X(\mathfrak{w}),Y(\mathfrak{w}))}|_{\mathcal{H}^1_{\mathfrak{w}}(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}})} = -\frac{1}{8}\mathrm{tr}((P(Im\mathfrak{w}^{-1/2})Y(\mathfrak{w}))(P(Im\mathfrak{w}^{-1/2})X(\mathfrak{w})^*)+$$
$$-(P(Im\mathfrak{w}^{-1/2})X(\mathfrak{w}))(P(Im\mathfrak{w}^{-1/2})Y(\mathfrak{w})^*))Id_{\mathcal{H}^1_{\mathfrak{w}}(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}})},$$

mit $P : y \mapsto xyx$ der Quadratischen Darstellung.

Beweis: Der Zusammenhang ist projektiv-flach, da der Zusammenhang $\nabla^{\mathcal{H}}$ des Bündels $\mathcal{H} \to \mathfrak{P}$ projektiv-flach ist, und die Projektion $P^{1,Q}$ durch Einschränkung wegfällt.
Die Krümmung des Zusammenhanges erhält man durch

$$\mathcal{K}_{(X,Y)} = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]},$$

hier steht ∇ kurz für den beschriebenen Zusammenhang. Wir arbeiten mit $e^{-1/2|z_{\mathfrak{w}}|} \in \mathcal{H}^1_{\mathfrak{w}}(\mathbb{S}_1^{\mathbb{C}})$, und via der Quadratabbildung mit $\psi^0_{\mathfrak{w}}(\zeta_{\mathfrak{w}}) = e^{-1/2|\zeta_{\mathfrak{w}}|^2}$.

Es gilt

$$T^*_{q(X(\mathfrak{w}),\mathfrak{w})}(\psi^0_{\mathfrak{w}}) = T^*_{q(Y(\mathfrak{w})),\mathfrak{w}}(\psi^0_{\mathfrak{w}}) = 0,$$

$$E_{X(\mathfrak{w}),\mathfrak{w}}(\psi^0_{\mathfrak{w}}) = E_{q(Y(\mathfrak{w})),\mathfrak{w}}(\psi^0_{\mathfrak{w}}) = 0,$$

$$T_{q(X(\mathfrak{w})),\mathfrak{w}}(\psi^0_{\mathfrak{w}})(\zeta_{\mathfrak{w}}) = -\frac{i}{4} < \zeta_{\mathfrak{w}} | Im\mathfrak{w}^{-1/2} X(\mathfrak{w})^* Im\mathfrak{w}^{-1/2} \zeta_{\mathfrak{w}} > \psi^0_{\mathfrak{w}}(\zeta_{\mathfrak{w}}) =$$

$$= -\frac{i}{4} \sum_{j,k} \zeta_{\mathfrak{w}j} [Im\mathfrak{w}^{-1/2} X(\mathfrak{w}) Im\mathfrak{w}^{-1/2}]_{jk} \zeta_{\mathfrak{w}k} \psi^0_{\mathfrak{w}}(\zeta_{\mathfrak{w}}) =$$

$$= -\frac{i}{4} \sum_{j,k} \frac{1}{4} [Im\mathfrak{w}^{-1/2} X(\mathfrak{w}) Im\mathfrak{w}^{-1/2}]_{jk} (\psi^2_{\mathfrak{w},\xi_j+\xi_k} - \psi^2_{\mathfrak{w},\xi_j-\xi_k})(\zeta_{\mathfrak{w}}),$$

und

$$T^*_{q(Y(\mathfrak{w})),\mathfrak{w}} T_{q(X(\mathfrak{w})),\mathfrak{w}}(\psi^0_{\mathfrak{w}})(\zeta_{\mathfrak{w}}) =$$

$$= -\frac{i}{4}\frac{i}{4} 2 \frac{1}{4} \sum_{j,k} [Im\mathfrak{w}^{-1/2} X(\mathfrak{w})^* Im\mathfrak{w}^{-1/2}]_{jk} (< \xi_j + \xi_k | (Im\mathfrak{w}^{-1/2} Y(\mathfrak{w}) Im\mathfrak{w}^{-1/2}) \xi_j + \xi_k > +$$

$$- < \xi_j - \xi_k | (Im\mathfrak{w}^{-1/2} Y(\mathfrak{w}) Im\mathfrak{w}^{-1/2}) \xi_j - \xi_k >) \psi^0_{\mathfrak{w}}(\zeta_{\mathfrak{w}}) =$$

$$= \frac{1}{8}\frac{1}{4} \sum_{j,k} [Im\mathfrak{w}^{-1/2} X(\mathfrak{w})^* Im\mathfrak{w}^{-1/2}]_{jk} \, 4 \, [Im\mathfrak{w}^{-1/2} Y(\mathfrak{w}) Im\mathfrak{w}^{-1/2}]_{jk} \psi^0_{\mathfrak{w}}(\zeta_{\mathfrak{w}}) =$$

$$= \frac{1}{8} \mathrm{tr}(Im\mathfrak{w}^{-1/2} X(\mathfrak{w})^* Im\mathfrak{w}^{-1/2} Im\mathfrak{w}^{-1/2} Y(\mathfrak{w}) Im\mathfrak{w}^{-1/2}) \psi^0_{\mathfrak{w}}(\zeta_{\mathfrak{w}})$$

Der Term der Ordnung 0 in der Formel der Krümmung, für $\psi^0_{\mathfrak{w}}$, ist $(T^*_{q(Y(\mathfrak{w})),\mathfrak{w}} T_{q(X(\mathfrak{w})),\mathfrak{w}} - T^*_{q(X(\mathfrak{w})),\mathfrak{w}} T_{q(Y(\mathfrak{w})),\mathfrak{w}}) \psi^0_{\mathfrak{w}}$ und man erhält

$$\mathcal{K}_{(X(\mathfrak{w}),Y(\mathfrak{w}))}(\psi^0_{\mathfrak{w}})(\zeta_{\mathfrak{w}}) =$$

$$= \frac{1}{4}^2 2 \big(\mathrm{tr}(Im\mathfrak{w}^{-1/2} X(\mathfrak{w})^* Im\mathfrak{w}^{-1/2} Im\mathfrak{w}^{-1/2} Y(\mathfrak{w}) Im\mathfrak{w}^{-1/2}) +$$

$$- \mathrm{tr}(Im\mathfrak{w}^{-1/2} X(\mathfrak{w}) Im\mathfrak{w}^{-1/2} Im\mathfrak{w}^{-1/2} Y(\mathfrak{w})^* Im\mathfrak{w}^{-1/2}) \big) \psi^0_{\mathfrak{w}}(\zeta_{\mathfrak{w}}) =$$

$$= \frac{1}{8} \mathrm{tr}((P(Im\mathfrak{w}^{-1/2}) Y(\mathfrak{w}))(P(Im\mathfrak{w}^{-1/2}) X(\mathfrak{w})^*) +$$

$$-(P(Im\mathfrak{w}^{-1/2}) X(\mathfrak{w}))(P(Im\mathfrak{w}^{-1/2}) Y(\mathfrak{w})^*)) \psi^0_{\mathfrak{w}}(\zeta_{\mathfrak{w}}).$$

□

Bemerkung 3.3. Dies passt in den Rahmen der geometrischen Quantisierung: Geometrische Quantisierung ist ein mathematischer Zugang eine Quantentheorie zu einer gegebenen klassischen Theorie zu definieren. Es sollen gewisse Analogien zwischen den beiden Theorien erhalten bleiben, zum Beispiel die Ähnlichkeit der Heisenberg-Gleichung im „Heisenberg Bild“ der Quantenmechanik zur Hamilton-Gleichung in der klassischen Physik.
Das Prozedere der geometrischen Quantisierung kann man systematisch in 3 Schritte aufteilen: Präquantisierung, Polarisierung und metaplektische Korrektur: man startet mit einem klassischen Phasenraum, das heißt mit einer symplektischen Mannigfaltigkeit, also eine Mannigfaltigkeit, die mit einer symplektischen Struktur ω versehen ist. Präquantisierung liefert ein Linienbündel über der Mannigfaltigkeit mit einem Zusammenhang, dessen Krümmung $i\omega$ ist. Dies ist nicht immer möglich, sondern erfordert eine Bedingung an ω. Nun betrachtet man den Hilbertraum der quadrat-integrierbaren Schnitte von diesem Linienbündel. Hier kann man die klassischen Observablen präquantisieren (Poisson Klammern werden auf Kommutatoren abgebildet). Trotzdem ist dieser Raum „zu groß“. Um ihn zu verkleinern wird eine Polarisierung, das heißt, eine zu ω kompatible, fast komplexe Struktur gewählt. Dies ist eine glatte Abbildungsvorschrift der Punkte der Mannigfaltigkeit zu einem (integrierbaren) Lagrange-Unterraum der Komplexifizierung des Tangentialraumes an diesem Punkt. So kann das Quanten-Hilbertraum-Bündel definiert werden: es sind die quadrat-integrierbaren Schnitte, deren kovariante Ableitung an jedem Punkt der Mannigfaltigkeit in Richtung des Unterraumes, der durch die Polarisierung gegeben ist, verschwindet. Das Quanten-Hilbertraum-Bündel ist ein Unterbündel des Prä-quanten-Hilbertraum-Bündels. Die metaplektische Korrektur besteht darin, an das Hilbertraum-Bündel noch ein Bündel von Halbformen zu tensorieren. Dies ist nötig, um unitäre Darstellungen von gewissen Gruppen kanonischer Transformationen zu konstruieren.

Unsere symplektische Mannigfaltigkeit ist $\mathbb{R}^{2r}$, die symplektische Form ω ist in Kapitel 1 beschrieben. Man hat das Linienbündel $L \to \mathbb{R}^{2r}$, $L \cong \mathbb{R}^{2r} \times \mathbb{C}$. Als präquanten Hilbertraum haben wir in unserem Falle $\mathcal{H}^0 \cong L^2(\mathbb{R}^{2r}) \otimes \mathbb{C}$, also quadrat-integrierbare Schnitte in L. Die fast komplexe Struktur, die mit der symplektischen Form ω kompatibel ist, ist $\mathfrak{w} \in \mathfrak{P} \longleftrightarrow J = J_{\mathfrak{w}} \in \mathcal{J}$. Für jedes $J \in \mathcal{J}$ bzw. $\mathfrak{w} \in \mathfrak{P}$ hat man den Hilbertraum $\mathcal{H}_{\mathfrak{w}}$ quadrat-integrierbarer $\mathfrak{w}$-holomorpher Schnitte von L. So erhält man das „Start“-Bündel $\mathcal{H} \to \mathfrak{P}$. Für $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2 \in \mathfrak{P}$ und einer Kurve zwischen ihnen ist der Paralleltransport in $\mathcal{H}$ ein unitärer Operator von $\mathcal{H}_{\mathfrak{w}_1}$ nach $\mathcal{H}_{\mathfrak{w}_2}$, und da der Zusammenhang projektiv flach ist, unterscheidet sich der Paralleltransport entlang zweier verschiedener Kurven um höchstens einen Phasenfaktor [**KW06**]. Da die Quantenzustände projektiv gegeben sind, ist das physikalische System, welches beschrieben wird, unabhängig von der Wahl von $\mathfrak{w} \in \mathfrak{P}$. Allerdings divergiert der Zusammenhang für $Im\mathfrak{w} \to 0$. Da in [**KW06**] der Paralleltransport entlang von Geodäten bis an den Rand von $\mathfrak{P}$ fortgesetzt werden will, ist die metaplektische Korrektur notwendig und es wird das Halb-Formen Bündel des dualen Determinantenbündels, dessen Fasern $\sqrt{\bigwedge^r(E_i(J))^*}$ sind, Faser für Faser an das Bündel $\mathcal{H}$ tensoriert. Der resultierende Zusammenhang auf dem Tensorbündel ist flach [**Woo92**].

KAPITEL 7

Bogoliubov- und Segal-Bargmann-Kerne und die Wärmeleitungsgleichung

In diesem Kapitel betrachten wir eine Folge von Bogoliubov-Integralkernen, welche gegen einen Segal-Bargmann-Integralkern konvergieren. Fordert man eine Zeitabhängigkeit an die Integralkerne durch einen Zeitparameter t, so sind diese Lösungen einer (homogenen) Wärmeleitungsgleichung in den Integrationsvariablen. Arbeitet man nicht mit den Integrationsvariablen sondern den Bildraumvariablen und versieht diese mit der Zeitabhängigkeit t, so sind auch diese Lösungen einer, des laufenden $\mathfrak{w} \in \mathfrak{P}$, abhängigen Wärmeleitungsgleichung. Die Gestalt der dazugehörigen Differentialoperatoren zusammen mit der Gleichung, die der Segal-Bargmann-Kern erfüllt, gibt Anlass zur einer konkreten Erweiterung der Identifizierung „komplexe Strukturen - Siegelsche obere Halbebene“ in den jeweiligen Shilov-Rändern. Diese wird hier erläutert.

1. Bogoliubov-Transformationen und die Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten nochmals das Ausgangsbündel des vorigen Kapitels $\mathcal{H} \to \mathcal{J}$ oder durch die Identifizierungen aus Kapitel 1 das Bündel $\mathcal{H} \to \mathfrak{P}$. Gegeben zwei Basispunkte $\mathfrak{w}_0, \mathfrak{w} \in \mathfrak{P}$, ist die Bogoliubov Transformation von $\mathcal{H}_{\mathfrak{w}_0}$ nach $\mathcal{H}_{\mathfrak{w}}$ nichts anderes als ein Vielfaches der orthogonalen Projektion des Raumes $\mathcal{H}_{\mathfrak{w}_0}$ auf $\mathcal{H}_{\mathfrak{w}}$ innerhalb des Präquantum Hilbertraum Bündels $\mathcal{H}^0$ der quadrat-integrierbaren Schnitte über $\mathbb{R}^{2r}$ [**Woo81**]. In [**KW06**] wird gezeigt, dass die Bogoluibov Transformation von $\mathcal{H}_{\mathfrak{w}_0}$ nach $\mathcal{H}_{\mathfrak{w}}$ der Paralleltransport innerhalb des Hilbertraum Bündels $\mathcal{H}$ entlang der Geodäte in $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{w}_0$ nach $\mathfrak{w}$ ist. Dies gilt auch für das Bündel $\hat{\mathcal{H}} \to \mathfrak{P}$, welches durch die metaplektische Korrektur erhalten wird [**KW06**]. Vernachlässigt man die Konstanten und die Korrekturterm erhält man folgenden Operator

$$\mathcal{B} : \mathcal{H}_{\mathfrak{w}_0} \to \mathcal{H}_{\mathfrak{w}}$$

$$\phi(\zeta_{\mathfrak{w}_0}) e^{-\frac{1}{2}\left|\zeta_{\mathfrak{w}_0}\right|^2} \mapsto e^{-\frac{1}{2}|\zeta'_{\mathfrak{w}}|^2}.$$

$$\cdot \int \phi(\zeta_{\mathfrak{w}_0}) e^{-\frac{1}{2}\left|\zeta_{\mathfrak{w}_0}\right|^2} e^{\frac{1}{2}(\overline{\zeta}^t_{\mathfrak{w}_0}, {\zeta'}^t_{\mathfrak{w}}) \begin{pmatrix} A_{\mathfrak{w}} & B_{\mathfrak{w}} \\ B^t_{\mathfrak{w}} & D_{\mathfrak{w}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\zeta}_{\mathfrak{w}_0} \\ \zeta'_{\mathfrak{w}} \end{pmatrix}} e^{-\frac{1}{2}\left|\zeta_{\mathfrak{w}_0}\right|^2} dV(\zeta_{\mathfrak{w}_0}).$$

Hier stehen $A_{\mathfrak{w}}, B_{\mathfrak{w}}$ und $D_{\mathfrak{w}}$ für

$$\begin{aligned} A_{\mathfrak{w}} &= 1 - Im\mathfrak{w}_0{}^{\frac{1}{2}} 2i(\mathfrak{w}_0 - \mathfrak{w}^*)^{-1} Im\mathfrak{w}_0{}^{\frac{1}{2}}, \\ B_{\mathfrak{w}} &= Im\mathfrak{w}_0{}^{\frac{1}{2}} 2i(\mathfrak{w}_0 - \mathfrak{w}^*)^{-1} Im\mathfrak{w}^{\frac{1}{2}}, \\ D_{\mathfrak{w}} &= 1 - Im\mathfrak{w}^{\frac{1}{2}} 2i(\mathfrak{w}_0 - \mathfrak{w}^*)^{-1} Im\mathfrak{w}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

und die Variablen $\zeta_{\mathfrak{w}_0}, \zeta'_{\mathfrak{w}}$ sind

$$\begin{aligned} \zeta_{\mathfrak{w}_0} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} Im\mathfrak{w}_0^{-\frac{1}{2}} (\xi - \mathfrak{w}_0^* \eta), && \text{mit} \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^r, \\ \zeta'_{\mathfrak{w}} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} Im\mathfrak{w}^{-\frac{1}{2}} (\xi' - \mathfrak{w}^* \eta'), && \text{mit} \quad \xi', \eta' \in \mathbb{R}^r. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun, inspiriert durch [**Hal00**], [**HL**], für festes $\mathrm{t} > 0$, den Operator

$$\mathcal{B}_{\mathrm{t}} : \mathcal{H}_{\mathfrak{w}_0} \to \mathcal{H}_{\mathfrak{w}}$$

$$\phi(\zeta_{\mathfrak{w}_0}) e^{-\frac{1}{2}|\zeta_{\mathfrak{w}_0}|^2} \mapsto \frac{1}{(2\mathrm{t})^r} e^{-\frac{1}{2}|\zeta'_{\mathfrak{w}}|^2}.$$

$$\cdot \int \phi(\zeta_{\mathfrak{w}_0}) e^{-\frac{1}{2}|\zeta_{\mathfrak{w}_0}|^2} e^{(\bar{\zeta}^t_{\mathfrak{w}_0}, \zeta'^t_{\mathfrak{w}}) \begin{pmatrix} A_{\mathfrak{w}}/2\mathrm{t}^2 & B_{\mathfrak{w}}/2\mathrm{t} \\ (B_{\mathfrak{w}}/2\mathrm{t})^t & D_{\mathfrak{w}}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\zeta}_{\mathfrak{w}_0} \\ \zeta'_{\mathfrak{w}} \end{pmatrix}} e^{-\frac{1}{2\mathrm{t}}|\zeta_{\mathfrak{w}_0}|^2} dV(\zeta_{\mathfrak{w}_0}) =$$

$$= \frac{1}{(2\mathrm{t})^r} < \phi(\zeta_{\mathfrak{w}_0}) e^{-\frac{1}{2}|\zeta_{\mathfrak{w}_0}|^2}, e^{-\frac{1}{2}|\zeta'_{\mathfrak{w}}|^2} e^{(\zeta^t_{\mathfrak{w}_0}, \bar{\zeta'}^t_{\mathfrak{w}}) \begin{pmatrix} A^*_{\mathfrak{w}}/2\mathrm{t}^2 & \overline{B_{\mathfrak{w}}}/2\mathrm{t} \\ B^*_{\mathfrak{w}}/2\mathrm{t} & D^*_{\mathfrak{w}}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{\mathfrak{w}_0} \\ \bar{\zeta'}_{\mathfrak{w}} \end{pmatrix}} e^{-\frac{1}{2\mathrm{t}}|\zeta_{\mathfrak{w}_0}|^2} >$$

der also den Integralkern $\mathcal{K}^{\mathcal{B}}_{\mathfrak{w}}$

$$\mathcal{K}^{\mathcal{B}}_{\mathfrak{w}}(\zeta_{\mathfrak{w}_0}, \zeta'_{\mathfrak{w}}, \mathrm{t}) = \frac{1}{(2\mathrm{t})^r} e^{-\frac{1}{2}|\zeta'_{\mathfrak{w}}|^2} e^{(\zeta^t_{\mathfrak{w}_0}, \bar{\zeta'}^t_{\mathfrak{w}}) \begin{pmatrix} A^*_{\mathfrak{w}}/2\mathrm{t}^2 & \overline{B_{\mathfrak{w}}}/2\mathrm{t} \\ B^*_{\mathfrak{w}}/2\mathrm{t} & D^*_{\mathfrak{w}}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{\mathfrak{w}_0} \\ \bar{\zeta'}_{\mathfrak{w}} \end{pmatrix}} e^{-\frac{1}{2\mathrm{t}}|\zeta_{\mathfrak{w}_0}|^2}$$

besitzt, und für den Parameter $\mathrm{t} = 1$, dem Operator $\mathcal{B}$, ein Vielfaches des Bogoliubov Operators, entspricht.

Satz 1.1. *Für jedes $\zeta'_{\mathfrak{w}}$ erfüllen die Funktionen $\mathcal{K}^{\mathcal{B}}_{\mathfrak{w}}(\zeta_{\mathfrak{w}_0}, \zeta'_{\mathfrak{w}}, \mathrm{t})$ die Differentialgleichung*

$$\Box_{\zeta_{\mathfrak{w}_0}} \mathcal{K}^{\mathcal{B}}_{\mathfrak{w}} = \Big(\frac{\partial}{\partial \zeta_{\mathfrak{w}_0}}\Big)^* \Big(\frac{\partial}{\partial \zeta_{\mathfrak{w}_0}}\Big) \mathcal{K}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\Big) \mathcal{K}^{\mathcal{B}}$$

Beweis: Da

$$\Box_{\zeta_{\mathfrak{w}_0}} = \Big(\frac{\partial}{\partial \zeta_{\mathfrak{w}_0}}\Big)^* \Big(\frac{\partial}{\partial \zeta_{\mathfrak{w}_0}}\Big) = \sum_{j=1}^r \Big(\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_{\mathfrak{w}_0 j}}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial \zeta_{\mathfrak{w}_0 j}}\Big),$$

errechnen wir

$$\frac{\partial \mathcal{K}^{\mathcal{B}}_{\mathfrak{w}}}{\partial \bar{\zeta}_{\mathfrak{w}_0 j}}(\zeta_{\mathfrak{w}_0}, \zeta'_{\mathfrak{w}}, \mathrm{t}) = \big(-\tfrac{1}{2t} \zeta_{\mathfrak{w}_0 j}\big) \mathcal{K}^{\mathcal{B}}_{\mathfrak{w}}(\zeta_{\mathfrak{w}_0}, \zeta'_{\mathfrak{w}}, \mathrm{t}),$$

$$\frac{\partial \mathcal{K}^{\mathcal{B}}_{\mathfrak{w}}}{\partial \zeta_{\mathfrak{w}_0 j}}(\zeta_{\mathfrak{w}_0}, \zeta'_{\mathfrak{w}}, \mathrm{t}) = \big(-\tfrac{1}{2\mathrm{t}} \bar{\zeta}_{\mathfrak{w}_0 j} + \tfrac{2}{2\mathrm{t}^2} \zeta^t_{\mathfrak{w}_0} A^*_{\mathfrak{w}} e_j + \tfrac{2}{2\mathrm{t}} \zeta'^*_{\mathfrak{w}} B^*_{\mathfrak{w}} e_j\big) \mathcal{K}^{\mathcal{B}}_{\mathfrak{w}}(\zeta_{\mathfrak{w}_0}, \zeta'_{\mathfrak{w}}, \mathrm{t})$$

und

$$\frac{\partial \mathcal{K}^{\mathcal{B}}_{\mathfrak{w}}}{\partial \mathrm{t}}(\zeta_{\mathfrak{w}_0}, \zeta'_{\mathfrak{w}}, \mathrm{t}) = 2\big(\tfrac{-r}{2\mathrm{t}} + \tfrac{1}{4\mathrm{t}^2}\,|\zeta_{\mathfrak{w}_0}|^2 - \tfrac{2}{4\mathrm{t}^3}\zeta^t_{w_0} A^*_{\mathfrak{w}} \zeta_{w_0} - \tfrac{2}{4\mathrm{t}^2}\zeta^t_{w_0}\overline{B}_{\mathfrak{w}}\zeta'_{\mathfrak{w}}\big)\mathcal{K}^{\mathcal{S}}(\zeta_{\mathfrak{w}_0}, \zeta'_{\mathfrak{w}}, \mathrm{t})$$

So erhalten wir

$$\sum_j \Big(\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}_{\mathfrak{w}_0 j}}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial \zeta_{\mathfrak{w}_0 j}}\Big)\mathcal{K}^{\mathcal{B}}_{\mathfrak{w}} =$$

$$= \sum_j \big(-\tfrac{1}{2\mathrm{t}} + (-\tfrac{1}{2t}\zeta_{\mathfrak{w}_0 j})(-\tfrac{1}{2\mathrm{t}}\overline{\zeta}_{\mathfrak{w}_0 j} + \tfrac{2}{2\mathrm{t}^2}\zeta^t_{\mathfrak{w}_0} A^*_{\mathfrak{w}} e_j + \tfrac{2}{2\mathrm{t}}\zeta'^*_{\mathfrak{w}} B^*_{\mathfrak{w}} e_j)\big)\mathcal{K}^{\mathcal{B}}_{\mathfrak{w}} =$$

$$= \big(-\tfrac{r}{2\mathrm{t}} + \tfrac{1}{4\mathrm{t}^2}\,|\zeta_{\mathfrak{w}_0}|^2 - \tfrac{2}{4\mathrm{t}^3}\zeta^t_{\mathfrak{w}_0} A^*_{\mathfrak{w}}\zeta_{\mathfrak{w}_0} - \tfrac{2}{4\mathrm{t}^2}\zeta'^*_{\mathfrak{w}}\, B^*_{\mathfrak{w}}\zeta_{\mathfrak{w}_0}\big)\mathcal{K}^{\mathcal{B}}_{\mathfrak{w}} = \Big(\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\Big)\mathcal{K}^{\mathcal{B}}_{\mathfrak{w}}.$$

□

2. Segal-Bargmann-Transformationen

In Kapitel 1 wurde die Identifikation der positiven Lagrange-Unterräume mit den positiven, kompatiblen komplexen Strukturen $\mathcal{J}$ erläutert. Reelle Lagrange-Unterräume können mit dem Shilov-Rand von $\mathcal{J}$ identifiziert werden. In [**KW06**] wird das durch die metaplektische Korrektur erhaltene Bündel auf den Shilov-Rand von $\mathcal{J}$ oder $\mathfrak{P}$ erweitert. Insbesondere ist über dem reellen Lagrange-Unterraum

$$M_\circ = \big\{(\xi', \eta') \in \mathbb{R}^{2r} : \xi' = 0\big\}$$

die Faser $\mathcal{H}_{M_\circ}$, welche als $L^2(\mathbb{R}^r)$ gedeutet wird, wobei allerdings die Elemente noch mit einem Phasenfaktor versehen sind. Genauer, schreiben sie sich als $\psi = \phi(x')e^{\frac{i}{2}\xi'^t\eta'}$, wobei $\phi \in L^2(\mathbb{R}^r)$ und wobei $e^{\frac{i}{2}\xi'^t\eta'}$ der genannte Phasenfaktor ist.

Wir schreiben $\mathcal{H}_\circ$ kurz für $\mathcal{H}_{M_\circ}$ und betrachten, für festes $\mathrm{t} \in \mathbb{R}_{>0}$ den Operator

$$\mathcal{S}_{\mathrm{t}} : \mathcal{H}_{\mathfrak{w}_0} \to \mathcal{H}_\circ$$

$$\phi(\zeta_{\mathfrak{w}_0})e^{-\frac{1}{2}|\zeta_{\mathfrak{w}_0}|^2} \mapsto \frac{1}{(2\mathrm{t})^r} e^{\frac{i}{2}\xi'^t\eta'}.$$

$$\cdot \int \phi(\zeta_{\mathfrak{w}_0})e^{-\frac{1}{2}|\zeta_{\mathfrak{w}_0}|^2} e^{(\overline{\zeta}^t_{\mathfrak{w}_0}, \xi'^t)\begin{pmatrix} A_0/2\mathrm{t}^2 & B_0/2\mathrm{t} \\ (B_0/2\mathrm{t})^t & D_0/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{\zeta}_{\mathfrak{w}_0} \\ \xi'\end{pmatrix}} e^{-\frac{1}{2\mathrm{t}}|\zeta_{\mathfrak{w}_0}|^2} dV(\zeta_{\mathfrak{w}_0}).$$

Hier sind

$$\begin{aligned} A_0 &= 1 - (2Im\mathfrak{w}_0)^{\frac{1}{2}} i(\mathfrak{w}_0)^{-1}(2Im\mathfrak{w}_0)^{\frac{1}{2}}, \\ B_0 &= (2Im\mathfrak{w}_0)^{\frac{1}{2}} i(\mathfrak{w}_0)^{-1} \\ D_0 &= -i(\mathfrak{w}_0)^{-1}. \end{aligned}$$

Dieser Operator ist ein Vielfaches des Segal-Bargmann-Operators, für den Parameter $\mathrm{t} = 1$. In diesem Fall erhält man für $\mathfrak{w}_0 = \mathfrak{i}$ die übliche Segal-Bargmann-Transformation.

Wir bezeichnen mit $\mathcal{K}^{\mathcal{S}} = \mathcal{K}^{\mathcal{S}}(\zeta_{\mathfrak{w}_0}, \xi', \eta', \mathrm{t})$ den Integralkern des Operators $\mathcal{S}_{\mathrm{t}}$, d.h.

$$\mathcal{K}^{\mathcal{S}}(\zeta_{\mathfrak{w}_0}, \xi', \eta', \mathrm{t}) = \frac{1}{(2\mathrm{t})^r} e^{\frac{i}{2}\xi'^t\eta'} e^{(\zeta_{\mathfrak{w}_0}^t, \xi'^t)\begin{pmatrix} A_0^*/2\mathrm{t}^2 & \overline{B}_0/2\mathrm{t} \\ B_0^*/2\mathrm{t} & D_0^*/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta_{\mathfrak{w}_0} \\ \xi'\end{pmatrix}} e^{-\frac{1}{2\mathrm{t}}|\zeta_{\mathfrak{w}_0}|^2}.$$

Satz 2.1. *für jedes ξ', η' erfüllen die Funktionen $\mathcal{K}^{\mathcal{S}}(\zeta_{\mathfrak{w}_0}, \xi', \eta', \mathrm{t})$ die Differentialgleichung*

$$\Box_{\zeta_{\mathfrak{w}_0}} \mathcal{K}^{\mathcal{S}} = \Big(\frac{\partial}{\partial \zeta_{\mathfrak{w}_0}}\Big)^* \Big(\frac{\partial}{\partial \zeta_{\mathfrak{w}_0}}\Big)\mathcal{K}^{\mathcal{S}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\Big)\mathcal{K}^{\mathcal{S}}$$

Beweis: Wir errechnen

$$\frac{\partial \mathcal{K}^{\mathcal{S}}}{\partial \overline{\zeta}_{\mathfrak{w}_0 j}}(\zeta_{\mathfrak{w}_0}, \xi', \eta', \mathrm{t}) = \big(-\tfrac{1}{2t}\zeta_{\mathfrak{w}_0 j}\big)\mathcal{K}^{\mathcal{S}}(\zeta_{\mathfrak{w}_0}, \xi', \eta', \mathrm{t}),$$

$$\frac{\partial \mathcal{K}^{\mathcal{S}}}{\partial \zeta_{\mathfrak{w}_0 j}}(\zeta_{\mathfrak{w}_0}, \xi', \eta', \mathrm{t}) = \big(-\tfrac{1}{2\mathrm{t}}\overline{\zeta}_{\mathfrak{w}_0 j} + \tfrac{2}{2\mathrm{t}^2}\zeta_{\mathfrak{w}_0}^t A_0^* e_j + \tfrac{2}{2\mathrm{t}}\xi'^t B_0^* e_j\big)\mathcal{K}^{\mathcal{S}}(\zeta_{\mathfrak{w}_0}, \xi', \eta', \mathrm{t})$$

und

$$\frac{\partial \mathcal{K}^{\mathcal{S}}}{\partial \mathrm{t}}(\zeta_{\mathfrak{w}_0}, \xi', \eta', \mathrm{t}) = 2\big(\tfrac{-r}{2\mathrm{t}} + \tfrac{1}{4\mathrm{t}^2}|\zeta_{\mathfrak{w}_0}|^2 - \tfrac{2}{4\mathrm{t}^3}\zeta_{w_0}^t A_0^* \zeta_{w_0} - \tfrac{2}{4\mathrm{t}^2}\zeta_{w_0}^t \overline{B}_{\mathfrak{w}}\xi'\big)\mathcal{K}^{\mathcal{S}}(\zeta_{\mathfrak{w}_0}, \xi', \eta', \mathrm{t})$$

Daraus folgt

$$\sum_j \Big(\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}_{\mathfrak{w}_0 j}}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial \zeta_{\mathfrak{w}_0 j}}\Big)\mathcal{K}^{\mathcal{S}} =$$

$$= \sum_j \big(-\tfrac{1}{2\mathrm{t}} + (-\tfrac{1}{2t}\zeta_{\mathfrak{w}_0 j})(-\tfrac{1}{2\mathrm{t}}\overline{\zeta}_{\mathfrak{w}_0 j} + \tfrac{2}{2\mathrm{t}^2}\zeta_{\mathfrak{w}_0}^t A_0^* e_j + \tfrac{2}{2\mathrm{t}}\xi'^t B_0^* e_j)\big)\mathcal{K}^{\mathcal{S}} =$$

$$= \big(-\tfrac{r}{2\mathrm{t}} + \tfrac{1}{4\mathrm{t}^2}|\zeta_{\mathfrak{w}_0}|^2 - \tfrac{2}{4\mathrm{t}^3}\zeta_{\mathfrak{w}_0}^t A_0^* \zeta_{\mathfrak{w}_0} - \tfrac{2}{4\mathrm{t}^2}\xi'^t B_0^* \zeta_{\mathfrak{w}_0}\big)\mathcal{K}^{\mathcal{S}} = \Big(\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\Big)\mathcal{K}^{\mathcal{S}}.$$

$\Box$

Wir schreiben die von $\mathfrak{w}$ abhängigen Exponenten der Integralkerne $\mathcal{K}_{\mathfrak{w}}^{\mathcal{B}}$ und $\mathcal{K}^{\mathcal{S}}$ explizit in ξ', η' um und erhalten für $\mathcal{K}_{\mathfrak{w}}^{\mathcal{B}}$

$$-\frac{1}{2}|\zeta'_{\mathfrak{w}}|^2 + (\zeta_{\mathfrak{w}_0}^t, \overline{\zeta'}^t_{\mathfrak{w}})\begin{pmatrix} A_{\mathfrak{w}}^*/2\mathrm{t}^2 & \overline{B}_{\mathfrak{w}}/2\mathrm{t} \\ B_{\mathfrak{w}}^*/2\mathrm{t} & D_{\mathfrak{w}}^*/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta_{\mathfrak{w}_0} \\ \overline{\zeta'}_{\mathfrak{w}}\end{pmatrix} =$$

$$= (\zeta_{\mathfrak{w}_0}^t, \xi'^t, \eta'^t) M_{\mathcal{B}_{\mathfrak{w}}}\begin{pmatrix}\zeta_{\mathfrak{w}_0} \\ \xi' \\ \eta'\end{pmatrix},$$

wobei $M_{\mathcal{B}_{\mathfrak{w}}}$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} A_{\mathfrak{w}}^*/2\mathrm{t}^2 & -\frac{1}{2\mathrm{t}}(2Im\mathfrak{w}_0)^{1/2}2i(\mathfrak{w}_0^* - \mathfrak{w})^{-1} & \frac{1}{2\mathrm{t}}(2Im\mathfrak{w}_0)^{1/2}2i(\mathfrak{w}_0^* - \mathfrak{w})^{-1}\mathfrak{w} \\ (-\frac{1}{2\mathrm{t}}(2Im\mathfrak{w}_0)^{1/2}2i(\mathfrak{w}_0^* - \mathfrak{w})^{-1})^t & \frac{i}{2}(\mathfrak{w}_0^* - \mathfrak{w})^{-1} & -\frac{i}{2}((\mathfrak{w}_0^* - \mathfrak{w})^{-1}\mathfrak{w} + \frac{1}{2}) \\ (\frac{1}{2\mathrm{t}}(2Im\mathfrak{w}_0)^{1/2}2i(\mathfrak{w}_0^* - \mathfrak{w})^{-1}\mathfrak{w})^t & -\frac{i}{2}((\mathfrak{w}_0^* - \mathfrak{w})^{-1}\mathfrak{w} + \frac{1}{2})^t & \frac{i}{2}(\mathfrak{w} + \mathfrak{w}(\mathfrak{w}_0^* - \mathfrak{w})^{-1}\mathfrak{w}) \end{pmatrix}$$

ist.
Für $\mathcal{K}^{\mathcal{S}}$ erhalten wir

$$\frac{i}{2}\xi'^t\eta' + (\zeta^t_{\mathfrak{w}_0}, \xi'^t)\begin{pmatrix} A_0^*/2\mathrm{t}^2 & \overline{B}_0/2\mathrm{t} \\ B_0^*/2\mathrm{t} & D_0^*/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta_{\mathfrak{w}_0} \\ \xi' \end{pmatrix} =$$

$$= (\zeta^t_{\mathfrak{w}_0}, \xi'^t, \eta'^t) M_{\mathcal{S}} \begin{pmatrix} \zeta_{\mathfrak{w}_0} \\ \xi' \\ \eta' \end{pmatrix},$$

mit

$$M_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} A_0^*/2\mathrm{t}^2 & -\frac{1}{2\mathrm{t}}(2Im\mathfrak{w}_0)^{1/2} 2i\mathfrak{w}_0^{-*} & 0 \\ (-\frac{1}{2\mathrm{t}}(2Im\mathfrak{w}_0)^{1/2} 2i\mathfrak{w}_0^{-*})^t & \frac{i}{2}\mathfrak{w}_0^{-*} & -\frac{i}{4} \\ 0 & -\frac{i}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Lässt man $\mathfrak{w}$ gegen $\mathfrak{o}$ im Rande streben, so konvergiert $\mathcal{K}^{\mathcal{B}}_{\mathfrak{w}}$ punktweise gegen $\mathcal{K}^{\mathcal{S}}$, wie im Fall $\mathrm{t} = 1$, da

$$M_{\mathcal{B}_{\mathfrak{w}}} \overset{\mathfrak{w}\to\mathfrak{o}, Im\mathfrak{w}>0}{\longrightarrow} M_{\mathcal{S}}.$$

Dies impliziert die punktweise Konvergenz der dazugehörigen Operatoren angewandt auf jede feste Funktion $\phi(\zeta_{\mathfrak{w}_0})e^{-\frac{1}{2}|\zeta_{\mathfrak{w}_0}|^2}$ eines dichten Unterraumes des $\mathcal{H}_{\mathfrak{w}_0}$ [**FK94**].

Die Differentialgleichung ist in gekürzter Schreibweise

$$\Box_{\zeta_{\mathfrak{w}_0}} = \partial^*_{\zeta_{\mathfrak{w}_0}}\partial_{\zeta_{\mathfrak{w}_0}} = \frac{1}{2}\partial_{\mathrm{t}}$$

und diese lautet in ξ, η Koordinaten geschrieben, wie folgt

$$\left(\partial^t_\xi, \partial^t_\eta\right)\left(J_{\mathfrak{w}_0}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} \partial_\xi \\ \partial_\eta \end{pmatrix} = \partial_{\mathrm{t}}, \tag{2.1}$$

mit

$$J_{\mathfrak{w}_0} = \begin{pmatrix} Re\mathfrak{w}_0 Im\mathfrak{w}_0^{-1} & -Im\mathfrak{w}_0 - Re\mathfrak{w}_0 Im\mathfrak{w}_0^{-1} Re\mathfrak{w}_0 \\ Im\mathfrak{w}_0^{-1} & -Im\mathfrak{w}_0^{-1} Re\mathfrak{w}_0 \end{pmatrix} =$$

$$= i\begin{pmatrix} 1 + 2\mathfrak{w}_0^*(\mathfrak{w}_0 - \mathfrak{w}_0^*)^{-1} & -2\mathfrak{w}_0(\mathfrak{w}_0 - \mathfrak{w}_0^*)^{-1}\mathfrak{w}_0^* \\ 2(\mathfrak{w}_0 - \mathfrak{w}_0^*)^{-1} & -2(\mathfrak{w}_0 - \mathfrak{w}_0^*)^{-1}\mathfrak{w}_0^* - 1 \end{pmatrix}.$$

Aus Kapitel 1 ist $J_{\mathfrak{w}_0}$ das Element in

$$\mathcal{J} = \mathrm{Sp} \cap \left\{J^2 = -1\right\} \cap \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} J > 0\right\},$$

welches mit $\mathfrak{w}_0 \in \mathfrak{P}$ identifiziert wird.

3. Variable Wärmeleitungsgleichungen

In diesem Abschnitt arbeiten wir nun mit den Bogoliubov und Segal-Bargmann Integralkernen in den Veränderlichen $\zeta'_{\mathfrak{w}}$ und versehen diese dementsprechend mit t. So erhalten wir die Funktionen

$$\mathcal{N}^{\mathcal{B}}_{\mathfrak{w}}(\zeta_{\mathfrak{w}_0},\xi',\eta',\mathrm{t}) = \frac{1}{(2\mathrm{t})^r} e^{-\frac{1}{2\mathrm{t}}|\zeta'_{\mathfrak{w}}|^2} e^{(\overline{\zeta}^t_{\mathfrak{w}_0},{\zeta'}^t_{\mathfrak{w}})\begin{pmatrix} A_{\mathfrak{w}}/2 & B_{\mathfrak{w}}/2\mathrm{t} \\ (B_{\mathfrak{w}}/2\mathrm{t})^t & D_{\mathfrak{w}}/2\mathrm{t}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{\zeta}_{\mathfrak{w}_0} \\ \zeta'_{\mathfrak{w}}\end{pmatrix}} e^{-\frac{1}{2}\left|\zeta_{\mathfrak{w}_0}\right|^2},$$

mit $\zeta'_{\mathfrak{w}} = \frac{1}{\sqrt{2}} Im\mathfrak{w}^{-1/2}(\xi' - \mathfrak{w}^*\eta')$ und

$$\mathcal{N}^{\mathcal{S}}(\zeta_{\mathfrak{w}_0},\xi',\eta',\mathrm{t}) = \frac{1}{(2\mathrm{t})^r} e^{\frac{i}{2\mathrm{t}}{\xi'}^t\eta'} e^{(\overline{\zeta}^t_{\mathfrak{w}_0},{\xi'}^t)\begin{pmatrix} A_0/2 & B_0/2\mathrm{t} \\ B_0^t/2\mathrm{t} & D_0/2\mathrm{t}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta_{\mathfrak{w}_0} \\ \xi'\end{pmatrix}} e^{-\frac{1}{2}\left|\zeta_{\mathfrak{w}_0}\right|^2},$$

mit

$$\begin{array}{rclrcl} A_{\mathfrak{w}} &=& 1 - Im\mathfrak{w}_0{}^{\frac{1}{2}} 2i(\mathfrak{w}_0 - \mathfrak{w}^*)^{-1} Im\mathfrak{w}_0{}^{\frac{1}{2}} & A_0 &=& 1 - 2Im\mathfrak{w}_0{}^{\frac{1}{2}} i(\mathfrak{w}_0)^{-1} 2Im\mathfrak{w}_0{}^{\frac{1}{2}} \\ B_{\mathfrak{w}} &=& Im\mathfrak{w}_0{}^{\frac{1}{2}} 2i(\mathfrak{w}_0 - \mathfrak{w}^*)^{-1} Im\mathfrak{w}^{\frac{1}{2}} & B_0 &=& 2Im\mathfrak{w}_0{}^{\frac{1}{2}} i(\mathfrak{w}_0)^{-1} \\ D_{\mathfrak{w}} &=& 1 - Im\mathfrak{w}^{\frac{1}{2}} 2i(\mathfrak{w}_0 - \mathfrak{w}^*)^{-1} Im\mathfrak{w}^{\frac{1}{2}} & D_0 &=& -i(\mathfrak{w}_0)^{-1}. \end{array}$$

Analog zu den $\mathcal{K}^{\mathcal{B}}_{\mathfrak{w}}, \mathcal{K}^{\mathcal{S}}$ Funktionen erfüllen auch $\mathcal{N}^{\mathcal{B}}_{\mathfrak{w}}$ und $\mathcal{N}^{\mathcal{S}}$ Differentialgleichungen:

Satz 3.1. *$\mathcal{N}^{\mathcal{B}}_{\mathfrak{w}}$ ist Lösung der Differentialgleichung in ξ',η'*

$$\Big(\partial^t_{\xi'},\partial^t_{\eta'}\Big)\Big(J_{\mathfrak{w}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\Big)\begin{pmatrix}\partial_{\xi'} \\ \partial_{\eta'}\end{pmatrix} = \partial_{\mathrm{t}},$$

und $\mathcal{N}^{\mathcal{S}}$ ist Lösung der Gleichung

$$\Big(\partial^t_{\xi'},\partial^t_{\eta'}\Big)\Big(\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\Big)\begin{pmatrix}\partial_{\xi'} \\ \partial_{\eta'}\end{pmatrix} = \partial_{\mathrm{t}}.$$

$J_{\mathfrak{w}}$ ist das Element in $\mathcal{J}$ welches mit $\mathfrak{w} \in \mathfrak{P}$ identifiziert wird:

$$J_w = \begin{pmatrix} Re\mathfrak{w}Im\mathfrak{w}^{-1} & -Im\mathfrak{w} - Re\mathfrak{w}Im\mathfrak{w}^{-1}Re\mathfrak{w} \\ Im\mathfrak{w}^{-1} & -Im\mathfrak{w}^{-1}Re\mathfrak{w} \end{pmatrix} =$$

$$= i\begin{pmatrix} 1 + 2\mathfrak{w}^*(\mathfrak{w} - \mathfrak{w}^*)^{-1} & -2\mathfrak{w}(\mathfrak{w} - \mathfrak{w}^*)^{-1}\mathfrak{w}^* \\ 2(\mathfrak{w} - \mathfrak{w}^*)^{-1} & -2(\mathfrak{w} - \mathfrak{w}^*)^{-1}\mathfrak{w}^* - 1 \end{pmatrix}.$$

Beweis: Genauso wie im Beweis des Satzes 1.1 und durch 2.1 erhält man, dass $\mathcal{N}^{\mathcal{B}}_{\mathfrak{w}}$ Lösung der ersten Differentialgleichung ist.
Für die zweite Aussage des Satzes errechnen wir

$$\frac{\partial\mathcal{N}^{\mathcal{S}}}{\partial_{\xi'_j}}(\zeta_{\mathfrak{w}_0},\xi',\eta',\mathrm{t}) = \big(\tfrac{i}{2\mathrm{t}}\eta'_j + \zeta^*_{\mathfrak{w}_0}\tfrac{2}{2\mathrm{t}}B_0 e_j - {\xi'}^t\tfrac{2i}{2\mathrm{t}^2}\mathfrak{w}_0^{-1}e_j\big)\mathcal{N}^{\mathcal{S}}(\zeta_{\mathfrak{w}_0},\xi',\eta',\mathrm{t}),$$

$$\frac{\partial\mathcal{N}^{\mathcal{S}}}{\partial_{\eta'_j}}(\zeta_{\mathfrak{w}_0},\xi',\eta',\mathrm{t}) = \big(\tfrac{i}{2\mathrm{t}}\xi'_j\big)\mathcal{N}^{\mathcal{S}}(\zeta_{\mathfrak{w}_0},\xi',\eta',\mathrm{t}).$$

und

$$\frac{\partial\mathcal{N}^{\mathcal{S}}}{\partial_{\mathrm{t}}}(\zeta_{\mathfrak{w}_0},\xi',\eta',\mathrm{t}) = 2\big(\tfrac{-r}{2\mathrm{t}} - \tfrac{i}{4\mathrm{t}^2}{\eta'}^t\xi' - \zeta^*_{\mathfrak{w}_0}\tfrac{2}{4\mathrm{t}^2}B_0\xi' + {\xi'}^t\tfrac{2i}{4\mathrm{t}^3}\mathfrak{w}_0^{-1}\xi'\big)\mathcal{N}^{\mathcal{S}}(\zeta_{\mathfrak{w}_0},\xi',\eta',\mathrm{t}).$$

So erhalten wir

$$\sum_j i\partial_{\xi'_j}\partial_{\eta'_j}\mathcal{N}^{\mathcal{S}} = \frac{1}{2}\partial_{\mathrm{t}}\mathcal{N}^{\mathcal{S}}.$$

$\square$

Lässt man $\mathfrak{w}$ gegen $\mathfrak{o}$ im Rande streben, so konvergiert $\mathcal{N}^{\mathcal{B}}_{\mathfrak{w}}$ punktweise gegen $\mathcal{N}^{\mathcal{S}}$, genauso wie im Fall von $\mathcal{K}^{\mathcal{B}}_{\mathfrak{w}}$ und $\mathcal{K}^{\mathcal{S}}$.

Dies führt zur folgenden Fragestellung: Kann man durch Identifikationen bzw. durch Erweiterung der Identifikation aus Kapitel 1 einen Limes in $\mathrm{Sp}^{\mathbb{C}}$ definieren, so dass

$$J_{\mathfrak{w}} \overset{\mathfrak{w}\to\mathfrak{o}, Im\mathfrak{w}>0}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}?$$

Konvergieren die Differentialoperatoren in irgendeinem Sinne? Wie ist dieser Limes zu interpretieren?
Die erste Frage werden wir noch in diesem Kapitel beantworten.

4. Realisierung des Shilov-Randes von $\mathcal{J}$ in $\mathrm{Sp}^{\mathbb{C}}$

Die Identifikation

$$\mathfrak{w} \in \mathfrak{P} \quad \longleftrightarrow \quad J_{\mathfrak{w}} \in \mathcal{J} \quad \longleftrightarrow \quad E_{-i}(J_{\mathfrak{w}}) \in \mathrm{LGr}_r(\mathbb{C}^{2r})_{>0}$$

aus Kapitel 1 ist über die $\pm i$-Eigenräume erfolgt. Nun geben wir eine konkrete Realisierung des Shilov-Randes der positiven, kompatiblen komplexen Strukturen

$$\mathcal{J} = \mathrm{Sp} \cap \left\{J^2 = -1\right\} \cap \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} J > 0\right\},$$

welcher sich mit den reellen Lagrange-Unterräumen des $\mathbb{C}^{2r}$ identifizieren lässt, in $\mathrm{Sp}^{\mathbb{C}}$ an.

Theorem 4.1. *Die Menge*

$$\left\{\mathcal{I} \in \mathrm{Sp}^{\mathbb{C}} : \mathcal{I}^2 = -1, \mathcal{I}^t = \mathcal{I}, \mathcal{I}^* = -\mathcal{I}\right\}$$

lässt sich mit den reellen Lagrange-Unterräumen des $\mathbb{C}^{2r}$ identifizieren.

Beweis: Sei $\mathcal{I} \in \mathrm{Sp}^{\mathbb{C}}$, mit $\mathcal{I}^2 = -1$, $\mathcal{I}$ symmetrisch und schiefhermitesch. Wir zeigen, dass dann die $\pm i$-Eigenräume von $\mathcal{I}$ reelle Lagrange-Unterräume sind, die außerdem transversal zueinander stehen. Durch die Bedingungen $\mathcal{I} \in \mathrm{Sp}^{\mathbb{C}}$ und $\mathcal{I}^2 = -1$ folgt

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{rcl} B, C & & \text{symmetrisch} \\ A^tC & = & CA \\ BA^t & = & AB \\ -A^2 - BC & = & 1 \end{array} .$$

Durch die Symmetrie von $\mathcal{J}$ gilt

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{rcl} A, B & & \text{symmetrisch} \\ BA & = & AB \\ -A^2 - B^2 & = & 1 \end{array} .$$

Seien nun

$$E_{-i}(\mathcal{J}) = \langle \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^j \rangle_{j=1,\dots,p} \qquad E_i(\mathcal{J}) = \langle \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}^j \rangle_{j=1,\dots,q},$$

mit $p + q = 2r$. Dann ist

$$\mathcal{J} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

und da

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{J} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{J}$$

folgt

$$\mathcal{J} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Das heißt, dass

$$\langle \begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}^j \rangle_{j=1,\dots,p} \subset E_i(\mathcal{J}),$$

insbesondere, dass $q \geq p$. Analog erhält man $p \geq q$ und

$$\langle \begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}^j \rangle_{j=1,\dots,r} = \langle \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}^j \rangle_{j=1,\dots,r} = E_i(\mathcal{J}).$$

$E_{-i}(\mathcal{J})$ und $E_i(\mathcal{J})$ sind Lagrange-Unterräume, da $\mathcal{J} \in \mathrm{Sp}^{\mathbb{C}}$ gilt

$$\mathcal{J}^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

und so folgt

$$(a^t, b^t) \mathcal{J}^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{J} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a^t, b^t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0.$$

Außerdem sind $E_{-i}(\mathcal{J})$ und $E_i(\mathcal{J})$ reelle Lagrange-Unterräume, das heißt, sie besitzen reelle Erzeuger: Da

$$\mathcal{J} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

ergibt sich durch Konjugation und dadurch, dass $\mathcal{J}$ symmetrisch ist

$$\mathcal{J}^* \begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{pmatrix} = -\mathcal{J} \begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{pmatrix}.$$

Hier erst wird die Bedingung genutzt, dass $\mathcal{J}$ schief-hermitesch ist. So erhält man

$$E_i(\mathcal{J}) = \langle \begin{bmatrix} a + \overline{a} \\ b + \overline{b} \end{bmatrix}^j, \begin{bmatrix} i(a - \overline{a}) \\ i(b - \overline{b}) \end{bmatrix}^j \rangle_{j=1,\dots,r},$$

und man kann reelle Erzeuger finden.

Hat man nun einen reellen Lagrange-Unterraum

$$\langle \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^j \rangle_{j=1,\ldots,r}, \quad \text{das heißt} \quad a^t b = b^t a,$$

so definieren wir $\mathcal{J}$ durch

$$E_{-i}(\mathcal{J}) = \langle \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^j \rangle_{j=1,\ldots,r} \quad \text{und} \quad E_i(\mathcal{J}) = \langle \begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}^j \rangle_{j=1,\ldots,r}.$$

$\mathcal{J}$ ist wohl definiert, da

$$\begin{pmatrix} a^t & b^t \\ b^t & -a^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^t a + b^t b & 0 \\ 0 & a^t a + b^t b \end{pmatrix} > 0.$$

Es ist klar, dass $\mathcal{J}^2 = -1$. Desweiteren gilt $\mathcal{J} \in \mathrm{Sp}^{\mathbb{C}}$ mit $\mathcal{J}^t = \mathcal{J}$ und $\mathcal{J}^* = -\mathcal{J}$, wie sich durch

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} b & a \\ -a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^t a + b^t b & 0 \\ 0 & a^t a + b^t b \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b^t & -a^t \\ a^t & b^t \end{pmatrix},$$

das heißt

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{rcl} A & = & ib(a^t a + b^t b)^{-1} b^t - ia(a^t a + b^t b)^{-1} a^t \\ B & = & -ib(a^t a + b^t b)^{-1} a^t - ia(a^t a + b^t b)^{-1} b^t \end{array},$$

zeigen lässt.

□

Durch diese Realisierung lässt sich auch der Shilov-Rand von $\mathfrak{P}$

$$\mathscr{S}(\mathfrak{P}) = \{\mathfrak{u} \in \mathbb{R}^{r \times r} : \mathfrak{u}^t = \mathfrak{u}\}$$

in der Menge

$$\left\{\mathcal{J} \in \mathrm{Sp}^{\mathbb{C}} : \mathcal{J}^2 = -1, \mathcal{J}^t = \mathcal{J}, \mathcal{J}^* = -\mathcal{J}\right\}$$

realisieren:

Korollar 4.2. *es ergibt sich folgende Identifikation:*

$$\mathfrak{u} \in \mathscr{S}(\mathfrak{P}) \longleftrightarrow \mathcal{J}_{\mathfrak{u}} \in \left\{\mathcal{J} \in \mathrm{Sp}^{\mathbb{C}} : \mathcal{J}^2 = -1, \mathcal{J}^t = \mathcal{J}, \mathcal{J}^* = -\mathcal{J}\right\},$$

wobei $\mathcal{J}_{\mathfrak{u}}$ *durch*

$$E_{-i}(\mathcal{J}_{\mathfrak{u}}) = \langle \begin{bmatrix} \mathfrak{u} \\ 1 \end{bmatrix}^j \rangle_{j=1,\ldots,r} \quad \textit{und} \quad E_i(\mathcal{J}_{\mathfrak{u}}) = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathfrak{u} \end{bmatrix}^j \rangle_{j=1,\ldots,r}$$

definiert ist.

Beweis: Dies folgt aus dem vorherigen Theorem und der Tatsache, dass

$$\langle \begin{bmatrix} \mathfrak{u} \\ 1 \end{bmatrix}^j \rangle_{j=1,\ldots,r} \quad \text{und} \quad \langle \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathfrak{u} \end{bmatrix}^j \rangle_{j=1,\ldots,r}$$

reelle Lagrange-Unterräume sind, die transversal zueinander stehen.

□

5. Die Konvergenz der $J_{\mathfrak{w}}$

Im Abschnitt 3 wurde gezeigt, dass die Funktionen $\mathcal{N}^{\mathcal{B}}_{\mathfrak{w}}(\zeta_{\mathfrak{w}_0}, \xi', \eta', \mathrm{t})$ der Differentialgleichung

$$\left(\partial^t_{\xi'}, \partial^t_{\eta'}\right)\left(J_{\mathfrak{w}}\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array}\right)\right)\left(\begin{array}{c} \partial_{\xi'} \\ \partial_{\eta'} \end{array}\right) = \partial_{\mathrm{t}},$$

genügen und dass $\mathcal{N}^{\mathcal{S}}(\zeta_{\mathfrak{w}_0}, \xi', \eta', \mathrm{t})$ Lösung der Gleichung

$$\left(\partial^t_{\xi'}, \partial^t_{\eta'}\right)\left(\left(\begin{array}{cc} i & 0 \\ 0 & -i \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array}\right)\right)\left(\begin{array}{c} \partial_{\xi'} \\ \partial_{\eta'} \end{array}\right) = \partial_{\mathrm{t}}$$

ist. Da

$$\mathcal{N}^{\mathcal{B}}_{\mathfrak{w}}(\zeta_{\mathfrak{w}_0}, \xi', \eta', \mathrm{t}) \overset{\mathfrak{w}\to\mathfrak{o}, Im\mathfrak{w}>0}{\longrightarrow} \mathcal{N}^{\mathcal{S}}(\zeta_{\mathfrak{w}_0}, \xi', \eta', \mathrm{t})$$

stellte sich die Frage ob in irgendeinem Sinne

$$J_{\mathfrak{w}} \overset{\mathfrak{w}\to\mathfrak{o}, Im\mathfrak{w}>0}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc} i & 0 \\ 0 & -i \end{array}\right)?$$

Für diese haben wir jetzt eine Antwort: Durch die Identifikation $\mathfrak{w} \longleftrightarrow J_{\mathfrak{w}}$, und da $\mathfrak{w}$ gegen den Shilov-Rand $\mathscr{S}(\mathfrak{P})$ strebt, bietet es sich an mit dem dazugehörigen positiven Lagrange-Unterräumen $E_{-i}(J_w)$ zu arbeiten. Diese konvergieren in $\mathrm{LGr}_r(\mathbb{C}^{2r})$ gegen einen reellen Lagrange-Unterraum

$$E_{-i}(J_w) = \langle \left[\begin{array}{c} \mathfrak{w}^* \\ 1 \end{array}\right]^j \rangle_{j=1,\ldots,r} \overset{\mathfrak{w}\to\mathfrak{o}, Im\mathfrak{w}>0}{\longrightarrow} \langle \left[\begin{array}{c} \mathfrak{o} \\ 1 \end{array}\right]^j \rangle_{j=1,\ldots,r},$$

und dieser ist durch

$$\mathcal{J} = \left(\begin{array}{cc} i & 0 \\ 0 & -i \end{array}\right)$$

realisiert.

Bemerkung 5.1. $\mathcal{J}$ ist unter der Abbildung $-(\,)^t$ abgeschlossen, und falls $(J_\lambda)_\lambda \in \mathcal{J}$ mit

$$J_\lambda \overset{\lambda}{\longrightarrow} \mathcal{J} \in \mathscr{S}(\mathcal{J})$$

via der obigen Identifikation, so gilt auch

$$-J^t_\lambda \overset{\lambda}{\longrightarrow} -\mathcal{J}^t = -\mathcal{J} \in \mathscr{S}(\mathcal{J}).$$

Die Fragen bezüglich der Konvergenz der Differentialoperatoren sind noch offen und ihre Antworten schreiten über die Grenzen dieser Arbeit hinaus. Es bieten sich schwache Konvergenzen, wie die schwache*-Konvergenz oder die schwache**-Konvergenz auf Sobolev-Räumen des Typs $\mathcal{H}^{2,1}$ an.

Literaturverzeichnis

[APW91] S. Axelrod, S. Della Pietra, and E. Witten, *Geometric quantization of chern-simons gauge theory*, J.Diff. Geometry **33** (1991), 787–902.

[Ara90] J. Arazy, *Operator differentiable functions*, Integral Equations and Operator Theory **13** (1990), 461–487.

[Arn89] V.I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer, 1989.

[AU03] J. Arazy and H. Upmeier, *Boundary measures for symmetric domians and integral formulas for the discrete wallach points*, Integral Equations and Operator Theory **47** (2003), 375–434.

[Bar] V. Bargmann, *Group representations on hilbert spaces of analytic functions*, Analytic Methods in Mathematical Physics, Gilbert and Newton, Eds. Gordon and Breach, New York.

[Bar61] ———, *On a hilbert space of analytic functions and an assotiated integral transform, part 1*, Comm. Pure and applied Mathematics **14** (1961), 187–214.

[BK79] M. Brunet and P. Kramer, *Semigroups of lenght increasing transformations*, Reports on Mathematical Physics **15** (1979), 287–304.

[BK80] ———, *Complex extension of the representation of the symplectic group assotiated with the canonical commutation relations*, Reports on Mathematical Physics **17** (1980), 205–215.

[BP77] M. Burdet and M. Perrin, *Weyl quantization and metaplectic representation*, Group Theoretical Methods in Physics: Sixth International Colloquium Tübingen 1977. Editor: P. Kramer, A. Rieckers, Lecture Notes in Physics **79** (1977), 515–517.

[Bru77] M. Brunet, *The metaplectic semigroup and the implementation of complex linear canonical transformations in quantum mechanics*, Group Theoretical Methods in Physics: Sixth International Colloquium Tübingen 1977. Editor: P. Kramer, A. Rieckers, Lecture Notes in Physics **79** (1977), 512–514.

[Bru85] ———, *The metaplectic semigroup and related topics*, Reports on Mathematical Physics **22** (1985), 149–170.

[Cha07] L. Charles, *Semi-classical properties of geometric quantization with metaplectic correction*, Comm. Math. Phys. **270 (2)** (2007), 445–480.

[Con90] J.B. Conway, *A course in functional analysis*, Springer, 1990.

[Duo01] J. Duoandikoetxea, *Fourier analysis*, American Mathematical Society, 2001.

[ELRM] A. Echeverría Enríquez, M. Muñoz Lencada, N. Román Roy, and C. Victoria Monge, *Mathematical foundations of geometric quantization*, pre-print, arXiv: math-ph/9904008.

[FK94] J. Faraut and A. Korányi, *Analysis on symmetric cones*, Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford, 1994.

[FMMN05] C. Florentino, P. Matias, J. Mourao, and J.P. Nunes, *Geometric quantization, complex structures and the coherent state transform*, J. Funct. Anal. **221** (2005), 303–322.

[Fol89] G. Folland, *Harmonic analysis in phase space*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1989.

[Hal94] B. Hall, *The segal-bargmann 'coherent state' transform for compact lie groups*, Journal of Functional Analysis **122** (1994), 103–151.

[Hal00] ______, *Harmonic analysis with respect to the heat kernel measure*, Bulletin (new series) of the American Mathematical Society **38 (1)** (2000), 43–78.

[Hal02] ______, *Geometric quantization and the generalized segal-bargmann transform for lie groups of compact type*, Comm. Math. Phys. **226** (2002), 233–268.

[Hel62] S. Helgason, *Differential geometry and symmetric spaces*, Academic Press, 1962.

[Hil89] J. Hilgert, *A note on howe's oscillator semigroup*, Annales de l'institut Fourier **39, n°3** (1989), 663–688.

[HK] B. Hall and W. Kirwin, *Unitarity in 'quantization commutes with reduction'*, Comm. Math. Phys., pre-print, arXiv: math/0610005.

[HL] B. Hall and W. Lewkeeratiyutkul, *Holomorphic sobolev spaces and the generalized segal-bargmann transform.*

[How88] R. Howe, *The oscillator semigroup in the mathematical heritage of hermann weyl*, Proc. Symp. Pure Math., R.O. Wells, Ed. AMS Providence **48** (1988), 61–110.

[Jac49] N. Jacobson, *Lie and jordan triple systems*, American Journal of Mathematics **71 (1)** (1949), 149–170.

[Kir07] W. Kirwin, *Coherent states in geometric quantization*, Journal of Geometry and Physics **57** (2007), 531–548.

[KMS75] P. Kramer, M.Moshinsky, and T. H. Seligman, *Complex extensions of the canonical transformations and quantum mechanics, in group theory and its applications iii*, E. Loebe Ed. Acad. Press, New York, 1975.

[KN63] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundatios of differential geometry, vol i*, Interscience Publishers, 1963.

[KN69] ______, *Foundatios of differential geometry, vol ii*, Interscience Publishers, 1969.

[Kob87] S. Kobayashi, *Differential geometry of complex vector bundles*, Princeton Univ. Press, 1987.

[Kra77] P. Kramer, *Composite particles and symplectic (semi-)groups*, Group Theoretical Methods in Physics: Sixth International Colloquium Tübingen 1977. Editor: P. Kramer, A. Rieckers, Lecture Notes in Physics **79** (1977), 180–200.

[KU77] W. Kaup and H. Upmeier, *Jordan algebras and symmetric siegel domains in banach spaces*, Mathematische Zeitschrift **157** (1977), 179–200.

[KW65] A. Koranyi and J. Wolf, *Realization of hermitian symmetric spaces as generalized half-planes*, Annals of Mathematics **81 (2)** (1965), 265–288.

[KW06] W. Kirwin and S. Wu, *Geometric quantization, parallel transport and the fourier transform*, Comm. Math. Phys. **266** (2006), 577—594.

[Lev69] D. Levine, *Systems of singular integral operators on spheres*, Transactions of the American Mathematical Society **144** (1969), 493–522.

[Loo77] O. Loos, *Bounded symmetric domains and jordan pairs*, Mathematical lectures, University of Irvine, California, 1977.

[McC78] K. McCrimmon, *Jordan algebras and their applications*, Bulletin of the American Mathematical Society **84 (4)** (1978), 612–627.

[Nee93] K.-H. Neeb, *Holomorphic extension of unitary representations*, Seminar Sophus Lie **3** (1993), 27–34.

[Ner96] Y. Neretin, *Integral operators with gaussian kernels and symmetries of canonical commutation relations*, Contemporary Mathematical Physics, Translations, American Mathematical Society **175** (1996), 97–135.

[Rit] W.G. Ritter, *Geometric quantization*, pre-print, arXiv: math-ph/028008.

[Ś80] J. Śniatycki, *Geometric quantization and quantum mechanics*, Springer Verlag, 1980.

[Seg81] G. Segal, *Unitary representations of some infinite dimensional groups*, Comm. Math. Phys. **80** (1981), 301–342.

[Tuy87] G.M. Tuynman, *Generalized bergman kernels and geometric quantization*, Journal Mathematical Physics **28 (3)** (1987), 573–583.

[Upm83] H. Upmeier, *Toeplitz operators on bounded symmetric domains*, Transactions of the American Mathematical Society **280 (1)** (1983), 221–237.

[Upm85a] ———, *Jordan algebras in analysis, operator theory, and quantum mechanics*, Conference Board, American Mathematical Society, 1985.

[Upm85b] ———, *Symmetric banach manifolds and jordan c^*-algebras*, North-Holland, 1985.

[Upm85c] ———, *Toeplitz operators on symmetric siegel domains*, Math. Ann. **271** (1985), 401–414.

[Upm86] ———, *Jordan algebras and harmonic analysis on symmetric spaces*, American Journal of Mathematics **108** (1986), 355–386.

[Upm96] ———, *Toeplitz operators and index theory in several complex variables*, Birkhäuser, 1996.

[Upm08a] ———, *Projectively flat hilbert bundles on jordan varieties*, Integral Equations and Operator Theory **pre-print** (2008).

[Upm08b] ———, *Toeplitz operator algebras and complex analysis*, Operator Theory: Advances and Applications: Operator Algebras, Operator Theory and Applications, Birkhäuser Basel **181** (2008), 67–118.

[Upm09] ———, *Hilbert bundles and flat connections over hermitian symmetric domains*, Integral Equations and Operator Theory **pre-print** (2009).

[VB02] C. Villegas-Blas, *The bargmann transformand canonical transformations*, Journal of Mathematical Physics **43 (5)** (2002), 2249–2283.

[Wit] E. Witten, *Quantum background independence in string theory*, pre-print, arXiv:hep-th/9306122.

[Woo81] N.M.J. Woodhouse, *Geometric quantization and the bogoliubov transformation*, Proc. Royal Soc. London **A 378** (1981), 119—-139.

[Woo92] N. M. J. Woodhouse, *Geometric quantization*, New York, Oxford University Press, 1992.

Danksagung

Mein Dank geht in erster Linie an Herrn Prof. Dr. Upmeier für seine exzellente Betreuung, für seine allzeitige Bereitschaft für Besprechungen, die interessanten mathematischen und nicht-mathematischen Mittagsgespräche, und dass er mich trotz meiner großen Pause nicht aufgegeben und immer unterstützt hat.
Ich danke Herrn Prof. Dr. Knöller sehr für die Übernahme des Zweitgutachtens.

Ich danke meiner ganzen Familie und meinen Freunden für die liebevolle Unterstützung, insbesondere ganz herzlich Eric, der mir immer Halt gegeben hat, und meinen Eltern für die kraftgebenden Worte. Auch Diana und Puchito danke ich sehr.

Ich danke Benjamin, Eric und Annika für das gewissenhafte Korrekturlesen und die wertvollen Anmerkungen.

Ich danke den Teilnehmern des „mathematischen Physik Seminars“, für die stets interessanten Sitzungen und die gute Stimmung, die sich auch in Unternehmungen wie Fahrradtouren wiedergespiegelt hat.

Ich danke dem Fachbereich Mathematik und Informatik, der Philipps Universität Marburg für das angenehme Arbeitsklima.

Schlussendlich danke ich auch noch dem DAAD, durch welchen ich die Möglichkeit bekam, in Deutschland bei Herrn Prof. Dr. Upmeier zu promovieren, und Herrn Prof. Dr. Sommer und Herrn Prof. Dr. Upmeier für die Mitarbeiterstelle am Fachbereich Mathematik und Informatik, welche es erlaubte meine Promotion weiterzufinanzieren.