Einbettung von quasi-projektiven Mannigfaltigkeiten und effektive Resultate

Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

dem
Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
vorgelegt von

Holger Aust

aus Berlin

Marburg/Lahn im Oktober 2009

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Holomorphe Geradenbündel über komplexen Mannigfaltigkeiten zu studieren, ist ein zentrales Feld der algebraischen Geometrie. Insbesondere spielen Positivitätseigenschaften der Geradenbündel eine große Rolle, denn damit können wir Rückschlüsse auf die Geometrie der zugrundeliegenden Mannigfaltigkeit gewinnen. Besonders interessant ist die Fragestellung, wann eine Mannigfaltigkeit in gewisse Räume eingebettet werden kann. Der Satz von Whitney aus dem Jahr 1936 besagt, dass jede reell-n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, welche das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, in den $\mathbb{R}^{2n}$ eingebettet werden kann. Nash zeigte die isometrische Einbettbarkeit von Riemannschen Mannigfaltigkeiten. 1954 bewies er den $\mathcal{C}^1$-Einbettungssatz, 1956 den $\mathcal{C}^k$-Einbettungssatz und 1966 schließlich den reell-analytischen Fall.

1.1 Kompakte Mannigfaltigkeiten

Für komplexe Mannigfaltigkeiten gelten die oben genannten Resultate so nicht, da die Bedingung der Holomorphie strenger als die Bedingung der Glattheit ist, das heißt, es gibt wesentlich weniger holomorphe als glatte Schnitte. Zur Einbettung benötigt man aber in gewissem Sinne viele Schnitte, denn diese müssen je zwei Punkte trennen und in jedem Punkt richtungstrennend sein.

Komplexe Mannigfaltigkeiten, welche in den $\mathbb{C}^N$ eingebettet werden können, heißen Stein-Mannigfaltigkeiten und besitzen eine reichhaltige Funktionentheorie. Es gibt eine zweite große Klasse von komplexen Mannigfaltigkeiten, nämlich diejenigen, die sich in den komplexen projektiven Raum $\mathbb{P}^N$ einbetten lassen. Es stellt sich also die Frage, wann sich eine komplexe Mannigfaltigkeit in den projektiven Raum einbetten läßt und wie diese Einbettung genau aussieht. Eine solche Einbettung hat nach dem Satz von Chow (1949) nämlich zur Konsequenz, dass die Mannigfaltigkeit eine glatte, projektive Varietät ist, sich also als Nullstellenmenge von homogenen Polynomen darstellen läßt. Damit ist die Verbindung zur klassischen algebraischen Geometrie hergestellt. Das klassische Resultat ist der berühmte Einbettungssatz von Kodaira aus dem Jahr 1954.

Satz 1.1.1 (Kodaira, [Kod54])
Sei X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, welche ein positives Geradenbündel L besitzt.

Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass X in den projektiven Raum $\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$ eingebettet werden kann.

Die Einbettungsabbildung wird durch Schnitte eines Vielfachen des Geradenbündels L definiert, das heißt, es existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so dass die durch eine Basis $\{\lambda_0, ..., \lambda_N\}$ von $H^0(X, mL)$ bestimmte meromorphe Abbildung $\Phi_{|mL|} : X \rightharpoonup \mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}, x \mapsto [\lambda_0(x), ..., \lambda_N(x)]$ eine holomorphe Einbettung ist. Damit das so ist, muss $|mL|$ also punkte- und richtungstrennend sein. In der Sprache der Jets heißt das, dass mL die 0-Jets in je zwei Punkten und die 1-Jets in je einem Punkt erzeugt.

Da man aus dem obigen Satz weiß, dass ein Vielfaches eines positiven Geradenbündels eine Einbettung einer kompakten Mannigfaltigkeit liefert, stellt sich die Frage, welche Vielfachheit mindestens nötig ist. Man ist also an effektiven Abschätzungen interessiert, welche nur von der Dimension der Mannigfaltigkeit abhängen. Fujita bewies 1987 mittels Mori-Theorie folgenden Satz, der Anlass zu seiner berühmten Vermutung war.

Satz 1.1.2 (Fujita, [Fuj87])
Sei X eine projektive n-dimensionale Mannigfaltigkeit und L ein amples Geradenbündel auf X.

Dann gilt:

a) $K_X + \beta L$ nef für $\beta \geq n + 1$.

b) $K_X + \beta L$ ample für $\beta \geq n + 2$.

Vermutung 1.1.3 (Fujita, [Fuj87])
Sei X eine projektive n-dimensionale Mannigfaltigkeit und L ein amples Geradenbündel auf X.

Dann gilt:

a) $K_X + \beta L$ global erzeugt für $\beta \geq n + 1$.

b) $K_X + \beta L$ sehr ample für $\beta \geq n + 2$.

Seit Reider [Rei88] die Vermutung im Flächenfall bewiesen hat, gab es eine Reihe von Resultaten, welche sich in die beiden Teilvermutungen a) und b) aufspalten. Die Vermutung zur globalen Erzeugung wurde in der Dimension $n = 3$ von Ein und Lazarsfeld [EL93] und der Fall $n = 4$ von Kawamata [Kaw97] bewiesen. In allgemeiner Dimension konnte Heier [Hei02] die Abschätzung auf $O(n^{\frac{4}{3}})$ drücken, wobei er vor allem die Techniken von Angehrn und Siu [AS95] und von Helmke [Hel97, Hel99] nutzt.

Die effektive Einbettung von kompakten Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension durch $K_X + \beta L$ ist noch unklar. Etwas besser handhabbar wird das Problem, wenn auch Vielfachheiten des kanonischen Bündels zugelassen werden. So konnte Demailly in [Dem93] mittels Monge-Ampère-Gleichungen zeigen, dass $2K_X + 12n^n L$ sehr ample ist. Weitere Beiträge kommen von Kollár [Kol93] und Ein, Lazarsfeld und Nakamaye [ELN96], deren Beweise algebraischer Natur sind. Siu erreicht in [Siu96] die Ordnung $O((3e)^n)$. Demailly konnte in [Dem96] den Beweis von Siu weiter verbessern und erreichte folgenden Satz.

Satz 1.1.4 (Demailly, [Dem94, Dem96])
Sei X eine projektive Mannigfaltigkeit der Dimension n, L ein amples Geradenbündel. Seien $x_1, ..., x_p \in X$ und $s_1, ..., s_p \in \mathbb{N}_0$.

Dann ist für $\beta \geq 2 + \sum_{j=1}^{p} \binom{3n+2s_j-1}{n}$ die Abbildung

$$H^0(X, 2K_X + \beta L) \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{p} \mathcal{O}(2K_X + \beta L)_{x_j} \otimes \mathcal{O}_{X,x_j}/\mathfrak{m}_{X,x_j}^{s_j+1}$$

surjektiv.

Insbesondere ist für $\beta \geq 2 + \binom{3n+1}{n}$ das Geradenbündel $2K_X + \beta L$ sehr ample.

1.2 Quasi-projektive Mannigfaltigkeiten

In der vorliegenden Arbeit wollen wir die obigen Fragestellungen bei quasi-projektiven Mannigfaltigkeiten untersuchen. Gegeben ist also eine Zariski-offene Teilmenge X einer projektiven Mannigfaltigkeit $\overline{X}$. Es sollen mit Hilfe eines Geradenbündels L, welches gewissen Positivitätsbedingungen genügt, Schnitte gefunden werden, die X in den projektiven Raum einbetten. Dabei sind die Positivitätsbedingungen von L nur auf X gefordert, so dass sich auch wirklich nur X einbetten läßt, nicht aber die Kompaktifizierung $\overline{X}$.

Bei der Untersuchung von Modulräumen von polarisierten Varietäten konnten Schumacher und Tsuji 2004 folgenden Satz beweisen.

Satz 1.2.1 (Schumacher und Tsuji, [ST04])
Sei X ein irreduzibler algebraischer Raum mit Kompaktifizierung $\overline{X}$ und sei L ein Geradenbündel auf $\overline{X}$, welches eine singuläre Metrik h auf $L|_{red(\overline{X})}$ besitzt, so dass gilt:

(i) Für jedes $p \in \overline{X}$ und jede holomorphe Kurve $C \subset \overline{X}$ mit $p \in C$ und $C \cap X \neq \varnothing$ ist $\Theta_h|_C$ wohldefiniert und $\nu(\Theta_h|_C, p) = 0$.

(ii) Für jeden glatten, lokal abgeschlossenen Unterraum $Z \subset X$ ist der Strom $\Theta_h|_Z$ wohldefiniert und es existiert eine positiv definite $\mathcal{C}^\infty$ hermitesche Form γ_Z auf Z, so dass $\Theta_h|_Z \geq \gamma_Z$.

Dann definiert die Abbildung $\Phi_{|mL|} : \overline{X} \rightharpoonup \mathbb{P}^N$ eine Einbettung von X für genügend große m.

Damit ist ein Indiz gegeben, dass (i) und (ii) geeignete Positivitätsbedingungen sind, also ein Analogon zur Ampleness auf kompakten Mannigfaltigkeiten. Die Bedingung (i) kann abgeschwächt werden, indem wir für die singuläre Metrik h das Verschwinden der Lelong-Zahlen nur auf X und nur analytische Singularitäten auf dem Rand fordern.

Wir beschränken uns in dieser Arbeit auf den glatten Fall. Dabei benutzen wir die üblichen analytischen Methoden, insbesondere die Konstruktion von singulären Metriken mit hohen Lelong-Zahlen in vorgegebenen isolierten Punkten und Nadels Verschwindungssatz.

Folgende Resultate können wir zeigen. Der erste Hauptsatz liefert die Existenz einer Einbettung durch ein Vielfaches des kanonischen Geradenbündels $K_{\overline{X}}$ und ein Vielfaches des Geradenbündels L. Dabei benutzen wir einen einfachen numerischen Trick, um lokale Einbettungen zu einer globalen Einbettung zusammenzufügen. Daher kommen auch die Vielfachheiten des kanonischen Bündels zustande. Dieser Satz ist eine Erweiterung der Techniken von Sommese [Som75, Som76], der bei der Untersuchung der Periodenabbildung solche Resultate für glatte hermitesche Metriken mit L^2-Polen am Rand zeigen konnte.

Satz 1.2.2
Sei X eine Zariski-offene Teilmenge einer projektiven Mannigfaltigkeit $\overline{X}$. Sei L ein holomorphes Geradenbündel auf $\overline{X}$, welches eine singuläre Metrik h besitzt mit

(i) $\Theta_h \geq c\omega_{\overline{X}}$ *auf X für ein $c \in \mathcal{C}(X,(0,\infty))$,*

(ii) $\nu(h,x) = 0$ *für alle $x \in X$.*

Dann existieren natürliche Zahlen α und β, so dass X durch Schnitte aus $H^0(\overline{X}, \alpha(K_{\overline{X}} + \beta L))$ in den projektiven Raum eingebettet wird.

Falls ein Geradenbündel L wie im obigen Satz eine singuläre Metrik mit den Bedingungen (i) und (ii) besitzt, so nennen wir das Geradenbündel singulär-positiv modulo Rand.

Der zweite Hauptsatz gibt effektive Resultate, welche in der geschilderten Situation von singulär-positiven Geradenbündeln modulo Rand auf quasi-projektiven Mannigfaltigkeiten die ersten effektiven überhaupt sind. Dabei benutzen wir eine doppelte Induktion zur Konstruktion der benötigten singulären Metriken, welche Demailly zum Beweis des oben genannten Satzes im kompakten Fall entwickelt hat.

Satz 1.2.3
Sei X eine Zariski-offene Teilmenge einer projektiven Mannigfaltigkeit $\overline{X}$. Sei L ein holomorphes Geradenbündel auf $\overline{X}$, welches eine singuläre Metrik h besitzt mit

(i) $\Theta_h \geq c\omega_{\overline{X}}$ *auf X für ein $c \in \mathcal{C}(X,(0,\infty))$,*

(ii) $\nu(h,x) = 0$ *für alle $x \in X$.*

Seien weiterhin $x_1, ..., x_p \in X$, $s_1, ..., s_p \in \mathbb{N}_0$ und $\beta \geq 2 + \sum_{j=1}^{p} \binom{3n+2s_j-1}{n}$.

Dann erzeugt $H^0(\overline{X}, 2K_{\overline{X}} + \beta L)$ die s_j-Jets in den Punkten $x_1, ..., x_p$.

Als Anwendung bekommen wir effektive Resultate zur Basispunktfreiheit und Einbettung.

Korollar 1.2.4
Seien $X \subset \overline{X}$ und L wie im vorherigen Satz gegeben.

Dann gilt:

a) $H^0(\overline{X}, 2K_{\overline{X}} + \beta L)$ *ist global erzeugt modulo Rand für* $\beta \geq 2 + \binom{3n-1}{n}$,

b) $H^0(\overline{X}, 2K_{\overline{X}} + \beta L)$ *ist sehr ample modulo Rand für* $\beta \geq 2 + \binom{3n+1}{n}$.

1.3 Aufbau der vorliegenden Arbeit

In Kapitel 2 werden kurz einige analytische Hilfsmittel vorgestellt, die für das weitere Vorgehen essentiell sind. So führen wir Lelong-Zahlen als analytisches Analogon zur algebraischen Multiplizität ein. Weiterhin definieren wir Multiplikatoridealgarben und beschreiben den Zusammenhang zwischen der Existenz geeigneter Metriken und den klassischen algebraischen Positivitätseigenschaften. Die explizite Konstruktion von geeigneten singulären Metriken aus holomorphen Schnitten wird das wesentliche Beweiselement der Sätze aus den Kapiteln 5 und 6 sein.

In Kapitel 3 stellen wir den zugrunde liegenden Satz, welcher auf Hörmander zurückgeht, vor, auf dem die gesamte L^2-Theorie der algebraischen Geometrie beruht. Dieser Satz beschreibt nämlich den Zusammenhang zwischen holomorphen Lösungen einer Differentialgleichung und L^2-Abschätzungen. Genauer gesagt wird durch Quadrat-Integrabilitäts-Forderungen die $\overline{\partial}$-Exaktheit von Strömen gezeigt, welche wiederum das Verschwinden von entsprechenden höheren Kohomologien impliziert (Nadels Verschwindungssatz). Als Konsequenz ergibt sich mit Hilfe des Satzes von Riemann-Roch die Existenz von holomorphen L^2-Schnitten auf einem adjungierten Vielfachen eines Geradenbündels.

Kapitel 4 beschäftigt sich mit den verschiedenen Begriffen der Positivität und beschreibt die Relationen zwischen diesen. Dabei betrachten wir zuerst den klassischen Fall von Geradenbündeln auf kompakten Mannigfaltigkeiten und definieren dann im zweiten Abschnitt Analoga auf quasi-projektiven Mannigfaltigkeiten.

In Kapitel 5 verwenden wir nun Hörmanders L^2-Abschätzung, um Satz 1.2.2 zu zeigen. Dazu konstruieren wir genügend viele holomorphe L^2-Schnitte auf verschiedenen Vielfachheiten des adjungierten Geradenbündels. Wir wenden einen numerischen Trick an, welcher auf Sommese zurückgeht, um in diesem nicht-kompakten Fall die Schnitte auf dasselbe Vielfache des adjungierten Geradenbündels zu bekommen.

In Kapitel 6 können wir nun eine effektive Version des vorherigen Satzes zeigen, nämlich Satz 1.2.3. Wir stellen zuerst Demaillys Methoden für ample Geradenbündel auf kompakten Mannigfaltigkeiten vor und erweitern dann diese, um auch für singulär-positive Geradenbündel auf quasi-projektiven Mannigfaltigkeiten vergleichbare Resultate zeigen zu können.

Kapitel 7 stellt einige einfache Anwendungen der Resultate aus Kapitel 6 vor. Wir betrachten also spezielle Mannigfaltigkeiten, die schon einer gewissen Positivität genügen, und untersuchen die Konsequenzen der gezeigten Sätze für diese. Außerdem können wir die Positivitätsbedingung, welche in der Vielfachheit des Geradenbündels steckt, auch als Positivität des Schnittprodukts des Geradenbündels mit allen Untervarietäten der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit ausdrücken.

Kapitel 2

Analytische Methoden

Die folgenden grundlegenden Definitionen und Eigenschaften liefern uns analytische Werkzeuge, welche helfen, Positivität von Geradenbündeln über Mannigfaltigkeiten zu beschreiben. Eine ausführliche und gut verständliche Beschreibung dieser und weiterer analytischer Methoden für die algebraische Geometrie findet man in Demaillys Buch [Dem07] und seinen Lecture Notes [Dem94], so dass hier viele Beweise übernommen werden.

2.1 Lelong-Zahlen von Strömen

Lelong-Zahlen wurden von Lelong [Lel57] für Ströme eingeführt. Sie sind das analytische Analogon zur Multiplizität der algebraischen Schreibweise. Besonders wichtig sind die Lelong-Zahlen für plurisubharmonische Funktionen φ, indem man als Strom $\Theta = \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi$ setzt, also die Krümmung der zu φ gehörenden singulären Metrik $h = e^{-2\varphi}$ betrachtet.

Definition 2.1.1
Sei Θ ein geschlossener, positiver Strom der Bidimension (p, p) auf einer Koordinatenumgebung $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Dann definiert man die Lelong-Zahl von Θ im Punkt $x \in \Omega$ als

$$\nu(\Theta, x) := \lim_{r\to 0+} \nu(\Theta, x, r) := \lim_{r\to 0+} \frac{\sigma_\Theta(B(x, r))}{\pi^p r^{2p}/p!},$$

wobei $\sigma_\Theta = \Theta \wedge \frac{1}{p!}(\pi\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}|z|^2)^p$ die Fläche von Θ in der Kugel $B(x, r)$ bestimmt.

Sei weiterhin $E_c(\Theta) := \{x \in X \mid \nu(\Theta, x) \geq c\}$ die Niveaumenge von Θ zum Niveau $c \in [0, \infty]$.

Die folgenden Sätze von Lelong, Thie und Siu drücken wichtige Aspekte der Lelong-Zahlen aus.

Satz 2.1.2 (Lelong, [Lel57])

a) *Sei Θ ein positiver Strom. Dann ist $r \mapsto \nu(\Theta, x, r)$ eine nichtnegative wachsende Funktion, insbesondere existiert der Grenzwert für $r \to 0+$.*

b) *Ist $\Theta = \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi$ der zu einer plurisubharmonischen Funktion φ gehörende $(1, 1)$-Strom, dann ist*

$$\nu(\Theta, x) = \sup\{\gamma \geq 0 \mid \varphi(z) \leq \gamma \log|z - x| + O(1)\}.$$

Ist $\varphi = \log|f|$ für ein $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X)$ und $\Theta = \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi = [Z_f]$, dann gilt

$$\nu([Z_f], x) = \mathrm{ord}_x(f) = \max\{m \in \mathbb{N} \mid D^\alpha f(x) = 0, |\alpha| < m\}.$$

Ist $h = e^{-2\varphi}$ eine singuläre Metrik für eine plurisubharmonische Funktion φ, dann schreiben wir auch $\nu(h, x) := \nu(\varphi, x) := \nu(\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi, x)$. Außerdem folgt aus dem obigen Satz, dass

$$\nu(\varphi, x) = \liminf_{z\to x} \frac{\varphi(z)}{\log|z-x|}.$$

Satz 2.1.3 (Thie, [Thi67])
Sei A eine analytische Untervarietät von X. Dann stimmt die Lelong-Zahl $\nu([A], x)$ des Integrationscurrent $[A]$ mit der Multiplizität von A in x überein.

Satz 2.1.4 (Siu, [Siu74])
Sei Θ ein geschlossener, positiver Strom der Bidimension (p, p) auf einer komplexen Mannigfaltigkeit X.

Dann gilt:

a) *Die Lelong-Zahl $\nu(\Theta, x)$ ist invariant unter holomorphem Koordinatenwechsel.*

b) *Die Menge $E_c(\Theta)$ ist eine abgeschlossene analytische Teilmenge von X, deren Dimension kleiner als oder gleich p ist.*

Im Allgemeinen lassen sich zwei Ströme nicht sinnvoll multiplizieren. Folgende Proposition sagt jedoch, wann die Multiplikation wohldefiniert ist.

Proposition 2.1.5
Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit. Sei Θ ein geschlossener, positiver Strom der Bidimension (p, p) und φ eine lokal beschränkte, plurisubharmonische Funktion auf X.

Dann ist das Dachprodukt $\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi \wedge \Theta$ wieder ein geschlossener, positiver Strom.

Beweis:
Das Resultat ist eine lokale Aussage. Wir benutzen die Faltung $\varphi_l = \varphi * \rho_{1/l}$ mit einem Glättungskern, um eine monoton fallende Folge von glatten plurisubharmonischen Funktionen zu erhalten, welche gegen φ konvergiert. Dann ist

$$\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}(\varphi\Theta) = \lim_{l\to\infty} \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}(\varphi_l\Theta) = \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi_l \wedge \Theta,$$

aufgefasst als schwacher Limes von geschlossenen, positiven Strömen nach dem Satz von Beppo Levi. □

Allgemeiner kann das Dachprodukt $\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi_1 \wedge ... \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi_m \wedge \Theta$ für $\varphi_1, ..., \varphi_m$ lokal beschränkte plurisubharmonische Funktionen induktiv definiert werden. Wir bezeichnen mit $||\Theta||_K = \int_K \sum_{I,J} |\Theta_{I,J}|$ die Masse eines Stroms Θ auf einer kompakten Menge K.

Wir können, etwas allgemeiner, zulassen, dass die $\varphi_i, i = 1, ..., m$ Pole besitzen, sofern die Menge dieser hinreichend klein ist. Dazu benötigen wir die folgende Ungleichung.

Proposition 2.1.6 (Chern-Levine-Nirenberg-Ungleichung)
Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit und seien $\varphi_1, ..., \varphi_m$ lokal beschränkte plurisubharmonische Funktionen. Für alle kompakten Teilmengen K, L von X mit $L \subset K^\circ$ existiert eine Konstante $C_{K,L} \geq 0$, so dass

$$\left|\left|\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi_1 \wedge ... \wedge \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi_m \wedge \Theta\right|\right|_L \leq C_{K,L}||\varphi_1||_{L^\infty(K)}...||\varphi_m||_{L^\infty(K)}||\Theta||_K.$$

Beweis:
Es genügt, den Fall $m = 1$ und $\varphi_1 = \varphi$ zu betrachten, der allgemeine Fall folgt dann durch Induktion.

Es existiert eine Überdeckung von L durch eine Familie von offenen Kugeln $B'_j \Subset B_j \subset K$. Sei (p,p) die Bidimension von Θ, $\beta = \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}|z|^2$ und $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(B_j)$ mit $\chi|_{\overline{B}'_j} \equiv 1$. Dann gilt

$$\left|\left|\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi \wedge \Theta\right|\right|_{L\cap\overline{B}'_j} \leq C\int_{\overline{B}'_j}\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi \wedge \Theta \wedge \beta^{p-1} \leq C\int_{B_j}\chi\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi \wedge \Theta \wedge \beta^{p-1}.$$

Da Θ und β geschlossen sind, ergibt sich mit partieller Integration

$$\left|\left|\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi \wedge \Theta\right|\right|_{L\cap\overline{B}'_j} \leq C\int_{B_j}\varphi\Theta \wedge \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\chi \wedge \beta^{p-1} \leq C'||\varphi||_{L^\infty(K)}||\Theta||_K,$$

wobei C' sich aus dem Produkt von C und einer Schranke für die Koeffizienten der glatten Form $\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\chi \wedge \beta^{p-1}$ ergibt.

□

Proposition 2.1.7
Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit. Sei Θ ein geschlossener, positiver Strom der Bidimension (p,p) und φ eine plurisubharmonische Funktion auf X, welche auf dem Komplement einer analytischen Teilmenge von X der Dimension $< p$ lokal beschränkt ist.

Dann ist $\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi \wedge \Theta := \lim_{l\to\infty}\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi_l \wedge \Theta$, definiert im Sinne der schwachen Topologie von Strömen, für jede absteigende Folge $(\varphi_l)_{l\in\mathbb{N}}$ von plurisubharmonischen Funktionen, welche gegen φ konvergiert, wohldefiniert.

Beweis:
Ist φ lokal beschränkt, dann folgt die Behauptung aus der vorherigen Proposition.

Wir betrachten zuerst den Fall, dass die analytische Menge A, auf der φ nicht lokal beschränkt ist, diskret ist. Da es sich um eine lokale Aussage handelt, dürfen wir annehmen, dass $X = B(0,R) \subset \mathbb{C}^n$ und $A = \{0\}$. Für jedes $s \leq 0$ ist $\varphi^{\geq s} := \max(\varphi, s)$ lokal beschränkt auf X, also ist $\Theta \wedge \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi^{\geq s}$ wohldefiniert. Für große $|s|$ unterscheiden sich $\varphi^{\geq s}$ und φ nur auf einer kleinen Umgebung des Ursprungs. Sei γ eine $(p-1,p-1)$-Form mit konstanten Koeffizienten, $s(r) := \liminf_{|z|\to r-0}\varphi(z)$ und $I(s) := \int_{B(0,r)}\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi^{\geq s} \wedge \Theta \wedge \gamma$. Da in der Differenz $I(s) - I(s')$ nur ein Strom mit kompaktem Träger in $B(0,r)$ auftaucht, hängt $I(s)$ nach dem Satz von Stokes nicht von s ab, sofern $s < s(r)$.

Setzen wir $\gamma = (\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}|z|^2)^{p-1}$, dann hat der Strom $\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi \wedge \Theta$ endliche Masse auf $B(0,r)\backslash\{0\}$, und man kann $\langle 1_{\{0\}}(\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi \wedge \Theta), \gamma\rangle$ als Limes von $I(s)$ für $r \to 0$ mit $s < s(r)$ definieren. Damit ist die Konvergenz auf den Fall der lokalen Beschränktheit zurückgeführt.

Betrachten wir nun den Fall, dass $0 < \dim A < p$. Wir führen den Fall mittels „slicing"-Theorie und der Chern-Levine-Nirenberg-Ungleichung auf den diskreten Fall zurück. Sei $q = p-1$ und seien $(z_1, ..., z_n)$ Koordinaten, so dass 0 ein isolierter Punkt von $A \cap (\{0\} \times \mathbb{C}^{n-q})$ ist. Dann existieren Kugeln $B' = B(0,r') \subset \mathbb{C}^q$ und $B'' = B(0,r'') \subset \mathbb{C}^{n-q}$, so dass $A \cap (\overline{B}' \times \partial B'') = \varnothing$ und die Projektion $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^q$ eine endliche eigentliche Abbildung $A \cap (B' \times B'') \to B'$ definiert. Wir nehmen genügend viele Projektionen π_m zu den Koordinatensystemen $(z_1^m, ..., z_n^m)$, so dass die Familie der (q,q)-Formen $idz_1^m \wedge d\overline{z}_1^m \wedge ... \wedge idz_q^m \wedge d\overline{z}_q^m$ eine Basis des Raums der (q,q)-Formen bildet.

Wir können also Folgendes definieren:

$$\int_{B'\times B''} \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi \wedge \Theta \wedge f(z',z'')idz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge ... \wedge idz_q \wedge d\overline{z}_q =$$

$$\int_{B'} \left(\int_{B''} f(z',\cdot)\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi(z',\cdot) \wedge \Theta(z',\cdot) \right) idz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge ... \wedge idz_q \wedge d\overline{z}_q,$$

wobei f eine Testfunktion mit kompaktem Träger in $B' \times B''$ und $\Theta(z',\cdot)$ das Segment von Θ auf der Faser $\{z'\} \times B''$ der Projektion $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^q$ ist. Jedes innere Integral $\int_{B''}$ ist wohldefiniert, da das Segment $(\{z'\} \times B'') \cap A$ diskret ist.

Wir wollen nun zeigen, dass das Doppelintegral konvergiert. φ ist auf jedem kompakten Zylinder

$$K_{\delta,\epsilon} = \overline{B}\left((1-\delta)r'\right) \times \left(\overline{B}(r'')\backslash\overline{B}((1-\epsilon)r'')\right),$$

welcher disjunkt von A ist, beschränkt. Seien $\epsilon < \delta < 1$ so gewählt, dass

$$\mathrm{Supp}(f) \subset \overline{B}\left((1-\delta)r'\right) \times \overline{B}\left((1-\epsilon)r''\right).$$

Für jedes $z' \in \overline{B}((1-\delta)r')$ zeigt der Beweis der Chern-Levine-Nirenberg-Ungleichung mit $\chi(z'')|_{B((1-\epsilon)r'')} \equiv 1$ und $\mathrm{Supp}(\chi) \subset B((1-\frac{\epsilon}{2})r'')$, dass

$$\int_{B((1-\epsilon)r'')} \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi(z',\cdot) \wedge \Theta(z',\cdot) \leq C_\epsilon ||\varphi||_{L^\infty(K_{\delta,\epsilon})} \int_{z''\in B((1-\frac{\epsilon}{2})r'')} \Theta(z',z'') \wedge \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}|z''|^2.$$

Damit konvergiert also das Doppelintegral.

Nun ersetzen wir φ durch φ_ν und können den Satz von Lebesgue anwenden, da die Chern-Levine-Nirenberg-Ungleichung eine Schranke für alle φ_ν liefert.

□

Die Lelong-Zahl des Dachprodukts der beiden Ströme verhält sich folgendermaßen.

Proposition 2.1.8
Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit. Sei Θ ein geschlossener, positiver Strom der Bidimension (p,p) und φ eine plurisubharmonische Funktion auf X, welche auf dem Komplement einer analytischen Teilmenge von X der Dimension echt kleiner als p lokal beschränkt ist.

Dann gilt für alle $x \in X$

$$\nu\left(\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi \wedge \Theta, x\right) \geq \nu(\varphi, x)\nu(\Theta, x).$$

Beweis:
Sei ohne Einschränkung $X = B(0,r)$ und $x = 0$. Nach Definition ist

$$\nu\left(\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi \wedge \Theta, x\right) = \lim_{r\to 0}\int_{|z|\leq r}\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi \wedge \Theta \wedge (\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\log|z|)^{p-1}.$$

Sei $\gamma = \nu(\varphi, x)$ und $\varphi_\nu(z) = \max(\varphi(z), (\gamma-\epsilon)\log|z| - \nu)$ mit $0 < \epsilon < \gamma$.

Dann ist φ_ν monoton fallend gegen φ, und wegen der schwachen Konvergenz von $\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi_\nu \wedge \Theta$ gilt

$$\int_{|z|\leq r}\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi \wedge \Theta \wedge \left(\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\log|z|\right)^{p-1} \geq \limsup_{\nu\to\infty}\int_{|z|\leq r}\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi_\nu \wedge \Theta \wedge \left(\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\log|z|\right)^{p-1}.$$

Da $(\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\log|z|)^{p-1}$ auf $\overline{B}(0,r)$ nicht glatt ist, ersetzen wir $\log|z|$ durch $\chi(\log|z|/r)$ mit einer glatten konvexen Funktion χ, so dass $\chi(t) = t$ für alle $t \geq -1$ und $\chi(t) = 0$ für $t \leq -2$. Das Integral verändert sich dadurch nicht.

Nun ist $\varphi(z) \leq \gamma\log|z| + C$ in der Nähe von 0, also stimmt $\varphi_\nu(z)$ mit $(\gamma-\epsilon)\log|z| - \nu$ auf einer Kugel $B(0,r_\nu) \subset B(0,r)$ überein. Damit erhalten wir

$$\int_{|z|\leq r}\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi_\nu \wedge \Theta \wedge \left(\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\log|z|\right)^{p-1} \geq (\gamma-\epsilon)\int_{|z|\leq r_\nu}\Theta \wedge \left(\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\log|z|\right)^{p} \leq (\gamma-\epsilon)\nu(\Theta, x).$$

Da $r \in (0,R)$ und $\epsilon \in (0,\gamma)$ beliebig sind, folgt die Behauptung.

□

Die Zerlegungsformel von Siu beschreibt den Zusammenhang zwischen den Niveaumengen $E_c(\Theta)$ der Lelong-Zahlen und dem Strom Θ selbst.

Satz 2.1.9 (Siu, [Siu74])
Sei Θ ein geschlossener, positiver Strom der Bidimension (p,p).

Dann existieren irreduzible analytische Mengen Z_k der Dimension p, Koeffizienten λ_k und ein Strom R mit $\dim E_c(R) < p$ für alle $c > 0$, so dass

$$\Theta = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k[Z_k] + R.$$

Die Zerlegung ist lokal und global eindeutig: Die Mengen Z_k sind die p-dimensionalen Komponenten in den Niveaumengen $E_c(\Theta)$ und $\lambda_k = \min_{x\in Z_k}\nu(\Theta, x)$.

2.2 Multiplikatoridealgarben

Nadel hat ursprünglich die Multiplikatoridealgarben für die Existenz von Kähler-Einstein-Metriken auf Fano-Mannigfaltigkeiten entwickelt. Er betrachtet dazu eine Folge von singulären Metriken, und für die Elemente aus der Garbe muss das Supremum der L^2-Integrale beschränkt sein. Uns genügt hier die Multiplikatoridealgarbe einer singulären Metrik.

Definition 2.2.1
Sei φ eine plurisubharmonische Funktion auf einer offenen Menge $\Omega \subset X$. Dann ist $\mathcal{I}(\varphi) \subset \mathcal{O}_\Omega$ die Idealgarbe von Keimen von holomorphen Funktionen $f \in \mathcal{O}_{\Omega,x}$, so dass $|f|^2 e^{-2\varphi}$ integrabel bezüglich des Lebesgue-Maßes in einer Koordinatenumgebung um x ist.

Ist h eine singuläre Metrik auf einem Geradenbündel L mit lokaler Darstellung $h = e^{-2\varphi}$, dann schreiben wir auch $\mathcal{I}(h)$ anstelle von $\mathcal{I}(\varphi)$ wie schon bei den Lelong-Zahlen.

Die Varietät $V(\mathcal{I}(\varphi)) \subset X$ besteht nun aus den Punkten, in denen $e^{-2\varphi}$ nicht lokal integrabel ist. In diesen Punkten muss φ logarithmische Pole haben, mit anderen Worten hat die zugehörige singuläre Metrik in diesen Punkten eine Lelong-Zahl größer gleich eins. Der folgende Satz von Skoda präzisiert diese Aussage.

Satz 2.2.2
Sei φ eine plurisubharmonische Funktion auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Sei $x \in \Omega$.

a) *Ist $\nu(\varphi, x) < 1$, dann ist $e^{-2\varphi}$ in einer Umgebung von x integrabel. Insbesondere gilt dann $\mathcal{I}(\varphi)_x = \mathcal{O}_{\Omega,x}$.*

b) *Ist $\nu(\varphi, x) \geq n + s$ für ein $s \geq 0$, dann ist $e^{-2\varphi} \geq C|z - x|^{-2n-2s}$ in einer Umgebung von x und damit $\mathcal{I}(\varphi)_x \subset \mathfrak{m}^{s+1}_{\Omega,x}$.*

c) *Es gilt: $E_n(\varphi) \subset V(\mathcal{I}(\varphi)) \subset E_1(\varphi)$.*

Beweis:
a) Sei χ eine Abschneidefunktion, deren Träger in der Kugel $B(x, r)$ liegt und die auf $B(x, \frac{r}{2})$ identisch 1 ist. Da $(\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial} \log |z|)^n = \delta_0$, bekommen wir für $z \in B(x, \frac{r}{2})$:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \int\limits_{B(x,r)} \chi(w)\varphi(w) \left(\tfrac{i}{\pi}\partial\overline{\partial} \log |w - z|\right)^n \\ &= \int\limits_{B(x,r)} \tfrac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}(\chi(w)\varphi(w)) \wedge \log |w - z| \left(\tfrac{i}{\pi}\partial\overline{\partial} \log |w - z|\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Da $d\chi = 0$ auf $B(x, \frac{r}{2})$, ergibt sich

$$\varphi(z) = \int\limits_{B(x,r)} \chi(w)\Theta(w) \wedge \log |w - z| \left(\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial} \log |w - z|\right)^{n-1} + \text{ glatte Terme.}$$

Für genügend kleines r folgt nun mit $\Theta := \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\varphi$, dass

$$\int\limits_{B(x,r)} \chi(w)\Theta(w) \wedge \left(\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial} \log |w - x|\right)^{n-1} \leq \nu(\Theta, x, r) < 1.$$

Aus Stetigkeitsgründen existieren $\delta, \epsilon > 0$, so dass

$$I(z) := \int\limits_{B(x,r)} \chi(w)\Theta(w) \wedge \left(\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\log|w-z|\right)^{n-1} \leq 1-\delta \text{ für alle } z \in B(x,\epsilon).$$

Definieren wir $d\mu_z(w) := I(z)^{-1}\chi(w)\Theta(w) \wedge (\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\log|w-z|)^{n-1}$, so ist $d\mu_z(w)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Mit Jensens Ungleichung ergibt sich

$$-\varphi(z) = \int\limits_{B(x,r)} I(z)\log|w-z|^{-1}d\mu_z(w) + O(1) \implies e^{-2\varphi(z)} \leq C \int\limits_{B(x,r)} |w-z|^{-2I(z)}d\mu_z(w).$$

Mit der Abschätzung

$$d\mu_z(w) \leq C_1|w-z|^{-(2n-2)}\Theta(w) \wedge \left(\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}|w|^2\right)^{n-1} = C_2|w-z|^{-(2n-2)}d\sigma_\Theta(w)$$

ergibt sich

$$e^{-2\varphi(z)} \leq C_3 \int\limits_{B(x,r)} |w-z|^{-2(1-\delta)-(2n-2)}d\sigma_\Theta(w),$$

und mit dem Satz von Fubini ist demnach $e^{-2\varphi(z)}$ in einer Umgebung von x integrabel.

b) Ist $\nu(\varphi, x) = \gamma$, dann impliziert die Konvexität der Funktion $\log r \mapsto \sup_{|z-x|=r}\varphi(z)$ die Abschätzung

$$\varphi(z) \leq \gamma\frac{\log|z-x|}{r_0} + \sup_{y\in B(x,r_0)}\varphi(y).$$

Also existiert eine Konstante $C > 0$ mit $e^{-2\varphi(z)} \geq C|z-x|^{-2\gamma}$ in einer Umgebung von x. Aus Parsevals Formel ergibt sich

$$\int_{B(0,r_0)} \frac{|\sum a_\alpha z^\alpha|^2}{|z|^{2\gamma}}dV(z) = \text{Const}\int_0^{r_0}\left(\sum|a_\alpha|^2r^{2|\alpha|}\right)r^{2n-1-2\gamma}dr.$$

Falls $\lfloor\gamma\rfloor = n+s$, dann konvergiert demnach das Integral genau dann, wenn $a_\alpha = 0$ für $|\alpha| \leq s$.

c) Die Aussage ergibt sich aus a) und b).

□

Proposition 2.2.3 (Nadel, [Nad90])
Für jede plurisubharmonische Funktion φ auf $\Omega \subset X$ ist die Garbe $\mathcal{I}(\varphi)$ eine kohärente Idealgarbe über Ω.

Beweis:
Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, dass Ω die Einheitskugel in $\mathbb{C}^n$ ist. Sei E die Menge aller bezüglich der Metrik $e^{-2\varphi}$ quadratintegrierbarer holomorpher Funktionen f auf Ω. Nach der starken Noetherschen Eigenschaft für kohärente Garben erzeugt E eine kohärente Garbe $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_\Omega$. Es ist $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}(\varphi)$.

Um zu zeigen, dass $\mathcal{I}(\varphi) \subset \mathcal{J}$, genügt es nach dem Lemma von Krull zu zeigen, dass $\mathcal{J}_x + \mathcal{I}(\varphi)_x \cap \mathfrak{m}_{\Omega,x}^{s+1} = \mathcal{I}(\varphi)_x$ für jedes $s \in \mathbb{N}$. Sei $f \in \mathcal{I}(\varphi)_x$ definiert in einer Umgebung $V(x)$, und sei ρ eine Abschneide-Funktion mit $\rho \equiv 1$ in einer Umgebung von x und deren Träger in $V(x)$ enthalten ist. Sei $\widetilde{\varphi}(z) := \varphi(z) + (n+s)\log|z-x| + |z|^2$. Nach Hörmanders L^2-$\overline{\partial}$-Existenzsatz, angewandt auf das triviale Geradenbündel mit der Metrik $e^{-2\widetilde{\varphi}}$, existiert ein u mit $\overline{\partial}(u) = g := \overline{\partial}(\rho f)$ und $\int_\Omega |u|^2 e^{-2\varphi}|z-x|^{-2(n+s)} d\lambda < \infty$.

Damit ist $F = \rho f - u$ holomorph, $F \in E$ und $f_x - F_x = u_x \in \mathcal{I}(\varphi)_x \cap \mathfrak{m}_{\Omega,x}^{s+1}$.

□

Proposition 2.2.4
Sei $\pi : \widetilde{X} \to X$ eine Modifikation glatter Mannigfaltigkeiten und φ eine plurisubharmonische Funktion auf X. Dann gilt:

$$\pi_*(\mathcal{O}(K_{\widetilde{X}}) \otimes \mathcal{I}(\varphi \circ \pi)) = \mathcal{O}(K_X) \otimes \mathcal{I}(\varphi).$$

Beweis:
Sei $n = \dim X = \dim X'$ und $S \subset X$ die analytische Menge, so dass $\pi : X' \backslash S' \to X \backslash S$ ein Biholomorphismus ist. $\mathcal{O}(K_X) \otimes \mathcal{I}(\varphi)$ ist nach Definition die Garbe der holomorphen n-Formen f auf offenen Mengen $\Omega \subset X$, so dass $i^{n^2} f \wedge \overline{f} e^{-2\varphi} \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Dann gilt:

$$\int_\Omega i^{n^2} f \wedge \overline{f} e^{-2\varphi} = \int_{\pi^{-1}(\Omega)} i^{n^2} \pi^* f \wedge \overline{\pi^* f} e^{-2\varphi\circ\pi}.$$

Also ist $f \in \Gamma(\Omega, \mathcal{O}(K_X) \otimes \mathcal{I}(\varphi))$ genau dann, wenn $\pi^* f \in \Gamma(\pi^{-1}(\Omega), \mathcal{O}(K_{X'}) \otimes \mathcal{I}(\varphi \circ \pi))$.

□

2.3 Vollständige Kähler-Poincaré-Metriken

Vollständige Kähler-Metriken sind wichtig, damit die L^2-Methoden des folgenden Kapitels anwendbar sind. Wir können in unserer Situation eine vollständige Kähler-Metrik mit Poincaré-Wachstum am Rand auf X konstruieren. Die Betrachtung solcher Metriken geht im Wesentlichen auf Zucker [Zuc79, Zuc82] und Saper [Sap85, Sap92] zurück.

Definition 2.3.1
Sei X eine komplexe analytische Varietät der Dimension n. X heißt vollständige Kähler-Varietät, falls auf X eine Kähler-Metrik ω existiert, welche eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

(i) Die zu ω gehörende geodätische Distanz δ ist vollständig.

(ii) Die durch δ definierten abgeschlossenen Kugeln sind kompakt.

(iii) Es existiert eine Folge $(K_l)_{l\in\mathbb{N}}$ von kompakten Teilmengen von X, welche X ausschöpfen, und eine Folge $(\chi_l)_{l\in\mathbb{N}}$ von glatten Funktionen mit kompaktem Träger in X, so dass gilt:

$$0 \le \chi_l \le 1, \qquad \chi_l|_{K_l} \equiv 1, \qquad |d\chi_l| \le \frac{1}{l}.$$

Satz 2.3.2 (Demailly, [Dem82])
Sei X eine Kähler-Varietät, $Z \subset X$ eine analytische Menge und $U \subset X$ eine relativ kompakte Menge, welche eine vollständige Kähler-Metrik ω_U besitzt.

Dann ist $U \backslash Z$ eine vollständige Kähler-Varietät.

Satz 2.3.3 (Demailly, [Dem82])
Sei $X \subset \overline{X}$ eine Zariski-offene Teilmenge einer kompakten Kähler-Mannigfaltigkeit $\overline{X}$.

Dann besitzt X eine vollständige Kähler-Metrik.

Die explizite Konstruktion einer Kähler-Form η_X mit Poincaré-Wachstum am Rand als Kombination der Kähler-Form $\omega_{\overline{X}}$ und einem Schnitt von $D := \overline{X} \backslash X$ ist ausführlich in [GM95] beschrieben. Wir geben hier die für uns wichtigsten Resultate wieder.

Definition 2.3.4
Zwei Metriken g_1, g_2 heißen quasi-isometrisch, falls es Konstanten $c, C > 0$ gibt, so dass $cg_1 \leq g_2 \leq Cg_1$. Wir schreiben dann $g_1 \sim g_2$. Ebenso definieren wir die Äquivalenzrelation für $(1,1)$-Formen und Funktionen.

Es ist klar, dass alle Metriken auf kompakten Mannigfaltigkeiten quasi-isometrisch sind. Sei Δ^* die punktierte Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$. Die Poincaré-Metrik auf Δ^* ist definiert als

$$\eta_{\Delta^*} := -\frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log(\log|z|^2)^2.$$

Definition 2.3.5
Sei $X \subset \overline{X}$ eine Zariski-offene Teilmenge einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit $\overline{X}$, so dass $D := \overline{X} \backslash X$ normale Überkreuzungen hat.

Dann heißt eine Metrik g auf X Poincaré-Metrik, falls sie in einer Umgebung $U(p)$ eines jeden Punktes $p \in D$ mit $U(p) \cap X = (\Delta^*)^k \times \Delta^{n-k}$ quasi-isometrisch zu dem Produkt von Poincaré-Metriken auf $(\Delta^*)^k$ und Euklidischen Metriken auf Δ^{n-k} ist.

Definition 2.3.6
Sei $X \subset \overline{X}$ eine Zariski-offene Teilmenge einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit $\overline{X}$, so dass $D := \overline{X} \backslash X$ normale Überkreuzungen hat. Seien $p \in D$ ein Punkt, $E_1, ..., E_k$ die Komponenten von D, welche durch p gehen, und $(z_1, ..., z_n)$ lokale Koordinaten einer Umgebung $U(p)$, so dass keine anderen Komponenten von D den Abschluss $\overline{U(p)}$ schneiden.

Die Koordinaten $(z_1, ..., z_n)$ heißen normale Koordinaten für $E_1, ..., E_k$, falls E_i lokal durch die Gleichung $z_i = 0$ gegeben ist.

Die Fundamentalform η_X einer Poincaré-Metrik auf X kann lokal in normalen Koordinaten beschrieben werden als

$$\eta_X \sim \frac{i}{\pi}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{dz_i \wedge d\overline{z}_i}{|z_i|^2(\log|z_i|^2)^2} + \sum_{i=k+1}^{n} dz_i \wedge d\overline{z}_i\right).$$

Definition 2.3.7
Sei $X \subset \overline{X}$ eine Zariski-offene Teilmenge einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit $\overline{X}$, so dass $D := \overline{X} \backslash X$ normale Überkreuzungen hat.

a) Wir nennen eine Metrik η_X auf X eine modifizierte Poincaré-Metrik, falls
$$\eta_X \sim \sum_{i=1}^{m} \tau_i^* \eta_{\Delta^*} + \frac{i}{\pi} \sum_{i=1}^{n} dz_i \wedge d\overline{z}_i.$$
Dabei ist $\tau_i : (\Delta^*)^k \times \Delta^{n-k} \to \Delta^*, (z_1, ..., z_n) \mapsto z_1^{\lambda_{i1}} z_2^{\lambda_{i2}} ... z_k^{\lambda_{ik}}$, so dass $\lambda_{ij} \in \mathbb{N}_0$ und in jeder Spalte und Zeile von $(\lambda_{ij})_{ij}$ mindestens ein positiver Wert ist.

b) Wir nennen eine modifizierte Poincaré-Metrik homogen, falls ihre Fundamentalform lokal in normalen Koordinaten geschrieben werden kann als
$$\eta_{X,hom} \sim \frac{i}{\pi} \left(\frac{1}{(\log |z_1 z_2 ... z_k|^2)^2} \sum_{i=1}^{k} \frac{dz_i \wedge d\overline{z}_i}{|z_i|^2} + \sum_{i=1}^{n} dz_i \wedge d\overline{z}_i \right).$$

Da die Poincaré-Metrik auf Δ^* vollständig ist, ergibt sich sofort Folgendes.

Korollar 2.3.8
Modifizierte Poincaré-Metriken sind vollständig.

Abschließend zeigen Grant und Milman, dass eine vollständige Kähler-Poincaré-Metrik auf der Zariski-offenen Teilmenge $X \subset \overline{X}$ existiert. Außerdem konstruieren sie in ihrem Artikel Saper-Metriken, die eine andere L^2-Kohomologie zur Folge haben, welche wir hier aber nicht benötigen.

Satz 2.3.9 (Grant und Milman, [GM95])
Sei $X \subset \overline{X}$ eine Zariski-offene Teilmenge einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit $\overline{X}$, so dass $D := \overline{X} \backslash X$ normale Überkreuzungen hat. Sei $\omega_{\overline{X}}$ die Fundamentalform einer hermiteschen Metrik und $l_1, ..., l_r \in \mathbb{N}$. Seien $D_1, ..., D_m$ die Komponenten von D. Seien $E_i = \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} D_j$ effektive Divisoren, so dass deren Summe denselben Träger wie D hat, und s_i holomorphe Schnitte mit $(s_i) = E_i$.

Dann ist für genügend großes $l \in \mathbb{N}$
$$\eta_X := l\omega_{\overline{X}} - \frac{i}{2\pi} \sum_{i=1}^{r} l_i \partial\overline{\partial} \log(\log ||s_i||^2)^2$$
eine modifizierte Poincaré-Metrik auf X.

Außerdem gilt:

a) *Ist $\omega_{\overline{X}}$ eine Kähler-Form auf $\overline{X}$, dann ist η_X ebenfalls Kähler.*

b) *Ist r die Anzahl der Komponenten von D und $D_i = (s_i)$, dann ist η_X eine echte Poincaré-Metrik.*

c) *Sind alle Einträge von $(\lambda_{ij})_{ij}$ positiv und sind alle Spalten linear unabhängig, dann ist η_X eine homogene Poincaré-Metrik.*

Kapitel 3

L^2-Techniken

In diesem Kapitel werden L^2-Methoden vorgestellt. Die Idee, welche auf Hörmander [Hor65] zurückgeht, besteht aus der Äquivalenz zwischen einer L^2-Abschätzung und der Lösung der $\overline{\partial}$-Differentialgleichung. Dazu untersuchen wir den Wertebereich des dicht definierten $\overline{\partial}$-Operators zwischen den Hilberträumen der L-wertigen (n, q)-Ströme.

Der Hauptsatz dieses Kapitels besagt, dass $\overline{\partial}$-geschlossene Formen mit gewissen Quadrat-Integrierbarkeitsbedingungen $\overline{\partial}$-exakt sind. Als Folgerung ergibt sich damit Nadels Verschwindungssatz und als Korollar daraus Aussagen zur Jet-Erzeugung, welche für die Hauptsätze essentiell sind.

Satz 3.0.1
Sei (X, ω_X) eine Kähler-Mannigfaltigkeit der Dimension n, welche eine vollständige Kähler-Metrik besitzt. Sei L ein holomorphes Geradenbündel auf X, welches eine singuläre hermitesche Metrik h besitzt, so dass eine echt positive, stetige Funktion c auf X existiert mit $\Theta_h \geq c \cdot \omega_X$. Sei v ein $\overline{\partial}$-geschlossener L-wertiger (n, q)-Strom mit $\int\limits_X \frac{||v(p)||^2}{qc(p)} dV_\omega < \infty$.

Dann existiert ein L-wertiger $(n, q-1)$-Strom u mit $\overline{\partial} u = v$ und

$$\int\limits_X ||u(p)||^2 dV_\omega \leq \int\limits_X \frac{||v(p)||^2}{qc(p)} dV_\omega.$$

3.1 Dicht definierte Operatoren auf Hilberträumen

Die folgenden Lemmata führen die Existenz von Lösungen einer Operatorgleichung auf eine Abschätzung zurück.

Lemma 3.1.1
Seien H_1 und H_2 Hilberträume. Sei $T : H_1 \to H_2$ ein linearer, abgeschlossener, dicht definierter Operator und $F \subset H_2$ ein abgeschlossener Unterraum mit $T(H_1) \subset F$. Dann ist $F = T(H_1)$ genau dann, wenn ein $C \geq 0$ existiert mit $||f||_{H_2} \leq C||T^* f||_{H_1}$ für alle $f \in F \cap Dom(T^*)$.

Beweis:
Sei $T(H_1) = F$. Wir müssen zeigen, dass $B := \{f \in F \cap \mathrm{Dom}(T^*)\ ;\ ||T^*f||_{H_1} \leq 1\}$ beschränkt ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass B schwach beschränkt in F ist, d.h. für festes $g \in F$ ist $\{|\langle f, g\rangle_{H_2}|\ ;\ f \in B\}$ beschränkt.
Sei also $g \in F$. Nach Voraussetzung existiert ein $u \in \mathrm{Dom}(T)$ mit $Tu = g$. Dann gilt $|\langle f, g\rangle_{H_2}| = |\langle T^*f, u\rangle_{H_1}| \leq ||u||_{H_1}$ für $f \in B$.

Für die Rückrichtung gehen wir folgendermaßen vor.
Sei $g \in F$. Es ist zu zeigen, dass ein $u \in \mathrm{Dom}(T)$ existiert mit $Tu = g$, was äquivalent zu der Identität $\langle u, T^*f\rangle_{H_1} = \langle g, f\rangle_{H_2}$ für $f \in \mathrm{Dom}(T^*)$ ist. Wir wollen den Darstellungssatz von Fréchet-Riesz auf die antilineare Form $\varphi : T^*f \mapsto \langle g, f\rangle_{H_2}$ anwenden. Damit bekommen wir die Lösung u der Gleichung $Tu = g$ mit $||u||_{H_1} \leq C||g||_{H_2}$.
Um den Darstellungssatz anwenden zu dürfen, müssen wir die Beschränktheit von φ zeigen, d.h. $|\varphi(T^*f)| = |\langle g, f\rangle_{H_2}| \leq C||g||_{H_2}||T^*f||_{H_1}$ für $f \in \mathrm{Dom}(T^*)$. Das folgt aber aus der Voraussetzung, da für $f \in F^\perp$ gilt $\langle g, f\rangle_{H_2} = 0$ und $T^*f = 0$, denn $T(H_1) \subset F$.

□

Lemma 3.1.2
Es gelte die Situation des vorherigen Lemmas, d.h. $F = T(H_1)$. Dann gibt es zu jedem $v \in Kern(T)^\perp$ ein $f \in Dom(T^*)$, so dass $T^*f = v$ und $||f||_{H_2} \leq C||v||_{H_1}$.

Beweis:
Da der Kern von T orthogonal zu dem Bild von T^* ist, ist v nach Voraussetzung im Abschluss des Bildes von T^*. Das orthogonale Komplement von F ist gerade der Kern von T^*, so dass $T^*|_{F \cap \mathrm{Dom}(T^*)}$ dasselbe Bild wie T^* hat. Nach Voraussetzung ist $F = T(H_1)$, demnach ist das Bild von dem eingeschränkten T^* abgeschlossen. Also finden wir ein $f \in F \cap \mathrm{Dom}(T^*)$ mit $T^*f = v$. Die Abschätzung folgt dann aus dem vorherigen Lemma.

□

3.2 L^2-$\overline{\partial}$-Exaktheit

Bezeichne im Folgenden $\mathcal{D}_{p,q}(X, L)$ den Raum der glatten L-wertigen (p, q)-Formen mit kompaktem Träger und $L^2_{p,q}(X, L)$ den Hilbertraum der (p, q)-Formen mit L^2_{loc}-Koeffizienten bezüglich der Norm $||u||^2 = \int_X |u|^2_h dV_\omega$.

Lemma 3.2.1
Ist ω_X vollständig, so liegen die Testformen $\mathcal{D}_{p,q}(X, L)$ dicht in $Dom(\overline{\partial}^*) \cap Dom(\overline{\partial})$ bezüglich der Graphennorm $\tau \mapsto ||\tau|| + ||\overline{\partial}^*\tau|| + ||\overline{\partial}\tau||$.

Beweis:
Das Lemma folgt aus Hörmanders Lemma 5.2.1 [Hor73], in dem die Dichtheit von $D_{(p,q+1)}(\Omega)$ für den Fall, dass Ω eine Mannigfaltigkeit ist, gezeigt wurde.

□

Lemma 3.2.2 (Ungleichung von Kodaira-Nakano)
Für alle Testformen $\tau \in \mathcal{D}_{n,q}(X, L)$ gilt:

$$||\overline{\partial}\tau||^2 + ||\overline{\partial}^*\tau||^2 \geq \int_X \langle \Theta(L)\Lambda\tau, \tau\rangle \, dV.$$

Folgender Satz über die Approximation von plurisubharmonischen Funktionen wird benötigt, um den Satz 3.0.1 im Fall einer singulären Metrik auf den Fall einer glatten Metrik zurückzuführen.

Satz 3.2.3 (Demailly, [Dem82])
Sei (X, ω) eine Kähler-Mannigfaltigkeit. Sei φ eine Funktion, welche plurisubharmonisch modulo $\mathcal{C}^2$ ist, und sei θ eine reelle, stetige $(1,1)$-Form mit $i\partial\overline{\partial}\varphi \geq \theta$.

Dann existiert eine wachsende Familie $(\hat{\varphi}_\epsilon)_{\epsilon \in (0,1]}$ von glatten Funktionen auf X, eine Familie von reellen, stetigen $(1,1)$-Formen γ_ϵ und eine wachsende Familie (λ_ϵ) von stetigen Funktionen auf X mit folgenden Eigenschaften:

a) $\lim_{\epsilon \to 0} \hat{\varphi}_\epsilon(a) = \varphi(a)$ *für alle $a \in X$.*

b) $i\partial\overline{\partial}\hat{\varphi}_\epsilon \geq \gamma_\epsilon - \lambda_\epsilon \omega$.

c) $\gamma_\epsilon \geq \theta$.

d) *γ_ϵ konvergiert fast überall gegen $(i\partial\overline{\partial}\varphi)_{ac}$ für $\epsilon \to 0$.*

e) *λ_ϵ konvergiert in allen Punkten, in denen die Lelong-Zahl von φ verschwindet, gegen 0.*

f) *Verschwindet die Lelong-Zahl von φ auf ganz X, dann konvergiert λ_ϵ gleichmäßig gegen 0 auf jedem Kompaktum von X.*

Wir benötigen noch ein Lemma, welches Abschätzungen liefert, so dass wir den Fall einer nicht vollständigen Kähler-Metrik auf den einer vollständigen zurückführen können.

Lemma 3.2.4
Seien ω, γ hermitesche Metriken auf X, so dass $\gamma \geq \omega$.

Dann gilt für jedes $u \in \Lambda^{n,q}T_X^* \otimes L$:

$$|u|_\gamma^2 dV_\gamma \leq |u|_\omega^2 dV_\omega, \qquad \langle A_{q,\gamma}^{-1}u, u\rangle_\gamma dV_\gamma \leq \langle A_{q,\omega}^{-1}u, u\rangle_\omega dV_\omega,$$

wobei $A_{q,\omega} = [i\Theta_L, \Lambda_\omega]$ der Krümmungsoperator auf $\Lambda^{n,q}T_X^* \otimes L$ ist.

Damit sind wir nun gerüstet, den L^2-$\overline{\partial}$-Exaktheitssatz zu beweisen.

Beweis des Satzes 3.0.1:
1. Fall: Sei h eine glatte Metrik und ω_X vollständig.
Wir betrachten die Operatoren $\overline{\partial}_k : L^2_{n,k} \to L^2_{n,k+1}$. Die Lemmata zeigen, dass für alle $s \in \mathrm{Dom}(\overline{\partial}_q) \cap \mathrm{Dom}(\overline{\partial}^*_{q-1})$ gilt:

$$||\overline{\partial}^*_{q-1}s||^2 + ||\overline{\partial}_q s||^2 \geq \int_X \langle ic(L)\Lambda s, s\rangle dV_\omega.$$

2. Fall: Sei h weiterhin eine glatte Metrik, aber ω_X nun nicht mehr vollständig.
Wir können diese Situation leicht auf den 1. Fall zurückführen, indem wir eine Folge von vollständigen Metriken konstruieren, welche gegen ω_X konvergiert.
Nach Voraussetzung existiert eine vollständige Kähler-Metrik $\hat{\omega}_X$ auf X. Wir setzen $\omega_\epsilon := \omega + \epsilon\hat{\omega}_X$, welche vollständig ist. Nach Lemma 3.2.4 gilt für jedes $u \in \Lambda^{n,q}T_X^* \otimes L$:

$$|u|_\epsilon^2 dV_\epsilon \leq |u|^2 dV \qquad \langle A_{q,\epsilon}^{-1}u, u\rangle_\epsilon dV_\epsilon \leq \langle A_q^{-1}u, u\rangle dV.$$

Damit erhalten wir nach dem 1. Fall eine Lösung $u_\epsilon \in L^2_{n,q-1}(X, L)$ mit $\overline{\partial}u = v$ und

$$\int_X |u_\epsilon|_\epsilon^2 dV_\epsilon \leq \int_X \langle A_{q,\epsilon}^{-1}v, v\rangle_\epsilon dV_\epsilon \leq \int_X \langle A_q^{-1}v, v\rangle dV.$$

Daraus folgt, dass die Familie (u_ϵ) auf jeder kompakten Teilmenge von X beschränkt bezüglich der L^2-Norm ist. Wir finden also eine schwach konvergente Teilfolge u_{ϵ_ν} in L^2_{loc}. Der Grenzwert ist die gesuchte Lösung u.

3. Fall: Sei h eine singuläre Metrik. Mit Hilfe des Satzes 3.2.3 läßt sich h durch glatte Metriken approximieren und somit auf den 2. Fall zurückführen. □

3.3 Nadels Verschwindungssatz

Nadels Verschwindungssatz [Nad90] kann aus Hörmanders L^2-Abschätzungen des vorherigen Abschnitts hergeleitet werden. Zusammen mit Skodas Theorem 2.2.2 kann damit die Frage der Erzeugung von Jets auf die Existenz von Metriken, die in isolierten Punkten hohe Lelong-Zahlen besitzen, zurückgeführt werden.

Satz 3.3.1
Sei (X, ω) eine schwach pseudokonvexe Kähler-Mannigfaltigkeit und L ein Geradenbündel über X mit singulärer Metrik h. Es existiere eine stetige positive Funktion c auf X mit $i\Theta_h \geq c\omega$.

Dann gilt:

$$H^q(X, \mathcal{O}(K_X + L) \otimes \mathcal{I}(h)) = 0 \text{ für alle } q \geq 1.$$

Beweis:
Sei $\mathcal{L}^{n,q}$ die Garbe der (n, q)-Formen u mit Werten in L und messbaren Koeffizienten, so dass $|u|^2 e^{-2\varphi}$ und $|\overline{\partial}u|^2 e^{-2\varphi}$ lokal integrabel sind. Der Komplex $(\mathcal{L}^{n,\bullet}, \overline{\partial})$ ist eine Resolution der Garbe $\mathcal{O}(K_X + L) \otimes \mathcal{I}(\varphi)$, da der Kern von $\overline{\partial}$ zur Ordnung 0 aus den Keimen von holomorphen Funktionen besteht, welche die Integrabilitätsbedingung erfüllen, d.h. die Koeffizienten liegen in $\mathcal{I}(\varphi)$. Die Exaktheit im Grad $d \geq 1$ folgt aus Satz 3.0.1, angewandt auf kleine Umgebungen. Jede Garbe $\mathcal{L}^{n,q}$ ist ein $\mathcal{C}^\infty$-Modul, also ist $\mathcal{L}^{n,\bullet}$ eine Resolution durch azyklische Garben. Sei ψ eine glatte plurisubharmonische Ausschöpfungsfunktion von X, die wegen der Pseudokonvexität von X existiert. Wir wenden nun Satz 3.0.1 global auf X an, wobei wir als Metrik $he^{-\chi\circ\psi}$ nehmen. Dabei ist χ eine konvexe wachsende Funktion mit beliebig schnellem Wachstum in Unendlich. Diese Modifikation der Metrik sichert die Konvergenz des Integrals in Unendlich. Damit ist also $H^q(\Gamma(X, \mathcal{L}^{n,\bullet})) = 0$ für $q \geq 1$. □

Korollar 3.3.2
Seien (X, ω), L und h wie im vorherigen Satz. Seien außerdem $x_1, ..., x_p \in V(\mathcal{I}(h))$ isolierte Punkte.

Dann gibt es eine surjektive Abbildung

$$H^0(X, K_X + L) \to \bigoplus_{j=1}^{p} \mathcal{O}(K_X + L)_{x_j} \otimes (\mathcal{O}_X/\mathcal{I}(h))_{x_j}.$$

Beweis:
Wir betrachten die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}(h) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{I}(h) \longrightarrow 0$$

und tensorieren diese mit $\mathcal{O}(K_X + L)$. In der zugehörigen langen Kohomologiesequenz ist $H^1(X, \mathcal{O}(K_X + L) \otimes \mathcal{I}(h)) = 0$ nach Nadels Verschwindungssatz 3.3.1. Die behauptete Surjektivität folgt dann unmittelbar.

$\square$

Korollar 3.3.3
Seien (X, ω), L und h wie im Verschwindungssatz. Es gelte $\nu(h, x) \geq n + s$ für ein $s \in \mathbb{N}$ und einen Punkt $x \in X$, welcher isoliert in $E_1(h)$ liegt.

Dann erzeugt $H^0(X, K_X + L)$ alle s-Jets in dem Punkt x.

Beweis:
Nach Voraussetzung ist $\nu(h, x) \geq n + s$ und damit nach dem Satz von Skoda (2.2.2) $\mathcal{I}(h)_x \subset \mathfrak{m}_{X,x}^{s+1}$, andererseits $\nu(h, y) < 1$ für alle y aus einer Umgebung von x und damit $\mathcal{I}(h)_y = \mathcal{O}_{X,y}$. Damit folgt die Behauptung aus dem vorherigen Korollar.

$\square$

Kapitel 4

Positivität von Geradenbündeln

In diesem Kapitel geben wir einen Überblick über verschiedene Ausprägungen von Positivität von Geradenbündeln auf Mannigfaltigkeiten. Zuerst stellen wir die klassischen Begriffe auf kompakten Mannigfaltigkeiten vor. Dobei vertreten wir den analytischen Standpunkt, d.h., dass die Begriffe als Existenz von Metriken mit gewissen positiven Krümmungseigenschaften definiert werden. In den darauf folgenden Sätzen werden die Äquivalenzen zu den algebraischen Definitionen erläutert. Da hier nur eine Übersicht gegeben werden soll und die Ergebnisse bekannt sind, verweisen wir für die meisten Beweise auf die Lecture Notes von Demailly [Dem94] und auf das Buch von Lazarsfeld [Laz04].

Im zweiten Abschnitt erfolgt eine Anpassung der Begriffe auf quasi-projektive Mannigfaltigkeiten, also Zariski-offene Teilmengen von projektiven Mannigfaltigkeiten. Dabei sollen die Positivitätsforderungen nur im Inneren gelten. Wir sprechen dann von der Positivitätseigenschaft modulo Rand. Zu beachten ist, dass die in den folgenden Kapiteln vorkommenden Sätze nicht direkt vom Randdivisor $D := \overline{X} \backslash X$ abhängen, da die holomorphen L^2-Schnitte auf X zu holomorphen Schnitten auf $\overline{X}$ fortgesetzt werden können. Daher sprechen wir von der Positivitätseigenschaft modulo Rand und nicht modulo D. Wir müssen für die Wohldefiniertheit aber fordern, dass der Divisor D normale Überkreuzungen besitzt.

4.1 Positivität auf kompakten Mannigfaltigkeiten

Definition 4.1.1
Sei (X, ω) eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit und L ein Geradenbündel auf X.

a) L heißt sehr ample, falls L eine Einbettung von X in den $\mathbb{P}^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$ definiert.

b) L heißt ample, falls ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, so dass mL sehr ample ist.

c) L heißt nef, falls für jedes $\epsilon > 0$ eine glatte hermitesche Metrik h_ϵ mit $i\Theta_{h_\epsilon} \geq -\epsilon\omega$ existiert.

d) L heißt big, falls ein $\epsilon > 0$ und eine singuläre Metrik h auf L mit $i\Theta_h \geq \epsilon\omega$ existiert.

e) L heißt effektiv, falls $H^0(X, L) \neq 0$.

f) L heißt pseudoeffektiv, falls eine singuläre Metrik h mit $i\Theta_h \geq 0$ auf L existiert.

g) L heißt global erzeugt bzw. basispunktfrei, falls für jedes $x \in X$ ein $\sigma \in H^0(X, L)$ existiert, so dass $\sigma(x) \neq 0$.

h) L heißt punktetrennend, falls für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ ein $\sigma \in H^0(X, L)$ existiert, so dass $\sigma(x) \neq 0$ und $\sigma(y) = 0$.

i) L heißt semiample, falls ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, so dass mL global erzeugt ist.

j) L heißt s_j-Jet-erzeugend in $x_1, ..., x_p \in X$, falls die folgende Abbildung surjektiv ist:

$$H^0(X, L) \to \bigoplus_{j=1}^{p} \mathcal{O}_X(L)_{x_j} \otimes \left(\mathcal{O}_X/\mathfrak{m}_X^{s_j+1}\right)_{x_j}.$$

k) L heißt s-Jet-erzeugend, falls für beliebige $x_1, ..., x_p \in X$ und $s_1, ..., s_p \in \mathbb{N}_0$ mit $\sum_{i=1}^{p} s_i \leq s$ die folgende Abbildung surjektiv ist:

$$H^0(X, L) \to \bigoplus_{j=1}^{p} \mathcal{O}_X(L)_{x_j} \otimes \left(\mathcal{O}_X/\mathfrak{m}_X^{s_j+1}\right)_{x_j}.$$

Die nachfolgenden Propositionen liefern Äquivalenzen zu weiteren Charakterisierungen auf projektiven Mannigfaltigkeiten.

Proposition 4.1.2
Sei X eine projektive kompakte Mannigfaltigkeit und L ein Geradenbündel auf X. Dann sind äquivalent:

a) *L ist ample.*

b) *Es existiert ein $\epsilon > 0$ und eine glatte hermitesche Metrik h auf L mit $i\Theta_h > \epsilon\omega_X$.*

c) *Für jede kohärente Garbe $\mathcal{F}$ auf X existiert ein $m_1 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m \geq m_1$ und für alle $q \geq 1$ gilt:*
$$H^q(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(mL)) = 0.$$

d) *Für jede kohärente Garbe $\mathcal{F}$ auf X existiert ein $m_2 \in \mathbb{N}$, so dass $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(mL)$ für alle $m \geq m_2$ global erzeugt ist.*

e) *Für jede positiv-dimensionale irreduzible Untervarietät $V \subset X$ gilt:*

$$\int_V c_1(L)^{\dim(V)} > 0.$$

f) *Für jede positiv-dimensionale irreduzible Untervarietät $V \subset X$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$, ein Schnitt $s \in H^0(V, \mathcal{O}_V(mL))$ und ein $x \in V$ mit $s(x) = 0$, aber $s \not\equiv 0$.*

g) *Für jede positiv-dimensionale irreduzible Untervarietät $V \subset X$ gilt:*

$$\chi(V, \mathcal{O}_V(mL)) \to \infty \text{ für } m \to \infty.$$

Proposition 4.1.3
Sei X eine projektive Mannigfaltigkeit und L ein Geradenbündel auf X. Dann sind äquivalent:

a) *L ist nef.*

b) *Für jede irreduzible Kurve $C \subset X$ gilt:*

$$\int_C c_1(L) \geq 0.$$

c) *Für jede positiv-dimensionale irreduzible Untervarietät $V \subset X$ gilt:*

$$\int_V c_1(L)^{\dim(V)} \geq 0.$$

d) *Es existiert ein amples Geradenbündel A, so dass $mL + A$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ ample ist.*

Proposition 4.1.4
Sei X eine projektive Mannigfaltigkeit der Dimension n und L ein Geradenbündel auf X. Dann sind äquivalent:

a) *L ist big.*

b) *Es existieren $m \in \mathbb{N}$, A ein amples und E ein effektives Geradenbündel, so dass $mL \equiv_{lin} A + E$.*

c) *Es existieren $m \in \mathbb{N}$, A ein amples und E ein effektives Geradenbündel, so dass $mL \equiv_{num} A + E$.*

d) *Es gilt: $\kappa(L) = n$.*

e) *Es existiert ein $C > 0$, so dass für genügend große $m \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$h^0(X, mL) \geq Cm^n.$$

f) *Für jede kohärente Garbe $\mathcal{F}$ auf X existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(mL)$ generisch global erzeugt ist.*

g) *Es gilt:*

$$vol(L) := \limsup_{m \to \infty} \frac{h^0(X, mL)}{m^n/n!} > 0.$$

Proposition 4.1.5
Sei X eine projektive Mannigfaltigkeit der Dimension n und L ein Geradenbündel auf X. Dann sind äquivalent:

a) *L ist pseudoeffektiv.*

b) *$L \cdot C \geq 0$ für alle sehr generischen Kurven $C \subset X$.*

c) *Für jedes big Geradenbündel B ist $L + B$ wieder big.*

4.2 Positivität auf quasi-projektiven Mannigfaltigkeiten

Wir wollen nun die Positivitätsbegriffe an die spezielle Situation anpassen, in der das zu beschreibende Geradenbündel zwar auf dem projektiven Abschluss einer quasi-projektiven Mannigfaltigkeit existiert, aber die Positivität nur im Inneren gefordert ist.

Definition 4.2.1
Sei X eine Zariski-offene Teilmenge einer projektiven Mannigfaltigkeit $\overline{X}$ und L ein Geradenbündel auf $\overline{X}$. Sei $D := \overline{X} \backslash X$.

a) L heißt singulär positiv modulo Rand, falls L eine singuläre Metrik h besitzt, so dass
   (i) $i\Theta_h \geq c\omega_{\overline{X}}$ für ein $c \in \mathcal{C}(X, (0, \infty))$;
   (ii) $\nu(h, x) = 0$ für alle $x \in X$.

b) L heißt sehr ample modulo Rand, falls Schnitte $\lambda_0, ..., \lambda_N \in H^0(\overline{X}, L)$ existieren, so dass die meromorphe Abbildung $\Phi : \overline{X} \to \mathbb{P}^N, x \rightharpoonup [\lambda_0(x), ..., \lambda_N(x)]$ eine Einbettung von X definiert.

c) L heißt ample modulo Rand, falls ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, so dass mL sehr ample modulo Rand ist.

d) L heißt global erzeugt bzw. basispunktfrei modulo Rand, falls für jedes $x \in X$ ein $\sigma \in H^0(\overline{X}, L)$ existiert, so dass $\sigma(x) \neq 0$.

e) L heißt semiample modulo Rand, falls ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, so dass mL global erzeugt modulo Rand ist.

f) L heißt s_j-Jet-erzeugend in $x_1, ..., x_p \in X$, falls folgende Abbildung surjektiv ist:

$$H^0(\overline{X}, L) \to \bigoplus_{j=1}^{p} \mathcal{O}_X(L)_{x_j} \otimes \left(\mathcal{O}_X / \mathfrak{m}_X^{s_j+1}\right)_{x_j}.$$

g) L heißt s-Jet-erzeugend modulo Rand, falls für beliebige $x_1, ..., x_p \in X$ und $s_1, ..., s_p \in \mathbb{N}_0$ mit $\sum_{i=1}^{p} s_i \leq s$ die folgende Abbildung surjektiv ist:

$$H^0(\overline{X}, L) \to \bigoplus_{j=1}^{p} \mathcal{O}_X(L)_{x_j} \otimes \left(\mathcal{O}_X / \mathfrak{m}_X^{s_j+1}\right)_{x_j}.$$

Proposition 4.2.2
Sei X eine Zariski-offene Teilmenge einer projektiven Mannigfaltigkeit $\overline{X}$ und L ein Geradenbündel auf $\overline{X}$, welches ample modulo $D := \overline{X} \backslash X$ ist.

Dann besitzt L eine singuläre Metrik h, welche glatt und positiv auf X ist. Insbesondere ist L singulär positiv modulo Rand.

Beweis:
Wie auch im kompakten Fall betrachten wir die zurückgezogene Fubini-Study-Metrik auf mL

für genügend großes m und nehmen dann die m-te Wurzel. Auf D setzen wir die Metrik auf Unendlich.

$\square$

Der anspruchsvolle Teil ist die Umkehrung, die von Schumacher und Tsuji in [ST04] gezeigt wurde. Aus der singulären Positivität modulo Rand folgt die Ampleness modulo Rand. Wir zeigen in Kapitel 5 mit einfacheren Methoden, dass $K_X + \beta L$ ample modulo Rand für genügend großes $\beta \in \mathbb{N}$ ist.

Definition 4.2.3
Sei X eine kompakte Mannigfaltigkeit. Ein Geradenbündel (L, h) heißt big bezüglich der singulären Metrik h, falls

$$\limsup_{m \to \infty} \frac{h^0(X, \mathcal{O}_X(mL) \otimes \mathcal{I}(h^m))}{m^n} > 0.$$

Eine wichtige Beobachtung hierzu ist die Proposition 5.1.4, welche besagt, dass ein singulär positives Geradenbündel modulo dem Randdivisor big auf dem Abschluss ist. Für den Beweis benötigen wir jedoch weitere Hilfsmittel, so dass die Proposition erst im nächsten Kapitel vorgestellt wird.

Der zentrale Nutzen der Quadrat-Integrierbarkeitsbedingung bezüglich einer Metrik mit Poincaré-Wachstum ist der, dass wir die holomorphen Schnitte auf X, die der entsprechenden Integralabschätzung gehorchen, holomorph auf $\overline{X}$ fortsetzen können, da die Schnitte auf dem Randdivisor verschwinden müssen.

Lemma 4.2.4
Sei X eine Zariski-offene Teilmenge einer projektiven Mannigfaltigkeit $\overline{X}$ der Dimension n und $D := \overline{X} \backslash X$ ein Divisor mit normalen Überkreuzungen. Sei L ein Geradenbündel auf $\overline{X}$, welches singulär positiv modulo Rand ist.

Dann kann $H^0_{(2)}(X, \mathcal{O}_X(K_X + \beta L))$ kanonisch in $H^0(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}(K_{\overline{X}} + \beta L))$ für alle $\beta \in \mathbb{N}$ eingebettet werden.

Folgende Proposition liefert einen Einbettungssatz für eine Zariski-offene Teilmenge durch ein Geradenbündel, welches big ist. Es läßt sich jedoch nicht die Teilmenge kontrollieren, die eingebettet wird.

Proposition 4.2.5 („Kodairas Lemma“, [KO71])
Sei X eine n-dimensionale projektive Mannigfaltigkeit und L ein big Geradenbündel auf X.

Dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $\Phi_{|mL|} : X \rightharpoonup \mathbb{P}^N$ eine Zariski-offene Teilmenge von X einbettet.

Beweis:
Sei A ein sehr ampler Divisor. Wir betrachten die Sequenz

$$0 \to H^0(X, mL - A) \to H^0(X, mL) \to H^0(A, mL|_A) \to ...$$

Da L big ist, gilt nach Definition $h^0(X, mL) = O(m^n)$. Aus Dimensionsgründen ist $h^0(A, mL|_A)$ maximal von der Ordnung m^{n-1}. Also muss für genügend großes m ein Schnitt in $H^0(X, mL - A)$ existieren.

Sei $0 \neq s \in H^0(X, mL - A)$. Dann ist die folgende Abbildung eine Injektion.

$$f : H^0(X, A) \to H^0(X, mL), \sigma \mapsto s \cdot \sigma$$

Also bettet $|mL|$ eine Zariski-offene Teilmenge von X durch die Schnitte, welche Vielfache von s sind, ein.

$\square$

Kapitel 5

Singulär positive Geradenbündel modulo Rand und Einbettungen

Wir wollen nun eine quasi-projektive Mannigfaltigkeit $X \subset \overline{X}$ mittels eines auf $\overline{X}$ definierten Geradenbündels L, welches gewisse Positivitätseigenschaften erfüllen muss, in den projektiven Raum einbetten. Genauer gesagt benutzen wir dazu das adjungierte Geradenbündel $\alpha(K_X + \beta L)$ für geeignete $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

Der geeignete Positivitätsbegriff für das Geradenbündel ist die singuläre Positivität modulo Rand, wobei $D := \overline{X} \backslash X$ der Randdivisor ist, vergleiche Definition 4.2.1. Obwohl das benötigte Geradenbündel L und eine zugehörige singuläre Metrik auf einer glatten, projektiven Kompaktifizierung $\overline{X}$ existieren sollen, fordern wir die Positivitätsbedingungen nur im Inneren von $\overline{X}$, also auf X. Außerdem lassen wir beliebige Singularitäten auf dem Rand zu. Mit diesen Forderungen sind im Allgemeinen die Voraussetzungen von Kodairas Einbettungssatz nicht erfüllt, so dass nicht die Kompaktifizierung direkt eingebettet wird. Mit unseren Bedingungen wird die Einbettung des Inneren nämlich unabhängig von der gewählten Kompaktifizierung.

Die Schwierigkeit im Beweis liegt nun gerade darin, dass wir das Verhalten der holomorphen Schnitte auf dem Geradenbündel zum Rand hin kontrollieren müssen. Wir finden, wie wir im 1. Abschnitt zeigen, mittels der L^2-Methoden aus Kapitel 3 globale Schnitte, welche die gewünschte Verschwindungsordnung in vorgegebenen Punkten aus dem Inneren haben, jedoch hängt die benötigte Vielfachheit des Geradenbündels von den Punkten ab. Hier ist wegen der fehlenden Kompaktheit kein Endlichkeitsargument möglich, so dass wir uns mit einem numerischen Trick helfen, der allerdings zur Folge hat, dass ein so nicht kontrollierbares Vielfaches des kanonischen Bündels benötigt wird. In 6 können wir dann mit Hilfe des Einbettungssatzes von Schumacher und Tsuji [ST04] und einer mehrfach verschachtelten Induktion eine geeignete singuläre Metrik konstruieren, um Jets zu erzeugen, aber die Vielfachheit des kanonischen Bündels auf 2 reduzieren. Wir erhalten ein effektives Resultat.

5.1 Existenz von L^2-Schnitten

Der Existenzsatz aus Kapitel 3 kann genutzt werden, um holomorphe L^2-Schnitte auf $K_X + \beta L$ zu konstruieren, die in einem vorgegebenen Punkt nicht verschwinden bzw. in endlich vielen

Punkten alle s_i-Jets erzeugen, wobei X eine quasi-projektive Mannigfaltigkeit ist. Da die Vielfachheit β des Geradenbündels L von den Punkten abhängt und X nicht kompakt ist, können wir das β nicht beschränken und damit noch keine globale Einbettung in den $\mathbb{P}^N$ erreichen. Mittels eines kleinen Tricks werden wir jedoch die Einbettung durch $\alpha(K_X + \beta L)$ für geeignete $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ im nächsten Abschnitt zeigen.

Die Beweisidee, welche auf Kodaira zurückgeht, besteht darin, lokale Schnitte mit geeigneten glatten Abschneidefunktionen zu multiplizieren. Eine durch den Existenzsatz für Lösungen des entsprechenden $\overline{\partial}$-Problems gegebene weitere glatte Funktion u wird als Summand eingesetzt, um Holomorphie zu erhalten. Eine geeignete singuläre Metrik sorgt dafür, dass der zusätzliche Summand keinen Beitrag zum Wert in den vorgegebenen Punkten liefert.

Lemma 5.1.1
Sei $X \subset \overline{X}$ eine Zariski-offene Teilmenge einer projektiven Mannigfaltigkeit $\overline{X}$ der Dimension n, so dass der Divisor $D := \overline{X} \backslash X$ nur normale Überkreuzungen besitzt. Sei L ein Geradenbündel auf $\overline{X}$, welches singulär positiv modulo Rand ist.

Dann existiert für jedes $x \in X$ ein $\beta_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $\beta \geq \beta_0$ ein Schnitt $\sigma \in H^0_{(2)}(X, \mathcal{O}_X(K_X + \beta L))$ existiert, der in x nicht verschwindet.

Beweis:
Wir konstruieren wie in Kapitel 2.3 eine vollständige Kähler-Form η_X auf X, welche Poincaré-Wachstum am Rand besitzt.

Sei $W \subset X$ eine Koordinatenumgebung und ρ eine glatte Abschneidefunktion, welche auf einer relativ kompakten Umgebung V von x identisch 1 und deren Träger in W enthalten ist. Wir setzen

$$\psi_x = \rho \cdot n \cdot \log(\sum |z_i|^2).$$

Es existiert nun ein $\beta_0 \in \mathbb{N}$ und eine stetige, echt positive Funktion c, so dass für alle $\beta \geq \beta_0$ gilt: $i\partial\overline{\partial}\psi_x + \beta\Theta_h \geq c\eta_X$. Wir wählen einen lokalen Schnitt $\sigma_x \in H^0(W, \mathcal{O}_W(K_W + \beta L))$ mit $\sigma_x(x) \neq 0$ und setzen $f = \overline{\partial}(\rho\sigma_x)$. Da $\nu(h, x) = 0$ für alle $x \in X$ und f auf V verschwindet, gilt:

$$\int_X \frac{1}{c} e^{-\psi_x} ||f||^2_{h^\beta} dV_\eta < \infty.$$

Die Anwendung des L^2-$\overline{\partial}$-Existenzsatzes liefert uns nun eine glatte $(n, 0)$-Form u mit Werten in βL, so dass $\overline{\partial}u = f$ und $i^{n^2} \int_X e^{-\psi_x} h^\beta u \wedge \overline{u} < \infty$, unabhängig von der Wahl von η_X. Die Endlichkeit des Integrals und die Holomorphie von u auf V sorgen dafür, dass u in x verschwindet.

Der Schnitt $\sigma = \rho \cdot \sigma_x - u$ ist holomorph, da $\overline{\partial}\sigma = f - \overline{\partial}u = 0$. Damit ist $\sigma \in H^0_{(2)}(X, \mathcal{O}_X(K_X + \beta L))$. Außerdem ist $\sigma(x) = \rho(x) \cdot \sigma_x(x) - u(x) = \sigma_x(x) \neq 0$. $\square$

Wir verallgemeinern obiges Lemma auf die Erzeugung von Jets in vorgegebenen endlich vielen Punkten $x_i \in X$.

Satz 5.1.2
Es gelten die gleichen Voraussetzungen wie im obigen Lemma. Weiterhin seien $x_1, ..., x_p \in X$ isolierte Punkte und $s_1, ..., s_p \in \mathbb{N}$.

Dann existiert ein $\beta_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $\beta \geq \beta_0$ die Abbildung

$$H^0_{(2)}(X, \mathcal{O}_X(K_X + \beta L)) \to \bigoplus_{j=1}^{p} \mathcal{O}_X(K_X + \beta L)_{x_j} \otimes (\mathcal{O}_X/\mathfrak{m}^{s_j+1})_{x_j}$$

surjektiv ist.

Beweis:
Wir gehen analog zum obigen Lemma vor. Seien $W_i \subset X$ disjunkte Koordinatenumgebungen zu x_i und ρ_i glatte Abschneidefunktionen, welche in einer Umgebung V_i von x_i identisch 1 sind, deren Träger in W_i enthalten sind und deren Werte in $[0, 1]$ liegen.

Wir setzen $\psi_i = \rho_i(z) \cdot n \cdot s_i \cdot \log(\sum |z_i|^2)$. Es existieren $\beta_0 \in \mathbb{N}$ und eine stetige, echt positive Funktion c auf X, so dass $\sum\limits_{i=1}^{p} i\partial\overline{\partial}\psi_i + \beta_0 \cdot \Theta_h \geq c \cdot \eta_X$. Sei $\beta \geq \beta_0$. Wir wählen lokale Schnitte $\sigma_i \in H^0(W_i, K_X + \beta L)$, welche die jeweils vorgegebenen Koeffizienten in x_i haben, und setzen $f = \overline{\partial}(\sum\limits_{i=1}^{p} \rho_i\sigma_i)$.

f verschwindet in einer Umgebung um jedes x_i. Da auch die Lelong-Zahl von h in jedem Punkt von X verschwindet, gilt:

$$\int\limits_X \frac{1}{c} e^{-\sum \psi_i} ||f||^2_{h^\beta} dV_\eta < \infty.$$

Nach dem Existenzsatz existiert nun eine glatte $(n, 0)$-Form u mit Werten in βL, so dass $\overline{\partial}u = f$ und $i^{n^2} \int_X e^{-\sum \psi_i} h^\beta u \wedge \overline{u} < \infty$.

u verschwindet zur Ordnung s_i in x_i, da das vorherige Integral endlich ist.

Wir setzen $\sigma = \sum \rho_i\sigma_i - u$. Da $\overline{\partial}\sigma = f - \overline{\partial}u = 0$, ist $\sigma \in H^0_{(2)}(X, \mathcal{O}_X(K_X + \beta L))$ und $\partial^\alpha\sigma(x_i) = \partial^\alpha\sigma_i(x_i)$.

□

Proposition 5.1.3
Sei X ein reduzierter, irreduzibler, kompakter komplexer Raum der Dimension n, $\nu : Y \to X$ die Normalisierung und $\rho : Z \to Y$ eine Modifikation mit Z glatt. Weiterhin sei $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(L) \in$ Coh(X) eine invertierbare Garbe. Dann sind äquivalent:

a) $\mathcal{L}$ ist big.

b) $\nu^*\mathcal{L}$ ist big.

c) $(\nu \circ \rho)^*\mathcal{L}$ ist big.

Beweis:
Wir zeigen, dass a) aus b) folgt. Die anderen Implikationen ergeben sich unmittelbar.

Wir betrachten die exakte Sequenz $0 \to \mathcal{O}_X \to \nu_* \mathcal{O}_Y \to \mathcal{C} \to 0$, wobei $\mathrm{Supp}(\mathcal{C}) \subsetneq X$ nirgends dicht ist. Als weitere exakte Sequenz benötigen wir $0 \to \mathcal{L}^{\otimes m} \to \nu_* \nu^* \mathcal{L}^{\otimes m} \to \mathcal{C} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m} \to 0$. Nun ist $h^0(\mathrm{Supp}(\mathcal{C}), \mathcal{L}^{\otimes m} \otimes \mathcal{C}) = O(m^{n-1})$ und $h^0(Y, \nu^* \mathcal{L}^{\otimes m}) \sim m^n$, woraus sich die Behauptung ergibt.

□

Proposition 5.1.4
Sei $X \subset \overline{X}$ eine Zariski-offene Teilmenge einer projektiven Mannigfaltigkeit $\overline{X}$ der Dimension n, so dass der Divisor $D := \overline{X} \backslash X$ nur normale Überkreuzungen besitzt. Sei L ein Geradenbündel auf $\overline{X}$, welches singulär positiv modulo Rand ist.

Dann ist L big auf $\overline{X}$.

Beweis:
Sei h die zur singulären Positivität modulo Rand gehörende Metrik auf L.

Sei $\beta_0 \in \mathbb{N}$ nach Lemma 5.1.1 so gewählt, dass ein Schnitt $0 \neq \sigma_0 \in H^0_{(2)}(X, K_X + \beta_0 L)$ existiert. Sei weiterhin $D_0 \subset \overline{X}$ der zugehörige Nullstellen-Divisor.

Ein Schnitt $\sigma \in H^0(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}(K_{\overline{X}} + \beta L) \otimes \mathcal{I}(h^\beta))$ ist eine βL-wertige $(n,0)$-Form, so dass $i^{n^2} \int h^\beta \sigma \wedge \overline{\sigma} < \infty$. Damit ist also $H^0_{(2)}(X, K_X + \beta L) = H^0(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}(K_{\overline{X}} + \beta L) \otimes \mathcal{I}(h^\beta))$. Wir betrachten die Einschränkungsabbildung

$$r_\beta : H^0(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}(K_{\overline{X}} + \beta L) \otimes \mathcal{I}(h^\beta)) \to H^0(D_0, \mathcal{O}_{D_0}(K_{\overline{X}} + \beta L)).$$

Es ist aus Dimensionsgründen nach dem Satz von Riemann-Roch

$$h^0(D_0, \mathcal{O}_{D_0}(K_{\overline{X}} + \beta L)) = O(\beta^{n-1}),$$

denn für einen amplen Divisor $A \subset D_0$ und genügend großes $\alpha \in \mathbb{N}$ ist $\alpha A - (K_{\overline{X}} + \beta L)|_{D_0}$ effektiv und damit $h^0(D_0, K_{\overline{X}} + \beta L) \leq h^0(D_0, \alpha A)$. Außerdem gilt wegen der singulären Positiv modulor Rand:00

$$\limsup_{\beta \to \infty} \frac{h^0_{(2)}(X, K_X + \beta L)}{\beta^n} > 0.$$

Damit muss die Dimension des Kerns von r_β schneller wachsen als β^n, mit anderen Worten ist

$$\limsup_{\beta \to \infty} \frac{\dim \ker r_\beta}{\beta^n} > 0.$$

Da $\log h$ lokal von unten beschränkt ist, gilt $\mathcal{I}(h^\beta) \subset \mathcal{I}(h^{\beta - \beta_0})$. Der Kern von r_β besteht gerade aus den Schnitten, welche durch σ_0 teilbar sind. Da $\sigma_0 \in H^0(\overline{X}, K_{\overline{X}} + \beta_0 L)$, muss jedes Element des Kerns auch in $H^0(\overline{X}, (\beta - \beta_0)L)$ liegen, also ist

$$\ker r_\beta \subset H^0(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}(K_{\overline{X}} + \beta L) \otimes \mathcal{I}(h^\beta)) \cap H^0(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}((\beta - \beta_0)L)).$$

Damit ist

$$\ker r_\beta \subset H^0(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}((\beta - \beta_0)L) \otimes \mathcal{I}(h^{\beta-\beta_0})).$$

Es existiert eine Modifikation $\rho : \widetilde{X} \to \overline{X}$, so dass

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{h^0(\widetilde{X}, m\rho^* L)}{m^n} > 0.$$

Mit Proposition 5.1.3 folgt die Behauptung.

□

5.2 Einbettung von quasi-projektiven Mannigfaltigkeiten

Mittels der Schnitte aus Satz 5.1.2 können wir eine Zariski-offene Teilmenge von X in den projektiven Raum einbetten. Dabei kann jedoch nicht der Divisor kontrolliert werden, auf dem keine Einbettung gegeben ist. Durch geeignete Wahl von Punkten, nämlich gerade auf diesem Divisor, bekommen wir durch iteratives Vorgehen endlich viele Zariski-offene Mengen U_i, die jeweils eingebettet werden können. Allerdings sind die zu U_i gehörenden Schnitte auf unterschiedlichen Vielfachheiten des Geradenbündels L definiert. Diese Idee geht auf Sommese [Som75, Som76] zurück, dort jedoch für glatte Metriken.

Proposition 5.2.1
Sei X eine Zariski-offene Teilmenge einer kompakten projektiven Mannigfaltigkeit $\overline{X}$ der Dimension n und $D := \overline{X} \setminus X$ ein Divisor mit normalen Überkreuzungen. Sei L ein Geradenbündel auf $\overline{X}$, welches singulär positiv modulo Rand ist.

Dann existieren eine endliche Überdeckung $\bigcup_{i=1}^{k} U_i = X$ mit $U_i \subset \overline{X}$ Zariski-offen und natürliche Zahlen $\beta_1 < ... < \beta_k$, so dass $K_X + \beta_i L$ auf U_i global erzeugt ist, d.h. für jedes $x \in U_i$ existiert ein Schnitt $\sigma_x \in H^0_{(2)}(X, K_X + \beta_i L)$ mit $\sigma_x(x) \neq 0$.

Beweis:
Sei $x_1 \in X$ beliebig. Dann existiert nach Satz 5.1.2 ein $\beta_1 \in \mathbb{N}$ und ein Schnitt $\sigma_1 \in H^0_{(2)}(X, K_X + \beta_1 L)$ mit $\sigma_1(x_1) \neq 0$. Damit existiert also eine Teilmenge $S(\beta_1) \subset H^0_{(2)}(X, K_X + \beta_1 L)$, deren Basisort außerhalb einer in $\overline{X}$ Zariski-offenen Teilmenge U_1 liegt.

Da $D_1 = \overline{X} \setminus U_1$ nur endlich viele Komponenten hat, wählen wir $x_2, ..., x_r$ jeweils auf genau einer Komponente maximaler Dimension von $D_1 \cap X$. Nun wenden wir wieder Satz 5.1.2 an, um $\beta_2, ..., \beta_r \in \mathbb{N}$ und endliche Teilmengen $S(\beta_j) \subset H^0_{(2)}(X, K_X + \beta_j L)$ zu bekommen, deren Basisorte außerhalb von in $\overline{X}$ Zariski-offenen Teilmengen U_j liegen.

Durch iteratives Vorgehen, welches nach endlich vielen Schritten stoppt, da in jedem Schritt die Dimension reduziert wird, erhalten wir so die Behauptung nach eventueller Umordnung der β_i.

□

Man beachte, dass β_1 beliebig groß gewählt werden darf, da Satz 5.1.2 die Existenz einer unteren Schranke liefert. Wir erreichen jedoch nicht, dass die Schnitte auf dem gleichen Raum existieren, indem wir das Maximum der β_i nehmen. Wäre zum Beispiel $\beta_2 \leq \beta_1$, so dürften wir $\beta_2 = \beta_1$ setzen, wäre jedoch $\beta_2 > \beta_1$, müßten wir β_1 erhöhen. Damit änderten wir unter Umständen die Zariski-offene Teilmenge U_1 ab, so dass dann wiederum ein eventuell noch größeres β_2 nötig wäre.

Proposition 5.2.2
Sei X eine Zariski-offene Teilmenge einer kompakten projektiven Mannigfaltigkeit $\overline{X}$ der Dimension n und $D := \overline{X} \backslash X$ ein Divisor mit normalen Überkreuzungen. Sei L ein Geradenbündel auf $\overline{X}$, welches singulär positiv modulo Rand ist.

Dann existieren eine endliche Überdeckung $\bigcup\limits_{i=1}^{k} U_i = X$ mit $U_i \subset \overline{X}$ Zariski-offen und natürliche Zahlen $\beta_1 < ... < \beta_k$, so dass für alle $i = 1, ..., k$ das adjungierte Geradenbündel $K_X + \beta_i L$ eine holomorphe Einbettung von U_i definiert.

Der Beweis ergibt sich analog zu der vorherigen Proposition. Um eine Einbettung der gesamten Mannigfaltigkeit zu erreichen, müssen wir die Schnitte, welche auf den U_i eine Immersion bestimmen, zusammenführen. Diese Schnitte leben jedoch auf unterschiedlichen Geradenbündeln. Die zwei folgenden, einfachen Lemmata stellen sicher, dass sich die benötigten Schnitte durch geeignetes Potenzieren auf dem gleichen Geradenbündel befinden. Abschließend müssen wir noch die Injektivität der so definierten Abbildung sicherstellen.

Lemma 5.2.3
Seien α, β und γ natürliche Zahlen, so dass $\alpha < \beta < \gamma$. Dann lösen für jedes $N \in \mathbb{N}$ die natürlichen Zahlen $r = (\gamma - \beta)N, t = (\beta - \alpha)N$ und $z = (\gamma - \alpha)N$ das folgende Gleichungssystem:

$$\alpha r + \gamma t = \beta z \qquad\qquad r + t = z.$$

Der Beweis ergibt sich sofort durch Einsetzen. Wir verallgemeinern das obige Lemma auf die in unserer Situation benötigte Form.

Lemma 5.2.4
Seien α_i, γ und β_j natürliche Zahlen für $i = 1, ..., k$ und $j = 1, ..., r$ mit $\alpha_1 < ... < \alpha_k < \gamma < \beta_1 < ... < \beta_r$. Dann existieren natürliche Zahlen r_{ij}, t_{ij} und α für $i = 1, ..., k$ und $j = 1, ..., r$, für welche gilt:

$$\alpha_i r_{ij} + \beta_j t_{ij} = \gamma\alpha \qquad\qquad r_{ij} + t_{ij} = \alpha.$$

Beweis:
Wir betrachten die Hauptideale $I_{ij} := (\beta_j - \alpha_i)$. Es existieren natürliche Zahlen $\alpha \in \bigcap I_{ij}$ und N_{ij} mit $\alpha = (\beta_j - \alpha_i)N_{ij}$.

Nach dem obigen Lemma lösen $r_{ij} = (\beta_j - \gamma)N_{ij}, t_{ij} = (\gamma - \alpha_i)N_{ij}$ und $\alpha = (\beta_j - \alpha_i)N_{ij}$ die folgenden Gleichungen:

$$\alpha_i r_{ij} + \beta_j t_{ij} = \gamma\alpha \qquad\qquad r_{ij} + t_{ij} = \alpha.$$

□

Hauptsatz 5.2.5
Sei X eine Zariski-offene Teilmenge einer kompakten projektiven Mannigfaltigkeit $\overline{X}$ der Dimension n und $D := \overline{X} \setminus X$ ein Divisor mit normalen Überkreuzungen. Sei L ein Geradenbündel auf $\overline{X}$, welches singulär positiv modulo Rand ist.

Dann existieren natürliche Zahlen α, β, so dass $H^0(X, \alpha(K_{\overline{X}} + \beta L))$ eine Einbettung von X in den projektiven Raum definiert. Mit anderen Worten ist $\alpha(K_{\overline{X}} + \beta L)$ sehr ample modulo Rand.

Beweis:
Seien $U_i \subset \overline{X}$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$ und $S(\alpha_i) \subset H^0_{(2)}(X, K_X + \alpha_i L)$ für $i = 1, ..., k$ aus Proposition 5.2.2. Wir setzen $\beta := \alpha_k$.

Nach Proposition 5.2.1 existieren $\beta_1 < ... < \beta_q$, wobei ohne Einschränkung $\beta_1 > \alpha_k$ angenommen werden darf, und $S(\beta_j) \subset H^0_{(2)}(X, K_X + \beta_j L)$, welche ebenfalls Zariski-offene $\widetilde{U}_j, j = 1, ..., q$ einbetten, wobei $\bigcup_{j=1}^q \widetilde{U}_j = X$. Wir betrachten $S(\alpha_i)$ bzw. $S(\beta_j)$ als Untervektorraum von $H^0(\overline{X}, K_{\overline{X}} + \alpha_i L)$ bzw. $H^0(\overline{X}, K_{\overline{X}} + \beta_j L)$ und bezeichnen mit $S(\alpha_i)S(\beta_j)$ den vom Produkt der entsprechenden Schnitte erzeugten Unterraum.

Damit ist

$$S(\alpha_i)^{r_{ij}} S(\beta_j)^{t_{ij}} \subset H^0(\overline{X}, (r_{ij} + t_{ij})K_{\overline{X}} + (\alpha_i r_{ij} + \beta_j t_{ij})L) \text{ für alle } r_{ij}, t_{ij} \in \mathbb{N}.$$

Nach obigem Lemma existieren geeignete r_{ij} und t_{ij} für $1 \leq i \leq k-1$ und $1 \leq j \leq q$, welche die folgenden beiden Gleichungen lösen:

$$\alpha_i r_{ij} + \beta_j t_{ij} = \alpha\beta, \qquad r_{ij} + t_{ij} = \alpha.$$

Damit definiert also

$$S = \langle S(\beta)^\alpha, \bigcup_{i,j} S(\alpha_i)^{r_{ij}} S(\beta_j)^{t_{ij}} \rangle \subset H^0(\overline{X}, \alpha K_{\overline{X}} + \alpha\beta L),$$

aufgefasst als das von den beiden Unterräumen aufgespannte Linearsystem, eine Abbildung, welche U_i für alle $i = 1, ..., k$ in den $\mathbb{P}^N$ einbettet.

Um eine globale Einbettung zu bekommen, müssen wir das Verfahren noch einmal durchlaufen, damit $x \in U_i$ und $y \in U_j$ für beliebige $i \neq j$ durch Schnitte getrennt werden können. Dass ein solcher Schnitt existiert, folgt aus Proposition 5.1.2, jedoch eventuell wieder auf einem anderen Vielfachen des Geradenbündels. Durch das eben beschriebene iterative Vorgehen wird erreicht, dass sich alle benötigten Schnitte in $H^0(\overline{X}, \alpha K_{\overline{X}} + \alpha\beta L)$ für geeignete $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ befinden. Dazu werden nur endlich viele Schritte gebraucht, da wir mit jedem Schritt die Dimension reduzieren. □

Ist X nicht glatt, so können wir den glatten Teil von X, also X_{reg}, durch $\alpha K_{X_{reg}} + \beta L_{|X_{reg}}$ einbetten, indem wir den singulären Teil zum Rand dazuzählen, also $\overline{X} = X_{reg} \cup (X_{sing} \cup D)$, und Hironakas Resolution der Singularitäten anwenden, da der Rand in Gestalt der Hilfsmetrik nur im Beweis des Verschwindungssatzes, nicht aber in der Aussage vorkommt.

Wir können im glatten Fall sogar noch eine stärkere Version zeigen, nämlich Satz 6.2.3, in dem die Vielfachheit des kanonischen Bündels beschränkt wird. Dazu wird eine etwas andere Technik benutzt, allerdings basiert auch diese auf der Konstruktion einer geeigneten Metrik mit hoher Lelong-Zahl in isolierten Punkten und der Anwendung des Korollars von Nadels Verschwindungssatz. Wir setzen dazu den Einbettungssatz von Schumacher und Tsuji ([ST04]) voraus.

Satz 5.2.6 (Schumacher und Tsuji, [ST04])
Sei X ein irreduzibler algebraischer Raum mit Kompaktifizierung $\overline{X}$ und sei L ein Geradenbündel auf $\overline{X}$, welches eine singuläre Metrik h auf $L_{|red(\overline{X})}$ besitzt, so dass gilt:

(i) *Für jedes $p \in \overline{X}$ und jede holomorphe Kurve $C \subset \overline{X}$ mit $p \in C$ und $C \cap X \neq \varnothing$ ist $\Theta_h|C$ wohldefiniert und $\nu(\Theta_h|C, p) = 0$.*

(ii) *Für jeden glatten, lokal abgeschlossenen Unterraum $Z \subset X$ ist der Strom $\Theta_h|Z$ wohldefiniert und es existiert eine positiv definite $\mathcal{C}^\infty$ hermitesche Form γ_Z auf Z, so dass $\Theta_h|Z \geq \gamma_Z$.*

Dann definiert die Abbildung $\Phi_{|mL|} : \overline{X} \rightharpoonup \mathbb{P}^N$ eine Einbettung von X für genügend große m.

Korollar 5.2.7
Sei X eine Zariski-offene Teilmenge einer projektiven Mannigfaltigkeit $\overline{X}$ der Dimension n und $D := \overline{X} \backslash X$ ein Divisor mit normalen Überkreuzungen. Sei L ein Geradenbündel auf $\overline{X}$, welches singulär positiv modulo Rand ist.

Dann existiert ein $m_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m \geq m_0$ gilt: mL ist sehr ample modulo Rand.

Kapitel 6

Effektive Resultate

Die folgende Vermutung von Fujita gibt eine untere Schranke für die Vielfachheit eines positiven Geradenbündels an, ab der der Basisort des adjungierten Bündels verschwindet bzw. ab der das adjungierte Bündel eine Einbettung der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit in den projektiven Raum liefert.

Vermutung 6.0.1 (Fujita, [Fuj87])
Sei X eine projektive Mannigfaltigkeit der Dimension n und L ein amples Geradenbündel auf X. Dann ist $K_X + \beta L$ global erzeugt für $\beta \geq n+1$ und sehr ample für $\beta \geq n+2$.

Das Beispiel $X = \mathbb{P}^n$ zeigt, dass diese Schranken optimal sind.

Etwas allgemeiner sucht man nach einer unteren Schranke β_0, so dass $K_X + \beta L$ für $\beta \geq \beta_0$ alle s_j-Jets in beliebigen Punkten $x_1, ..., x_p \in X$ simultan erzeugt; mit anderen Worten: Ab welchem β_0 ist die Abbildung $H^0(X, K_X + \beta L) \to \bigoplus_{j=1}^p \mathcal{O}_X(K_X + \beta L)_{x_j} \otimes \mathcal{O}_{X,x_j}/\mathfrak{m}_{X,x_j}^{s_j+1}$ für $\beta \geq \beta_0$ surjektiv? Dieses β_0 darf also von der Dimension n der Mannigfaltigkeit, der Anzahl an Punkten p und den Jet-Ordnungen $s_j, j = 1, ..., p$ abhängen, nicht jedoch von den Punkten $x_1, ..., x_p$.

Einige Resultate wurden auf dem Weg zum Beweis der Vermutung bereits erzielt, sowohl mit rein algebraischen als auch mit analytischen Methoden. Dabei hat sich herausgestellt, dass die Problematik derBasispunktfreiheit etwas einfacher gelöst werden kann. Häufig wird auch ein Vielfaches des kanonischen Bündels zugelassen. Der aktuelle Stand sieht wie folgt aus:

In einer Dimension folgt die Vermutung aus dem Satz von Riemann-Roch. Den Fall $n = 2$ bewies Reider 1988 (vgl. [Rei88]). Die Basispunktfreiheit wurde für $n = 3$ von Ein und Lazarsfeld (vgl. [EL93]) und für $n = 4$ von Kawamata (vgl. [Kaw97]) bewiesen. Für allgemeines n liegt die Schranke bei $\beta \sim O(n^{\frac{4}{3}})$. Diese Schranke, welche von Heier [Hei02] bewiesen wurde, geht auf die Techniken von Angehrn und Siu [AS95] und Helmke [Hel97, Hel99] zurück.

Siu [Siu96] und Demailly [Dem94] zeigten, dass $2K_X + \beta L$ sehr ample für $\beta \geq 2 + \binom{3n+1}{n}$ ist.

Wir wollen im zweiten Abschnitt die Fragestellung auf quasi-projektive Mannigfaltigkeiten ausdehnen. Gegeben ist also eine Zariski-offene Teilmenge $X \subset \overline{X}$ einer n-dimensionalen projektiven Mannigfaltigkeit $\overline{X}$. Wir wollen eine untere Schranke β_0 finden, abhängig von der Dimension n, der Anzahl der Punkte p und den Jet-Ordnungen $s_j, j = 1, ..., p$, so dass

$H^0(\overline{X}, 2K_{\overline{X}} + \beta L)$ für $\beta \geq \beta_0$ die s_j-Jets in beliebigen Punkten $x_1, ..., x_p \in X$ erzeugt. Dabei stellt sich heraus, dass der in Kapitel 4 eingeführte Begriff der schwachen Positivität modulo Rand eines Geradenbündels eine solche Aussage zuläßt.

Wir zeigen zuerst ein Resultat von Demailly ([Dem94]) für ample Geradenbündel auf kompakten Mannigfaltigkeiten. Diese Beweisidee passen wir dann an unsere Situation an.

6.1 Effektive Jet-Erzeugung auf kompakten Mannigfaltigkeiten

Dieser Abschnitt stellt Resultate über die Positivität eines adjungierten bzw. doppelt-adjungierten amplen Geradenbündels vor. Es werden konkrete $\beta_0 \in \mathbb{N}$ bestimmt, so dass für $\beta \geq \beta_0$ $K_X + \beta L$ nef bzw. $2K_X + \beta L$ sehr ample ist; etwas allgemeiner, für welche β erzeugt $2K_X + \beta L$ simultan Jets zu vorgegebener Ordnung in endlich vielen Punkten.

Zentral für den Beweis ist Korollar 3.3.3. Wir müssen also eine positive, singuläre Metrik h auf $\alpha K_X + \beta L$ konstruieren, welche in vorgegebenen Punkten isolierte logarithmische Pole besitzt. Das bedeutet, dass ihre Lelong-Zahl $\nu(h, x_j)$ in den Punkten x_j größer als $n + s_j$ ist, aber in Umgebungen der x_j kleiner als 1 ist. Dabei soll das β kontrollierbar bleiben.

Wir erreichen das Gewünschte durch eine doppelte Induktion, die eine Folge von Metriken $h_{k,l}$ liefert, welche stationär wird.

Satz 6.1.1
Sei X eine projektive Mannigfaltigkeit und $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$ eine kohärente Idealgarbe. Sei d die maximale Dimension der Komponenten von $V(\mathcal{J})$. Sei $Y = \sum \lambda_j Y_j$ der zu den d-dimensionalen Komponenten von $V(\mathcal{J})$ zugehörige effektive algebraische Zyklus mit Multiplizitäten λ_j, gegeben durch $\mathcal{J}$. Seien L und F Geradenbündel.

Dann ist $P(\beta) = \chi(Y, \mathcal{O}(F + \beta L)_{|Y})$ ein Polynom vom Grad d mit Leitkoeffizient $\frac{L^d \cdot [Y]}{d!}$.

Lemma 6.1.2
Sei $P(\beta)$ ein numerisches Polynom (d.h. $P : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$) vom Grad $d > 0$ und Leitkoeffizient $\frac{a_d}{d!}$ mit $a_d \in \mathbb{N}$. Sei $\beta_0 \in \mathbb{N}$, so dass $P(\beta) \geq 0$ für alle $\beta \geq \beta_0$. Dann gilt:

- *a) Für jedes $N \in \mathbb{N}$ existiert ein $\beta \in [\beta_0, \beta_0 + Nd]$ mit $P(\beta) \geq N$.*
- *b) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert ein $\beta \in [\beta_0, \beta_0 + kd]$ mit $P(\beta) \geq \frac{a_d k^d}{2^{d-1}}$.*
- *c) Für jedes $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq 2d^2$ existiert ein $\beta \in [\beta_0, \beta_0 + N]$ mit $P(\beta) \geq N$.*

Beweis:
a) Jede der N Gleichungen $P(\beta) = 0, P(\beta) = 1, ..., P(\beta) = N - 1$ hat höchstens d Nullstellen. Also muss es ein $\beta \in [\beta_0, \beta_0 + dN]$ geben, welches keine Nullstelle ist.

b) Wir zeigen zuerst den Fall $k = 1$.
Sei $\Delta P(\beta) := P(\beta+1) - P(\beta)$. Nach Newtons Formel gilt für alle $\beta \in \mathbb{Z}$:

$$\Delta^d P(\beta) = \sum_{j=0}^{d} (-1)^j \binom{d}{j} P(\beta + d - j) = a_d.$$

Ist nun $j_0 \in \{0, 2, 4, ..., 2\lfloor \frac{d}{2} \rfloor\}$, so dass $P(\beta_0 + d - j_0)$ über dieser Menge maximal wird, bekommen wir:

$$a_d = \sum_{j=0}^{d} (-1)^j \binom{d}{j} P(\beta_0 + d - j) \leq \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \binom{d}{2j} P(\beta_0 + d - j_0) = 2^{d-1} P(\beta_0 + d - j_0).$$

Es existiert also ein $\beta \in [\beta_0, \beta_0 + d]$ mit $P(\beta) \geq \frac{a_d}{2^{d-1}}$.
Ist $k > 1$, wenden wir den Fall $k = 1$ auf das Polynom $Q(\beta) = P(k\beta - (k-1)\beta_0)$ an und erhalten die Behauptung.

c) Für $d = 1$ stimmt die Aussage gerade mit a) überein.
Für $d = 2$ ergibt sich

$$\max_{\beta \in [\beta_0, \beta_0 + N]} P(\beta) \geq \begin{cases} a_2 N^2/8 & \text{, falls } N \text{ gerade.} \\ a_2 (N^2 - 1)/8 & \text{, falls } N \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Also existiert für $N \geq 8$ ein $\beta \in [\beta_0, \beta_0 + N]$ mit $P(\beta) \geq N$.
Sei nun $d \geq 3$ und $N \geq 2d^2$. Wir setzen $k = \lceil 2(\frac{N}{2})^{1/d} \rceil$.

Damit ist $\frac{k^d}{2^{d-1}} \geq N$ und $kd \leq (2(\frac{N}{2})^{1/d} + 1)d \leq N$, so dass die Anwendung von b) die Behauptung zeigt.

□

Wir treffen eine effektive Aussage über die Positivität des adjungierten Geradenbündels. Es gilt sogar eine etwas stärkere Version, nämlich dass $K_X + (n+1)L$ semiample ist. Ursprünglich wurde im Beweis Mori-Theorie ([Mor82]) und das Basispunktfreiheitstheorem ([Kaw84]) verwendet, vgl. [Fuj87]. Hier zeigen wir jedoch einen anderen Beweis, der weitgehend parallel zum Beweis des Satzes 6.1.4 verläuft und auf Demailly zurückgeht. Der Übersichtlichkeit halber stellen wir die Beweise getrennt vor.

Satz 6.1.3
Sei X eine projektive Mannigfaltigkeit der Dimension n und sei L ein amples Geradenbündel auf X. Dann gilt:

a) $K_X + (n+1)L$ ist nef.

b) $K_X + (n+2)L$ ist ample.

Beweis:
b) folgt sofort aus a), da die Summe eines amplen und eines nef Geradenbündels wieder ample ist.

Da L ample ist, existiert ein $\mu \in \mathbb{N}$, so dass μL sehr ample ist. Wir zeigen, dass $K_X + F_\alpha$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}$ global erzeugt ist, wobei $F_\alpha = \alpha K_X + (\alpha(n+1)+1+n\mu)L$, denn dann ist $K_X + \frac{\alpha(n+1)+1+n\mu}{\alpha+1}L$ nef und für $\alpha \to \infty$ auch $K_X + (n+1)L$.

Sei $x \in X$ fest. Die positive, singuläre Metrik h_0, welche von allen in x verschwindenden Schnitten von μL definiert wird, hat also Lelong-Zahl 1 in x und sonst verschwindende Lelong-Zahl. Damit hat h_0^n auf $n\mu L$ die für das Korollar 3.3.3 geforderten Voraussetzungen, nämlich $\nu(h_0^n, x) \geq n$ für die Basispunktfreiheit, also die Erzeugung der 0-Jets.

Nun muss noch eine Metrik h_α auf $\alpha K_X + (\alpha(n+1)+1)L$ mit $\dim V(\mathcal{I}(h_\alpha)) = 0$ konstruiert werden, denn dann bleibt x ein isolierter Punkt mit $\nu(h_0^n h_\alpha, x) \geq n$. Wir wollen für eine gewisse monoton fallende stationäre Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ folgende Metriken auf $\alpha K_X + b_k L$ konstruieren:

$$h_{k,l} := \left(\sum_{1\leq i\leq l, 0\leq j\leq N} |\sigma_i^{\alpha\mu} \lambda_j^{(\alpha+1)b_k - \alpha\beta_i}|^2 \right)^{-\frac{1}{(\alpha+1)\mu}}.$$

Dabei definieren $\lambda_0, ..., \lambda_N \in H^0(X, \mu L)$ eine Einbettung von X, h_L die zugehörige positive glatte Metrik auf L und $\omega := \frac{i}{2\pi}\Theta_{h_L}$ die entsprechende Krümmungsform. Die $\sigma_i \in H^0(X, (\alpha+1)K_X + \beta_i L)$ mit $\beta_i < \frac{\alpha+1}{\alpha} b_k$ sollen so gewählt werden, dass $\mathcal{I}(h_{k,l+1}) \supsetneq \mathcal{I}(h_{k,l})$, solange $\dim V(\mathcal{I}(h_{k,l})) > 0$. Die Bedingung $\beta_i < \frac{\alpha+1}{\alpha} b_k$ sorgt dafür, dass $\frac{i}{2\pi}\Theta_{h_{k,l}} \geq \frac{1}{\alpha+1}\omega$, d.h. $h_{k,l}$ ist eine positive singuläre Metrik auf $\alpha K_X + b_k L$.

Wir konstruieren die $h_{k,l}$ induktiv:

IA: $k = 1$
Sei b_1 so groß, dass $(\alpha+1)K_X + (b_1 - 1)L$ basispunktfrei ist. Dann setzen wir $\beta_i = b_1 - 1$ und finden geeignete $\sigma_i \in H^0(X, (\alpha+1)K_X + \beta_i L)$.

IS: $k \mapsto k+1$
Nach Induktionsvoraussetzung existieren also $(h_{k,l})_{l\geq 1}$ und $h_k := h_{k,l_0}$, wobei $\dim V(\mathcal{I}(h_{k,l_0})) = 0$ ist. Die Konstruktion von $(h_{k+1,l})_{l\geq 1}$ erfolgt wiederum durch Induktion, diesmal über l.

IA: $l = 0$
Sei $h_{k+1,0} \equiv \infty$, dann ist $\mathcal{I}(h_{k+1,0}) = 0$.

IS: $l \mapsto l+1$
Nach Induktionsvoraussetzung ist $h_{k+1,l}$ schon konstruiert. Wir wenden Nadels Verschwindungssatz auf das Geradenbündel $\alpha K_X + \beta L = (\alpha K_X + b_k L) + (\beta - b_k)L$ und die zugehörige Metrik $h_k h_L^{\beta - b_k}$ an und erhalten

$$H^q(X, \mathcal{O}_X((\alpha+1)K_X + \beta L) \otimes \mathcal{I}(h_k)) = 0 \text{ für } q \geq 1, \beta \geq b_k.$$

Da $V(\mathcal{I}(h_k))$ 0-dimensional ist, ist die Garbe $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}(h_k)$ eine Wolkenkratzergarbe. Die exakte Sequenz $0 \longrightarrow \mathcal{I}(h_k) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{I}(h_k) \longrightarrow 0$, tensoriert mit

$\mathcal{O}_X((\alpha+1)K_X+\beta L)$, zeigt, dass ebenfalls

$$H^q(X, \mathcal{O}_X((\alpha+1)K_X+\beta L)) = 0 \text{ für } q \geq 1, \beta \geq b_k.$$

Wiederum mit Nadels Verschwindungssatz ist

$$H^q(X, \mathcal{O}_X((\alpha+1)K_X+\beta L) \otimes \mathcal{I}(h_{k+1,l})) = 0 \text{ für } q \geq 1, \beta \geq b_k.$$

Mit der exakten Sequenz $0 \longrightarrow \mathcal{I}(h_{k+1,l}) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{I}(h_{k+1,l}) \longrightarrow 0$ sehen wir, dass

$$H^q(X, \mathcal{O}_X((\alpha+1)K_X+\beta L) \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{I}(h_{k+1,l})) = 0 \text{ für } q \geq 1 \text{ und } \beta \geq b_k.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} P(\beta) &= \chi(X, \mathcal{O}_X((\alpha+1)K_X+\beta L) \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{I}(h_{k+1,l})) \\ &= h^0(X, \mathcal{O}_X((\alpha+1)K_X+\beta L) \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{I}(h_{k+1,l})) \geq 0 \text{ für } \beta \geq b_k. \end{aligned}$$

Außerdem besitzt jeder Schnitt von $(\alpha+1)K_X+\beta L$ auf $V(\mathcal{I}(h_{k+1,l}))$ wegen des Verschwindens der H^1-Gruppe eine Fortsetzung auf X. Um also den für $h_{k,l+1}$ notwendigen Schnitt σ_{l+1}, welcher auf $V(\mathcal{I}(h_{k+1,l}))$ nicht verschwindet, zu erhalten, muss $P(\beta) \geq 1$ sein. Nach Lemma 6.1.2a) existiert ein $\beta_{l+1} \in [b_k, b_k+n]$, da $0 \leq \deg P = d = \dim V(\mathcal{I}(h_{k+1,l})) \leq n$ ist, und damit existiert auch der Schnitt σ_{l+1}. Wir setzen

$$b_{k+1} = \left\lfloor \frac{\alpha}{\alpha+1}(b_k+n) \right\rfloor + 1,$$

damit $b_k + n < \frac{\alpha+1}{\alpha} b_{k+1}$ und somit $\beta_{l+1} < \frac{\alpha+1}{\alpha} b_{k+1}$. Unabhängig von der Wahl von b_1 bricht die Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bei $b_{k_0} = \alpha(n+1)+1$ ab. Nun erhalten wir die gesuchte positive Metrik h_α auf $\alpha K_X + (\alpha(n+1)+1)L$ mit $\dim V(\mathcal{I}(h_\alpha)) = 0$.

$\square$

Satz 6.1.4 (Demailly, [Dem94, Dem96])
Sei X eine projektive Mannigfaltigkeit der Dimension n, L ein amples Geradenbündel. Seien $x_1, ..., x_p \in X$ und $s_1, ..., s_p \in \mathbb{N}$. Dann ist für $\beta \geq 2 + \sum_{j=1}^{p} \binom{3n+2s_j-1}{n}$ die Abbildung

$$H^0(X, 2K_X+\beta L) \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{p} \mathcal{O}_X(2K_X+\beta L)_{x_j} \otimes \mathcal{O}_{X,x_j}/\mathfrak{m}_{X,x_j}^{s_j+1}$$

surjektiv.

Insbesondere ist für $\beta \geq 2 + \binom{3n+1}{n}$ das Geradenbündel $2K_X+\beta L$ sehr ample.

Man kann in beiden Sätzen natürlich ein weiteres Geradenbündel G, welches nef ist, hinzuaddieren, ohne dass sich die Satzaussagen ändern.

Beweis:
Wir gehen analog zum Beweis von Satz 6.1.3 vor. Diesmal wählen wir aber $\alpha = 1$ und fordern zusätzlich, dass $\mathrm{ord}_{x_j}(\sigma_i) \geq 2(n + s_j)$, damit die für Korollar 3.3.3 benötigten hohen Lelong-Zahlen in den x_j erreicht werden.

Wir beobachten, dass der Rang des s-Jet-Bündels $\binom{n+s}{n}$ ist. Also hat der Raum $\bigoplus_{j=1}^{p} \mathcal{O}_X(2K_X + \beta L)_{x_j} \otimes \mathcal{O}_{X,x_j}/\mathfrak{m}_{X,x_j}^{s_j+1}$ die Dimension

$$\delta = \sum_{j=1}^{p} \binom{3n + 2s_j - 1}{n}.$$

Für den Induktionsanfang $k = 1$ setzen wir $b_1 = \delta + 2$. Nach Satz 6.1.3 ist $K_X + (n+1)L$ nef, und da $b_1 > n + 1$, ist $K_X + b_1 L$ ample, also

$$H^q(X, 2K_X + \beta L) = 0 \text{ für } q \geq 1, \beta \geq b_1.$$

Analog zu dem vorherigen Beweis setzen wir

$$b_{k+1} = \left\lfloor \frac{1}{2}(b_k + \delta + 1) \right\rfloor + 1.$$

Dann ist $b_k = \delta + 2$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Für den Induktionsschritt $l \mapsto l+1$, also für die Existenz eines Schnitts σ_{l+1} mit den gewünschten Nullstellenordnungen und der Nicht-Trivialität auf $V(\mathcal{I}(h_{k,l}))$, benutzen wir wiederum das Lemma 6.1.2, diesmal Aussage c). Da $\delta + 1 \geq \binom{3n-1}{n} + 1 \geq 2n^2$, existiert ein $\beta \in [b_k, b_k + \delta + 1]$, so dass $P(\beta) \geq \delta + 1$.

$\square$

Korollar 6.1.5
Sei X eine kompakte projektive Mannigfaltigkeit der Dimension n. Sei L ein amples und G ein nef Geradenbündel auf X.

Dann gilt:
$H^0(X, 2K_X + \beta L + G)$ ist basispunktfrei für $\beta \geq 2 + \binom{3n-1}{n}$.

Korollar 6.1.6
Sei X eine kompakte projektive Mannigfaltigkeit der Dimension n. Sei L ein amples und G ein nef Geradenbündel auf X.

Dann gilt:
$2K_X + \beta L + G$ bettet X in den projektiven Raum $\mathbb{P}^N$ für $\beta \geq 2 + \binom{3n+1}{n}$ ein.

6.2 Effektive Jet-Erzeugung auf quasi-projektiven Mannigfaltigkeiten

Wir wollen die Beweistechnik des vorherigen Abschnitts an unsere Situation adaptieren. Problematisch ist hierbei der Induktionsanfang, da wir keinen Satz wie 6.1.3 zur Verfügung haben.

Aus Satz 5.2.5 erhalten wir zur Erzeugung der Jets ein Vielfaches des kanonischen Bündels. Diese Vielfachheit hängt von der geforderten Jet-Ordnung ab. Die Idee besteht nun darin, dass wir Demaillys Beweismethode einmal an den Induktionsanfang und einmal an den Induktionsschritt anpassen.

Wir zeigen also zunächst den folgenden Satz, welcher zwar keine effektive Aussage zur Vielfachheit der Geradenbündel liefert, jedoch eine Abschätzung zwischen der Vielfachheit des kanonischen und des vorgegebenen Geradenbündels herstellt.

Satz 6.2.1
Sei X eine Zariski-offene Teilmenge einer projektiven Mannigfaltigkeit $\overline{X}$ der Dimension n und $D := \overline{X} \backslash X$ ein Divisor mit normalen Überkreuzungen. Sei L ein Geradenbündel auf $\overline{X}$, welches singulär positiv modulo Rand ist. Seien weiterhin $x_1, ..., x_p \in X$ und $s_1, ..., s_p \in \mathbb{N}_0$.

Dann existiert ein $\alpha \in \mathbb{N}$, so dass $H^0(\overline{X}, \alpha(K_{\overline{X}} + \beta L))$ für alle $\beta \geq pn^2 + (p+1)n + 2$ die s_j-Jets in den Punkten $x_1, ..., x_p$ erzeugt.

Beweis:
Seien $s_1, ..., s_p \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Indem wir Satz 5.2.5 verallgemeinern, erhalten wir die Jet-Erzeugung in endlich vielen Punkten. Es existieren also $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, so dass $H^0(\overline{X}, \alpha(K_{\overline{X}} + \beta L))$ die s_j-Jets in beliebigen Punkten $x_1, ..., x_p \in X$ erzeugt. Seien nun $x_1, ..., x_p \in X$ fest.

Wir konstruieren eine Folge von Metriken h_k auf $\alpha K_{\overline{X}} + b_k L$, so dass die Lelong-Zahl $\nu(h_k, x_j) > 1$ und $x_1, ..., x_p$ isolierte Punkte in $V(\mathcal{I}(h_k))$ sind. $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist dabei eine rekursiv definierte absteigende Folge, welche stationär wird. Durch Übergang zu einem Vielfachen des zusammengesetzten Geradenbündels erhalten wir auf diesem eine Metrik mit genügend hoher Lelong-Zahl, so dass sich damit die Behauptung ergibt.

Behauptung: Es existiert eine solche Folge $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und die zugehörige Folge von Metriken $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$.
Beweis durch Induktion über k:

IA: $k = 1$
Die Existenz von h_1 folgt aus Satz 5.2.5, da dieser die Existenz von α und β zeigt, so dass $H^0(\overline{X}, \alpha(K_{\overline{X}} + \beta L))$ die $n+1$-Jets in den Punkten $x_1, ..., x_p$ erzeugt. Aus den Schnitten können wir nun die gewünschte Metrik mit entsprechend hoher Lelong-Zahl in den vorgegebenen Punkten konstruieren, d.h. $b_1 = \alpha\beta$.

IS: $k \mapsto k + 1$
Wir konstruieren eine Folge von Metriken $h_{k+1,l}$, welche für l groß genug stationär wird, und nehmen den Grenzwert als neue Metrik h_{k+1}. Sei $\mu \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $H^0(\overline{X}, \mu L)$ eine Einbettung von X definiert. Solch ein μ existiert nach dem Einbettungssatz 5.2.6 von Schumacher und Tsuji. Sei $\lambda_0, ..., \lambda_N$ eine Basis von $H^0(\overline{X}, \mu L)$. Wir wollen $h_{k+1,l}$ auf $\alpha K_{\overline{X}} + b_{k+1} L$ wie folgt definieren:

$$h_{k+1,l} := \left(\sum_{j=0}^{N} \sum_{i=1}^{l} |\sigma_i^{\alpha\mu} \lambda_j^{(\alpha+1)b_{k+1} - \alpha\beta_i}|^2 \right)^{-\frac{1}{(\alpha+1)\mu}},$$

wobei $\sigma_i \in H^0(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}((\alpha+1)K_{\overline{X}} + \beta_i L) \otimes \mathcal{I}(h^{t_i})), \beta_i < \frac{\alpha+1}{\alpha} b_k$ mit $\operatorname{ord}_{x_j}(\sigma_i) \geq 2$ und $\mathcal{I}(h_{k+1,l}) \subsetneq \mathcal{I}(h_{k+1,l+1})$, $t_i \in \mathbb{N}$ geeignet gewählt ist. Die so konstruierte singuläre

Metrik $h_{k+1,l}$ ist positiv (im Sinne von Strömen). Zu zeigen ist also die Existenz der entsprechenden σ_i, welche durch Induktion über l bewiesen wird.

IA: $l = 0$
Indem wir $h_{k+1,0} = \infty$ setzen, sind die Voraussetzungen erfüllt.

IS: $l \mapsto l+1$
Nach Induktionsvoraussetzung existieren die Metriken h_k und $h_{k+1,l}$. Um $h_{k+1,l+1}$ zu konstruieren, müssen wir einen geeigneten Schnitt σ_{l+1} finden. Wenden wir Nadels Verschwindungssatz auf $\alpha K_{\overline{X}} + \beta L = (\alpha K_{\overline{X}} + b_k L) + (\beta - b_k)L$ und die zugehöriger Metrik $h_k h^{\beta - b_k}$ an, so erhalten wir:

$$H^q(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}((\alpha+1)K_{\overline{X}} + \beta L) \otimes \mathcal{I}(h_k h^{\beta-b_k})) = 0 \text{ für alle } q \geq 1 \text{ und für alle } \beta \geq b_k.$$

Es ist $\mathcal{I}(h^{\beta-b_k})|_X = \mathcal{O}_X$. Da h_k nur isolierte Singularitäten auf X hat und $h^{\beta-b_k}$ auf X verschwindende Lelong-Zahlen besitzt, hat der Quotient $\mathcal{I}(h^{\beta-b_k})/\mathcal{I}(h_k h^{\beta-b_k})$ auf X einen 0-dimensionalen Träger. Betrachten wir die exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{I}(h_k h^{\beta-b_k}) \to \mathcal{I}(h^{\beta-b_k}) \to \mathcal{I}(h^{\beta-b_k})/\mathcal{I}(h_k) \to 0,$$

so gilt dann

$$H^q(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}((\alpha+1)K_{\overline{X}} + \beta L) \otimes \mathcal{I}(h^{\beta-b_k})) = 0 \text{ für alle } q \geq 1 \text{ und für alle } \beta \geq b_k.$$

Es ergibt sich mit Hilfe der gleichen exakten Sequenz, nun aber für $h_{k+1,l}$,

$$0 \to \mathcal{I}(h_{k+1,l} h^{\beta-b_{k+1}}) \to \mathcal{I}(h^{\beta-b_{k+1}}) \to \mathcal{I}(h^{\beta-b_{k+1}})/\mathcal{I}(h_{k+1,l}) \to 0,$$

dass

$$H^q(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}((\alpha+1)K_{\overline{X}} + \beta L) \otimes \mathcal{I}(h^{\beta-b_{k+1}})/\mathcal{I}(h_{k+1,l})) = 0 \text{ für alle } q \geq 1 \text{ und } \beta \geq b_k.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} P(\beta) &= \chi(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}((\alpha+1)K_{\overline{X}} + \beta L) \otimes \mathcal{I}(h^{\beta-b_{k+1}})/\mathcal{I}(h_{k+1,l})) \\ &= h^0(X, \mathcal{O}_{\overline{X}}((\alpha+1)K_{\overline{X}} + \beta L) \otimes \mathcal{I}(h^{\beta-b_k+1})/\mathcal{I}(h_{k+1,l})) \geq 0 \text{ für } \beta \geq b_k. \end{aligned}$$

Sei

$$\delta := \sum_{j=1}^{p} \binom{n+2-1}{n} = p(n+1),$$

was gerade der Dimension von $\bigoplus_{j=1}^{p} J_{x_j}^{2-1}$ entspricht. Dabei ist p die Anzahl der vorgegebenen Punkte x_j.

Nach Lemma 6.1.2 existiert ein $\beta \in [b_k, b_k + n(\delta+1)]$ mit $P(\beta) \geq \delta + 1$. Damit existiert also ein Schnitt $\sigma_{l+1} \in H^0(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}((\alpha+1)K_{\overline{X}} + \beta L) \otimes \mathcal{I}(h^t))$ für ein geeignetes t mit nicht-trivialer Einschränkung auf $V(\mathcal{I}(h_{k+1,l}))$ und $\operatorname{ord}_{x_j}(\sigma_{l+1}) \geq 2$ nach Wahl der Jet-Dimension. Wir setzen

$$b_{k+1} = \left\lfloor \frac{\alpha}{\alpha+1}(b_k + n(\delta+1)) \right\rfloor + 1,$$

um zu gewährleisten, dass $\beta_{l+1} = \beta < \frac{\alpha+1}{\alpha} b_k + 1$ und die Metrik $h_{k+1,l+1}$ positiv ist.

Die Folge der b_k wird bei $\alpha(n(\delta+1)+1)+1 = \alpha(pn^2+(p+1)n+1)+1$ stationär, unabhängig vom gewählten b_1. Damit haben wir eine positive singuläre Metrik $\widetilde{h}$ auf $\alpha K_{\overline{X}} + (\alpha(pn^2 + (p+1)n+1)+1)L$ mit $\dim V(\mathcal{I}(\widetilde{h})) \cap X = 0$, $\nu(\widetilde{h}, x_j) \geq 2\frac{\alpha}{\alpha+1} > 1$ für $j = 1, ..., p$ und $\nu(\widetilde{h}, y) = 0$ für $y \in U(x_j)$, da nach Konstruktion die Wachstumsordnung in der Nähe der x_j explizit gegeben ist.

Sei $s := \max s_j$ und $\widetilde{\alpha} := (n+s)\alpha + 1$. Dann hat die Metrik $\widetilde{h}^{n+s}$ auf $(\widetilde{\alpha}-1)K_{\overline{X}} + (n+s)(\alpha(pn^2+(p+1)n+1)+1)L$ die benötigten Lelong-Zahlen. Nun ist

$$\begin{aligned}(n+s)(\alpha(p(n+1)+2)+1) &= \widetilde{\alpha}\tfrac{(n+s)(\alpha(pn^2+(p+1)n+1)+1)}{(n+s)\alpha+1} \\ &\leq \widetilde{\alpha}(\tfrac{(n+s)\alpha(pn^2+(p+1)n+1)}{(n+s)\alpha+1}+1) \\ &\leq \widetilde{\alpha}(\tfrac{(n+s)\alpha(pn^2+(p+1)n+1)}{(n+s)\alpha}+1) \\ &\leq \widetilde{\alpha}(pn^2+(p+1)n+2).\end{aligned}$$

Damit existiert ein $r \in \mathbb{N}$, so dass $\widetilde{h}^{n+s}h^r$ eine singuläre Metrik auf $(\widetilde{\alpha}-1)K_{\overline{X}} + \widetilde{\alpha}(pn^2 + (p+1)n+2)L$ mit geeigneten hohen Lelong-Zahlen in den isolierten Punkten $x_1, ..., x_p$ ist. Mit dem Korollar 3.3.3 folgt nun die Behauptung.

□

Wir können sofort ein einfaches Korollar zur Erhaltung der singulären Positivität bei Adjunktion des kanonischen Bündels folgern. Dieses Korollar ermöglicht uns, die Vielfachheit des kanonischen Bündels bei der Jet-Erzeugung zu kontrollieren, wie die darauf folgenden Sätze zeigen werden.

Korollar 6.2.2
Sei X eine Zariski-offene Teilmenge einer projektiven Mannigfaltigkeit $\overline{X}$ der Dimension n und $D := \overline{X} \backslash X$ ein Divisor mit normalen Überkreuzungen. Sei L ein Geradenbündel auf $\overline{X}$, welches singulär positiv modulo Rand ist.

Dann ist $K_X + \beta L$ singulär positiv modulo Rand für $\beta \geq n+4$.

Beweis:
Nach dem vorhergehenden Satz existiert ein $\alpha \in \mathbb{N}$, so dass $H^0(\overline{X}, \alpha(K_{\overline{X}}+\beta L))$ global erzeugt modulo Rand für $\beta \geq n+4$ ist. Sei $\sigma_1, ..., \sigma_p$ eine Basis von $H^0(\overline{X}, \alpha(K_{\overline{X}} + \beta L))$. Nun ist

$$h_0 = \left(\sum_{i=1}^{p} |\sigma_i|^2\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

eine auf X positive singuläre Metrik auf $K_{\overline{X}} + \beta L$ mit $\nu(h_0, x) = 0$ für alle $x \in X$.

□

Der folgende Satz ist effektiv bezüglich des Faktors vor dem kanonischen Bündel. Damit können wir das effektive Resultat des Hauptsatzes dieser Arbeit beweisen, d.h. sowohl den Faktor vor dem kanonischen Bündel als auch den Faktor vor dem Geradenbündel L, welches singulär positiv modulo Rand ist, angeben.

Satz 6.2.3
Sei X eine Zariski-offene Teilmenge einer projektiven Mannigfaltigkeit $\overline{X}$ der Dimension n und $D := \overline{X}\backslash X$ ein Divisor mit normalen Überkreuzungen. Sei L ein Geradenbündel auf $\overline{X}$, welches singulär positiv modulo Rand ist. Seien $s_1, ..., s_p \in \mathbb{N}_0$ gegeben.

Dann existiert ein $\beta_0 \in \mathbb{N}$, so dass $H^0(\overline{X}, (n+1)K_{\overline{X}} + \beta L)$ die s_j-Jets in beliebigen Punkten $x_1, ..., x_p \in X$ für alle $\beta \geq \beta_0$ erzeugt.

Beweis:
Da L singulär positiv modulo Rand ist, existiert eine singuläre Metrik h auf L über $\overline{X}$, welche positiv auf X ist und deren Lelong-Zahlen auf X verschwinden.

Wir konstruieren eine Folge von positiven singulären Metriken h_l auf $lK_{\overline{X}}+\beta_l L$ für $l = 0, ..., n$.

IA: $l = 0$
Setze $h_0 = \infty$ als Metrik auf L.

IS: $l \mapsto l + 1$
Nach Induktionsvoraussetzung existiert eine positive singuläre Metrik h_l auf $lK_{\overline{X}}+\beta_l L$. Nach Korollar 6.2.2 ist $\alpha K_{\overline{X}} + \beta L$ singulär positiv modulo Rand für alle α und für geeignetes $\beta = \beta(\alpha)$. Nach Nadels Verschwindungssatz ist

$$H^q(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}((l+1)K_{\overline{X}} + \beta L) \otimes \mathcal{I}(h_l h^t)) = 0 \text{ für alle } q \geq 1 \text{ und geeignetes } t,$$

und ebenso

$$H^q(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}((l+1)K_{\overline{X}} + \beta L) \otimes \mathcal{I}(h^t)) = 0 \text{ für alle } q \geq 1 \text{ und entsprechendem } t.$$

Nun folgt mit der kurzen exakten Sequenz $0 \to \mathcal{I}(h_l h^t) \to \mathcal{I}(h^t) \to \mathcal{I}(h^t)/\mathcal{I}(h_l) \to 0$ auch

$$H^q(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}((l+1)K_{\overline{X}} + \beta L) \otimes \mathcal{I}(h^t)/\mathcal{I}(h_l)) = 0 \text{ für alle } q \geq 1.$$

Also ist

$$\begin{aligned} P(\beta) &= \chi(X, \mathcal{O}_{\overline{X}}((l+1)K_X + \beta L) \otimes \mathcal{I}(h^t)/\mathcal{I}(h_l)) \\ &= h^0(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}((l+1)K_X + \beta L) \otimes \mathcal{I}(h^t)/\mathcal{I}(h_l)) \geq 0 \text{ für } \beta \geq \beta_l. \end{aligned}$$

Da nach Riemann-Roch $P(\beta)$ wächst, existiert ein $\beta := \beta_{l+1}$, so dass $P(\beta) \geq \delta + 1$, wobei δ wieder die Dimension des Raums der s_j-Jets in den Punkten $x_1, ..., x_p$ ist. Damit existieren Schnitte $\sigma_{l+1,1}, ..., \sigma_{l+1,r_{l+1}} \in H^0(\overline{X}, (l+1)K_{\overline{X}} + \beta L)$ mit $\mathrm{ord}_{x_j}(\sigma_{l+1,r_{l+1}}) \geq n + s_j$ und nicht-trivialer Einschränkung auf $V(\mathcal{I}(h_l))$.

$$h_{l+1} := (\sum_{i=1}^{l+1} \sum_{k=1}^{r_i} |\sigma_{i,k}|^2)^{-1}$$

ist eine positive singuläre Metrik auf $(l+1)K_{\overline{X}}+\beta L$ und $\dim V(\mathcal{I}(h_{l+1})) < \dim V(\mathcal{I}(h_l))$.

Damit haben wir auf $nK_{\overline{X}}+\beta_n L$ eine positive singuläre Metrik h_n konstruiert mit $\nu(h_n, x_j) \geq n + s_j$ und $\nu(h_n, y) = 0$ für $y \in U(x_j)$. Nach dem Korollar zu Nadels Verschwindungssatz 3.3.3 werden nun die s_j-Jets in beliebig vorgegebenen Punkten $x_1, ..., x_p \in X$ von $H^0(\overline{X}, (n+1)K_{\overline{X}} + \beta_n L)$ erzeugt.

□

Korollar 6.2.4
Sei X eine Zariski-offene Teilmenge einer projektiven Mannigfaltigkeit $\overline{X}$ der Dimension n und $D := \overline{X}\backslash X$ ein Divisor mit normalen Überkreuzungen. Sei L ein Geradenbündel auf $\overline{X}$, welches singulär positiv modulo Rand ist. Seien $s_1, ..., s_p \in \mathbb{N}_0$ gegeben.

Dann existiert ein β, so dass $H^0(\overline{X}, 2K_{\overline{X}}+\beta L)$ die s_j-Jets in beliebigen Punkten $x_1, ..., x_p \in X$ erzeugt.

Beweis:
Nach Satz 6.2.3 existiert ein $\beta_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $\beta \geq \beta_0$ die Gruppe der Schnitte $H^0(\overline{X}, (n+1)K_{\overline{X}} + \beta L)$ die $(n+1)(n+s_j)$-Jets in den Punkten $x_1, ..., x_p \in X$ erzeugt. Wir wählen als β ein Vielfaches von $n+1$, welches größer als das β_0 ist. Aus den Schnitten können wir nun eine positive singuläre Metrik h auf $K_X + \frac{\beta}{n+1}L$ konstruieren, so dass die Lelong-Zahlen $\nu(h, x_j) \geq n + s_j$ sind und x_j isoliert in $E_1(h)$ ist. Nach dem Korollar von Nadels Verschwindungssatz folgt dann die Behauptung.

$\square$

Wie oben beschrieben, wenden wir nun das Beweisverfahren noch einmal an. Wir können aber eine stärkere Induktionsannahme mit Hilfe des gerade gezeigten Satzes treffen. Damit erreichen wir unseren Hauptsatz, nämlich eine effektive Aussage zur Jet-Erzeugung auf einer Zariski-offenen Teilmenge einer projektiven Mannigfaltigkeit durch ein doppelt-adjungiertes Geradenbündel L, welches singulär positiv modulo Rand ist. Zu bemerken ist, dass wir im Beweis nicht ohne Einschränkung L als sehr ample modulo Rand annehmen, sondern tatsächlich nur die singuläre Positivität modulo Rand fordern, und ein echtes effektives Resultat erhalten.

Hauptsatz 6.2.5
Sei X eine Zariski-offene Teilmenge einer projektiven Mannigfaltigkeit $\overline{X}$ der Dimension n und $D := \overline{X}\backslash X$ ein Divisor mit normalen Überkreuzungen. Sei L ein Geradenbündel auf $\overline{X}$, welches singulär positiv modulo Rand ist. Seien weiterhin $x_1, ..., x_p \in X$ und $s_1, ..., s_p \in \mathbb{N}_0$ und $\beta \geq 2 + \sum_{j=1}^{p} \binom{3n+2s_j-1}{n}$.

Dann erzeugt $H^0(\overline{X}, 2K_{\overline{X}} + \beta L)$ die s_j-Jets in den Punkten $x_1, ..., x_p$.

Beweis:
Mit dem Korollar 6.2.4 sind wir nun in der Lage, den Beweis von Demaillys Satz 6.1.4 analog auf unsere Situation anzuwenden.

Sei $\Phi_{|\mu L|} : \overline{X} \rightharpoonup \mathbb{P}^N$ eine Einbettung von X für genügend großes $\mu \in \mathbb{N}$, welche nach Satz 5.2.6 existiert. Seien $\lambda_0, ..., \lambda_N \in H^0(\overline{X}, \mu L)$ die zugehörigen Schnitte.

Sei h die zu L gehörende, auf X positive Metrik, welche verschwindende Lelong-Zahlen in X hat.

Wir wollen die folgenden positiven singulären Metriken definieren:

$$h_{k,l} := \left(\sum_{j=0}^{N} \sum_{i=1}^{l} |\lambda_j^{2b_k - \beta_i} \sigma_i^{\mu}|^2 \right)^{-\frac{1}{2\mu}},$$

wobei $\sigma_i \in H^0(\overline{X}, 2K_{\overline{X}} + \beta_i L), \beta_i < 2b_k$, $\mathrm{ord}_{x_j}(\sigma_i) \geq 2(n+s_j)$ und $\mathcal{I}(h_{k,l}) \subset \mathcal{I}(h_{k,l+1})$ sind, sofern $\dim V(\mathcal{I}(h_{k,l})) \cap X > 0$ ist.

Wir zeigen die Existenz mittels doppelter Induktion.

IA: $k = 1$
Nach Korollar 6.2.4 existiert ein b_1, so dass $2K_{\overline{X}} + (b_1 - 1)L$ die Jets der Ordnung $2(n + \max s_j)$ in den Punkten $x_1, ..., x_p \in X$ erzeugt. Dann können die Schnitte $\sigma_1, ..., \sigma_l$ mit $\beta_1 = ... = \beta_l = b_1 - 1$ gewählt werden.

IS: $k \mapsto k + 1$
Wir zeigen den Induktionsschritt wiederum per Induktion, diesmal über l.

IA: $l = 0$
Wir setzen wiederum $h_{k+1,0} = \infty$.

IS: $l \mapsto l + 1$
Nach Induktionsvoraussetzung existieren die Metriken h_k und $h_{k+1,l}$ schon. Wir zeigen die Existenz des Schnitts σ_{l+1}, um die Metrik $h_{k+1,l+1}$ zu konstruieren. Nach dem Verschwindungssatz von Nadel gilt:

$$H^q(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}(2K_{\overline{X}} + \beta L) \otimes \mathcal{I}(h_k h^{\beta - b_k})) = 0 \text{ für alle } q \geq 1, \beta \geq b_k.$$

Analog gilt:

$$H^q(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}(2K_{\overline{X}} + \beta L) \otimes \mathcal{I}(h_{k+1,l} h^{\beta - b_{k+1}})) = 0 \text{ für alle } q \geq 1, \beta \geq b_{k+1}.$$

Mit der kurzen exakten Sequenz

$$0 \to \mathcal{I}(h_{k+1,l} h^t) \to \mathcal{I}(h^t) \to \mathcal{I}(h^t)/\mathcal{I}(h_{k+1,l}) \to 0$$

ergibt sich für geeignetes $t \in \mathbb{N}$

$$H^q(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}(2K_{\overline{X}} + \beta L) \otimes \mathcal{I}(h^t)/\mathcal{I}(h_{k+1,l})) = 0 \text{ für alle } q \geq 1, \beta \geq b_k.$$

Insbesondere läßt sich damit jeder Schnitt von $2K_{\overline{X}} + \beta L$ von $V(\mathcal{I}(h_{k+1,l}))$ auf $\overline{X}$ fortsetzen. Sei

$$\delta := \sum_{j=1}^{p} \binom{3n + 2s_j - 1}{n} \geq \binom{3n-1}{n} \geq 2n^2 - 1 \text{ für } n \geq 2,$$

welches genau der Dimension von $\bigoplus_{j=1}^p J_{x_j}^{2(n+s_j)-1}$ entspricht. Nun ist nach dem Satz von Riemann-Roch 6.1.1

$$\begin{aligned} &h^0(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}(2K_{\overline{X}} + \beta L) \otimes \mathcal{I}(h^t)/\mathcal{I}(h_{k+1,l})) \\ &= \chi(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}(2K_{\overline{X}} + \beta L) \otimes \mathcal{I}(h^t)/\mathcal{I}(h_{k+1,l})) = P(\beta) \geq 0 \text{ für } \beta \geq b_k \end{aligned}$$

ein numerisches Polynom vom Grad $d \leq n$. Nach Lemma 6.1.2 c) existiert also ein $\beta_{l+1} \in [b_k, b_k + \delta + 1]$, so dass $P(\beta_{l+1}) \geq \delta + 1$ und somit ein Schnitt

$\sigma_{l+1} \in H^0(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}(2K_{\overline{X}} + \beta_{l+1}L) \otimes \mathcal{I}(h^t))$ mit nicht-trivialer Einschränkung auf $V(\mathcal{I}(h_{k+1,l}))$ und $\mathrm{ord}_{x_j}(\sigma_{l+1}) \geq 2(n+s_j)$ existiert. Indem wir

$$b_{k+1} := \left\lfloor \frac{1}{2}(b_k + \delta + 1) \right\rfloor + 1$$

setzen, ist die Voraussetzung $\beta_{l+1} < 2b_{k+1}$ erfüllt.

Die Folge der b_k wird bei $\delta + 2$ stationär, unabhängig vom gewählten b_1. Damit haben wir eine positive singuläre Metrik $\widetilde{h}$ auf $K_{\overline{X}} + (\delta+2)L$ mit $\dim V(\mathcal{I}(\widetilde{h})) \cap X = 0$ und $\nu(\widetilde{h}, x_j) \geq n + s_j$ für $j = 1, ..., p$ konstruiert. Mit dem Korollar 3.3.3 folgt nun die Behauptung.

□

Es schließen sich zwei Korollare an, die sich sofort durch geeignete Wahl der Parameter aus dem Hauptsatz ergeben. Im nächsten Kapitel betrachten wir uns noch einige einfache Beispiele, in denen spezielle Mannigfaltigkeiten vorliegen.

Korollar 6.2.6
Sei X eine Zariski-offene Teilmenge einer projektiven Mannigfaltigkeit $\overline{X}$. Seien L und G Geradenbündel auf $\overline{X}$, welche singulär positiv modulo Rand sind.

Dann ist $2K_{\overline{X}} + \beta L + G$ für $\beta \geq 2 + \binom{3n-1}{n}$ global erzeugt modulo Rand.

Korollar 6.2.7
Sei X eine Zariski-offene Teilmenge einer projektiven Mannigfaltigkeit $\overline{X}$. Seien L und G Geradenbündel auf $\overline{X}$, welche singulär positiv modulo Rand sind.

Dann ist $2K_{\overline{X}} + \beta L + G$ für $\beta \geq 2 + \binom{3n+1}{n}$ sehr ample modulo Rand.

Kapitel 7

Anwendungen

In diesem Kapitel sind einige elementare Beispiele zusammengestellt, die sich als Anwendung der Sätze aus dem vorherigen Kapitel ergeben. Außerdem können wir mit Methoden von Demailly statt der Vielfachheit des Geradenbündels L auch eine Bedingung an das Schnittverhalten von L mit jeder Untervarietät von X stellen, so dass dann $2K_{\overline{X}} + L$ die Jets in beliebigen Punkten simultan erzeugt.

7.1 Kompakte Mannigfaltigkeiten

Wir betrachten zuerst die bisher bekannten Fälle, in denen X kompakt ist. Sofort ergeben sich folgende Korollare.

Korollar 7.1.1
Sei X eine projektive Mannigfaltigkeit der Dimension n mit K_X ample. Dann ist mK_X sehr ample für $m \geq \binom{3n+1}{n} + 4$.

Korollar 7.1.2
Sei X eine Fano-Mannigfaltigkeit der Dimension n. Dann ist $-mK_X$ sehr ample für $m \geq \binom{3n+1}{n}$.

Für niedrige Dimensionen ergibt sich aus Demaillys Satz 6.1.4 für ein amples Geradenbündel L die unten stehende Tabelle.

n	nef	semiample	global erzeugt	punktetrennend	sehr ample
2	$K_X + 3L$	$K_X + 3L$	$2K_X + 12L$	$2K_X + 22L$	$2K_X + 23L$
3	$K_X + 4L$	$K_X + 4L$	$2K_X + 58L$	$2K_X + 114L$	$2K_X + 122L$
4	$K_X + 5L$	$K_X + 5L$	$2K_X + 332L$	$2K_X + 662L$	$2K_X + 717L$
5	$K_X + 6L$	$K_X + 6L$	$2K_X + 2004L$	$2K_X + 4006L$	$2K_X + 4370L$

Korollar 7.1.3
Sei X eine projektive Mannigfaltigkeit der Dimension n, L ein amples und G ein nef Geradenbündel auf X. Dann ist $m(K_X + (n+2)L) + G$ sehr ample für $m \geq \binom{3n+1}{n} - 2n$.

Beweis:
Wir wenden Demaillys Satz 6.1.4 mit $G' := a(K_X + (n+1)L) + G$ an und wählen $m = a + 2n + 4 \geq 2 + \binom{3n+1}{n}$.

□

Statt ein Vielfaches des Geradenbündels L zu betrachten, kann man auch Positivitäts-Bedingungen an das Schnittverhalten des Geradenbündels mit allen Untervarietäten fordern.

Satz 7.1.4
Sei X eine projektive Mannigfaltigkeit der Dimension n, L ein amples und G ein nef Geradenbündel auf X. Seien $x_1, ..., x_p \in X$ beliebig und $s_1, ..., s_p \in \mathbb{N}_0$. Für jedes $d \in \{1, ..., n\}$ und jede d-dimensionale algebraische Teilmenge $Y \subset X$ gelte

$$L^d \cdot Y > \frac{2^{d-1}}{\lfloor n/d \rfloor^d} \sum_{j=1}^{p} \binom{3n + 2s_j - 1}{n}.$$

Dann erzeugt $2K_X + (n+1)L + G$ die Jets der Ordnung $s_1, ..., s_p$ in den Punkten $x_1, ..., x_p$.

Beweis:
Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz 6.1.4. Wir setzen $b_k = n + 1$ für alle k. Nach Lemma 6.1.2 b) ist $P(m) \geq a_d \frac{k^d}{2^{d-1}}$ für ein $m \in [m_0, m_0 + kd]$. Nach Lemma 6.1.1 ist $a_d \geq \inf_{\dim Y = d} L^d \cdot Y$. Für $k = \lfloor \frac{n}{d} \rfloor$ ist $P(m) \geq \delta + 1$ für ein $m \in [m_0, m_0 + kd] \subset [m_0, m_0 + n]$, sofern

$$\left(\inf_{\dim Y = d} L^d \cdot Y \right) \frac{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor^d}{2^{d-1}} > \delta.$$

Dies ist gerade als Voraussetzung gegeben.

□

Lemma 7.1.5
Sei X eine projektive Mannigfaltigkeit der Dimension n, L ein amples Geradenbündel und $\mu \in \mathbb{N}$, so dass μL die Jets der Ordnung $\mu(n + s_j) + 1$ in beliebigen Punkten $x_1, ..., x_p$ erzeugt.

Dann erzeugt $K_X + L$ die Jets der Ordnung s_j in x_j.

Satz 7.1.6
Sei X eine projektive Mannigfaltigkeit der Dimension n, L ein amples Geradenbündel, seien $x_1, ..., x_p \in X$ beliebige Punkte und $s_1, ..., s_p \in \mathbb{N}_0$. Für jedes $d \in \{1, ..., n\}$ und jede d-dimensionale algebraische Teilmenge $Y \subset X$ gelte

$$L^d \cdot Y > \frac{2^{d-1}}{\lfloor n/d \rfloor^d} \sum_{j=1}^{p} \binom{(n+1)(4n + 2s_j + 1) - 2}{n}.$$

Dann erzeugt $2K_X + L$ die Jets der Ordnung $s_1, ..., s_p$ in den Punkten $x_1, ..., x_p$.

7.2 Quasi-projektive Mannigfaltigkeiten

Stimmt das singulär positive Geradenbündel L mit dem kanonischen Bündel $K_{\overline{X}}$ überein, ergibt sich sofort das folgende Korollar.

Korollar 7.2.1
Sei X eine Zariski-offene Teilmenge einer projektiven Mannigfaltigkeit $\overline{X}$ der Dimension n und $D := \overline{X} \backslash X$ ein Divisor mit normalen Überkreuzungen. Sei das kanonische Bündel $K_{\overline{X}}$ singulär positiv modulo Rand.

Dann gilt:

a) *$mK_{\overline{X}}$ ist für $m \geq 4 + \binom{3n-1}{n}$ global erzeugt modulo Rand.*

b) *$mK_{\overline{X}}$ ist für $m \geq 4 + \binom{3n+1}{n}$ sehr ample modulo Rand.*

Nun betrachten wir quasi-projektive Mannigfaltigkeiten, deren Kompaktifizierung eine spezielle Eigenschaft hat, nämlich dass das negative kanonische Bündel ebenfalls singulär positiv modulo Rand ist. Es genügt sogar eine etwas schwächere Bedingung, welche das folgende Korollar liefert. Die Voraussetzungen sind zum Beispiel trivialerweise erfüllt, wenn $\overline{X}$ eine Fano-Mannigfaltigkeit ist.

Korollar 7.2.2
Sei $X \subset \overline{X}$ eine Zariski-offene Teilmenge einer n-dimensionalen projektiven Mannigfaltigkeit $\overline{X}$ mit $D := \overline{X} \backslash X$ ein Divisor mit normalen Überkreuzungen. Seien L und G Geradenbündel auf $\overline{X}$, welche singulär positiv modulo Rand sind. Besitze $-K_{\overline{X}}$ eine singuläre Metrik h_K, so dass $\nu(h_K, x) = 0$ für alle $x \in X$ und $i\Theta_{h_K} \geq 0$.

Dann gilt:

a) *$K_{\overline{X}} + mL + G$ für $m \geq 2 + \binom{3n-1}{n}$ global erzeugt modulo Rand.*

b) *$K_{\overline{X}} + mL + G$ für $m \geq 2 + \binom{3n+1}{n}$ sehr ample modulo Rand.*

Beweis:
Wir wenden Korollar 6.2.6 bzw. 6.2.7 mit $G' = -K_{\overline{X}} + G$ an.

□

Dieselben Überlegungen wie im ersten Abschnitt dieses Kapitels führen zu Aussagen über die Jet-Erzeugung von $K_X + L$, indem wir Positivität des Schnittverhaltens mit beliebigen Untervarietäten fordern.

Satz 7.2.3
Sei $X \subset \overline{X}$ eine Zariski-offene Teilmenge einer n-dimensionalen projektiven Mannigfaltigkeit $\overline{X}$ mit $D := \overline{X} \backslash X$ ein Divisor mit normalen Überkreuzungen. Seien L und G Geradenbündel auf $\overline{X}$, welche singulär positiv modulo Rand sind. Seien $x_1, ..., x_p \in X$ beliebig und $s_1, ..., s_p \in \mathbb{N}_0$. Für jedes $d \in \{1, ..., n\}$ und jede d-dimensionale algebraische Teilmenge $Y \subset X$ gelte

$$L^d \cdot Y > \frac{2^{d-1}}{\lfloor n/d \rfloor^d} \sum_{j=1}^{p} \binom{3n + 2s_j - 1}{n}.$$

Dann erzeugt $2K_X + (n+1)L + G$ *die Jets der Ordnung* $s_1, ..., s_p$ *in den Punkten* $x_1, ..., x_p$.

Lemma 7.2.4
Sei $X \subset \overline{X}$ *eine Zariski-offene Teilmenge einer* n*-dimensionalen projektiven Mannigfaltigkeit* $\overline{X}$ *mit* $D := \overline{X} \backslash X$ *ein Divisor mit normalen Überkreuzungen. Sei* L *ein Geradenbündel und* $\mu \in \mathbb{N}$, *so dass* μL *die Jets der Ordnung* $\mu(n+s_j)+1$ *in beliebigen Punkten* $x_1, ..., x_p$ *erzeugt.*

Dann erzeugt $K_X + L$ *die Jets der Ordnung* s_j *in* x_j.

Satz 7.2.5
Sei $X \subset \overline{X}$ *eine Zariski-offene Teilmenge einer* n*-dimensionalen projektiven Mannigfaltigkeit* $\overline{X}$ *mit* $D := \overline{X} \backslash X$ *ein Divisor mit normalen Überkreuzungen. Sei* L *ein Geradenbündel auf* $\overline{X}$, *welches singulär positiv modulo Rand ist. Seien* $x_1, ..., x_p \in X$ *beliebig und* $s_1, ..., s_p \in \mathbb{N}_0$. *Für jedes* $d \in \{1, ..., n\}$ *und jede* d*-dimensionale algebraische Teilmenge* $Y \subset X$ *gelte*

$$L^d \cdot Y > \frac{2^{d-1}}{\lfloor n/d \rfloor^d} \sum_{j=1}^{p} \binom{(n+1)(4n+2s_j+1)-2}{n}.$$

Dann erzeugt $2K_X + L$ *die Jets der Ordnung* $s_1, ..., s_p$ *in den Punkten* $x_1, ..., x_p$.

Literaturverzeichnis

[AS95] U. Angehrn, Y.-T. Siu: *Effective freeness and point separation for adjoint bundles*, Invent. math. **122** (1995), 291–308.

[AV65] A. Andreotti, E. Vesentini: *Carleman estimates for the Laplace-Beltrami equation on complex manifolds*, Publ. Math. I.H.E.S. **25** (1965), 313–362.

[CD01] F. Campana, J.-P. Demailly: *Cohomologie L^2 sur les revêtements d'une variété complexe compacte*, Ark. Math. **39** (2001), 263–282.

[Dem82] J.-P. Demailly: *Sur les nombres de Lelong associés à l'image directe d'un courant positif fermé*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **32** (1982), 37–66.

[Dem85] J.-P. Demailly: *Mésures de Monge-Ampère et caractérisation géometrique des variétés algébriques affines*, Mém. Soc. Math. de France **19** (1985), 1–124.

[Dem87] J.-P. Demailly: *Nombres de Lelong généralisés, théorèmes d'intégralité et d'analyticité*, Acta Math. **159** (1987), 153–169.

[Dem92a] J.-P. Demailly: *Singular Hermitian metrics on positive line bundles*, in Complex Algebraic Varieties (Bayreuth 1990), Lecture Notes in Math. **1507** (1992), 87–104.

[Dem92b] J.-P. Demailly: *Regularization of closed positive currents and intersection theory*, J. Algebraic Geom. **1** (1992), 361–409.

[Dem92c] J.-P. Demailly: *Estimations L^2 pour l'operateur $\overline{\partial}$ d'un fibré vectoriel holomorphe semi-positif au-dessus d'une variété kählérienne complète*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **115** (1982), 457–511.

[Dem93] J.-P. Demailly: *A numerical criterion for very ample line bundles*, J. Differential Geom. **37** (1993), 323–374.

[Dem94] J.-P. Demailly: *L^2 vanishing theorems for positive line bundles and adjunction theory*, CIME Session, Transcendental methods in algebraic geometry, Cetraro, Italy (1994).

[Dem96] J.-P. Demailly: *Effective bounds for very ample line bundles*, Invent. Math. **124** (1996), 243–261.

[Dem07] J.-P. Demailly: *Complex analytic and algebraic geometry*, 2007 http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/books.html

[DF83] H. Donelly, C. Fefferman: *L^2-cohomology and index theorem for the Bergman metric*, Ann. of Math. **118** (1983), 593–618.

[EKL94] L. Ein, O. Küchle, R. Lazarsfeld: *Local positivity of ample line bundles*, preprint (1994), arXiv:alg-geom/9408003v1.

[EL93] L. Ein, R. Lazarsfeld: *Global generation of pluricanonical and adjoint linear series on smooth projective threefolds*, J. Amer. Math. Soc. **6** (1993), 875–903.

[ELN96] L. Ein, R. Lazarsfeld, M. Nakamaye: *Zero-estimates, intersection theory, and a theorem of Demailly*, Higher-dimensional complex varieties, de Gruyter, Berlin (1996), 183–207.

[Fuj87] T. Fujita: *On polarized manifolds whose adjoint bundles are not semipositive*, Algebraic Geometry, Sendai 1985, In Adv. Stud. in Pure Math., Vol. 10, North Holland, 1987, 167–178.

[GL02] D. Grieser, M. Lesch: *On the L^2-Stokes theorem and Hodge theory for singular algebraic varieties*, Math. Nachr. **246/247** (2002), 68–82.

[GM95] C. Grant, P. Milman: *Metrics for singular analytic spaces*, Pac. J. of Math. **168**, No. 1 (1995), 61–156.

[GR56] H. Grauert, R. Remmert: *Plurisubharmonische Funktionen in komplexen Räumen*, Math. Z. **65** (1956), 175–194.

[Hei02] G. Heier: *Effective freeness of adjoint line bundles*, Doc. Math. **7** (2002), 31–42.

[Hel97] S. Helmke: *On Fujita's conjecture*, Duke Math. J. **88** (1997), 201–216.

[Hel99] S. Helmke: *On global generation of adjoint linear systems*, Math. Ann. **313** (1999), 635–652.

[Hor65] L. Hörmander: *L^2 estimates and existence theorems for the $\overline{\partial}$-operator*, Acta Math. **113** (1965), 89–152.

[Hor73] L. Hörmander: *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables, 2nd Edition*, North-Holland/American Elsevier, 1973.

[JS93] S. Ji, B. Shiffman: *Properties of compact complex manifolds carrying closed positive currents*, J. Geom. Anal. **3** (1993), 37–61.

[Kaw84] Y. Kawamata: *The cone of curves of algebraic varieties*, Ann. of Math. **119** (1984), 603–633.

[Kaw97] Y. Kawamata: *On Fujita's freeness conjecture for 3-folds and 4-folds*, Math. Ann. **308** (1997), 491–505.

[KO71] S. Kobayashi, T. Ochiai: *Mappings into compact complex manifolds with negative first Chern class*, J. Math. Soc. Japan **23** (1971), 137–148.

[Kob84] R. Kobayashi: *Kähler-Einstein metric on an open algebraic manifold*, Osaka J. Math. **21** (1984), 399–418.

[Kod54] K. Kodaira: *On Kähler varieties of restricted type (an intrinsic characterization of algebraic varieties)*, Ann. of Math. **60** (1954), 28–48.

[Kol93] J. Kollár: *Effective base point freeness*, Math. Ann. **296** (1993), 595–605.

[Laz04] R. Lazarsfeld: *Positivity in algebraic geometry*, Springer, 2004.

[Lel57] P. Lelong: *Intégration sur un ensemble analytique complexe*, Bull. Soc. Math France **85** (1957), 239–262.

[Lel69] P. Lelong: *Plurisubharmonic functions and positive differential forms*, Gordon and Breach, New York, and Dunod, Paris, 1969.

[Mor82] S. Mori: *Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective*, Ann. of Math. **116** (1982), 133–176.

[Nad90] A. M. Nadel: *Multiplier ideal sheaves and Kähler-Einstein metrics of positive scalar curvature*, Ann. of Math. **132** (1990), 549–596.

[Ohs92] T. Ohsawa: *On The L^2 cohomology of complex spaces*, Math. Z. **209** (1992), 519–530.

[OT87] T. Ohsawa, K. Takegoshi: *On the extension of L^2 holomorphic functions*, Math. Z. **195** (1987), 197–204.

[PS91] W. Pardon, M. Stern: *L^2-$\overline{\partial}$-Cohomology of complex projective varieties*, J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), 603–621.

[Rei88] I. Reider: *Vector bundles of rank 2 and linear systems on algebraic surfaces*, Ann. of Math. **127** (1988), 309–316.

[Sap85] L. Saper: *L_2-cohomology and intersection homology of certain algebraic varieties with isolated singularities*, Invent. Math. **82** (1985), 207–255.

[Sap92] L. Saper: *L_2-cohomology of Kähler varieties with isolated singularities*, J. Diff. Geom. **36** (1992), 89–161.

[Siu74] Y.-T. Siu: *Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents*, Invent. Math. **27** (1974), 53–156.

[Siu93] Y.-T. Siu: *An effective Matsusaka big theorem*, Ann. Inst. Fourier **43** (1993), 1387–1405.

[Siu95] Y.-T. Siu: *Very ampleness criterion of double adjoints of ample line bundles*, in Modern methods in complex analysis (Princeton, NJ, 1995), 291–318.

[Siu96] Y.-T. Siu: *Effective very ampleness*, Invent. math. **124** (1996), 563–571.

[Siu02] Y.-T. Siu: *A new bound for the effective Matsusaka big theorem*, Houston J. of Math **28**, No. 2 (2002), 389–409.

[Som75] A. J. Sommese: *Criteria for Quasi-Projectivity*, Math. Ann. **217** (1975), 247–256.

[Som76] A. J. Sommese: *Addendum to Criteria for Quasi-Projectivity*, Math. Ann. **221** (1976), 95–96.

[ST04] G. Schumacher, H. Tsuji: *Quasi-projectivity of moduli spaces of polarized varieties*, Ann. of Math. **159** (2004), 597–639.

[Tak98] S. Takayama: *Adjoint linear series on weakly 1-complete Kähler manifolds I: global projective embedding*, Math. Ann. **311** (1998), 501–531.

[Tan04] S.-L. Tan: *Effective Behavior on multiple linear systems*, Asian J. Math. **8** Nr. 2 (2004), 287–304.

[Thi67] P. Thie: *The Lelong number of a point of a complex analytic set*, Math. Ann. **172** (1967), 269–312.

[Zuc79] S. Zucker: *Hodge theory with degenerating coefficients, L_2 cohomology in the Poincaré metric*, Ann. of Math. **109** (1979), 415–476.

[Zuc82] S. Zucker: *L_2 cohomology of warped products and arithmetic groups*, Invent. Math. **70** (1982), 169–218.

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Professor Dr. Georg Schumacher für die Betreuung meiner Promotion und den inspirierenden Aufenthalt in Oberwolfach.

Bei Professor Dr. Thomas Bauer bedanke ich mich herzlich für die Übernahme des Zweitgutachtens.

Danken möchte ich auch Dr. Birte Streiter und Matthias Stemmler für die gründliche Durchsicht meiner Arbeit.

Christine Licht und meine Mutter haben mich geduldig durch alle Höhen und Tiefen begleitet. Vielen Dank.

Selbständigkeitserklärung

Ich versichere, dass ich meine Dissertation

Einbettung von quasi-projektiven Mannigfaltigkeiten und effektive Resultate

selbständig, ohne unerlaubte Hilfe angefertigt und mich dabei keiner anderen als der von mir ausdrücklich bezeichneten Quellen und Hilfen bedient habe.

Die Dissertation wurde in der jetzigen oder einer ähnlichen Form noch bei keiner anderen Hochschule eingereicht und hat noch keinen sonstigen Prüfungszwecken gedient.

Marburg, 6. Oktober 2009

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name:	Holger Aust
Geburtsdatum:	15. Juli 1980
Geburtsort:	Berlin
Familienstand:	ledig

Ausbildung

08/1990 – 06/1999	Otto-Kühne-Schule in Bonn, Bad Godesberg
08/1999 – 07/2000	Zivildienst beim Diakonischen Werk Bonn
10/2000 – 09/2001	Studium der Informatik an der Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn
10/2001 – 09/2002	Studium der Informatik an der Philipps-Universität Marburg
10/2002	Vordiplom Informatik mit Nebenfach BWL
10/2002 – 03/2006	Studium der Mathematik an der Philipps-Universität Marburg
08/2004 – 03/2005	Auslandssemester an der Universität Linköping, Schweden
03/2006	Mathematik-Diplom
Seit 04/2006	Promotionsstudium im Bereich *Geometrische Komplexe Analysis* an der Philipps-Universität Marburg

Berufliche Tätigkeit

Seit 04/2006	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachbereich Mathematik und Informatik an der Philipps-Universität Marburg

Marburg, 6. Oktober 2009