

Zariski-Kammern und stabile Basisorte auf Del-Pezzo- und K3-Flächen

Dissertation

zur
Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

dem
Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
vorgelegt von

Michael Funke

aus Bad Arolsen

Marburg / Lahn, im Januar 2009

Vom Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg als Dissertation angenommen am 10. Februar 2009.

Erstgutachter: Prof. Dr. Thomas Bauer
Zweitgutachter: Prof. Dr. Georg Schumacher

Tag der mündlichen Prüfung: 18. Februar 2009

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Zariski-Kammern und stabile Basisorte	4
1.1 Stabile Basisorte und Volumina	4
1.2 Zariski-Zerlegung und Zariski-Kammern	5
1.3 Del-Pezzo- und K3-Flächen	8
2 Zählen von Zariski-Kammern auf Del-Pezzo-Flächen	11
2.1 Negative Kurven und Zariski-Kammern	11
2.2 Zählen der Zariski-Kammern	14
2.3 Maximale Zariski-Kammern	16
2.4 Anwendung: Del-Pezzo-Flächen	18
3 Zariski-Kammern auf K3-Flächen	22
3.1 Zariski- und Weyl-Kammern auf Del-Pezzo-Flächen	22
3.2 Zariski- und Weyl-Kammern auf K3-Flächen	24
4 Zariski-Kammern auf Kummerflächen	33
4.1 Geradenbündel auf abelschen Flächen	33
4.2 Parität von Halbperioden auf abelschen Flächen	35
4.3 Eine Kummerfläche mit 16 disjunkten Geraden	37
4.4 Zariski-Zerlegung und Zariski-Kammern auf Kummerflächen	47
Literaturverzeichnis	55

Einleitung

Das Studium asymptotischer Invarianten von Linearsystemen ist ein aktueller Forschungsgegenstand der Algebraischen Geometrie. Basisorte von Linearsystemen haben ebenso asymptotische Entsprechungen wie das Wachstum der 0-ten Kohomologie von Vielfachen eines Geradenbündels auf Varietäten: den stabilen Basisort und das Volumen eines Geradenbündels.

Bauer, Küronya und Szemberg haben in [BKS04] eine Zerlegung des Big-Kegels glatter projektiver Flächen gefunden, auf deren Teilen der stabile Basisort von Linearsystemen einerseits und die Volumenfunktion zu big Divisoren andererseits eine einfache Beschreibung finden. Inspiriert durch ein Resultat von Nakamaye (vgl. [Na00]), welches die Konstanz des stabilen Basisortes für Divisoren zeigt, die infinitesimal in eine anti-ample Richtung bewegt werden, wird in [BKS04] bewiesen, dass der Big-Kegel einer glatten projektiven Fläche eine lokal endliche Zerlegung in rationale lokal polyedrische Teilkegel besitzt, so dass im Inneren jedes Teilkegels der stabile Basisort konstant ist. Überraschenderweise beantwortet genau diese Zerlegung auch die Frage nach der Variation der Volumenfunktion: In jedem Teilkegel kann die Volumenfunktion durch ein homogenes quadratisches Polynom ausgedrückt werden.

Diese beiden Phänomene münden in der Zariski-Zerlegung von Divisoren, die erstmalig 1962 von Zariski für effektive \mathbb{Q} -Divisoren beschrieben wurde (vgl. [Zar62]). Jeder Divisor auf einer glatten projektiven Fläche besitzt eine eindeutige Zerlegung in die Summe aus einem positiven und einem negativen Anteil. Der positive Anteil ist nef, der negative entweder null oder effektiv und mit negativ definiter Schnittmatrix ausgestattet. Zudem stehen alle Kurven aus dem Träger des negativen Anteils senkrecht auf dem positiven Teil. Das Konzept der Zariski-Zerlegung wurde 1971 von Fujita auf pseudoeffektive Divisoren übertragen (vgl. [Fu79], [KMM87]). Es ist gerade der negative Anteil der Zariski-Zerlegung, der die Teilkegel aus der Zerlegung von Bauer, Küronya und Szemberg bestimmt. Daher werden die Teilkegel Zariski-Kammern genannt. Sie spiegeln die Geometrie der Fläche wider, indem sie die stabilen Basisorte, die Volumenfunktion sowie die Zariski-Zerlegung von big Divisoren beschreiben. Dadurch bedingt, dass eine Zariski-Zerlegung nur im Flächenfall existiert, ist eine direkte Verallgemeinerung auf höherdimensionale Varietäten nicht gegeben.

Ausgehend von dem Resultat aus [BKS04] werden in der vorliegenden Arbeit die Zariski-Kammern auf speziellen Flächen unter verschiedenen Aspekten untersucht. Die Kammerstruktur variiert auf unterschiedlichen Flächen. Während es Flächen mit nur einer einzigen Zariski-Kammer gibt, kann die Geometrie der Fläche auch komplizierter sein, der Fall unendlich vieler Kammern kommt vor. Wie oben schon erwähnt, wird eine Zariski-Kammer durch den negativen Anteil der Divisoren, die in ihr enthalten sind, charakterisiert, so dass schließlich die Kurven mit negativem Selbstschnitt für das Erzeugen der Zariski-Kammern verantwortlich sind. Eine Kenntnis aller Kurven, deren Selbstschnitt negativ ist, ermöglicht demnach eine explizite Beschreibung der Kammerstruktur der zugrunde liegenden Fläche.

Der einfachste Fall umfasst Flächen, auf denen jeder big Divisor schon ample ist und somit der negative Teil der Zariski-Zerlegung verschwindet. Folglich gibt es nur eine einzige Zariski-Kammer.

Del-Pezzo-Flächen liefern verhältnismäßig überschaubare Beispiele für Flächen, deren Kammerstruktur umfassend beschrieben werden kann. Die Flächen \mathbb{P}^2 und $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ liefern jeweils nur eine Zariski-Kammer. Interessanter sind daher Aufblasungen der projektiven Ebene in bis zu acht Punkten in allgemeiner Lage. Diese werden in [BKS04] betrachtet, exemplarisch ausgeführt an der Aufblasung in zwei Punkten. Allgemein wird dort für diese Flächen gezeigt, dass die Hyperebenen, die zu den Kurven mit negativem Selbstschnitt gehören, den Big-Kegel in die Zariski-Kammern unterteilen. Für die Aufblasung der projektiven Ebene in zwei Punkten ergeben sich fünf Zariski-Kammern, erklärt über die beiden exzeptionellen Divisoren und über die eigentlich transformierte der Geraden durch die beiden Aufblasungspunkte. Die Kurven mit negativem Selbstschnitt auf den anderen erwähnten Aufblasungen sind in [Ma74] aufgelistet, so dass auf dieser Grundlage weitere Studien auf Del-Pezzo-Flächen vorgenommen werden können.

Neben Del-Pezzo- bilden K3-Flächen die zweite Klasse von Flächen, deren Kammerstruktur wir hier genauer untersuchen wollen. Es ist dabei nicht von vornherein klar, welche Kurven mit negativem Selbstschnitt auf K3-Flächen enthalten sind, so dass das Studium dieser Kurven der Beschreibung der Zariski-Kammern vorausgehen muss.

Abschließend werden spezielle K3-Flächen, die Kummerflächen, thematisiert. Diese enthalten unendlich viele Kurven, deren Selbstschnitt negativ ist, weshalb nicht alle Zariski-Kammern explizit beschrieben werden können. Wir werden in diesem Zusammenhang auf den von Barth und Nieto studierten Kummerflächen, welche von $(1, 3)$ -polarisierten abelschen Flächen herrühren und 16 disjunkte Geraden enthalten, weitere Klassen mit negativem Selbstschnitt bestimmen und die von diesen Klassen erzeugten Zariski-Kammern beschreiben.

In dieser Arbeit wird der Aspekt des Zählens der Zariski-Kammern aufgegriffen und insbesondere am Beispiel der Del-Pezzo-Flächen diskutiert. Anknüpfend an Studien von Bauer, Küronya und Szemberg, das Verhältnis zwischen Zariski- und Weyl-Kammer betreffend, werden wir hier die Weyl-Zerlegung auf Del-Pezzo- und K3-Flächen mit der Zerlegung des Big-Kegels in Zariski-Kammern vergleichen.

Nachdem Kapitel 1 die Grundlagen sowie das Hauptresultat aus [BKS04] bereitstellt, entwickeln wir im zweiten Kapitel einen Algorithmus zum Zählen der Zariski-Kammern und studieren als Anwendung Del-Pezzo-Flächen. Neben der Anzahl der Kammern sind die Kardinalitäten der die Zariski-Kammern charakterisierenden Mengen von Kurven interessant. Eine Modifikation des Algorithmus wird Ergebnisse in Bezug auf diese Größe liefern. Wir werden im Verlauf der Arbeit Entsprechungen der Zariski-Kammern im jeweiligen Kontext entwickeln. Beispielweise wird zur algorithmischen Erfassung der Zariski-Kammern eine Verbindung zu Divisoren mit negativ definiter Schnittmatrix hergestellt. Solche Divisoren werden wiederum bei der Behandlung der K3-Flächen im Zusammenhang mit ADE-Kurven diskutiert und sie werden schließlich bei dem Vergleich von Zariski- und Weyl-Kammern mit einer schnitttheoretischen Charakterisierung der Weyl-Kammern eine Rolle spielen. Über die Anzahl der Zariski-Kammern können wir die oben angeführten geometrischen Invarianten vom Standpunkt ihrer Komplexität her fassen: Wir bekommen Auskunft über die Anzahl der verschiedenen stabilen Basisorte, die in big Linearsystemen auf Flächen vorkommen können, uns erschließen sich zahlenmäßig die unterschiedlichen Zariski-Zerlegungen von big Divisoren – gemeint sind damit die Zariski-Zerlegungen, die unterschiedliche Träger aufweisen – und nicht zuletzt erhalten wir die Anzahl der Bereiche,

in denen sich die Volumenfunktion stückweise polynomial verhält. Außerdem geben die Algorithmen Antworten auf die Fragen, wie viele und welche Kurven die stabilen Basisorte in big Linearsystemen sowie die Träger der negativen Anteile der Zariski-Zerlegungen auf den Flächen bestimmen. Wir werden für Del-Pezzo-Flächen die angesprochenen quantitativen Größen ermitteln.

In Kapitel 3 diskutieren wir den Zusammenhang zwischen Zariski- und Weyl-Kammern. Ein erster Abschnitt ist den Del-Pezzo-Flächen gewidmet. Neben einer kurzen Rekapitulation der Ergebnisse aus [BKS04] stellen wir diese Aussagen teilweise in ein neues Licht. Auf Del-Pezzo-Flächen sind die Ränder der Zariski-Kammern durch die Hyperebenen zu den Kurven mit negativem Selbstschnitt gegeben. Auf K3-Flächen übertragen, wäre dort die Übereinstimmung der Zariski-Kammern mit den einfachen Weyl-Kammern, welche wir in Abschnitt 3.2 definieren werden, zu klären. Dies ist Gegenstand des dritten Kapitels. Die einfachen Weyl-Kammern ergeben sich in unserem Kontext als natürliche Konsequenz der (gewöhnlichen) Weyl-Kammern, die beispielweise in der Theorie der Lie-Gruppen Beachtung finden. Wir werden als wichtiges Ergebnis im dritten Kapitel ein Kriterium für die Übereinstimmung der Zerlegungen des Big-Kegels einer K3-Fläche in Zariski- und einfache Weyl-Kammern beweisen. Darüber hinaus werden die dort formulierten Sätze in Abhängigkeit vom Schnittverhalten der Kurven mit negativem Selbstschnitt genaue Aussagen über die gegenseitige Lage von Zariski-Kammern und einfachen Weyl-Kammern liefern. Dazu wird es, wie bereits oben angedeutet, hilfreich sein, sowohl die Zariski-Kammern als auch die einfachen Weyl-Kammern über das Schnittverhalten der Kurven, deren Selbstschnitt negativ ist, mit den Divisoren in den jeweiligen Kammern zu charakterisieren. Hierzu werden entsprechende Aussagen formuliert, unter anderem ergibt sich, dass die Anzahl der Zariski-Kammern auf jeder K3-Fläche mit der Anzahl der einfachen Weyl-Kammern übereinstimmt. Zudem wird der Begriff der maximalen Negativität eine Rolle spielen, den wir schon in Kapitel 2 einführen und im Zusammenhang mit Del-Pezzo-Flächen verwenden werden.

Abschließend betrachten wir im vierten Kapitel Kummerflächen unter dem Aspekt des Erzeugens von Kammern aus vorgegebenen Kurven mit negativ definiten Schnittmatrix. Die Existenz unendlich vieler solcher Kurven zwingt uns dazu, Teilbetrachtungen vorzunehmen. Die Barth-Nieto-Fläche steht im Mittelpunkt der Betrachtungen. Neben Barth und Nieto, die im Jahr 1994 über abelsche Flächen mit $(1, 3)$ -Polarisierung arbeiteten, studierte Naruki unabhängig davon 1991 denselben Flächentyp. Auf der Barth-Nieto-Fläche sind seitdem 32 Geraden mit negativem Selbstschnitt bekannt. Wir werden hier weitere Klassen mit negativem Selbstschnitt bestimmen, genauer gesagt Kegelschnitte, Kubiken und Quartiken. Zur Berechnung der Schnittprodukte von Kurven auf Kummerflächen ist es wichtig, die Paritäten der 16 Halbperioden eines symmetrischen Geradenbündels und die der symmetrischen Translate zu kennen. Wir werden vorstellen, wie sich die Parität einer Halbperiode aus den Entwicklungskoeffizienten der Halbperiode und des Translationsvektors in der symplektischen Basis berechnen lässt. Nachdem wir das Schnittverhalten der Geraden und Kegelschnitte beschrieben haben, bestimmen wir mithilfe des in Abschnitt 2.2 vorgestellten Algorithmus, wie viele Zariski-Kammern von Geraden bzw. Kegelschnitten herrühren. Während wir in Abschnitt 2.3 die Kardinalitäten der Mengen, die eine Zariski-Kammer induzieren, unter Anwendung des Algorithmus dort ermitteln, geben wir im Fall der Kummerfläche ein geometrisches Argument an, welches die Kardinalitäten der aus Geraden bestehenden und zu einer Zariski-Kammer führenden Mengen liefert.

Kapitel 1

Zariski-Kammern und stabile Basisorte

In diesem Kapitel wollen wir das Resultat von Bauer, Küronya und Szemberg aus dem Jahr 2004 (vgl. [BKS04]) vorstellen, welches der Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist und zugleich eine Einordnung des Themas in den Kontext der Algebraischen Geometrie ermöglichen soll. In [BKS04] werden asymptotische Invarianten von Linearsystemen auf algebraischen Flächen untersucht. Es ist auch in höherer Dimension von großem Interesse, Aussagen über das Verhalten des stabilen Basisortes sowie der Volumenfunktion zu treffen. Für Flächen wird dieses von Bauer, Küronya und Szemberg beschrieben. Nakamaye hat in [Na00] für beliebige glatte projektive Varietäten gezeigt, dass der stabile Basisort konstant bleibt, wenn ein big und nef Divisor infinitesimal in eine anti-ample Richtung bewegt wird. Im Flächenfall können die Regionen, in denen der stabile Basisort konstant ist, genauer beschrieben werden. Das Studium der Volumina von Geradenbündeln hängt mit dem Riemann-Roch-Problem zusammen. Nachdem im ersten Abschnitt dieses Kapitels stabile Basisorte und der Volumenbegriff erklärt werden, formulieren wir anschließend das Theorem von Bauer, Küronya und Szemberg über Zariski-Kammern und gehen in Abschnitt 1.3 kurz auf Del-Pezzo- und K3-Flächen ein. Für ein detaillierteres Studium und für Beweise zu den im Folgenden zitierten Sätzen sei auf [BKS04] und [EL⁺06] verwiesen. Wir bezeichnen in der gesamten Arbeit mit $\text{Pic}(X)$ die Picard-Gruppe, mit $\text{NS}(X)$ die Néron-Severi-Gruppe und mit $\text{NS}_{\mathbb{R}}(X)$ den Néron-Severi-Vektorraum einer glatten projektiven Fläche X über den reellen Zahlen. Die Néron-Severi-Gruppe ist eine freie abelsche Gruppe von endlichem Rang – der Picard-Zahl $\rho(X)$. Als Grundlagenliteratur für Positivitätsbegriffe sei [PAG] angeführt.

Wir arbeiten durchweg über dem Körper der komplexen Zahlen.

1.1. Stabile Basisorte und Volumina

Für einen ganzzahligen Divisor D definieren wir den *stabilen Basisort* $\text{SB}(D)$ als Schnitt über die Basisorte der Linearsysteme $|kD|$ für alle positiven ganzen Zahlen k . Diese Definition kann auf \mathbb{Q} -Divisoren ausgeweitet werden, indem wir zu einem ganzzahligen Vielfachen des Divisors übergehen und dessen stabilen Basisort betrachten. Er ist wohldefiniert, da der stabile Basisort invariant unter Vervielfachung eines Divisors ist.

Nakamaye beweist in [Na00] folgendes Resultat über stabile Basisorte: Für ein big und nef Geradenbündel L und ein amplex Geradenbündel A auf einer glatten projektiven Varietät X der Dimension $d \geq 2$ existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $0 < \delta < \varepsilon$ gilt:

$$\text{SB}(L - \delta A) = L^{\perp} = \bigcup_{\substack{V \subset X \\ L^d \cdot V = 0}} V.$$

Da wir Divisoren im Néron-Severi-Vektorraum betrachten wollen und der stabile Basisort nicht invariant ist unter numerischer Äquivalenz, müssen wir vorerst auf den sogenannten *stabilisierten Basisort* ausweichen. Der stabilisierte Basisort $\text{SB}_+(D)$ eines \mathbb{Q} -Divisors D ist definiert als

$$\text{SB}_+(D) = \text{SB}(D - A),$$

wobei A ein „kleiner“ ample \mathbb{Q} -Divisor ist. Diese Definition ist auch für \mathbb{R} -Divisoren sinnvoll. Der stabilisierte Basisort ist nur von der numerischen Äquivalenzklasse von D abhängig (vgl. [EL⁺06]). Wir nennen einen \mathbb{R} -Divisor D *stabil*, wenn für alle hinreichend kleinen ample \mathbb{R} -Divisoren A gilt:

$$\text{SB}_+(D + A) = \text{SB}_+(D) = \text{SB}_+(D - A).$$

Man beachte an dieser Stelle, dass hierbei die Inklusionen „ \subset “ stets gelten und dass wir uns im Fall von \mathbb{Q} -Divisoren auf stabile Basisorte zurückziehen können. Zu einem stabilen \mathbb{R} -Divisor ist durch

$$\text{SC}(D) = \{D' \in \text{Big}(X) \mid \text{SB}_+(D') = \text{SB}_+(D)\}$$

die *Stabilitätskammer* zu D gegeben. In [BKS04, Abschnitt 2] stehen die Stabilitätskammern im Zentrum der Betrachtungen und es wird die Übereinstimmung mit den Zariski-Kammern gezeigt. (Genau genommen wird jeweils das Innere betrachtet.)

Eine weitere asymptotische Invariante von Linearsystemen ist das Volumen. Für eine glatte projektive Fläche X und ein Geradenbündel L auf X definiert

$$\text{vol}_X(L) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{h^0(X, L^{\otimes k})}{k^2/2}$$

das *Volumen* des Geradenbündels L . Für Divisoren D betrachten wir $\mathcal{O}_X(D)$. Ein Geradenbündel bzw. ein Divisor ist genau dann big, wenn sein Volumen positiv ist. In [PAG, Korollar 2.2.45] wird gezeigt, dass die Volumenfunktion $D \mapsto \text{vol}_X(D)$ als stetige Funktion auf dem Néron-Severi-Vektorraum existiert. Bauer, Küronya und Szemberg haben in [BKS04] untersucht, wie sich die Volumenfunktion unter Variation der Divisoren im Big-Kegel verhält.

1.2. Zariski-Zerlegung und Zariski-Kammern

Das Studium der Zariski-Zerlegung geht auf Zariski selbst zurück (vgl. [Zar62]). Er beweist die Existenz einer Zerlegung für effektive \mathbb{Q} -Divisoren; eine Version für pseudoeffektive \mathbb{R} -Divisoren stammt von Kawamata, Matsuda und Matsuki (vgl. auch [Fu79]):

Satz 1.2.1 (Theorem 7.3.1 aus [KMM87]). *Sei X eine glatte projektive Fläche und D ein pseudoeffektiver \mathbb{R} -Divisor auf X . Dann hat D eine eindeutige Zariski-Zerlegung in einen positiven und einen negativen Anteil, d. h. es existieren eindeutig bestimmte \mathbb{R} -Divisoren P_D und $N_D = \sum_{i=1}^r a_i N_i$ mit folgenden Eigenschaften:*

- (i) $D = P_D + N_D$, P_D ist nef und N_D ist effektiv,
- (ii) entweder ist $N_D = 0$ oder die Schnittmatrix $(N_i \cdot N_j)_{i,j}$ ist negativ definit,
- (iii) $P_D \cdot N_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq r$.

Bemerkung 1.2.2. Die Zariski-Zerlegung hängt ausschließlich von der numerischen Äquivalenzklasse von D ab. Falls D ein \mathbb{Q} -Divisor ist, so ist auch N_D ein \mathbb{Q} -Divisor (vgl. [KMM87, Abschnitt 7.3]).

Die Zariski-Zerlegung eines Divisors trägt entscheidend dazu bei, Aussagen über die in Abschnitt 1.1 erwähnten Invarianten zu treffen. Wir benötigen noch einige Begriffe und Bezeichnungen, die im Verlauf der Arbeit immer wieder verwendet werden.

Für einen Divisor D mit Zariski-Zerlegung $D = P_D + N_D$ definieren wir:

$$\text{Null}(D) = \{C \mid C \text{ irreduzible Kurve mit } D \cdot C = 0\}$$

und

$$\text{Neg}(D) = \{C \mid C \text{ irreduzible Komponente von } N_D\} .$$

Aus den Eigenschaften der Zariski-Zerlegung folgt unmittelbar $\text{Neg}(D) \subset \text{Null}(P_D)$.

Es folgt das Hauptresultat aus [BKS04]:

Theorem 1.2.3 (Bauer, Küronya, Szemberg). *Sei X eine glatte projektive Fläche. Es existiert eine lokal endliche Zerlegung des Big-Kegels von X in rationale lokal polyedrische Teilkegel, so dass Folgendes gilt:*

- (i) *In jedem Teilkegel ist der Träger des negativen Anteils der Zariski-Zerlegung der Divisoren in dem Teilkegel konstant.*
- (ii) *Auf jedem Teilkegel ist die Volumenfunktion durch ein homogenes quadratisches Polynom gegeben.*
- (iii) *Im Inneren jedes Teilkegels ist der stabile Basisort konstant.*

Das Theorem sagt aus, wie sich Zariski-Zerlegung, stabiler Basisort und das Volumen eines big Divisors ändern, wenn dieser den Big-Kegel durchläuft. Im Folgenden wollen wir die Teilkegel sowie deren Eigenschaften genauer beschreiben. Es gilt (vgl. [BKS04, Lemma 1.6]):

Proposition 1.2.4. *Zu einem big und nef Divisor P auf einer glatten projektiven Fläche X betrachten wir den konvexen Kegel*

$$\Sigma_P := \{D \in \text{Big}(X) \mid \text{Neg}(D) = \text{Null}(P)\} .$$

Dann sind für zwei big und nef Divisoren P und P' die Kegel Σ_P bzw. $\Sigma_{P'}$ entweder gleich oder disjunkt und $\text{Big}(X)$ ist die Vereinigung aller Σ_P .

Die Kegel Σ_P werden *Zariski-Kammern* genannt und liefern die in Theorem 1.2.3 beschriebene Zerlegung des Big-Kegels.

Bemerkung 1.2.5. (1) Die Teilkegel Σ_P sind im Allgemeinen weder offen noch abgeschlossen. Für einen amplen Divisor A ist $\Sigma_A = \text{Nef}(X) \cap \text{Big}(X)$; wir nennen Σ_A kurz die *Nef-Kammer*.

- (2) Wir nennen die Kurven mit negativem Selbstschnitt auch kurz *negative Kurven* auf X und bezeichnen die Menge der negativen Kurven auf X mit $\mathcal{I}(X)$. Für einen big und nef Divisor D , den wir ja als $A + E$ für einen amplen Divisor A und einen effektiven Divisor E schreiben können, gilt folglich $\text{Null}(D) \subset \mathcal{I}(X)$.

- (3) Für eine irreduzible Kurve $C \in \mathcal{I}(X)$ sei $C^{\geq 0}$ der Halbraum der Divisoren $D \in \text{NS}_{\mathbb{R}}(X)$ mit der Eigenschaft $D \cdot C \geq 0$. Ferner sei C^{\perp} die Hyperebene der Divisoren $D \in \text{NS}_{\mathbb{R}}(X)$ mit $D \cdot C = 0$. Mit diesen Bezeichnungen gilt:

$$\text{Big}(X) \cap \text{Nef}(X) = \text{Big}(X) \cap \bigcap_{C \in \mathcal{I}(X)} C^{\geq 0}.$$

Lokal ist der Schnitt von Big- und Nef-Kegel sogar polyedrisch, d. h. der Nef-Kegel wird lokal durch den Schnitt endlich vieler Halbräume bestimmt (vgl. [BKS04, Korollar 1.4]).

- (4) Für einen big und nef Divisor P ist die *Facette* von P gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{Face}(P) &= \bigcap_{\substack{C \in \mathcal{I}(X) \\ P \in C^{\perp}}} C^{\perp} \cap \text{Nef}(X) \\ &= \text{Null}(P)^{\perp} \cap \text{Nef}(X). \end{aligned}$$

Für ample Divisoren ist die zugehörige Facette der ganze Nef-Kegel, für Divisoren, die big und nef, aber nicht ample sind, besteht ihre Facette aus endlich vielen Hyperebenen, die auf den Nef-Kegel eingeschränkt werden.

In der folgenden Proposition tragen wir wichtige Eigenschaften der Zariski-Kammern Σ_P zusammen. Für Beweise sei auf [BKS04, Abschnitt 1] verwiesen.

Proposition 1.2.6. *Seien $D = P_D + N_D$ ein big Divisor und P ein big und nef Divisor auf einer glatten projektiven Fläche X .*

- (i) *Der Divisor D liegt genau dann auf dem Rand der Zariski-Kammer Σ_P , wenn $\text{Neg}(D) \neq \text{Null}(P_D)$ gilt.*
- (ii) *Das Innere einer Zariski-Kammer Σ_P besteht aus allen Divisoren, die nicht auf dem Rand der Kammer liegen, d. h.*

$$\overset{\circ}{\Sigma}_P = \{D \in \text{Big}(X) \mid \text{Neg}(D) = \text{Null}(P) = \text{Null}(P_D)\}.$$

- (iii) *Es gilt:*

$$\text{Big}(X) \cap \overline{\Sigma}_P = \{D \in \text{Big}(X) \mid \text{Neg}(D) \subset \text{Null}(P) \subset \text{Null}(P_D)\}.$$

- (iv) *Seien $V^{\geq 0}(\text{Null}(P))$ der von $\text{Null}(P)$ erzeugte Unterkegel im Néron-Severi-Vektorraum und $V^{> 0}(\text{Null}(P))$ sein Inneres. Dann gilt:*

$$\text{Big}(X) \cap \overline{\Sigma}_P = (\text{Big}(X) \cap \text{Face}(P)) + V^{\geq 0}(\text{Null}(P)).$$

Sei $\text{rel.int. Face}(P)$ das Innere einer Facette, wobei wir die Topologie des \mathbb{R} -Vektorraums $\bigcap_{C \in \text{Null}(P)} C^{\perp}$ zugrunde legen. Dann erhalten wir für das Innere einer Zariski-Kammer folgende Beschreibung:

$$\overset{\circ}{\Sigma}_P = \text{rel.int. Face}(P) + V^{> 0}(\text{Null}(P)).$$

Insbesondere grenzt jede Kammer (über die Facette) an den Nef-Kegel.

(v) Falls die Facette $\text{Face}(P)$ im Big-Kegel enthalten ist, sind $\text{Face}(P)$ und schließlich auch Σ_P polyedrisch.

Wir notieren abschließend noch zwei Hilfsmittel, auf die wir in späteren Beweisen häufiger zurückgreifen werden.

Lemma 1.2.7. *Sei S eine negativ definite $(r \times r)$ -Matrix über den reellen Zahlen, so dass alle Einträge außerhalb der Hauptdiagonalen nicht-negativ sind. Dann sind alle Einträge der inversen Matrix S^{-1} kleiner oder gleich null.*

Einen Beweis dieser Aussage kann man in [BKS04, Abschnitt 4] nachlesen.

Eine unmittelbare Konsequenz aus dem Hodge-Index-Satz ist

Lemma 1.2.8. *Sei P ein big und nef Divisor. Dann bildet jede nicht-triviale Linearkombination von Kurven aus $\text{Null}(P)$ einen Divisor, dessen Schnittmatrix negativ definit ist.*

Einen Divisor mit negativ definiter Schnittmatrix wollen wir auch kurz *negativen Divisor* nennen.

1.3. Del-Pezzo- und K3-Flächen

Del-Pezzo-Flächen. Dieser Abschnitt stellt die bekannten Resultate über die Zariski-Kammern auf Del-Pezzo-Flächen vor. Unter einer Del-Pezzo-Fläche verstehen wir eine glatte projektive rationale Fläche X , auf der die antikanonische Klasse $-K_X$ ample ist. Dabei handelt es sich bis auf Isomorphie entweder um $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, \mathbb{P}^2 oder um eine Aufbläsung des \mathbb{P}^2 in bis zu acht Punkten in allgemeiner Lage. Punkte p_1, \dots, p_r im \mathbb{P}^2 heißen in allgemeiner Lage, falls keine drei kollinear sind, keine sechs auf einem Kegelschnitt liegen und keine acht auf einer Kubik liegen, die einen Doppelpunkt in einem der acht gegebenen Punkte hat. Als negative Kurven kommen auf Del-Pezzo-Flächen ausschließlich (-1) -Kurven vor: Für eine irreduzible negative Kurve $C \subset X$ vom Geschlecht $g(C)$ gilt die Adjunktionsformel

$$g(C) = 1 + \frac{1}{2} C^2 + \frac{1}{2} C \cdot K_X.$$

Da $-K_X$ ample ist, erhalten wir $-C \cdot K_X \geq 1$; zudem sind $C^2 < 0$ und $g(C) \geq 0$. Damit die Adjunktionsformel erfüllt ist, muss C also eine (-1) -Kurve vom Geschlecht 0 sein.

Falls $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ oder $X = \mathbb{P}^2$ ist, dann existiert auf diesen Flächen nur eine einzige Zariski-Kammer – die Nef-Kammer. Demnach konzentrieren wir uns auf die Aufblasungen des \mathbb{P}^2 in r Punkten in allgemeiner Lage. Diese Flächen bezeichnen wir im Folgenden mit X_r . In [DPT80, Seite 24 ff.] wird gezeigt, dass die Menge $\mathcal{I}(X_r)$ der negativen Kurven auf X_r für $r \leq 9$ endlich ist. Bauer, Kurnoya und Szemberg untersuchen die Del-Pezzo-Fläche X_2 ; die negativen Kurven auf den Flächen X_r , $1 \leq r \leq 8$, wurden von Manin bestimmt:

Satz 1.3.1 ([Ma74, Kap. IV]). *Die negativen Kurven auf X_r sind zum einen*

- *die exceptionellen Divisoren, die zu den Aufblaspungspunkten p_1, \dots, p_r gehören,*

und zum anderen die eigentlich transformierten der folgenden Kurven im \mathbb{P}^2 :

- *Geraden durch Paare von Punkten p_i, p_j ;*

- falls $r \geq 5$, Kegelschnitte durch fünf der Punkte p_1, \dots, p_r ;
- falls $r \geq 7$, Kubiken durch sieben der Punkte p_1, \dots, p_r , von denen einer ein Doppelpunkt ist;
- falls $r = 8$, Quartiken durch alle acht Punkte p_1, \dots, p_r , von denen drei Dreifachpunkte sind;
- falls $r = 8$, Quintiken durch alle acht Punkte p_1, \dots, p_r , von denen sechs Doppelpunkte sind;
- falls $r = 8$, Sextiken durch alle acht Punkte p_1, \dots, p_r , von denen sieben Doppelpunkte sind und einer ein Dreifachpunkt ist.

Für den Beweis dieses Satzes geben wir zwei Referenzen an: In [Ma74] wird der Beweis im Kontext der Theorie der Wurzelsysteme geführt, in [BFN08] wird ein Beweis in Anlehnung [Ha, Theorem V.4.9] gegeben.

Proposition 1.3.2 (Proposition 3.4 aus [BKS04]). *Auf einer glatten projektiven Fläche X , die als negative Kurven nur (-1) -Kurven enthält, liegt ein big Divisor D genau dann auf dem Rand einer Zariski-Kammer, wenn es eine Kurve $C \in \mathcal{I}(X)$ mit $D \in C^\perp$ gibt. Insbesondere bestimmen auf den Del-Pezzo-Flächen X_r die Hyperebenen C^\perp mit $C \in \mathcal{I}(X_r)$ die Ränder der Zariski-Kammern.*

An dieser Stelle wollen wir die wesentlichen Erkenntnisse aus dem Beweis festhalten. Wir werden in Kapitel 3 sehen, dass diese Methoden nicht auf K3-Flächen übertragbar sind. Wir notieren: Sei X eine Fläche, auf der $C^2 = -1$ für alle irreduziblen Kurven $C \in \mathcal{I}(X)$ gilt. Dann besteht ein Divisor, dessen Schnittmatrix negativ definit ist, aus paarweise orthogonalen Kurven, denn für je zwei Komponenten N_i und N_j eines solchen Divisors gilt:

$$0 > (N_i + N_j)^2 = 2 N_i \cdot N_j - 2.$$

Die Ungleichung ist aber nur im Fall $N_i \cdot N_j = 0$ erfüllt. Wir betrachten einen Divisor D , der auf dem Rand einer Zariski-Kammer liegt. Dann gibt es nach Propostion 1.2.6 eine Kurve C mit

$$C \in \text{Null}(P_D) \setminus \text{Neg}(D).$$

Der Divisor $N_D + C$ hat nach Lemma 1.2.8 eine negativ definite Schnittmatrix, so dass N_D orthogonal zu C ist. Schließlich gilt $D \cdot C = 0$, also $D \in C^\perp$. Auf K3-Flächen werden wir dieses Argument nicht zur Verfügung haben.

Beispiel 1.3.3 (Aufblasung der projektiven Ebene in zwei Punkten). Auf der Fläche X_2 gibt es drei negative Kurven: die beiden exzeptionellen Divisoren E_1 und E_2 sowie die eigentlich transformierte $H - E_1 - E_2$ der Geraden durch die beiden Aufblasungspunkte. Dabei ist $H = \sigma^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$; mit σ sei die Aufblasung $X_2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ bezeichnet. Der Abschluss des Big-Kegels wird von diesen drei Kurven aufgespannt und durch die zugehörigen Hyperebenen in fünf Zariski-Kammern zerlegt. Abgesehen von Divisoren aus der Nef-Kammer bilden die negativen Divisoren E_1 , E_2 , $E_1 + E_2$ sowie $H - E_1 - E_2$ die Träger des negativen Anteils der Zariski-Zerlegungen aller big Divisoren auf der Aufblasung.

K3-Flächen. Eine K3-Fläche ist eine glatte projektive Fläche X , auf der die kanonische Klasse K_X trivial ist und $h^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ gilt. Für irreduzible Kurven $C \subset X$ folgt aus

$C \cdot K_X = 0$ und der Adjunktionsformel die Ungleichung $C^2 \geq -2$. Folglich sind (-2) -Kurven auf K3-Flächen die einzig möglichen negativen Kurven.

Zur Bestimmung des negativen Anteils der Zariski-Zerlegung eines Divisors ist es notwendig, die Schnittmatrix auf negative Definitheit zu prüfen. In diesem Zusammenhang treten auf K3-Flächen ADE-Kurven auf. Eine reduzierte, zusammenhängende Kurve C mit Komponenten C_i und negativ definiter Schnittmatrix $(C_i \cdot C_j)_{i,j}$, wobei alle C_i (-2) -Kurven sind, heißt *ADE-Kurve*.

Wegen $(C_i + C_j)^2 = 2(C_i \cdot C_j - 2) < 0$ schneiden sich zwei Komponenten höchstens in einem Punkt, dann transversal. Zu negativ definiten Schnittformen gehören hier genau die Dynkin-Graphen der Typen A_n mit $n \geq 1$, D_n mit $n \geq 4$ sowie E_n mit $n \in \{6, 7, 8\}$.

Kapitel 2

Zählen von Zariski-Kammern auf Del-Pezzo-Flächen

In diesem Kapitel stellen wir wesentliche Ergebnisse der Gemeinschaftsarbeit [BFN08] vor. Während wir im ersten Kapitel grundsätzlich über die Zerlegung des Big-Kegels in Zariski-Kammern und die damit einhergehenden Eigenschaften gesprochen haben und die Existenz der Kammerzerlegung im Vordergrund stand, wollen wir hier quantitative Aussagen treffen. Dazu untersuchen wir einerseits, in wie viele Zariski-Kammern der Big-Kegel einer gegebenen Fläche zerlegt wird, und andererseits studieren wir, durch welche negativen Divisoren die Zariski-Kammern bestimmt werden. Hier ist als quantitative Größe die Mächtigkeit des Trägers der negativen Divisoren, die die Zariski-Kammern charakterisieren, von Interesse. Wir wollen außerdem überlegen, durch welche „Minimalinformation“ wir schon einen vollständigen Überblick über die Zerlegung des Big-Kegels erhalten. Dies werden wir später noch präzisieren.

Die angesprochenen quantitativen Größen sind interessante geometrische Invarianten der Fläche X , mithilfe derer folgende Fragen beantwortet werden können:

- Wie viele verschiedene stabile Basisorte kommen in big Linearsystemen auf X vor und wie viele (und welche) Kurven bestimmen diese?
- Wie viele – auf den Träger des negativen Anteils bezogen – verschiedene Zariski-Zerlegungen kann ein big Divisor auf X haben und wie viele (und welche) Kurven kommen im Träger des negativen Anteils der Zariski-Zerlegung vor?

Grob gesprochen geben die beschriebenen Größen die Komplexität der Fläche aus der Sicht von Linearsystemen an.

Wir stellen in den Abschnitten 2.2 und 2.3 Algorithmen vor, die es erlauben, effektive Aussagen zum einen über die Anzahl der Zariski-Kammern und zum anderen über die Träger des negativen Teils der Zariski-Zerlegung zu machen, wenn die negativen Kurven auf der Fläche bekannt sind.

Zuvor klären wir in Abschnitt 2.1, wie das bisherige Wissen über Zariski-Kammern aufbereitet werden kann, um es algorithmisch zu verarbeiten. Im Weiteren werden sowohl die theoretischen Überlegungen dieses Kapitels als auch die Algorithmen auf verschiedene Typen von Flächen angewendet. In Abschnitt 2.4 behandeln wir als naheliegendes Anwendungsbeispiel Del-Pezzo-Flächen. Da in diesem Fall die negativen Kurven bekannt sind (vgl. Satz 1.3.1), können wir somit diesen Flächentyp vollständig behandeln.

2.1. Negative Kurven und Zariski-Kammern

Wir beschreiben nun einen Zusammenhang zwischen Zariski-Kammern und negativ definiten Schnittmatrizen reduzierter Divisoren. Um effektive Resultate zu erhalten, ist die

folgende Charakterisierung der Kammern wesentlich:

Proposition 2.1.1. *Auf einer glatten projektiven Fläche X gibt es eine Bijektion zwischen der Menge der Zariski-Kammern auf X , die verschieden von der Nef-Kammer sind, und der Menge der reduzierten Divisoren auf X , deren Schnittmatrix negativ definit ist.*

Beweis. Betrachten wir zu gegebener Zariski-Kammer Σ_P für einen big und nef Divisor P , der jedoch nicht ample ist, die irreduziblen Kurven $C_1, \dots, C_r \in \text{Null}(P)$. Dann ist nach Lemma 1.2.8 die Schnittmatrix des Divisors $C_1 + \dots + C_r$ negativ definit.

Sei ein reduzierter Divisor $C_1 + \dots + C_r$ mit negativ definiter Schnittmatrix gegeben. Wir können – wie im Beweis zu [BKS04, Lemma 1.6] – einen ample Divisor H und nicht-negative rationale Zahlen a_1, \dots, a_r so wählen, dass folgendes lineares Gleichungssystem erfüllt ist:

$$\left(H + \sum_{i=1}^r a_i C_i \right) \cdot C_j = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, r. \quad (2.1)$$

Lemma 1.2.7 garantiert uns dabei, dass alle Koeffizienten a_i nicht-negativ sind. Da H ample ist, müssen alle a_i sogar echt positiv sein. Folglich ist

$$D = H + \sum_{i=1}^r (a_i + 1) C_i$$

ein big Divisor mit $\text{Neg}(D) = \{C_1, \dots, C_r\}$. Der positive Teil der Zariski-Zerlegung von D ist $P_D = H + \sum_{i=1}^r a_i C_i$, so dass $D \in \Sigma_{P_D}$ folgt. \square

Für eine glatte projektive Fläche X sei durch $z(X)$ die Anzahl der Zariski-Kammern auf X gegeben. Wir wollen die Aussage aus der vorstehenden Proposition noch etwas technischer fassen, damit wir auf der Grundlage einer algorithmischen Rechnung Aussagen über die Zahl $z(X)$ machen können. Dabei wird es notwendig sein, die negativen Kurven auf X explizit zu kennen. Zuvor notieren wir neben zwei offenkundigen Eigenschaften der Invarianten $z(X)$ noch eine Bezeichnung.

Bemerkung 2.1.2. (1) Falls X nur eine endliche Zahl N negativer Kurven enthält, so bekommen wir eine triviale obere Schranke

$$z(X) \leq 2^N.$$

Dass diese obere Schranke tatsächlich angenommen wird oder dass $z(X)$ dieser nahe kommt, scheint nicht natürlich. Mit Blick auf Bemerkung 2.1.5 wird es im Allgemeinen die Geometrie der Fläche X nicht erlauben, dass jede bzw. fast jede Menge negativer Kurven im negativen Anteil der Zariski-Zerlegung von big Divisoren realisierbar ist. Neben N selbst beschränkt die im Allgemeinen zahlenmäßig deutlich kleinere Picard-Zahl $\rho(X)$ die Mächtigkeit des Trägers des negativen Anteils der Zariski-Zerlegung und somit auch die Anzahl der stabilen Basiskurven für jeden einzelnen Divisor.

(2) Es gilt $z(X) = \infty$ genau dann, wenn es auf X unendlich viele negative Kurven gibt. Die Aufblasung des \mathbb{P}^2 in neun oder mehr Punkten in allgemeiner Lage oder auch Kummerflächen, auf die wir in Kapitel 4 eingehen werden, liefern solche Beispiele.

Definition 2.1.3. Eine Matrix heißt *Hauptuntermatrix* einer gegebenen $(n \times n)$ -Matrix S , falls sie durch Streichen von k korrespondierenden Zeilen und Spalten der Matrix S entsteht, wobei $0 \leq k < n$ gilt.

Die folgende Aussage ergibt sich unmittelbar aus Proposition 2.1.1:

Proposition 2.1.4. *Sei X eine glatte projektive Fläche und seien C_1, \dots, C_r verschiedene negative Kurven auf X . Dann stimmt die Anzahl der Zariski-Kammern, die von einer nicht-leeren Teilmenge von $\{C_1, \dots, C_r\}$ erzeugt werden, mit der Anzahl der negativ definiten Hauptuntermatrizen der Schnittmatrix $(C_i \cdot C_j)_{i,j}$ überein.*

Insbesondere gilt für Flächen, die nur endlich viele negative Kurven enthalten:

$$z(X) = 1 + \# \left\{ \begin{array}{l} \text{Negativ definite Hauptuntermatrizen der} \\ \text{Schnittmatrix der negativen Kurven auf } X \end{array} \right\}.$$

Wir bemerken, dass der Summand 1 von der Nef-Kammer herrührt.

Nun wollen wir auf einer gegebenen Fläche die negativen Divisoren, die ja bekanntlich eine Zariski-Kammer charakterisieren, sowie die Mächtigkeit derer Träger genauer studieren.

Bemerkung 2.1.5. Für einen big und nef Divisor P auf einer glatten projektiven Fläche X können die Kammern nach Proposition 1.2.6 wie folgt beschrieben werden:

$$\bar{\Sigma}_P \cap \text{Big}(X) = (\text{Big}(X) \cap \text{Face}(P)) + V^{\geq 0}(\text{Null}(P)).$$

Folglich addieren sich die Dimension der Facette und die Anzahl der Nullkurven zur Dimension der Kammer, also zur Picard-Zahl $\rho(X)$ der Fläche, auf; es gilt: $|\text{Null}(P)| \leq \rho(X) - 1$. Sei N die Anzahl der negativen Kurven auf X (es kann auch $N = \infty$ gelten), dann folgt für jeden Divisor $D \in \Sigma_P$:

$$0 \leq |\text{Neg}(D)| \leq \min(N, \rho(X) - 1), \quad (2.2)$$

wobei $|\text{Neg}(D)| = 0$ genau dann gilt, wenn D nef ist. Die untere Schranke ist eigentlich wertlos, da jeder Subdivisor eines negativen Divisors auch negativ ist. Daher wollen wir unser Verständnis von negativen Divisoren präzisieren.

Definition 2.1.6. (1) Ein reduzierter Divisor $C_1 + \dots + C_r$, dessen Schnittmatrix negativ definit ist, heißt *maximal negativ*, falls er sich nicht als echter Subdivisor eines reduzierten negativen Divisors realisieren lässt. Wir sprechen in diesem Zusammenhang auch von *maximal negativ definiten (Schnitt-)Matrizen* oder auch von *maximal negativen Mengen* $\{C_1, \dots, C_r\}$, kürzer $\{1, \dots, r\}$.

(2) Ein Divisor D , dessen Schnittmatrix negativ definit ist, heißt *maximal negativ*, falls seine Reduktion maximal negativ ist.

Der Begriff der „maximalen Negativität“ vereint die nötigen Informationen in „komprimierter Form“ in sich. Sind die negativen Kurven auf einer Fläche bekannt, so geben die maximal negativen Mengen einen vollständigen Überblick über die Kammerzerlegung des Big-Kegels, da aus den maximal negativen Mengen alle negativen Mengen resultieren. Folglich betrachten wir nun *maximal negative Divisoren* und wollen zu jeder glatten projektiven Fläche X einen Bereich angeben, in dem die Mächtigkeit des Trägers dieser maximal negativen Divisoren variiert. Die untere Schranke in (2.2) muss nunmehr nicht zwangsläufig scharf sein. Wir werden für spezielle Flächen eine bessere Abschätzung beweisen. Der Wert 0 wird angenommen, wenn jeder big Divisor schon ample ist, beispielsweise auf abelschen Flächen.

2.2. Zählen der Zariski-Kammern

Nachdem wir im vorigen Abschnitt untersucht haben, wie sich die Anzahl der Zariski-Kammern technisch erfassen ließe, geben wir hier den dazu passenden Algorithmus an. Durch Proposition 2.1.4 wird ein Weg zur Zählung der Zariski-Kammern aufgezeigt. Wir wollen auf Flächen, auf denen die Klassen der negativen Kurven explizit bekannt sind, die Zariski-Kammern durch Bestimmung aller negativ definiten Hauptuntermatrizen der zugehörigen Schnittmatrix zählen. Vor dem Hintergrund, dass allgemein die Bestimmung aller negativ definiten Hauptuntermatrizen einer gegebenen Matrix mit zunehmender Größe nur mit der Unterstützung durch einen Computer zu bewältigen ist, wäre ein matrixtheoretisches Argument, welches in Abhängigkeit von noch zu spezifizierenden anderen Größen der Matrix eine Aussage über die Anzahl der negativ definiten Hauptuntermatrizen macht, wünschenswert. Sowohl die Funktionsweise eines passenden Algorithmus als auch die Art einer matrixtheoretischen Aussage sind keineswegs offensichtlich.

Beispiel 2.2.1. Auf der matrixtheoretischen Seite wäre eine Aussage in Abhängigkeit von der Signatur (p, n) der Matrix denkbar, wobei p die Anzahl der positiven und n die Anzahl der negativen Eigenwerte ist. Dass in Abhängigkeit von der Signatur keine akzeptable Aussage zu erwarten ist, zeigen die folgenden Überlegungen:

- (1) Betrachten wir die Matrix, die diagonal aus einer $(k \times k)$ -Einheitsmatrix und dem Negativen einer $(\ell \times \ell)$ -Einheitsmatrix zusammengesetzt ist. Diese Matrix hat Signatur $(p, n) = (k, \ell)$ und sie besitzt genau $2^\ell - 1$ negativ definite Hauptuntermatrizen.
- (2) Setzen wir andererseits eine Matrix diagonal zusammen aus dem Negativen einer $(\ell \times \ell)$ -Einheitsmatrix und k Kopien der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

so erhalten wir auch $2^\ell - 1$ negativ definite Hauptuntermatrizen, jedoch hat diese Matrix die Signatur $(p, n) = (k, k + \ell)$.

Während also in (1) die Anzahl der negativ definiten Hauptuntermatrizen nur von n abhängt, beobachten wir in (2) eine Abhängigkeit von der Differenz $n - p$.

Beispiel 2.2.2. Das Testen *aller* Hauptuntermatrizen auf negative Definitheit führt beispielsweise bei der Del-Pezzo-Fläche X_8 zu 2^{240} möglichen Fällen. Daher scheint diese Methode nicht angemessen zu sein. Unser Algorithmus führt zu einer drastischen Reduktion der zu testenden Hauptuntermatrizen.

Sei A die Schnittmatrix von n negativen Kurven. Falls die Hauptuntermatrix A_S , die zu einer Teilmenge $S \subset \{1, \dots, n\}$ gehört, nicht negativ definit ist, so muss keine der Teilmengen S' mit $S' \supset S$ mehr untersucht werden, da diese nicht negativ definit sein können. Daher ist es möglich, eine Backtracking-Strategie zu verfolgen.

Ferner werden genau gesagt nicht die Schnittmatrizen selbst gezählt, sondern vielmehr die Teilmengen der Indexmenge $\{1, \dots, r\}$, $r \leq n$, die zu einer Hauptuntermatrix führen. Im Folgenden wird diese kürzere Formulierung verwendet. Für die Bestimmung der maximal negativ definiten Mengen wandeln wir den Algorithmus leicht ab, dies erläutern wir in Abschnitt 2.3.

Algorithmus 2.2.3. Der Algorithmus benötigt als Eingabe eine natürliche Zahl $n \geq 1$ sowie eine $(n \times n)$ -Matrix über den reellen Zahlen. Er gibt alle Teilmengen $S \subset \{1, \dots, n\}$ aus, deren zugehörige Hauptuntermatrix A_S negativ definit ist.

```

input  $n, A$ 
 $k \leftarrow 1$ 
 $S \leftarrow \{1\}$ 
while  $S \neq \emptyset$  do
  assert ( $k = \max(S)$  and  $A_{S \setminus \{k\}}$  is negative definite)
  if  $k < n$  then
    if  $A_S$  is negative definite then
      output  $S$ 
    else
       $S \leftarrow S \setminus \{k\}$ 
    end if
  assert ( $k \geq \max(S)$  and  $A_S$  is negative definite)
   $k \leftarrow k + 1$ 
   $S \leftarrow S \cup \{k\}$ 
  else
    if  $A_S$  is negative definite then
      output  $S$ 
    else
       $S \leftarrow S \setminus \{k\}$ 
    end if
  assert ( $k \geq \max(S)$  and  $A_S$  is negative definite)
   $S \leftarrow S \setminus \{k\}$ 
  if  $S \neq \emptyset$  then
     $k \leftarrow \max(S)$ 
     $S \leftarrow S \setminus \{k\}$ 
     $k \leftarrow k + 1$ 
     $S \leftarrow S \cup \{k\}$ 
  end if
end if
end while

```

Bemerkung 2.2.4. Die Effizienz des Algorithmus wird deutlich bei einem Vergleich mit der Methode, *alle* Hauptuntermatrizen auf negative Definitheit zu überprüfen: Auf der Del-Pezzo-Fläche X_6 untersucht unser Algorithmus beispielweise 17090 Untermatrizen statt alle denkbaren $2^{27} = 134217728$ – eine Reduktion der Fälle auf 0,01 Prozent.

Beweis der Korrektheit des Algorithmus. Zuerst bemerken wir, dass die drei Behauptungen in der Schleife wahr sind, wann immer der Algorithmus sie erreicht (dabei nehmen wir die leere Menge als positiv definit an). Wir zeigen nun, dass der Algorithmus terminiert und genau die gewünschten Teilmengen ausgibt.

Für zwei Indexmengen $S, S' \subset \{1, \dots, n\}$ schreiben wir $S < S'$, falls eine ganze Zahl $\ell \geq 0$ existiert, so dass gilt:

$$S \cap \{1, \dots, \ell\} = S' \cap \{1, \dots, \ell\}$$

und

$$\min(S \setminus \{1, \dots, \ell\}) < \min(S' \setminus \{1, \dots, \ell\}),$$

wobei $\min(\emptyset) = -\infty$ gesetzt wird. Es ist klar, dass „ $<$ “ eine totale Ordnungsrelation auf der Menge der Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ definiert. Die Korrektheit des Algorithmus folgt aus nachstehenden zwei Behauptungen. Sei S immer die Teilmenge, mit der der Algorithmus einen Schleifendurchlauf startet, und S' diejenige, mit der ein Schleifendurchlauf endet.

- (i) Am Anfang eines jeden Schleifendurchlaufs gilt: Alle Indexmengen T , die kleiner als S sind und für die A_T negativ definit ist, sind bereits ausgegeben.
- (ii) Bei jedem Schleifendurchlauf geht der Algorithmus zu einer Menge über, die größer ist als die vorher betrachtete, oder es gilt $S' = \emptyset$, was bedeutet, dass der Algorithmus endet.

Wir schreiben $S = \{i_1, \dots, i_m\}$ mit $i_1 < \dots < i_m$. Dann ist:

$$\begin{aligned} S' &= \{i_1, \dots, i_m, i_m + 1\}, & \text{falls } i_m < n \text{ und } A_S \text{ negativ definit,} \\ S' &= \{i_1, \dots, i_{m-1}, i_m + 1\}, & \text{falls } i_m < n \text{ und } A_S \text{ nicht negativ definit,} \\ S' &= \{i_1, \dots, i_{m-2}, i_{m-1} + 1\} \text{ oder } S' = \emptyset, & \text{falls } i_m = n. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Damit erhalten wir $S' > S$ oder $S' = \emptyset$ in jedem Fall, so dass Behauptung (ii) folgt. Zur Behauptung (i): Für eine Menge S , die am Anfang eines Schleifendurchlaufs steht, gibt es zwei Möglichkeiten während des Schleifendurchlaufs: Entweder ist A_S negativ definit oder nicht. Im ersten Fall geht der Algorithmus zur nächstgrößeren Menge S' über, wie wir auch in (2.3) erkennen. Falls A_S nicht negativ definit ist, dann behandelt der Algorithmus im Fall $i_m = n$ nach S wieder die nächstgrößere Menge und im Fall $i_m < n$ die Menge $S' = \{i_1, \dots, i_{m-1}, i_m + 1\}$. In diesem Fall gilt für alle Mengen T mit $S < T < S'$ die Beziehung $T \supset S$, und da A_S nicht negativ definit ist, ist keine der Matrizen A_T negativ definit. Damit ist (i) bewiesen. \square

2.3. Maximale Zariski-Kammern

Während der Algorithmus 2.2.3 *alle* negativ definiten Hauptuntermatrizen der Schnittmatrix der Klassen negativer Kurven auf einer glatten projektiven Fläche X ausgibt, sind wir nun an den *maximal* negativ definiten Hauptuntermatrizen interessiert. Eine Kenntnis dieser ermöglicht eine vollständige Übersicht über die Kammerzerlegung des Big-Kegels auf X . Bereits durch eine leichte Modifikation des Algorithmus können wir die maximal negativ definiten Hauptuntermatrizen zählen lassen, auf diese Weise bekommen wir die Anzahl $z_{\max}(X)$ aller *maximalen* Zariski-Kammern.

Definition 2.3.1. Eine Zariski-Kammer Σ_P auf einer glatten projektiven Fläche nennen wir *maximal*, falls $\text{Null}(P)$ eine maximal negative Menge ist. Wir vereinbaren, dass die Nef-Kammer maximal ist.

Wir werden den Algorithmus 2.2.3 dahingehend erweitern, dass er aus den vorhandenen Hauptuntermatrizen die maximalen herausfiltert. Dazu ist eine Inklusionsüberprüfung nötig. Jede negativ definite Hauptuntermatrix, die Submatrix einer anderen negativ definiten Hauptuntermatrix ist, wird aussortiert, da sie nicht maximal ist.

Die Herausforderung besteht nun darin, ein Sortierverfahren mit möglichst wenigen Inklusionsüberprüfungen zu realisieren. Ein Vergleich der Mengen, nachdem der Algorithmus alle negativ definiten Hauptuntermatrizen ausgegeben hat, wäre zu aufwendig. Dazu wären auf der Del-Pezzo-Fläche X_6 beispielsweise $2763 \cdot 2762 = 7631406$ Vergleiche notwendig. Unser modifizierter Algorithmus soll von vornherein nur die maximal negativ definiten Hauptuntermatrizen ausgeben. Wir speichern nur die Mengen ab, die die Aussicht haben, maximal negativ zu werden. Wir realisieren dies wie folgt:

Algorithmus 2.3.2. Der Algorithmus benötigt als Eingabe eine natürliche Zahl $n \geq 1$ sowie eine $(n \times n)$ -Matrix über den reellen Zahlen. Der Parameter q zählt alle negativ definiten Hauptuntermatrizen, der Parameter ℓ zählt alle maximal negativ definiten Hauptuntermatrizen. Der Algorithmus gibt einen Vektor (S_1, \dots, S_ℓ) aus, dessen Komponenten S_i maximal negative Mengen sind, d. h. die zugehörige Hauptuntermatrix A_{S_i} ist maximal negativ definit.

```

input  $n, A$ 
 $k \leftarrow 1$ 
 $q \leftarrow 0$ 
 $\ell \leftarrow 0$ 
 $S \leftarrow \{1\}$ 
 $S_\ell \leftarrow \{ \}$ 
while  $S \neq \emptyset$  do
  assert( $k = \max(S)$  and  $A_{S \setminus \{k\}}$  is negative definite)
  if  $k < n$  then
    if  $A_S$  is negative definite then
       $q \leftarrow q + 1$ 
    else
       $S \leftarrow S \setminus \{k\}$ 
    end if
    assert( $k \geq \max(S)$  and  $A_S$  is negative definite)
     $k \leftarrow k + 1$ 
     $S \leftarrow S \cup \{k\}$ 
  else
    if  $A_S$  is negative definite then
       $q \leftarrow q + 1$ 
      if  $S \not\subset S_i$  for all  $0 \leq i \leq \ell$  then
         $\ell \leftarrow \ell + 1$ 
         $S_\ell \leftarrow S$ 
      end if
    else
       $S \leftarrow S \setminus \{k\}$ 
      if  $S \not\subset S_i$  for all  $0 \leq i \leq \ell$  then
         $\ell \leftarrow \ell + 1$ 
         $S_\ell \leftarrow S$ 
      end if
    end if
    assert( $k \geq \max(S)$  and  $A_S$  is negative definite)
     $S \leftarrow S \setminus \{k\}$ 
  if  $S \neq \emptyset$  then

```

```

        k ← max(S)
        S ← S \ {k}
        k ← k + 1
        S ← S ∪ {k}
    end if
end if
end while
    
```

Dieser Algorithmus erweitert Algorithmus 2.2.3 um das Auswählen der maximalen Mengen.

Beweis der Korrektheit des Algorithmus. Es genügt zu zeigen, dass der Algorithmus genau die maximal negativ definiten Hauptuntermatrizen ausgibt. Wir müssen uns für jeden Schleifendurchlauf überlegen, ob eine Menge S mit negativ definiten Hauptuntermatrix A_S in den folgenden Schleifendurchläufen noch vergrößert werden kann oder nicht. Nur in letzterem Fall besteht die Möglichkeit, dass die Menge maximal negativ wird.

Eine negative Menge S ist genau dann eine maximal negative Menge, falls es keine negative Menge S' gibt mit $S \subset S'$. Für zwei negative Mengen $S < S'$ mit der Eigenschaft $S \subset S'$ ist $\max(S) < n$. Insgesamt folgt nun, dass eine Inklusionsüberprüfung nur im Fall $k = n$ notwendig ist. \square

2.4. Anwendung: Del-Pezzo-Flächen

In diesem Abschnitt wollen wir die in den letzten beiden Abschnitten vorgestellten Algorithmen auf Del-Pezzo-Flächen anwenden. Wir stellen sofort fest: $z(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = 1$ und $z(\mathbb{P}^2) = 1$, d. h. die Nef-Kammer ist in diesen Fällen die einzige Zariski-Kammer. Daher genügt es, die Aufblasungen X_r für $1 \leq r \leq 8$ zu betrachten.

Das Hauptresultat ist der folgende

Satz 2.4.1. *Sei X_r die Aufblasung des \mathbb{P}^2 in $1 \leq r \leq 8$ Punkten in allgemeiner Lage.*

(i) *Die Anzahl $z(X_r)$ der Zariski-Kammern und die Anzahl $z_{\max}(X_r)$ der maximalen Zariski-Kammern auf X_r ist durch folgende Tabelle gegeben:*

r	1	2	3	4	5	6	7	8
$z(X_r)$	2	5	18	76	393	2764	33645	1501681
$z_{\max}(X_r)$	2	3	6	16	57	289	2593	86401

(ii) *Die maximale Anzahl von Kurven, welche im Träger des negativen Anteils der Zariski-Zerlegung von big Divisoren auf X_r vorkommen, ist r , d. h. auf X_r gibt es höchstens r -elementige maximal negative Mengen und der Wert wird angenommen.*

(iii) *Zu jeder höchstens $(r - 1)$ -elementigen Menge M von Kurven, welche im Träger des negativen Anteils der Zariski-Zerlegung von big Divisoren auf X_r vorkommen, gibt es eine mindestens $(r - 1)$ -elementige Menge M' von Kurven, welche im Träger des negativen Anteils der Zariski-Zerlegung von big Divisoren auf X_r vorkommen, mit der Eigenschaft $M \subset M'$, d. h. auf X_r sind alle maximal negativen Mengen mindestens $(r - 1)$ -elementig.*

Bemerkung 2.4.2. (1) Man könnte anhand der vorgestellten Ergebnisse vermuten, dass die Anzahl der Kammern mit der Picard-Zahl $\rho(X_r) = r + 1$ wächst. Dies ist jedoch kein Phänomen, das sich generell auf Flächen beobachten lässt: Bei abelschen Flächen, auf denen die Picard-Zahl $\rho(X)$ zwischen 1 und 4 variiert, gilt immer $z(X) = 1$, somit die Nef-Kammer die einzige Kammer darstellt. Gleiches können wir auch bei K3-Flächen beobachten: Nach [Kov94, Theorem 2] gibt es K3-Flächen X von jeder Picard-Zahl bis hin zu 11 mit $z(X) = 1$.

- (2) Die Aussagen (ii) und (iii) können wir mit anderen Worten auch folgendermaßen wiedergeben: Auf den Del-Pezzo-Flächen X_r gilt für alle big Divisoren D , deren negativer Anteil in der Zariski-Zerlegung maximal negativ ist:

$$r - 1 \leq |\text{Neg}(D)| \leq r.$$

Die beiden Werte werden angenommen.

- (3) Die Aussagen (ii) und (iii) können wir mit anderen Worten auch folgendermaßen wiedergeben: Auf den Del-Pezzo-Flächen X_r werden die maximalen Zariski-Kammern von $(r - 1)$ - oder r -elementigen negativen Mengen erzeugt. Es kommt beides vor.

Zum Beweis von Satz 2.4.1 wollen wir die Algorithmen 2.2.3 und 2.3.2 heranziehen. Dafür benötigen wir erstens eine explizite Beschreibung der negativen Kurven auf den Flächen X_r und zudem die Schnittmatrizen dieser Kurven. Die negativen Kurven wurden von Manin bestimmt (vgl. Satz 1.3.1), die Schnittmatrizen werden wir angeben. Dabei genügt es, die Schnittmatrix A_8 der Fläche X_8 anzugeben, da sich die Schnittmatrizen A_r der Flächen X_r mit $1 \leq r < 8$ als Hauptuntermatrizen von A_8 ergeben. Es sind genau die Klassen auszuwählen, die in $\mathbb{Z} \cdot [H] \oplus \bigoplus_{i=1}^r [E_i]$ enthalten sind. Wieder sind $H = \sigma^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$ und $E_i = \sigma^{-1}(p_i)$. Es sei $E = E_1 + \dots + E_r$. Wir notieren hier nochmals die negativen Kurven auf den Flächen X_r :

$$\begin{aligned}
 C_{ij}^{(1)} &= H - E_i - E_j & 1 \leq i < j \leq r \\
 C^{(2)} &= 2H - E & (\text{falls } r = 5) \\
 C_i^{(2)} &= 2H - E + E_i & 1 \leq i \leq 6 \quad (\text{falls } r = 6) \\
 C_{ij}^{(2)} &= 2H - E + E_i + E_j & 1 \leq i < j \leq 7 \quad (\text{falls } r = 7) \\
 C_{ijk}^{(2)} &= 2H - E + E_i + E_j + E_k & 1 \leq i < j < k \leq 8 \quad (\text{falls } r = 8) \\
 C_i^{(3)} &= 3H - E - E_i & 1 \leq i \leq 7 \quad (\text{falls } r = 7) \\
 C_{ij}^{(3)} &= 3H - E - E_i + E_j & 1 \leq i, j \leq 8, \quad i \neq j \quad (\text{falls } r = 8) \\
 C_{ijk}^{(4)} &= 4H - E - E_i - E_j - E_k & 1 \leq i < j < k \leq 8 \quad (\text{falls } r = 8) \\
 C_{ij}^{(5)} &= 5H - 2E + E_i + E_j & 1 \leq i < j \leq 8 \quad (\text{falls } r = 8) \\
 C_i^{(6)} &= 6H - 2E - E_i & 1 \leq i \leq 8 \quad (\text{falls } r = 8)
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Auf den Flächen X_r bekommen wir damit 1, 3, 6, 10, 16, 27, 56 und schließlich 240 negative Kurven. Die zugehörigen Schnittmatrizen A_r haben entsprechendes Format.

Zur übersichtlichen Beschreibung der Schnittmatrix vereinbaren wir folgende Notation: Für Tupel (i_1, \dots, i_m) und (j_1, \dots, j_n) ganzer Zahlen definieren wir

$$(i_1, \dots, i_m) * (j_1, \dots, j_n) = \sum_{\substack{\mu=1, \dots, m \\ \nu=1, \dots, n}} \text{sign}(i_\mu) \cdot \text{sign}(j_\nu) \cdot \delta_{|i_\mu||j_\nu|},$$

wobei δ das Kronecker-Delta sei. Mit den Bezeichnungen für die Kurven auf X_8 aus (2.4) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
E_i \cdot E_\ell &= (-i) * (\ell) \\
E_i \cdot C_{\ell m}^{(1)} &= (i) * (\ell, m) \\
E_i \cdot C_{\ell mn}^{(2)} &= 1 - (i) * (\ell, m, n) \\
E_i \cdot C_{\ell m}^{(3)} &= 1 + (i) * (\ell, -m) \\
E_i \cdot C_{\ell mn}^{(4)} &= 1 + (i) * (\ell, m, n) \\
E_i \cdot C_{\ell m}^{(5)} &= 2 - (i) * (\ell, m) \\
E_i \cdot C_\ell^{(6)} &= 2 + (i) * (\ell) \\
C_{ij}^{(1)} \cdot C_{\ell m}^{(1)} &= 1 - (i, j) * (\ell, m) \\
C_{ij}^{(1)} \cdot C_{\ell mn}^{(2)} &= (i, j) * (\ell, m, n) \\
C_{ij}^{(1)} \cdot C_{\ell m}^{(3)} &= 1 + (i, j) * (-\ell, m) \\
C_{ij}^{(1)} \cdot C_{\ell mn}^{(4)} &= 2 - (i, j) * (\ell, m, n) \\
C_{ij}^{(1)} \cdot C_{\ell m}^{(5)} &= 1 + (i, j) * (\ell, m) \\
C_{ij}^{(1)} \cdot C_\ell^{(6)} &= 2 - (i, j) * (\ell) \\
C_{ijk}^{(2)} \cdot C_{\ell mn}^{(2)} &= 2 - (i, j, k) * (\ell, m, n) \\
C_{ijk}^{(2)} \cdot C_{\ell m}^{(3)} &= 1 + (i, j, k) * (\ell, -m) \\
C_{ijk}^{(2)} \cdot C_{\ell mn}^{(4)} &= (i, j, k) * (\ell, m, n) \\
C_{ijk}^{(2)} \cdot C_{\ell m}^{(5)} &= 2 - (i, j, k) * (\ell, m) \\
C_{ijk}^{(2)} \cdot C_\ell^{(6)} &= 1 + (i, j, k) * (\ell) \\
C_{ij}^{(3)} \cdot C_{\ell m}^{(3)} &= 1 + (-i, j) * (\ell, -m) \\
C_{ij}^{(3)} \cdot C_{\ell mn}^{(4)} &= 1 + (-i, j) * (\ell, m, n) \\
C_{ij}^{(3)} \cdot C_{\ell m}^{(5)} &= 1 + (i, -j) * (\ell, m) \\
C_{ij}^{(3)} \cdot C_\ell^{(6)} &= 1 + (-i, j) * (\ell) \\
C_{ijk}^{(4)} \cdot C_{\ell mn}^{(4)} &= 2 - (i, j, k) * (\ell, m, n) \\
C_{ijk}^{(4)} \cdot C_{\ell m}^{(5)} &= (i, j, k) * (\ell, m) \\
C_{ijk}^{(4)} \cdot C_\ell^{(6)} &= 1 - (i, j, k) * (\ell) \\
C_{ij}^{(5)} \cdot C_{\ell m}^{(5)} &= 1 - (i, j) * (\ell, m) \\
C_{ij}^{(5)} \cdot C_\ell^{(6)} &= (i, j) * (\ell) \\
C_i^{(6)} \cdot C_\ell^{(6)} &= (-i) * (\ell)
\end{aligned}$$

Die vorstehenden Formeln beschreiben das Schnittverhalten der negativen Kurven auf X_8 ; damit sind die Schnittmatrix A_8 sowie implizit auch alle A_r für $1 \leq r < 8$ bestimmt.

Beweis von Satz 2.4.1. Wenden wir den Algorithmus 2.2.3 auf die Matrizen A_r für $1 \leq r \leq 8$ an, so bekommen wir folgende Ergebnisse für die Anzahl der negativ definiten Hauptuntermatrizen von A_r :

r	1	2	3	4	5	6	7	8
#	1	4	17	75	392	2 763	33 644	1 501 680

Nun folgt mit Proposition 2.1.4 der erste Teil der Satzaussage.

Algorithmus 2.3.2 liefert im Fall der Schnittmatrizen A_r folgende Ergebnisse für die Anzahl der maximal negativen Mengen:

r	1	2	3	4	5	6	7	8
#	1	2	5	15	56	288	2592	86400

Ferner zeigt sich, dass die Kardinalitäten der maximal negativen Mengen auf X_r gerade $r - 1$ oder r sind. Damit folgen (ii) und (iii). □

Wir werden in Kapitel 4 einen ähnlichen Satz für Kummerflächen formulieren. Dort geben wir ein geometrisches Argument.

Kapitel 3

Zariski-Kammern auf K3-Flächen

In diesem Kapitel studieren wir die Zerlegung des Big-Kegels für K3-Flächen. Wir haben in Kapitel 1 gesehen, dass die negativen Kurven die Ränder der Zariski-Kammern auf Del-Pezzo-Flächen bestimmen. Zudem gibt es auf Del-Pezzo-Flächen nur endlich viele negative Kurven, so dass die Kammerzerlegung vollständig beschrieben werden kann. Es ist natürlich zu fragen, ob auf K3-Flächen die Ränder der Zariski-Kammern auch durch die negativen Kurven bestimmt werden, präzise formuliert stellt sich die Frage: Liefert für eine K3-Fläche X die Menge

$$\left\{ E^\perp \mid E \text{ negative Kurve auf } X \right\}$$

die Zerlegung des Big-Kegels in Zariski-Kammern?

Auf Del-Pezzo-Flächen sind alle negativen Kurven (-1) -Kurven und ein negativer Divisor besteht aus paarweise orthogonalen Kurven (vgl. Proposition 1.3.2). Auf K3-Flächen stellt sich eine andere Ausgangssituation: Wenn es negative Kurven auf der Fläche gibt, dann sind es (-2) -Kurven und jede Zusammenhangskomponente eines negativen Divisors ist eine ADE-Kurve. Folglich sind nicht alle negativen Kurven paarweise orthogonal. Aufgrund dieser geometrischen Unterschiede können wir den Beweis von Proposition 1.3.2 nicht auf K3-Flächen übertragen.

In [BKS04, Abschnitt 3] werden Del-Pezzo- und K3-Flächen auch hinsichtlich der Übereinstimmung von Zariski- und Weyl-Kammer-Zerlegung verglichen. Bei K3-Flächen kann die Zerlegung in Weyl-Kammern gerade die oben formulierte Frage beantworten. Wir werden untersuchen, inwiefern Zariski- und Weyl-Kammern auf Del-Pezzo- und K3-Flächen übereinstimmen. Dazu studieren wir in Abschnitt 3.1 die Weyl-Kammern für Del-Pezzo-Flächen und diskutieren anschließend in Abschnitt 3.2 die Weyl-Zerlegung für K3-Flächen.

3.1. Zariski- und Weyl-Kammern auf Del-Pezzo-Flächen

Wie in Kapitel 2 bezeichnen wir mit X_r die Del-Pezzo-Flächen, welche Aufblasungen des \mathbb{P}^2 in $1 \leq r \leq 8$ Punkten in allgemeiner Lage sind. Die Gruppe $W(X_r)$ der Automorphismen von $\text{NS}_{\mathbb{R}}(X_r)$, die den kanonischen Divisor K_{X_r} der Fläche fix und die Schnittform invariant lassen, ist für $1 \leq r \leq 8$ eine endliche Gruppe und isomorph zur Weyl-Gruppe, die im Zusammenhang mit Wurzelsystemen in der Theorie der Lie-Gruppen Betrachtung findet. Wir orientieren uns im Folgenden bei der Beschreibung der Weyl-Gruppe auf den Flächen X_r an [DPT80, Seite 23 ff.] und an [DJT07, Abschnitt 5].

Definition 3.1.1. Die Menge der *Wurzeln* auf den Del-Pezzo-Flächen X_r , $1 \leq r \leq 8$, ist definiert durch

$$\mathcal{R}_r = \{ R \in \text{NS}_{\mathbb{R}}(X_r) \mid R^2 = -2 \text{ und } R \cdot K_{X_r} = 0 \} .$$

Jede Wurzel $R \in \mathcal{R}_r$ definiert einen Automorphismus

$$s_R : \mathrm{NS}_{\mathbb{R}}(X_r) \longrightarrow \mathrm{NS}_{\mathbb{R}}(X_r), \quad s_R(D) = D + (D \cdot R)R,$$

die *Reflexion* an R . Die *Weyl-Gruppe* $W(X_r)$ von X_r ist die von allen Reflexionen erzeugte Gruppe, d. h. $W(X_r) = \langle s_R \mid R \in \mathcal{R}_r \rangle$.

Man rechnet leicht nach, dass die Automorphismen s_R Isometrien bezüglich des Schnittproduktes sind, die den kanonischen Divisor K_{X_r} fix lassen. Die Menge der *einfachen Wurzeln* ist

$$\mathcal{B} = \{R_1 := H - E_1 - E_2 - E_3, R_2 := E_2 - E_1, \dots, R_n := E_n - E_{n-1}\},$$

wobei H den Pullback von $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ und E_i die exceptionellen Divisoren auf der Aufblasung bezeichne. Es gelten $\mathcal{B} \cap \mathcal{R}_2 = \{R_2\}$ und $\mathcal{B} \cap \mathcal{R}_r = \{R_1, \dots, R_r\}$ für $r \geq 3$. Auf den Del-Pezzo-Flächen X_r , $1 \leq r \leq 8$, bildet die endliche Menge der (-2) -Klassen ein Wurzelsystem im Néron-Severi-Vektorraum. Die Definition eines Wurzelsystems kann in [DJT07, Abschnitt 5.1] nachgelesen werden. Wurzelsysteme lassen sich mit Hilfe von Dynkin-Graphen klassifizieren. Dazu ist aus der Menge der Wurzeln eine Menge einfacher Wurzeln auszuwählen, welche die Knoten der Dynkin-Graphen bilden. Die Kanten beschreiben das Schnittverhalten der einfachen Wurzeln untereinander.

Wir tragen in der folgenden Proposition einige Eigenschaften der Wurzeln und der Weyl-Gruppe zusammen:

Proposition 3.1.2. (i) *Es gelten $\mathcal{R}_1 = \emptyset$ und $\mathcal{R}_2 = \{R_2, -R_2\}$.*

(ii) *Für $r \geq 3$ bilden R_1, \dots, R_r eine Basis der Hyperebene $(K_{X_r})^\perp$. Die Weyl-Gruppe $W(X_r)$ wird (schon) von R_1, \dots, R_r erzeugt.*

(iii) *Die Klassifikation der Wurzelsysteme \mathcal{R}_r durch Dynkin-Graphen ist durch folgende Tabelle gegeben:*

r	2	3	4	5	6	7	8
\mathcal{R}_r	A_1	$A_1 \times A_2$	A_4	D_5	E_6	E_7	E_8

(iv) *Die Weyl-Gruppe $W(X_r)$ operiert transitiv auf der Menge \mathcal{R}_r für $r \geq 2$, sie operiert transitiv auf der Menge der negativen Kurven $\mathcal{I}(X_r)$ für $r \geq 3$. Für $r = 1, 2$ ist die Anzahl der Bahnen der Operation von $W(X_r)$ auf $\mathcal{I}(X_r)$ gleich 1 bzw. 2.*

Für Beweise sei auf [DPT80, Seite 29 ff.] verwiesen.

Definition 3.1.3. Eine *Wand* in $\mathrm{NS}_{\mathbb{R}}(X_r)$ ist eine Hyperebene, die orthogonal zu einer Wurzel $R \in \mathcal{R}_r$ ist. Die Zusammenhangskomponenten von

$$\mathrm{NS}_{\mathbb{R}}(X_r) \setminus \bigcup_{R \in \mathcal{R}_r} R^\perp$$

nennen wir *Weyl-Kammern*. Zusammenhangskomponenten von

$$\mathrm{NS}_{\mathbb{R}}(X_r) \setminus \bigcup_{R \in (\mathcal{B} \cap \mathcal{R}_r)} R^\perp$$

nennen wir *einfache Weyl-Kammern*.

Bemerkung 3.1.4. Die Weyl-Gruppe operiert transitiv auf der Menge der Weyl-Kammern (vgl. [DJT07, Abschnitt 5.1]).

Im Folgenden wollen wir die Wirkung der Weyl-Gruppe auf die Zariski-Kammern untersuchen und die Zerlegungen in Zariski- und Weyl-Kammern miteinander vergleichen. Dabei betrachten wir die Weyl-Kammern nur im Big-Kegel, also den Schnitt einer Weyl-Kammer mit dem Big-Kegel. Wenn wir im Folgenden von Weyl-Kammern sprechen, dann meinen wir damit die auf den Big-Kegel eingeschränkten Weyl-Kammern. Nach Proposition 3.1.2 operiert die Weyl-Gruppe transitiv auf der Menge der negativen Kurven, folglich permutiert in diesem Fall eine Reflexion $s_{R_i} \in W(X_r)$ alle Elemente aus $\mathcal{I}(X_r)$. Für $r = 2$ vertauscht die Reflexion s_{R_2} die exceptionellen Divisoren E_1 und E_2 , sie lässt $H - E_1 - E_2$ fest. Folglich bekommen wir hier zwei Bahnen, wie oben erwähnt. Insgesamt stellen wir fest, dass unter einer Reflexion $s_R \in W(X_r)$ nef Divisoren auf nef Divisoren abgebildet werden. Damit ergibt sich:

Proposition 3.1.5 (Proposition 3.7 aus [BKS04]). *Sei s_R ein Automorphismus der Weyl-Gruppe auf einer der Del-Pezzo-Flächen X_r für $1 \leq r \leq 8$. Gehören zwei Divisoren $D, D' \in \text{Big}(X_r)$ zur selben Zariski-Kammer, so auch $s_R(D)$ und $s_R(D')$, d. h. die Zariski-Kammern bleiben unter der Operation der Weyl-Gruppe erhalten. Die Weyl-Gruppe operiert sogar transitiv auf der Menge der Zariski-Kammern in $\text{Big}(X_r)$.*

- Bemerkung 3.1.6.** (1) Aus dem Beweis von [BKS04, Proposition 3.7] geht hervor, dass auf Del-Pezzo-Flächen die Menge der big Divisoren unter Reflexionen invariant bleiben. Schreiben wir einen big Divisor als Summe eines ample und eines effektiven Divisors, so wird der ample Divisor auf einen ample und der effektive auf einen effektiven abgebildet.
- (2) Im Widerspruch zu [BKS04, Bemerkung 3.8] halten wir fest, dass die Zerlegung des Big-Kegels in Zariski-Kammern nicht mit der Zerlegung in Weyl-Kammern übereinstimmt. Schon die Nef-Kammer entspricht keiner Weyl-Kammer.

3.2. Zariski- und Weyl-Kammern auf K3-Flächen

Für eine glatte algebraische K3-Fläche X hat Kovács in [Kov94] gezeigt, dass X entweder keine negativen Kurven enthält oder dass der Kegel der Kurven von den glatten rationalen Kurven mit Selbstschnitt 0 oder -2 erzeugt wird. Letzteres ist nur für Flächen, deren Picard-Zahl mindestens 3 ist, möglich. Im ersten Fall stimmt der Kegel der Kurven mit dem Nef-Kegel überein, d. h. wir bekommen nur eine Zariski-Kammer, die Nef-Kammer. Im zweiten Fall ist ein big Divisor genau dann nef, wenn er jede (-2) -Kurve nicht-negativ schneidet. Hier werden unsere Studien ansetzen.

In Analogie zu Del-Pezzo-Flächen führen wir die Begriffe rund um die Weyl-Gruppe ein. Auf einer K3-Fläche X bilden die (-2) -Klassen die Menge \mathcal{R} der Wurzeln. Zu jeder Wurzel werden wie auf Del-Pezzo-Flächen Reflexionen definiert, die erneut die Weyl-Gruppe erzeugen. Die Weyl-Kammern sind die Zusammenhangskomponenten von

$$\text{NS}_{\mathbb{R}}(X) \setminus \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R^{\perp}.$$

Für ein bestimmtes System einfacher Wurzeln definieren wir auf K3-Flächen einfache Weyl-Kammern. Da wir in diesem Kontext nur big Divisoren betrachten, schränken wir die einfachen Weyl-Kammern auf den Big-Kegel ein.

Definition 3.2.1. Auf einer K3-Fläche X bilden die Zusammenhangskomponenten von

$$\text{Big}(X) \setminus \bigcup_{C \in \mathcal{I}(X)} C^\perp$$

die Menge der *einfachen Weyl-Kammern* der Fläche X .

Die einfachen Weyl-Kammern auf K3-Flächen sind offene Teilkegel des Big-Kegels. Im Folgenden wollen wir Aussagen über den Zusammenhang zwischen den Zariski-Kammern und den einfachen Weyl-Kammern auf K3-Flächen beweisen. Die Frage, ob die Ränder der Zariski-Kammern durch die negativen Kurven auf der K3-Fläche bestimmt werden, können wir nun wie folgt formulieren: Stimmen auf K3-Flächen die einfachen Weyl-Kammern mit den Zariski-Kammern überein? (Präzise ausgedrückt müssten wir von der Übereinstimmung des Inneren einer Zariski-Kammer mit einer einfachen Weyl-Kammern sprechen.) Wir werden ein Kriterium für eine solche Übereinstimmung angeben. Zuvor diskutieren wir jedoch die Anzahl der jeweiligen Kammern und treffen einige Vorbereitungen.

Proposition 3.2.2. *Sei X eine K3-Fläche. Dann gibt es eine Bijektion zwischen der Menge der Zariski-Kammern in $\text{Big}(X)$ und der Menge der einfachen Weyl-Kammern in $\text{Big}(X)$.*

Bemerkung 3.2.3. (1) Man beachte an dieser Stelle, dass die Anzahl der Kammern unendlich sein kann, wie wir bereits in Bemerkung 2.1.2 gesehen haben.

- (2) Falls die Fläche X keine negativen Kurven enthält, so ist $\text{Big}(X)$ die einzige einfache Weyl-Kammer. Diese steht in bijektiver Korrespondenz zur Nef-Kammer, der einzigen Zariski-Kammer. In dieser Situation ist klar, dass die Zariski-Kammern, oder vielmehr deren Inneres, mit den einfachen Weyl-Kammern übereinstimmen. Im Übrigen wird das Innere der Nef-Kammer, also der ample Kegel, auf jeder K3-Fläche mit einer einfachen Weyl-Kammer übereinstimmen. Von Interesse sind daher die weiteren Zariski-Kammern.

Beweis von Proposition 3.2.2. Wir können eine einfache Weyl-Kammer eindeutig charakterisieren, indem wir für einen Divisor in der Kammer für jede Kurve aus $\mathcal{I}(X)$ angeben, auf welcher Seite der zugehörigen Wand der Divisor liegt. Daher gibt es eine Bijektion zwischen der Menge der einfachen Weyl-Kammern und der Menge

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Teilmengen } \mathcal{S} \subset \mathcal{I}(X), \text{ so dass es einen Divisor } D \in \text{Big}(X) \text{ gibt mit} \\ D \cdot C < 0 \text{ für alle } C \in \mathcal{S} \text{ und } D \cdot C > 0 \text{ für alle } C \in \mathcal{I}(X) \setminus \mathcal{S}. \end{array} \right\}.$$

Im Fall $\mathcal{I}(X) = \emptyset$ hat \mathcal{M} nur die leere Menge als Element, sie entspricht dem Big-Kegel. Wir werden zeigen, dass es eine Bijektion zwischen \mathcal{M} und der Menge der Zariski-Kammern gibt. Dazu betrachten wir eine Zariski-Kammer, die durch die Kurven C_1, \dots, C_r gegeben ist, und einen ample Divisor H . Dann ist für alle nicht-negativen rationalen Zahlen a_1, \dots, a_r der Divisor

$$D = H + \sum_{i=1}^r a_i C_i$$

big. Wir behaupten, dass die Koeffizienten a_i so gewählt werden können, dass

$$D \cdot C_i < 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, r \quad (3.1)$$

gilt. Für alle Kurven C , die verschieden von den C_i sind, gilt $D \cdot C > 0$. Daher ist die Menge $\{C_1, \dots, C_r\}$ in \mathcal{M} enthalten. Für den Beweis von (3.1) betrachten wir folgendes lineares Gleichungssystem in den a_i :

$$D \cdot C_j = H \cdot C_j + \sum_{i=1}^r a_i C_i \cdot C_j = -1 \quad \text{für } j = 1, \dots, r.$$

Die Koeffizientenmatrix ist negativ definit und hat nicht-negative Einträge außerhalb der Diagonalen. Dann können wir mit Lemma 1.2.7 schließen, dass alle Einträge der inversen Matrix nicht-positiv sind; demnach sind die Lösungen a_i sämtlich nicht-negativ und es folgt (3.1).

Gehen wir umgekehrt von einer Menge $\mathcal{S} \in \mathcal{M}$ aus, so folgt aus der Existenz eines big Divisors D mit $D \cdot C < 0$ für $C \in \mathcal{S}$, dass \mathcal{S} eine endliche Menge, sagen wir $\{C_1, \dots, C_r\}$, ist. Zudem ist der Divisor $C_1 + \dots + C_r$ negativ, nach Proposition 2.1.1 können wir \mathcal{S} mit einer Zariski-Kammer identifizieren. \square

Bemerkung 3.2.4. Betrachten wir die aus Proposition 1.2.6 bekannte Darstellung

$$\overset{\circ}{\Sigma}_P = \text{rel.int. Face}(P) + V^{>0}(\text{Null}(P))$$

des Inneren einer Zariski-Kammer Σ_P , so stellen wir fest, dass jede Kurve $C \in \text{Null}(P)$ auf dem Rand einer Zariski-Kammer liegt. Für die Übereinstimmung der Zerlegungen in Zariski- und einfache Weyl-Kammern müsste zumindest gegeben sein, dass jede Kurve $C \in \text{Null}(P)$ auf einer Wand, d. h. auf dem Rand einer einfachen Weyl-Kammer, liegen würde. Folglich müsste zu jeder Kurve $C \in \text{Null}(P)$ eine negative Kurve $C' \in \mathcal{I}(X)$ existieren mit $C \cdot C' = 0$.

Auf Del-Pezzo-Flächen ist dies der Fall, da ein negativ definiten Divisor aus paarweise orthogonalen Kurven besteht. Dass die Situation auf K3-Flächen eine andere ist, zeigt das folgende Beispiel:

Beispiel 3.2.5. Seien X eine K3-Fläche, H ein ample Divisor auf X und $\bigcup_{i=1}^n C_i$ eine ADE-Kurve vom Typ A_n . Wir betrachten den Divisor

$$D = H + \sum_{i=1}^n a_i C_i,$$

welcher für positive rationale Koeffizienten a_1, \dots, a_n big ist. Die Koeffizienten a_i seien so (groß) gewählt, dass die Zariski-Zerlegung von D wie folgt lautet:

$$D = H + \underbrace{\sum_{i=1}^n b_i C_i}_{P_D} + \underbrace{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i) C_i}_{N_D},$$

wobei $a_i > b_i > 0$ gelte. Ein konstruktives Verfahren zur Bestimmung der Zariski-Zerlegung stellt [Bau08] bereit, welches die hier gestellten Forderungen an die Koeffizienten rechtfertigt. Ein Divisor mit den geforderten Eigenschaften existiert beispielsweise auf der Kummerfläche, die wir in Abschnitt 4.3 betrachten werden. Für D gilt:

$$\text{Neg}(D) = \text{Null}(P_D) = \{C_1, \dots, C_n\}.$$

Der Divisor $D' = H + b_1 C_1 + \sum_{i=2}^n a_i C_i$ ist ebenfalls big und hat die Zariski-Zerlegung

$$D = H + \underbrace{\sum_{i=1}^n b_i C_i}_{P_{D'}} + \underbrace{\sum_{i=2}^n (a_i - b_i) C_i}_{N_{D'}}.$$

Es gilt:

$$\text{Neg}(D') = \{C_2, \dots, C_n\} \subset \{C_1, \dots, C_n\} = \text{Null}(P_{D'}) = \text{Null}(P_D).$$

Folglich ist $C_1 \in \text{Null}(P_{D'}) \setminus \text{Neg}(D')$ und nach Proposition 1.2.6 liegt D' damit auf dem Rand einer Zariski-Kammer. Jedoch gilt:

$$D' \cdot C_1 = N_{D'} \cdot C_1 = a_2 - b_2 > 0,$$

so dass $D' \notin C_1^\perp$ ist, wie wir bei Del-Pezzo-Flächen erwartet hätten (vgl. Beweis zur Proposition 1.3.2). Auf K3-Flächen weisen die negativen Kurven untereinander ein stärkeres Schnittverhalten auf, weshalb es nicht klar ist, ob Randdivisoren auf Zariski- und einfachen Weyl-Kammern einander entsprechen.

Das folgende Lemma verallgemeinert Beispiel 3.2.5. Wir werden die Aussage darin im Beweis der Hauptresultate dieses Kapitels heranziehen, die wir nach einigen Vorbereitungen formulieren werden.

Lemma 3.2.6. *Sei X eine K3-Fläche und seien C_1 und C_2 zwei (-2) -Kurven mit $C_1 \cdot C_2 = 1$. Dann existiert ein big Divisor E im Inneren der Zariski-Kammer, die durch den negativen Divisor $C_1 + C_2$ gegeben ist, und es gilt: $E \cdot C_1 > 0$.*

Beweis. Sei H ein ample Divisor auf X . Dann ist der Divisor

$$D = H + a_1 C_1 + a_2 C_2$$

für nicht-negative reelle Zahlen a_1, a_2 big und hat die Zariski-Zerlegung

$$D = \underbrace{H + a_1^* C_1 + a_2^* C_2}_{P_D} + \underbrace{(a_1 - a_1^*) C_1 + (a_2 - a_2^*) C_2}_{N_D},$$

wobei die Koeffizienten a_i^* durch folgendes lineares Gleichungssystem festgelegt sind:

$$P_D \cdot C_i = H \cdot C_i + a_1^* C_1 \cdot C_i + a_2^* C_2 \cdot C_i = 0 \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Für hinreichend große a_i können wir erreichen, dass $0 < a_i^* < a_i$ gilt (vgl. [Bau08]). Diesen Fall wollen wir annehmen und können dann für $a_1 \rightarrow a_1^*$ eine Folge von Divisoren

$$D_n = H + a_{1_n} C_1 + a_2 C_2$$

bilden, welche gegen

$$D^* = H + a_1^* C_1 + a_2 C_2$$

konvergiert. Dann gelten $\text{Null}(P_D) = \text{Null}(P_{D^*})$ und $\text{Neg}(D^*) = \{C_2\} \subsetneq \{C_1, C_2\} = \text{Neg}(D)$. Folglich liegt der Divisor D^* auf dem Rand der Zariski-Kammer Σ_{P_D} und es gilt:

$$D^* \cdot C_1 = P_{D^*} \cdot C_1 + N_{D^*} \cdot C_1 = (a_2 - a_2^*) C_2 \cdot C_1 = (a_2 - a_2^*) > 0.$$

Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $(D^* + \varepsilon C_1) \cdot C_1 > 0$ gilt, und der Divisor $D^* + \varepsilon C_1$ liegt im Inneren der Kammer Σ_{P_D} . Wir setzen $E = D^* + \varepsilon C_1$. \square

Beispiel 3.2.7. Sei X eine K3-Fläche und seien C_1 und C_2 zwei (-2) -Kurven mit $C_1 \cdot C_2 = 1$. Dann existiert ein big Divisor $E \in C_1^\perp$, der im Inneren der Zariski-Kammer, die durch den negativen Divisor $C_1 + C_2$ gegeben ist, liegt. Insbesondere liegt E auf dem Rand einer einfachen Weyl-Kammer.

Beweis. Wählen wir zu dem Divisor D^* aus Lemma 3.2.6 ein $\delta > 0$, so dass $(D^* + \delta C_1) \cdot C_1 = 0$ gilt, dann liegt der Divisor $E := D^* + \delta C_1$ im Inneren der Zariski-Kammer, die durch die beiden Kurven C_1 und C_2 bestimmt ist. Außerdem gilt $E \in C_1^\perp$. \square

Lemma 3.2.8. Sei D ein big Divisor mit Zariski-Zerlegung $D = P_D + N_D$. Sei $\text{Neg}(D) = \{C_1, \dots, C_r\}$. Dann gibt es in jeder Zusammenhangskomponente des zu $\text{Neg}(D)$ gehörigen Dynkin-Graphen eine Kurve C_i aus der betreffenden Zusammenhangskomponente mit

$$D \cdot C_i \leq 0.$$

Beweis. Mit Lemma 1.2.7 folgt, dass das Ungleichungssystem

$$D \cdot C_j = N_D \cdot C_j = \sum_{i=1}^r a_i C_i \cdot C_j > 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, r$$

durch nicht-positive Zahlen a_1, \dots, a_r gelöst wird, wodurch aber die Effektivität von N_D nicht gewährleistet ist. Da zudem die Ungleichungen, die aus den einzelnen Zusammenhangskomponenten hervorgehen, ungekoppelt sind, muss es in jeder Zusammenhangskomponente mindestens eine Kurve geben, die mit D einen nicht-positiven Schnitt hat. \square

Wir kommen nun zur Formulierung der Hauptresultate dieses Abschnitts. Wir erinnern sowohl an die Identifikation der einfachen Weyl-Kammern mit Elementen der Menge

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Teilmengen } \mathcal{S} \subset \mathcal{I}(X), \text{ so dass es einen Divisor } D \in \text{Big}(X) \text{ gibt mit} \\ D \cdot C < 0 \text{ für alle } C \in \mathcal{S} \text{ und } D \cdot C > 0 \text{ für alle } C \in \mathcal{I}(X) \setminus \mathcal{S}. \end{array} \right\} \quad (3.2)$$

durch Proposition 3.2.2 als auch an die in Abschnitt 2.1 eingeführten Begriffe der maximal negativen Mengen bzw. Schnittmatrizen, welche eine Brücke zu den maximalen Zariski-Kammern schlagen, die in Abschnitt 2.3 erklärt sind.

Satz 3.2.9. Seien X eine K3-Fläche, \mathcal{M} die Menge aus (3.2) und Σ_{P_S} eine Zariski-Kammer für einen big und nef Divisor P_S mit $\text{Null}(P_S) = \mathcal{S}$ und eine Teilmenge $\mathcal{S} \in \mathcal{M}$. Sei $\Omega_{\mathcal{S}}$ die zu \mathcal{S} gehörige einfache Weyl-Kammer. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) Es gilt: $\Omega_{\mathcal{S}} \subset \Sigma_{P_S}$.
- (ii) Für alle Mengen $\mathcal{S}' \subset \mathcal{I}(X)$, die \mathcal{S} zu einer maximal negativen Menge ergänzen, gilt:

$$C' \cdot C = 0 \quad \text{für alle } C \in \mathcal{S}, C' \in \mathcal{S}'.$$

Beweis. Der Fall $\mathcal{S} = \emptyset$ entspricht auf der Seite der Zariski-Kammern der Nef-Kammer; es gilt $\overset{\circ}{\Sigma}_A = \Omega_\emptyset$ für einen amplen Divisor A . Wenn X keine negativen Kurven enthält, tritt ausschließlich dieser Fall auf. Sei im Folgenden $\mathcal{S} \neq \emptyset$ vorausgesetzt.

Wir zeigen zuerst die Implikation von (ii) nach (i). Dazu seien $\mathcal{S} = \{C_1, \dots, C_r\}$ und $D \in \Omega_{\mathcal{S}}$ ein big Divisor mit Zariski-Zerlegung $D = P_D + N_D$. Wir müssen zeigen, dass $\text{Neg}(D) = \mathcal{S}$ gilt. Da D zur einfachen Weyl-Kammer $\Omega_{\mathcal{S}}$ gehört, gilt für alle $i = 1, \dots, r$:

$$D \cdot C_i = P_D \cdot C_i + N_D \cdot C_i < 0.$$

Wir lösen zuerst das folgende Ungleichungssystem:

$$\begin{aligned}
 D \cdot C_1 &= -2b_1 + b_2 < 0 \\
 D \cdot C_2 &= b_1 - 2b_2 + b_3 < 0 \\
 &\vdots \\
 D \cdot C_i &= b_{i-1} - 2b_i + b_{i+1} < 0 \\
 &\vdots \\
 D \cdot C_n &= b_{n-1} - 2b_n < 0.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Dazu setzen wir für $i = 1, \dots, n$

$$b_i := \sum_{j=n-(i-1)}^n j.$$

Damit ist $b_{i+1} > b_i \geq n$ für $i = 1, \dots, n$ und weiterhin gilt für $i = 2, \dots, n-1$ die Beziehung

$$b_{i-1} + b_{i+1} < 2b_i.$$

Ferner gilt:

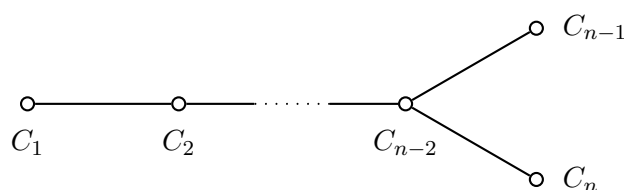
$$-2b_1 + b_2 = -2n + n - 1 + n = -1 < 0$$

sowie

$$-2b_{n-1} + b_n = -2 \sum_{j=2}^n j + \sum_{j=1}^n j < 0.$$

Schließlich sind alle Ungleichungen in (3.3) erfüllt. Setzen wir nun den Koeffizienten $b_k = 1$, so ist $D \cdot C_k > 0$, da alle anderen Koeffizienten in der Ungleichung größer oder gleich 3 sind. Die anderen Ungleichungen, in denen b_k vorkommt, sind mit der Setzung $b_k = 1$ auch erfüllt. Damit ist das Lemma für ADE-Kurven vom Typ A_n bewiesen.

Das Konstruktionsverfahren lässt sich mit einer leichten Modifikation auf die Typen D_n und E_6, E_7, E_8 anwenden. Zunächst betrachten wir eine ADE-Kurve $\bigcup_{i=1}^n C_i$ vom Typ D_n :



Wir lösen zuerst das folgende Ungleichungssystem, welches sich im Schnittverhalten der

Kurven C_{n-2}, C_{n-1} und C_n vom System (3.3) unterscheidet:

$$\begin{aligned}
 D \cdot C_1 &= -2b_1 + b_2 < 0 \\
 D \cdot C_2 &= b_1 - 2b_2 + b_3 < 0 \\
 &\vdots \\
 D \cdot C_i &= b_{i-1} - 2b_i + b_{i+1} < 0 \\
 &\vdots \\
 D \cdot C_{n-2} &= b_{n-3} - 2b_{n-2} + b_{n-1} + b_n < 0 \\
 D \cdot C_{n-1} &= b_{n-2} - 2b_{n-1} < 0 \\
 D \cdot C_n &= b_{n-2} - 2b_n < 0.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Dazu setzen wir für $i = 1, \dots, n-2$ wieder

$$b_i := \sum_{j=n-(i-1)}^n j.$$

Damit gilt für $i = 2, \dots, n-3$ wie oben die Beziehung

$$b_{i-1} + b_{i+1} < 2b_i.$$

Ferner gilt:

$$-2b_1 + b_2 = -2n + n - 1 + n = -1 < 0.$$

Wir definieren abweichend vom obigen Fall

$$b_{n-1} = b_n := \left\lfloor \frac{b_{n-2}}{2} \right\rfloor + 1,$$

wobei $\lfloor \cdot \rfloor$ die Gauß-Klammer bezeichne. Mit $b_{n-2} = \sum_{j=2}^n j = -1 + \frac{n(n+1)}{2}$ bekommen wir

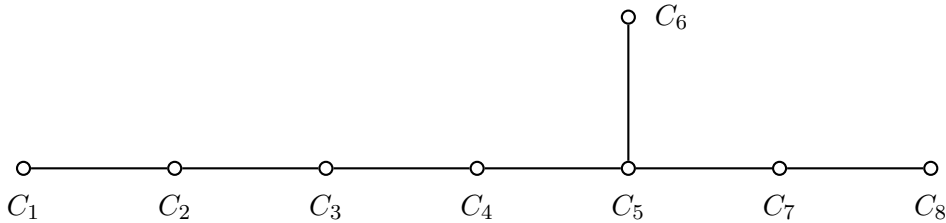
$$2b_{n-1} = 2b_n = 2 \left\lfloor \frac{b_{n-2}}{2} \right\rfloor + 2 = \begin{cases} b_{n-2} + 2, & \text{falls } \frac{b_{n-2}}{2} \in \mathbb{Z} \\ b_{n-2} + 1, & \text{falls } \frac{b_{n-2}}{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases},$$

womit $2b_{n-1} > b_{n-2}$ und $2b_n > b_{n-2}$ folgt. Außerdem gilt:

$$b_{n-1} + b_n + b_{n-3} = 2b_n + b_{n-3} < b_{n-2} + 2 + b_{n-3} = 2b_{n-2} - 1 < 2b_{n-2}.$$

Somit sind alle Ungleichungen in (3.4) erfüllt. Setzen wir wieder den Koeffizienten $b_k = 1$, so ist $D \cdot C_k > 0$, da alle anderen Koeffizienten in der Ungleichung größer oder gleich n sind. Die anderen Ungleichungen, in denen b_k vorkommt, sind mit der Setzung $b_k = 1$ ebenso erfüllt.

Für die Ausnahmefälle E_6, E_7 und E_8 behandeln wir exemplarisch E_8 :



Zu lösen ist vorerst folgendes Ungleichungssystem:

$$\begin{aligned}
 D \cdot C_1 &= -2b_1 + b_2 < 0 \\
 D \cdot C_2 &= b_1 - 2b_2 + b_3 < 0 \\
 D \cdot C_3 &= b_2 - 2b_3 + b_4 < 0 \\
 D \cdot C_4 &= b_3 - 2b_4 + b_5 < 0 \\
 D \cdot C_5 &= b_4 - 2b_5 + b_6 + b_7 < 0 \\
 D \cdot C_6 &= b_5 - 2b_6 < 0 \\
 D \cdot C_7 &= b_5 - 2b_7 + b_8 < 0 \\
 D \cdot C_8 &= b_7 - 2b_8 < 0.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Eine Lösung von (3.5) ist beispielsweise

$$(b_1, \dots, b_8) = (29, 57, 84, 110, 135, 68, 91, 46).$$

Mit $b_k = 1$ folgt wie oben die Behauptung des Lemmas. \square

Satz 3.2.11. *Seien X eine K3-Fläche, \mathcal{M} die Menge aus (3.2) und Σ_{P_S} eine Zariski-Kammer für einen big und nef Divisor P_S mit $\text{Null}(P_S) = \mathcal{S}$ und eine Teilmenge $\mathcal{S} \in \mathcal{M}$. Sei Ω_S die zu \mathcal{S} gehörige einfache Weyl-Kammer. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (i) *Es gilt: $\overset{\circ}{\Sigma}_{P_S} \subset \Omega_S$.*
- (ii) *Es gilt: $C_1 \cdot C_2 \neq 1$ für alle $C_1, C_2 \in \mathcal{S}$ mit $C_1 \neq C_2$.*

Beweis. Für die Implikation von (ii) nach (i) sei $D \in \overset{\circ}{\Sigma}_{P_S}$ ein big Divisor mit Zariski-Zerlegung $D = P_D + N_D$. Dann ist $N_D = \sum_{i=1}^r a_i C_i$ für positive Koeffizienten a_i und (-2) -Kurven C_i mit $C_i \cdot C_j = 0$ für alle $i \neq j$. Damit gilt:

$$D \cdot C_i = N_D \cdot C_i = a_i C_i^2 = -2a_i < 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, r.$$

Offensichtlich schneiden alle anderen negativen Kurven den Divisor D positiv, folglich gilt: $D \in \Omega_S$.

Wie in Lemma 3.2.6 können wir zeigen, dass es einen big Divisor gibt, der in $\overset{\circ}{\Sigma}_{P_S}$, aber nicht in Ω_S liegt, falls zwei Kurven C_1 und C_2 aus \mathcal{S} existieren mit $C_1 \cdot C_2 = 1$. Damit ist der Satz vollständig bewiesen. \square

Die Kombination der beiden Sätze erlaubt eine eindeutige Charakterisierung der gegenseitigen Lage von Zariski- und einfachen Weyl-Kammern.

Korollar 3.2.12. *Für K3-Flächen sind folgende Bedingungen äquivalent:*

- (i) *Die Inneren der Zariski-Kammern stimmen mit den einfachen Weyl-Kammern überein.*
- (ii) *Für jedes Paar (C_1, C_2) von (-2) -Kurven auf der Fläche gilt: $C_1 \cdot C_2 \neq 1$.*

Es gibt K3-Flächen, bei denen Bedingung (ii) erfüllt ist, und es gibt solche, für die Bedingung (i) nicht erfüllt ist.

Es gibt K3-Flächen, die keine (-2) -Kurve enthalten, beispielsweise von Picard-Zahl 1. Auf Kummerflächen müssen die Zerlegungen nicht übereinstimmen, wie wir im nachfolgenden Kapitel sehen werden.

Kapitel 4

Zariski-Kammern auf Kummerflächen

Kummerflächen stehen im Mittelpunkt dieses Kapitels. Aus Arbeiten von Kovács und Keum (vgl. [Kov94], [Ke]) geht hervor, dass jede Kummerfläche unendlich viele irreduzible (-2) -Kurven enthält. Daher ist eine explizite Beschreibung aller Zariski-Kammern nicht zu erwarten, die Anzahl der Kammern ist unendlich. Wir werden hier auf der Barth-Nieto-Fläche gewisse irreduzible negative Kurven angeben und die Zariski-Kammern beschreiben, die von diesen Kurven erzeugt werden. Dies geschieht teils geometrisch, teils mithilfe der in Kapitel 2 vorgestellten Algorithmen.

Im Folgenden seien für ein Gitter $\Lambda \subset \mathbb{C}^2$ immer $A = \mathbb{C}^2/\Lambda$ eine abelsche Fläche und $\iota : A \rightarrow A$ die Involution $z \mapsto -z$ auf A . Wir betrachten die Aufblasung $\sigma : \tilde{A} \rightarrow A$ der abelschen Fläche in ihren 16 Halbperioden e_1, \dots, e_{16} . Dann induziert ι eine Involution $\tilde{\iota}$ auf \tilde{A} . Der Quotient $\tilde{A}/\tilde{\iota}$ ist die zur abelschen Fläche A gehörige (glatte) *Kummerfläche*, die wir mit X bezeichnen wollen. Sie ist eine K3-Fläche und die minimale Desingularisierung des Quotienten $K := A/\iota$, der singulären Kummerfläche zu A . Sei $\pi : \tilde{A} \rightarrow X$ die kanonische Projektion. Mit E_1, \dots, E_{16} bezeichnen wir die exzeptionellen Divisoren auf \tilde{A} und mit D_1, \dots, D_{16} deren Bilder unter der 2:1-Abbildung π . Es ergibt sich folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} E_i \subset \tilde{A} & \xrightarrow{\sigma} & A \ni e_i \\ \pi \downarrow & & \downarrow \\ D_i \subset X & \longrightarrow & K \end{array}$$

Bevor wir uns den Zariski-Kammern zuwenden, stellen wir die hier benötigten Begriffe aus dem Kontext der abelschen Flächen zusammen. Für ein intensiveres Studium sei auf [CAV] verwiesen. Anschließend zeigen wir unsere Berechnungen, auf deren Grundlage sich zu einem symmetrischen Geradenbündel \mathcal{L} auf einer abelschen Fläche die Parität jeder einzelnen Halbperiode sowohl von \mathcal{L} als auch von jedem der symmetrischen Translate in Abhängigkeit vom Typ bestimmen lässt.

4.1. Geradenbündel auf abelschen Flächen

Die folgende Darstellung orientiert sich an [CAV].

Definition 4.1.1. Seien \mathcal{L} ein Geradenbündel und D ein Divisor auf einer abelschen Fläche A . Sei ι die Involution auf A .

- (i) Das Geradenbündel \mathcal{L} heißt *symmetrisch*, falls $\iota^*\mathcal{L} = \mathcal{L}$ gilt.
- (ii) Der Divisor D heißt *symmetrisch*, falls $\iota^*D = D$ gilt.

In [CAV, Lemma 4.6.3] wird gezeigt, dass zu jedem symmetrischen Geradenbündel \mathcal{L} eine eindeutig bestimmte Abbildung $\iota_{\mathcal{L}}$ existiert, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} & \xrightarrow{\iota_{\mathcal{L}}} & \mathcal{L} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{\iota} & A \end{array}$$

kommutiert und die für jedes $x \in A$ auf den Fasern $\mathcal{L}(x)$ induzierte Abbildung

$$\iota_{\mathcal{L}(x)} : \mathcal{L}(x) \longrightarrow \mathcal{L}(-x)$$

\mathbb{C} -linear ist. Außerdem wird gefordert, dass die Abbildung $\iota_{\mathcal{L}(0)}$ die Identität ist. Für eine Halbperiode $e_i \in A$ ist $\iota_{\mathcal{L}}$ auf $\mathcal{L}(e_i)$ die Multiplikation mit $+1$ oder -1 .

Definition 4.1.2. (i) Ein Schnitt $s \in H^0(A, \mathcal{L})$ heißt *gerade* bzw. *ungerade*, falls $\iota_{\mathcal{L}} s \iota = s$ bzw. $\iota_{\mathcal{L}} s \iota = -s$ gilt.

(ii) Ein Divisor $D \in |\mathcal{L}|$ heißt *gerade*, wenn er durch einen geraden Schnitt definiert wird, ansonsten heißt er *ungerade*.

(iii) Eine Halbperiode e_i heißt *gerade* bzw. *ungerade*, falls $\iota_{\mathcal{L}}$ auf $\mathcal{L}(e_i)$ die Multiplikation mit $+1$ bzw. -1 ist.

Betrachten wir den Endomorphismus, der einen Schnitt $s \in H^0(A, \mathcal{L})$ abbildet auf $\iota_{\mathcal{L}} s \iota$, so sind die geraden und ungeraden Schnitte Elemente der Eigenräume $H^0(A, \mathcal{L})^+$ bzw. $H^0(A, \mathcal{L})^-$.

Folgende Übersicht wird sich im Weiteren als nützlich erweisen.

Bemerkung 4.1.3 (Proposition 1.2 aus [Bau94]). Für die Paritäten der Multiplizitäten m_i eines symmetrischen Divisors $D \in |\mathcal{L}|$ in den Halbperioden e_i gelten folgende Regeln:

	e_i gerade	e_i ungerade
D gerade	m_i gerade	m_i ungerade
D ungerade	m_i ungerade	m_i gerade

Nach dem Appell-Humbert-Theorem (vgl. [CAV, Theorem 2.2.3]) ist die Picard-Gruppe $\text{Pic}(A)$ isomorph zur Appell-Humbert-Gruppe

$$\mathcal{P}(A) := \left\{ (H, \chi) \mid \begin{array}{l} H : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \text{ hermitesche Form mit} \\ \text{Im } H(\Lambda, \Lambda) \subset \mathbb{Z} \text{ und } \chi \text{ Semicharakter zu } H \end{array} \right\},$$

wobei ein *Semicharakter* zu H eine Abbildung

$$\chi : \Lambda \longrightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

mit

$$\chi(u + v) = \chi(u) \chi(v) \exp(\pi i \text{Im } H(u, v)) \quad \text{für alle } u, v \in \Lambda$$

ist. Die ampeln Geradenbündel aus $\text{Pic}(A)$ gehören zu positiv definiten hermiteschen Formen H , den sogenannten *Polarisierungen*. Der Imaginärteil von H ist eine alternierende \mathbb{R} -Bilinearform $E : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, deren Matrix bezüglich einer ausgezeichneten Basis,

der *symplektischen Basis* von Λ bezüglich E , die Elementarteiler d_1 und d_2 und somit den Typ des Geradenbündels \mathcal{L} bestimmt. Wir betrachten eine direkte Zerlegung

$$\mathbb{C}^2 = V_1 \oplus V_2 \quad (4.1)$$

des \mathbb{C}^2 in reelle Untervektorräume V_1 und V_2 derart, dass für eine symplektische Basis f_1, f_2, g_1, g_2 von Λ bezüglich E gilt:

$$V_1 \cap \Lambda = \langle f_1, f_2 \rangle \quad \text{und} \quad V_2 \cap \Lambda = \langle g_1, g_2 \rangle .$$

Die Matrix von E bezüglich der Basis f_1, f_2, g_1, g_2 hat folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 \\ -d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Zu der fest gewählten Zerlegung (4.1) definieren wir eine Abbildung

$$\chi_0 : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

mit $\chi_0(v) = \exp(\pi i E(v_1, v_2))$, wobei $v = v_1 + v_2$ die direkte Zerlegung des Vektors $v \in \mathbb{C}^2$ sei. Dann ist $\chi_0|_{\Lambda}$ ein Semicharakter für H . Durch die Zerlegung (4.1) wird zu dem Element $(H, \chi_0) \in \text{Pic}^H(A) = \{\mathcal{L} \in \text{Pic}(A) \mid \mathcal{L} = \mathcal{L}(H, \chi)\}$ ein Geradenbündel \mathcal{L}_0 auf A ausgezeichnet. Mit diesen Vorbereitungen gilt:

Lemma 4.1.4 (Lemma 3.1.2 aus [CAV]). *Sei $(H, \chi) \in \mathcal{P}(A)$. Für jedes Geradenbündel $\mathcal{L} \in \text{Pic}^H(A)$ existiert ein $c \in \mathbb{C}^2$, welches eindeutig bis auf Translation durch Elemente aus der Menge $\Lambda(H) = \{v \in \mathbb{C}^2 \mid E(v, \Lambda) \subset \mathbb{Z}\}$ ist, so dass gilt:*

$$\chi = \chi_0 \exp(2\pi i E(c, \cdot)) . \quad (4.2)$$

Mit anderen Worten bedeutet dies, dass jedes Bündel $\mathcal{L} \in \text{Pic}^H(A)$ durch Translation des Bündels \mathcal{L}_0 um \bar{c} hervorgeht. (Für $c \in \mathbb{C}^2$ sei mit \bar{c} die zugehörige Restklasse auf der abelschen Fläche $A = \mathbb{C}^2/\Lambda$ bezeichnet.) Wir nennen c die *Charakteristik* des Bündels \mathcal{L} . Ein Geradenbündel $\mathcal{L} = \mathcal{L}(H, \chi)$ von Charakteristik c ist genau dann symmetrisch, wenn $2c \in \Lambda(H)$ gilt. Dies ist äquivalent dazu, dass χ nur die Werte $+1$ oder -1 annimmt (vgl. [CAV, Abschnitt 4.6]). Auf einer abelschen Fläche sind also 16 Translate $t_{\bar{c}}^* \mathcal{L}_0$ von Charakteristik $c \in \frac{1}{2}\Lambda(H) \bmod \Lambda(H)$ symmetrisch. Dabei bezeichne $t_{\bar{c}}$ die Translation um \bar{c} auf A .

4.2. Parität von Halbperioden auf abelschen Flächen

Wir verwenden im Folgenden die Bezeichnungen, die wir im vorherigen Abschnitt eingeführt haben. Für einen symmetrischen Divisor $D = \mathcal{O}_A(\mathcal{L})$ auf A mit Geradenbündel $\mathcal{L} = \mathcal{L}(H, \chi)$ können wir über die Beziehung

$$(-1)^{\text{mult}_{e_i}(D)} = \chi(2e_i) (-1)^{\text{mult}_0(D)}$$

(vgl. [CAV, Proposition 4.7.2]) die Parität der Halbperiode e_i angeben, wenn wir das Vorzeichen von $\chi(2e_i)$ kennen. Zusammen mit Bemerkung 4.1.3 folgt hieraus, dass e_i genau

dann eine gerade Halbperiode ist, wenn $\chi(2e_i) = 1$ gilt. Mittels (4.2) müssen wir bei bekanntem Vorzeichen von $\chi_0(2e_i)$ den Term $E(2c, 2e_i)$ auf das Vorzeichen untersuchen. Dazu drücken wir einen Gittervektor v sowie die Vektoren c und e_1, \dots, e_{16} in der symplektischen Basis f_1, f_2, g_1, g_2 von Λ bezüglich der zu \mathcal{L} gehörigen alternierenden Form E aus. Wir schreiben:

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 g_1 + \alpha_4 g_2, \\ c &= \gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2 + \gamma_3 g_1 + \gamma_4 g_2, \\ e_i &= \beta_1^{(i)} f_1 + \beta_2^{(i)} f_2 + \beta_3^{(i)} g_1 + \beta_4^{(i)} g_2 \end{aligned}$$

mit $\alpha_j \in \mathbb{Z}$ und $\beta_j^{(i)} \in \{0, \frac{1}{2}\}$ für $j = 1, \dots, 4$ und $i = 1, \dots, 16$. Im Folgenden bestimmen wir den Wertebereich der Koeffizienten γ_j . Wir berechnen:

$$E(2c, v) = 2(d_1(\alpha_3\gamma_1 - \alpha_1\gamma_3) + d_2(\alpha_4\gamma_2 - \alpha_2\gamma_4)).$$

Wegen $2c \in \Lambda(H)$ muss $E(2c, \Lambda) \subset \mathbb{Z}$ gelten, insbesondere also:

$$\begin{aligned} E(2c, f_1) &= -2\gamma_3 d_1 \in \mathbb{Z}, \\ E(2c, f_2) &= -2\gamma_4 d_2 \in \mathbb{Z}, \\ E(2c, g_1) &= 2\gamma_1 d_1 \in \mathbb{Z}, \\ E(2c, g_2) &= 2\gamma_2 d_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$\gamma_1, \gamma_3 \in \frac{1}{2d_1} \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad \gamma_2, \gamma_4 \in \frac{1}{2d_2} \mathbb{Z},$$

so dass wir wegen $c \in \frac{1}{2} \Lambda(H) \bmod \Lambda(H)$ schreiben können:

$$c = \frac{1}{2d_1} \tilde{\gamma}_1 f_1 + \frac{1}{2d_2} \tilde{\gamma}_2 f_2 + \frac{1}{2d_1} \tilde{\gamma}_3 g_1 + \frac{1}{2d_2} \tilde{\gamma}_4 g_2$$

mit $\tilde{\gamma}_j \in \{0, 1\}$. Damit wird

$$E(2c, 2e_i) = 2 \left(\beta_3^{(i)} \tilde{\gamma}_1 + \beta_4^{(i)} \tilde{\gamma}_2 - \beta_1^{(i)} \tilde{\gamma}_3 - \beta_2^{(i)} \tilde{\gamma}_4 \right)$$

unabhängig vom Typ (d_1, d_2) des Geradenbündels. Für die Zerlegung $v = v_1 + v_2 = (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) + (\alpha_3 g_1 + \alpha_4 g_2)$ ergibt sich ferner:

$$E(v_1, v_2) = \exp(2\pi i (\alpha_1 \alpha_3 d_1 + \alpha_2 \alpha_4 d_2)).$$

Insgesamt folgt mit Lemma 4.1.4:

$$\chi(2e_i) = \chi_0(2e_i) \exp(\pi i E(2c, 2e_i))$$

$$= \exp\left(4\pi i \left(\beta_1^{(i)} \beta_3^{(i)} d_1 + \beta_2^{(i)} \beta_4^{(i)} d_2\right)\right) \exp\left(2\pi i \left(\beta_3^{(i)} \tilde{\gamma}_1 + \beta_4^{(i)} \tilde{\gamma}_2 - \beta_1^{(i)} \tilde{\gamma}_3 - \beta_2^{(i)} \tilde{\gamma}_4\right)\right).$$

Für jedes Geradenbündel und dessen symmetrische Translate kann somit die Parität jeder einzelnen Halbperiode berechnet werden. Wir fassen dies in folgendem Lemma zusammen:

Lemma 4.2.1. *Auf einer abelschen Fläche A sei $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(H, \chi_0)$ ein symmetrisches Geradenbündel von Charakteristik 0 und vom Typ (d_1, d_2) . Seien $\beta_j^{(i)}$ die Entwicklungskoeffizienten der Halbperioden e_i und $\tilde{\gamma}_j$ die Entwicklungskoeffizienten der Charakteristiken $c \in \Lambda(H)$ in der symplektischen Basis, wie oben beschrieben. Dann wird die Parität der Halbperiode e_i von $t_c^* \mathcal{L}_0$ durch die Parität von*

$$4 \left(\beta_1^{(i)} \beta_3^{(i)} d_1 + \beta_2^{(i)} \beta_4^{(i)} d_2 \right) + 2 \left(\beta_3^{(i)} \tilde{\gamma}_1 + \beta_4^{(i)} \tilde{\gamma}_2 - \beta_1^{(i)} \tilde{\gamma}_3 - \beta_2^{(i)} \tilde{\gamma}_4 \right)$$

gegeben.

4.3. Eine Kummerfläche mit 16 disjunkten Geraden

Mit dem Satz von Nikulin (vgl. [Nik75]) kann man zeigen, dass eine glatte Fläche vierten Grades im \mathbb{P}^3 genau dann eine Kummerfläche ist, wenn sie 16 paarweise disjunkte glatte rationale Kurven enthält. In [Bau97] wird gezeigt, dass es zu jeder natürlichen Zahl $d \geq 1$ eine dreidimensionale Familie glatter Flächen vierten Grades im \mathbb{P}^3 mit 16 paarweise disjunkten glatten rationalen Kurven vom Grad d gibt. Diese Flächen lassen sich als Einbettungen von Kummerflächen in den \mathbb{P}^3 realisieren. Zur Konstruktion dieser Flächen betrachten wir zu einer abelschen Fläche A mit Polarisierung \mathcal{L} vom Typ $(1, 2d^2 + 1)$ das Linearsystem

$$\left| \mathcal{O}_A(2\mathcal{L}) \otimes \bigotimes_{i=1}^{16} \mathfrak{m}_{e_i}^d \right|^{\pm}$$

gerader bzw. ungerader Schnitte von $\mathcal{O}_A(2\mathcal{L})$, die in den Halbperioden e_1, \dots, e_{16} zur Ordnung d verschwinden. (Dabei wählen wir „+“, falls d gerade ist, und „-“, falls d ungerade ist.) Es seien X die zu A gehörige glatte Kummerfläche und wie oben $\tilde{\sigma} : \tilde{A} \rightarrow A$ die Aufblasung der abelschen Fläche A in den 16 Halbperioden und $\pi : \tilde{A} \rightarrow X$ die kanonische Projektion. Mit E_1, \dots, E_{16} bezeichnen wir wieder die exzeptionellen Divisoren auf \tilde{A} und mit D_1, \dots, D_{16} deren Bilder unter π . Dann können wir obiges Linearsystem mit einem Linearsystem $|\mathcal{M}|$ auf der Kummerfläche X identifizieren; es gilt für das Bündel \mathcal{M} :

$$\pi^*(\mathcal{M}) = \mathcal{O}_{\tilde{A}}(2\sigma^*\mathcal{L} - d \sum_{i=1}^{16} E_i)$$

und ferner:

$$H^0(X, \mathcal{M}) \cong H^0(A, \mathcal{O}_A(2\mathcal{L}) \otimes \bigotimes_{i=1}^{16} \mathfrak{m}_{e_i}^d)^{\pm}.$$

Das Linearsystem $|\mathcal{M}|$ liefert eine Einbettung der Kummerfläche X als glatte Quartik in den \mathbb{P}^3 . Wir notieren das folgende Lemma, welches für die Berechnung von Schnittprodukten nützlich ist.

Lemma 4.3.1 (Lemma 1.1 aus [Bau97]). *Seien A, X und \mathcal{L}, \mathcal{M} wie oben. Seien C eine irreduzible Kurve, die verschieden von D_1, \dots, D_{16} ist, und $F = \sigma\pi^*C$ die entsprechende symmetrische Kurve auf A . Dann gilt:*

$$(i) \quad \mathcal{M}^2 = 4 \text{ und } \mathcal{M} \cdot D_i = d \text{ für } 1 \leq i \leq 16,$$

$$(ii) \quad F^2 = 2C^2 + \sum_{i=1}^{16} (\text{mult}_{e_i}(F))^2,$$

$$(iii) \quad \mathcal{L} \cdot F = \mathcal{M} \cdot C + \frac{d}{2} \sum_{i=1}^{16} \text{mult}_{e_i}(F).$$

Zu einem symmetrischen Geradenbündel \mathcal{L} betrachten wir wieder die Eigenräume $H^0(\mathcal{L})^+$ sowie $H^0(\mathcal{L})^-$ der geraden bzw. ungeraden Schnitten aus $H^0(\mathcal{L})$ oder je nach Kontext die Linearsysteme $|\mathcal{L}|^{\pm}$ gerader bzw. ungerader Divisoren. Zu den beiden Systemen $|\mathcal{L}|^{\pm}$ gehören Geradenbündel \mathcal{M}^+ und \mathcal{M}^- auf der Kummerfläche X . Es gilt:

Proposition 4.3.2 (Proposition 1.1 aus [Bau94]). *Die direkte Bildgarbe $\mathcal{M} = \pi_*\tilde{\mathcal{L}}$ ist lokal frei vom Rang 2. Es gibt eine Zerlegung des Bündels \mathcal{M} in $\mathcal{M} = \mathcal{M}^+ \oplus \mathcal{M}^-$, so dass \mathcal{M}^\pm zwei Geradenbündel mit der Eigenschaft $H^0(\mathcal{M}^\pm) \cong H^0(\mathcal{L})^\pm$ sind.*

Eine Formel zur Berechnung von $h^0(\mathcal{M}^\pm)$ im Flächenfall stammt von Bauer:

Satz 4.3.3 (Theorem 3.1 aus [Bau94]). *Sei \mathcal{L} ein amples symmetrisches Geradenbündel vom Typ (d_1, d_2) auf einer abelschen Fläche A und sei n^\pm die Anzahl der geraden bzw. ungeraden Halbperioden von \mathcal{L} . Seien \mathcal{M}^\pm die zu \mathcal{L} gehörigen Geradenbündel auf der Kummerfläche zu A . Dann gilt:*

$$h^0(\mathcal{M}^\pm) = 2 + \frac{d_1 d_2}{2} - \frac{n^\mp}{4}.$$

Wir wollen hier eine Kummerfläche für den Fall $d = 1$ betrachten, welche folglich von einer abelschen Fläche A mit einer $(1, 3)$ -Polarisierung \mathcal{L} induziert wird. Wir dürfen $\rho(A) = 1$ annehmen und wir bezeichnen die Kummerfläche zu A für den Rest des Kapitels mit X_1 oder nennen sie auch Barth-Nieto-Fläche, denn sie wurde von Barth und Nieto sowie unabhängig davon von Naruki studiert (vgl. [BN94], [Nar91]). Die Fläche X_1 enthält nach den obigen Überlegungen 16 disjunkte Geraden, zudem geben sowohl Barth und Nieto als auch Naruki noch 16 weitere Geraden auf ihren Flächen an. Unser Ziel ist es, zusätzliche (-2) -Klassen auf X_1 zu bestimmen.

Satz 4.3.4. *Auf der Kummerfläche X_1 existieren 32 Geraden, 160 Kegelschnitte, 1680 Kubiken und unendlich viele Quartiken mit Selbstschnitt -2 .*

Bevor wir uns dem Beweis des Satzes widmen, stellen wir eine kurze Vorüberlegung an. Für $n \geq 1$ sei durch $\mathcal{M}_{n\mathcal{L}}$ das zu $n\mathcal{L}$ gehörige Geradenbündel auf der Kummerfläche X_1 gegeben. Wir bezeichnen für $k = 1, \dots, 16$ die 16 symmetrischen Translate von $n\mathcal{L}$ mit $t_{\bar{c}_k}^* n\mathcal{L}$. Es gelte $c_1 = 0$, dementsprechend $t_{\bar{c}_1}^* n\mathcal{L} = n\mathcal{L}$. Für $k = 2, \dots, 16$ sind $t_{\bar{c}_k}^* n\mathcal{L}$ folglich echte Translate des Bündels $n\mathcal{L}$.

Es sind für ungerades n entweder zehn Halbperioden von $n\mathcal{L}$ gerade und sechs ungerade oder sechs gerade und zehn ungerade. Gleiches gilt für die 15 echten symmetrischen Translate von $n\mathcal{L}$. Für den Rest des Abschnitts dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass $n\mathcal{L}$ zehn gerade und sechs ungerade Halbperioden besitzt. Dann gibt es neun echte Translate von $n\mathcal{L}$, denen ebenfalls diese Verteilung zugrunde liegt. Die übrigen sechs Translate weisen zehn ungerade und sechs gerade Halbperioden auf. Man nennt diese Konfiguration der Halbperioden (16_6) -Konfiguration, sie folgt auch aus Lemma 4.2.1.

Für $k = 1, \dots, 16$ und ungerades n bezeichnen wir mit $I_{10}^{(k)}$ die Mengen der Indizes, die zu den zehn Halbperioden einer Parität des Bündels $t_{\bar{c}_k}^* n\mathcal{L}$ gehören, und mit $I_6^{(k)}$ die zu den sechs Halbperioden der anderen Parität von $t_{\bar{c}_k}^* n\mathcal{L}$ gehörenden.

Falls n eine gerade Zahl ist, dann hat das Bündel $n\mathcal{L}$ entweder 16 gerade oder 16 ungerade Halbperioden, die symmetrischen 15 Translate $t_{\bar{c}_k}^* n\mathcal{L}$ haben dagegen acht gerade und acht ungerade Halbperioden.

Hier bezeichnen wir für $k = 2, \dots, 16$ mit $I_8^{(k)}$ eine der beiden achtelementigen Indexmengen zu den Halbperioden einer Parität.

Beweis des Satzes 4.3.4. Mit den getroffenen Vorbereitungen gelten nach Satz 4.3.3 für die (1, 3)-Polarisierung \mathcal{L} :

$$h^0(\mathcal{M}_{\mathcal{L}}^-) = 1 \quad \text{und} \quad h^0(\mathcal{M}_{\mathcal{L}}^+) = 2,$$

für die Translate $t_{c_k}^* 2\mathcal{L}$ der (2, 6)-Polarisierung $2\mathcal{L}$:

$$h^0(\mathcal{M}_{t_{c_k}^* 2\mathcal{L}}^\pm) = 6$$

und für die (3, 9)-Polarisierung $3\mathcal{L}$:

$$h^0(\mathcal{M}_{3\mathcal{L}}^-) = 13 \quad \text{und} \quad h^0(\mathcal{M}_{3\mathcal{L}}^+) = 14.$$

Wegen $h^0(\mathcal{M}_{\mathcal{L}}^-) = 1$ existiert ein ungerader Divisor $F_1^- \in |\mathcal{L}|^-$. Dieser verschwindet in allen zehn geraden Halbperioden von \mathcal{L} . Die eigentlich Transformierte \widehat{F}_1^- von F_1^- liegt im Linearsystem $|\sigma^* \mathcal{L} - \sum_{i \in I_{10}^{(1)}} E_i|^-$. Es gilt:

$$\widehat{F}_1^- \cdot \left(2\sigma^* \mathcal{L} - \sum_{i=1}^{16} E_i \right) = \left(\sigma^* \mathcal{L} - \sum_{i \in I_{10}^{(1)}} E_i \right) \cdot \left(2\sigma^* \mathcal{L} - \sum_{i=1}^{16} E_i \right) = 12 - 10 = 2.$$

Folglich wird \widehat{F}_1^- auf eine Gerade $L_1 \subset X_1$ abgebildet. Insgesamt erhalten wir 16 Geraden L_k , aus jedem der 16 symmetrischen Translate eine. Es ist für $k = 1, \dots, 16$:

$$\sigma \pi^* L_k \in \left| \mathcal{O}_A(t_{c_k}^* \mathcal{L}) \otimes \bigotimes_{i \in I_{10}^{(k)}} \mathfrak{m}_{e_i} \right|^\pm.$$

Für die zehn Translate, in denen zehn gerade und sechs ungerade Halbperioden vorkommen, wählen wir einen ungeraden Divisor $F_k^- \in |t_{c_k}^* \mathcal{L}|^-$. In den sechs Fällen, in denen sich die Verhältnisse umkehren, wählen wir einen geraden Divisor $F_k^+ \in |t_{c_k}^* \mathcal{L}|^+$. Dementsprechend liegt $\sigma \pi^* L_k$ entweder im „+“- oder im „-“-System.

Sei $F_{j_1}^+ \in |\mathcal{L}|^+$ ein gerader Divisor. Dieser verschwindet in allen sechs ungeraden Halbperioden. Wegen $h^0(\mathcal{M}_{\mathcal{L}}^+) = 2$ können wir verlangen, dass $F_{j_1}^+$ in einer geraden Halbperiode mit Multiplizität 2 verschwindet. Es gibt zehn Möglichkeiten für diese Wahl. Die eigentlich Transformierte $\widehat{F}_{j_1}^+$ von $F_{j_1}^+$ liegt demnach für $j \in I_{10}^{(1)}$ im Linearsystem

$$\left| \sigma^* \mathcal{L} - 2E_j - \sum_{i \in I_6^{(1)}} E_i \right|^+.$$

Es gilt:

$$\widehat{F}_{j_1}^+ \cdot \left(2\sigma^* \mathcal{L} - \sum_{i=1}^{16} E_i \right) = \left(\sigma^* \mathcal{L} - 2E_j - \sum_{i \in I_6^{(1)}} E_i \right) \cdot \left(2\sigma^* \mathcal{L} - \sum_{i=1}^{16} E_i \right) = 12 - 2 - 6 = 4.$$

Also wird jedes $\widehat{F}_{j_1}^+$ auf einen Kegelschnitt $C_{j_1} \subset X_1$ abgebildet. Insgesamt erhalten wir $10 \cdot 16 = 160$ Kegelschnitte C_{jk} , zehn aus jedem der 16 symmetrischen Translate. Es ergibt sich:

$$\sigma\pi^*C_{jk} \in \left| \mathcal{O}_A(t_{\bar{c}_k}^* \mathcal{L}) \otimes \mathfrak{m}_{e_j}^2 \otimes \bigotimes_{i \in I_6^{(k)}} \mathfrak{m}_{e_i} \right|^{\pm}$$

für $j \in I_{10}^{(k)}$ und $k = 1, \dots, 16$. Zur Verteilung auf die Systeme „+“ und „-“ bemerken wir hier, dass $\sigma\pi^*C_{jk}$ genau dann im „+“-System liegt, wenn $\sigma\pi^*L_k$ ein Element des „-“-Systems ist.

Sei $t_{\bar{c}_k}^* 2\mathcal{L}$ eines der symmetrischen Translate von $2\mathcal{L}$. Dann ist $c_k \neq 0$. Ein gerader Divisor aus $|t_{\bar{c}_k}^* 2\mathcal{L}|^+$ verschwindet dann in den acht ungeraden Halbperioden von $t_{\bar{c}_k}^* 2\mathcal{L}$ und ein ungerader Divisor aus $|t_{\bar{c}_k}^* 2\mathcal{L}|^-$ in den acht geraden Halbperioden. Da $h^0(\mathcal{M}_{t_{\bar{c}_k}^* 2\mathcal{L}}^{\pm}) = 6$ ist, können wir zusätzlich verlangen, dass solche Divisoren G noch in fünf geraden bzw. ungeraden Halbperioden Multiplizität 2 besitzen. Seien Indizes $j_1, \dots, j_5 \notin I_8^{(k)}$ gegeben mit $j_1 < \dots < j_5$. Dann ergibt sich für die eigentlich transformierte

$$\widehat{G} \in \left| \sigma^* t_{\bar{c}_k}^* 2\mathcal{L} - \sum_{i \in I_8^{(k)}} E_i - \sum_{\ell=1}^5 2E_{j_\ell} \right|^{\pm}$$

von G :

$$\widehat{G} \cdot \left(2\sigma^* \mathcal{L} - \sum_{i=1}^{16} E_i \right) = 24 - 8 - 10 = 6,$$

so dass \widehat{G} auf eine Kubik $K \subset X_1$ abgebildet wird. Insgesamt erhalten wir $56 \cdot 15 \cdot 2 = 1680$ Kubiken K , jeweils 56 aus jedem der 15 symmetrischen Translate, deren Charakteristik von null verschieden ist, in den Systemen $|\mathcal{M}_{t_{\bar{c}_k}^* 2\mathcal{L}}^+|$ und $|\mathcal{M}_{t_{\bar{c}_k}^* 2\mathcal{L}}^-|$. Es ist für $j_1, \dots, j_5 \notin I_8^{(k)}$ mit $j_1 < \dots < j_5$:

$$\sigma\pi^*G \in \left| \mathcal{O}_A(t_{\bar{c}_k}^* 2\mathcal{L}) \otimes \bigotimes_{i \in I_8^{(k)}} \mathfrak{m}_{e_i} \otimes \bigotimes_{\ell=1}^5 \mathfrak{m}_{e_{j_\ell}}^2 \right|^{\pm}.$$

Sei wieder $t_{\bar{c}_k}^* 2\mathcal{L}$ eines der symmetrischen Translate von $2\mathcal{L}$ für $c_k \neq 0$. Für gerade bzw. ungerade Divisoren $G' \in |t_{\bar{c}_k}^* 2\mathcal{L}|^{\pm}$ können wir wegen $h^0(\mathcal{M}_{t_{\bar{c}_k}^* 2\mathcal{L}}^{\pm}) = 6$ drei Doppelpunkte fordern sowie einen Dreifachpunkt in einer der acht Halbperioden festlegen, in welchen die Divisoren G' zur Ordnung 1 verschwinden. Für die eigentlich transformierte

$$\widehat{G}' \in \left| \sigma^* t_{\bar{c}_k}^* 2\mathcal{L} - 2E_m - \sum_{i \in I_8^{(k)}} E_i - \sum_{\ell=1}^3 2E_{j_\ell} \right|^{\pm} =: (k, m, j_1, j_2, j_3) \Gamma_1^{\pm}$$

von G' mit $m \in I_8^{(k)}$ und $j_1, \dots, j_3 \notin I_8^{(k)}$, $j_1 < \dots < j_3$, ergibt sich:

$$\widehat{G}' \cdot \left(2\sigma^* \mathcal{L} - \sum_{i=1}^{16} E_i \right) = 24 - 2 - 8 - 6 = 8,$$

so dass \widehat{G}' auf eine Quartik $Q \subset X_1$ abgebildet wird. Insgesamt erhalten wir $56 \cdot 8 \cdot 15 \cdot 2 = 13440$ Quartiken Q , jeweils $56 \cdot 8$ aus jedem der 15 symmetrischen Translate, deren Charakteristik von null verschieden ist, in den Systemen $\left| \mathcal{M}_{t_{\bar{c}_k}^* 2\mathcal{L}} \right|^+$ und $\left| \mathcal{M}_{t_{\bar{c}_k}^* 2\mathcal{L}} \right|^-$. Wir bekommen für $m \in I_8^{(k)}$ und $j_1, \dots, j_3 \notin I_8^{(k)}$ mit $j_1 < \dots < j_3$:

$$\sigma\pi^*G' \in \left| \mathcal{O}_A(t_{\bar{c}_k}^* 2\mathcal{L}) \otimes \mathfrak{m}_{e_m}^3 \otimes \bigotimes_{\substack{i \in I_8^{(k)} \\ i \neq m}} \mathfrak{m}_{e_i} \otimes \bigotimes_{\ell=1}^3 \mathfrak{m}_{e_{j_\ell}}^2 \right|^{\pm}.$$

Ein ungerader Divisor $G_1^- \in |3\mathcal{L}|^-$ hat in den zehn geraden Halbperioden Multiplizität 1. Aus Dimensionsgründen können wir in drei dieser Halbperioden Multiplizität 3 fordern sowie Multiplizität 2 in allen sechs ungeraden Halbperioden.

Für einen geraden Divisor $G_1^+ \in |3\mathcal{L}|^+$ wissen wir, dass er in den sechs ungeraden Halbperioden verschwindet. Wegen $h^0(\mathcal{M}_{3\mathcal{L}}^+) = 14$ können wir einerseits neun Doppelpunkte und einen Vierfachpunkt in den zehn geraden Halbperioden verlangen, andererseits auch neun Doppelpunkte in den geraden und zwei Dreifachpunkte in den ungeraden Halbperioden fordern. Damit erhalten wir eigentlich transformierte \widehat{G}_1^\pm von G_1^\pm in folgenden Linearsystemen:

$$\begin{aligned} \widehat{G}_1^- &\in \left| 3\sigma^*\mathcal{L} - \sum_{i \in I_{10}^{(1)}} E_i - \sum_{j \in I_6^{(1)}} 2E_j - 2E_\ell - 2E_m - 2E_n \right|^- =: {}^{(1,\ell,m,n)}\Gamma_2^- \quad (\ell, m, n \in I_{10}^{(1)}), \\ \widehat{G}_1^+ &\in \left| 3\sigma^*\mathcal{L} - \sum_{i \in I_6^{(1)}} E_i - \sum_{j \in I_{10}^{(1)}} 2E_j - 2E_\ell \right|^+ =: {}^{(1,\ell)}\Gamma_3^+ \quad (\ell \in I_{10}^{(1)}), \\ \widehat{G}_1^+ &\in \left| 3\sigma^*\mathcal{L} - \sum_{i \in I_6^{(1)}} E_i - \sum_{\substack{j \in I_{10}^{(1)} \\ j \neq n}} 2E_j - 2E_\ell - 2E_m \right|^+ =: {}^{(1,\ell,m,n)}\Gamma_4^+ \quad (\ell, m \in I_6^{(1)}, n \in I_{10}^{(1)}). \end{aligned}$$

Eine einfache Rechnung liefert:

$$\widehat{G}_1^\pm \cdot \left(2\sigma^*\mathcal{L} - \sum_{i=1}^{16} E_i \right) = 8.$$

Schließlich werden \widehat{G}_1^+ und \widehat{G}_1^- auf Quartiken Q auf der Kummerfläche X_1 abgebildet. Analoge Überlegungen liefern für $k = 2, \dots, 16$ Divisoren in Systemen ${}^{(k,\ell,m,n)}\Gamma_2^\pm$, ${}^{(k,\ell)}\Gamma_3^\pm$ und ${}^{(k,\ell,m,n)}\Gamma_4^\pm$, die auf Quartiken $Q \subset X_1$ abgebildet werden. Wir erhalten auf diese Weise $1920 + 160 + 2400 = 4480$ weitere Quartiken, insgesamt also 17920. Im Weiteren werden wir für die Linearsysteme die kürzeren Bezeichnungen $\Gamma_1^\pm, \dots, \Gamma_4^\pm$ verwenden. Nur wenn es der Kontext erfordert, verwenden wir die Langform.

Wir zeigen nun, dass alle zu negativen Geraden, Kegelschnitten, Kubiken und Quartiken gehörigen symmetrischen Kurven auf der ableschen Fläche in den oben angeführten Linearsystemen liegen.

Sei dazu $C \subset X_1$ eine Kurve, verschieden von den D_i , mit $C^2 = -2$ und $M \cdot C = e \leq 4$. Wir behaupten, dass dann C entweder eine der Geraden L_k oder einer der Kegelschnitte C_{jk} oder eine der Kubiken K oder eine der Quartiken Q ist. Wir setzen $F := \sigma\pi^*C$ und bekommen nach Lemma 4.3.1:

$$\mathcal{L} \cdot F = e + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{16} \text{mult}_{e_i}(F) \quad \text{und} \quad F^2 = -4 + \sum_{i=1}^{16} (\text{mult}_{e_i}(F))^2 .$$

Wenden wir die Hodge-Ungleichung auf \mathcal{M} und $C + D_i$ für jedes $1 \leq i \leq 16$ an, so ergibt sich:

$$4(-4 + 2C \cdot D_i) = \mathcal{M}^2(C + D_i)^2 \leq (\mathcal{M} \cdot C + \mathcal{M} \cdot D_i)^2 = (e + 1)^2 ,$$

womit folgt:

$$C \cdot D_i = \text{mult}_{e_i}(F) =: m_i \leq \frac{(e+1)^2}{8} + 2 .$$

Wir führen einen Zählparameter ein, der angibt, wie häufig jede Multiplizität vorkommt. Für $k \geq 0$ sei

$$n_k := \# \{i \mid m_i = k, 1 \leq i \leq 16\} .$$

Damit ist

$$\mathcal{L} \cdot F = e + \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} k n_k \quad \text{und} \quad F^2 = -4 + \sum_{k \geq 0} k^2 n_k . \quad (4.3)$$

Die Picard-Zahl der abelschen Fläche A ist 1, so dass $\text{NS}(A)$ von \mathcal{L} erzeugt wird. Es muss also eine ganze Zahl n existieren, so dass gilt:

$$F \equiv_{\text{num}} n\mathcal{L} .$$

Mit $\mathcal{L}^2 = 2d_1d_2 = 6$ folgt:

$$\mathcal{L} \cdot F = n\mathcal{L}^2 = 6n \quad \text{und} \quad F^2 = n^2\mathcal{L}^2 = 6n^2$$

und schließlich:

$$\mathcal{L}^2 \cdot F^2 = (\mathcal{L} \cdot F)^2 . \quad (4.4)$$

Unter der Voraussetzung $\sum_{k \geq 0} n_k \leq 16$ und unter Beachtung der Verteilung der Paritäten auf die Halbperioden können wir mit Hilfe der Gleichungen (4.3) alle Lösungen von (4.4) bestimmen. Diese sind in der folgenden Tabelle aufgelistet:

e	m_i	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	$\mathcal{L} \cdot F$	n
1	≤ 2	10	0	0	0	0	6	1
2	≤ 2	6	1	0	0	0	6	1
3	≤ 4	8	5	0	0	0	12	2
4	≤ 5	7	3	1	0	0	12	2
4	≤ 5	4	9	2	0	0	18	3
4	≤ 5	6	9	0	1	0	18	3
4	≤ 5	7	6	3	0	0	18	3

Wir erkennen, dass F eine der Kurven aus den bekannten Linearsystemen $|n\mathcal{L}|$ ist. Sofern die Kurven, die wir oben angegeben haben, entweder irreduzibel oder reduziert und zusammenhängend sind, können wir mit [S-D74, Lemma 2.2] behaupten, dass die erwartete Dimension null der zugehörigen Linearsysteme gleich der tatsächlichen Dimension ist;

dann würden die Kurven allein in dem betreffenden Linearsystem liegen. Die Geraden und Kegelschnitte sind irreduzibel. Wir werden unten zeigen, dass alle Kubiken reduzibel, aber reduziert und zusammenhängend sind. Einige der Quartiken werden sich als reduzibel und nicht zusammenhängend erweisen. Das Linearsystem, in dem sie liegen, ist mindestens zweidimensional. Daher existieren unendlich viele Quartiken mit negativem Selbstschnitt. Damit ist der Satz vollständig bewiesen. \square

Bemerkung 4.3.5. Arbeiten von Kovács und Keum (vgl. [Kov94], [Ke]) zeigen, dass jede Kummerfläche unendlich viele irreduzible (-2) -Kurven enthält: Nikulin klassifiziert in [Nik83] alle Picard-Gitter, die zu einer endlichen Automorphismengruppe führen. Die Picard-Gitter der Kummerflächen gehören nicht zu Nikulins Klassifikation. Aus dem Zusammenhang zwischen Picard-Gitter und Automorphismengruppe sowie der Anzahl glatter rationaler Kurven, abgeleitet aus einem Torelli-Theorem für K3-Flächen (vgl. [PS71]), folgt die Existenz von unendlich vielen (-2) -Kurven auf jeder Kummerfläche.

Wir nennen im Folgenden die Geraden L_1, \dots, L_{16} auch „Geraden vom Typ L“ und die Geraden D_1, \dots, D_{16} ebenso „Geraden vom Typ D“.

Bemerkung 4.3.6. (1) Auf der Fläche X_1 sind die $16 \cdot 10$ Kegelschnitte C_{jk} komplementär zu den $16 \cdot 10$ Geradenpaaren (L_k, D_j) , d. h. es gilt für $k = 1, \dots, 16$ und $j \in I_{10}^{(k)}$:

$$L_k + D_j + C_{jk} \in |\mathcal{M}|.$$

(2) Die Geraden und Kegelschnitte auf X_1 weisen folgendes Schnittverhalten auf:

$$\begin{aligned} L_k \cdot L_{k'} &= \begin{cases} -2, & \text{falls } k = k' \\ 0, & \text{falls } k \neq k' \end{cases} \\ L_k \cdot D_j &= \begin{cases} 1, & \text{falls } j \in I_{10}^{(k)} \\ 0, & \text{falls } j \in I_6^{(k)} \end{cases} \\ L_{k'} \cdot C_{jk} &= \begin{cases} 2, & \text{falls } k = k' \\ 1, & \text{falls } k \neq k' \text{ und } j \in I_6^{(k')} \\ 0, & \text{falls } k \neq k' \text{ und } j \in I_{10}^{(k')} \end{cases} \\ D_{j'} \cdot C_{jk} &= \begin{cases} 2, & \text{falls } j = j' \\ 1, & \text{falls } j \neq j' \text{ und } j' \in I_6^{(k)} \\ 0, & \text{falls } j \neq j' \text{ und } j' \in I_{10}^{(k)} \end{cases} \\ C_{jk} \cdot C_{j'k'} &= \begin{cases} -2, & \text{falls } (j, k) = (j', k') \\ 2, & \text{falls } k \neq k' \text{ und } j \neq j' \text{ und } j' \notin I_6^{(k)} \text{ und } j \notin I_6^{(k')} \\ 1, & \text{falls } (k \neq k' \text{ und } j \neq j' \text{ und } j' \notin I_6^{(k)} \text{ und } j \in I_6^{(k')}) \\ & \text{oder } (k \neq k' \text{ und } j \neq j' \text{ und } j' \in I_6^{(k)} \text{ und } j \notin I_6^{(k')}) \\ 0, & \text{falls } (k \neq k' \text{ und } j \neq j' \text{ und } j' \in I_6^{(k)} \text{ und } j \in I_6^{(k')}) \\ & \text{oder } k = k' \text{ oder } j = j' \end{cases} \end{aligned}$$

Beweis. (1) rechnet man sofort nach und (2) ist im Wesentlichen eine Konsequenz aus (1) oder ergibt sich direkt aus der Definition der einzelnen Kurven. Da zwei verschiedene Geraden L_k und $L_{k'}$ nicht auf einem Hyperebenenschnitt liegen, schneiden sie sich nicht. Eine Gerade L_k liegt genau dann in einer Ebene mit D_j , wenn es dazu einen passenden

Kegelschnitt C_{jk} gibt, d. h. es muss $j \in I_{10}^{(k)}$ gelten. Geraden $L_{k'}$ bzw. $D_{j'}$, die nicht in derselben Ebene wie der Kegelschnitt C_{jk} liegen, schneiden in dieser Ebene entweder den Kegelschnitt oder die Gerade des anderen Typs in einem Punkt. Ansonsten haben sie mit dem Kegelschnitt Schnittzahl 2. Daraus resultiert das Schnittverhalten der Geraden mit den Kegelschnitten. Die Schnittprodukte zweier Kegelschnitte ergeben sich durch Nachrechnen. \square

Die Schnittmatrix S der 32 Geraden $L_1, \dots, L_{16}, D_1, \dots, D_{16}$ hat folgende Gestalt:

$$S = \begin{pmatrix} D & T \\ T^t & D \end{pmatrix},$$

wobei D eine (16×16) -Diagonalmatrix mit Diagonalelement -2 ist und T die Schnittmatrix $T = (L_k \cdot D_j)_{1 \leq k, j \leq 16}$. Es ergibt sich:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Wir stellen fest, dass die Matrix T symmetrisch ist, daher gilt:

$$\frac{1}{2} \left(\widehat{F}_k^- - \sum_{i \in I_{10}^{(k)}} E_i \right) \cdot 2E_j = L_k \cdot D_j = L_j \cdot D_k = \frac{1}{2} \left(\widehat{F}_j^- - \sum_{i \in I_{10}^{(j)}} E_i \right) \cdot 2E_k.$$

Damit folgt für alle $1 \leq j, k \leq 16$:

$$j \in I_{10}^{(k)} \iff k \in I_{10}^{(j)}. \quad (4.6)$$

In unserer Situation werden mit k immer Translationsvektoren indiziert, mit j die Halbperioden auf A . Mit anderen Worten bedeutet das, dass durch L_k die symmetrischen Translate des Bündels \mathcal{L} auf der abelschen Fläche repräsentiert werden und über D_j die Halbperioden. Aufgrund der Symmetrie der Matrix T sind folglich die Rollen von L_k und D_j vertauschbar, so dass schließlich die Rollen von Translationsvektoren und Halbperioden auch vertauschbar sind. Wird für ein festes Translat eine Aussage über Halbperioden gemacht, so gibt es eine Entsprechung, bei der für eine feste Halbperiode eine Aussage

über die Translate gemacht wird. Dieses Phänomen kommt auch in der bekannten (16₆)-Konfiguration zum Ausdruck. Die linke Seite der Äquivalenz (4.6) beschreibt, dass e_j eine Halbperiode der Parität von $t_{\bar{c}_k}^* \mathcal{L}$ ist, die zehnmal vertreten ist (k ist fest). Die rechte Seite kann so interpretiert werden, dass $t_{\bar{c}_k}^* \mathcal{L}$ ein Translat ist, bei dem die Halbperiode e_j die Parität hat, die zehnmal vertreten ist (j ist fest).

Aus dem oben beschriebenen Schnittverhalten kann man allgemein ableiten, wie sich einerseits die Paritäten auf die Halbperioden e_1, \dots, e_{16} bei zwei Translaten $t_{\bar{c}_k}^* \mathcal{L}$ und $t_{\bar{c}_{k'}}^* \mathcal{L}$ verteilen, andererseits, wie die Paritäten zweier Halbperioden e_j und $e_{j'}$ in den 16 Translaten $t_{\bar{c}_1}^* \mathcal{L}, \dots, t_{\bar{c}_{16}}^* \mathcal{L}$ zueinander stehen.

Proposition 4.3.7. *Sei \mathcal{L} ein symmetrisches Geradenbündel auf einer abelschen Fläche A vom Typ (d_1, d_2) für ungerade positive Zahlen d_1 und d_2 .*

- (i) *Sei $t_{\bar{c}}^* \mathcal{L}$ ein symmetrisches Translat von \mathcal{L} . Dann stimmen sechs der jeweils zehn Halbperioden einer Parität und zwei der jeweils sechs Halbperioden der anderen Parität überein.*
- (ii) *Seien e_j und $e_{j'}$ zwei verschiedene Halbperioden. Dann sind e_j und $e_{j'}$ entweder für sechs der insgesamt 16 symmetrischen Translate $t_{\bar{c}_k}^* \mathcal{L}$ beide gerade und für zwei Translate beide ungerade oder für sechs Translate beide ungerade und für zwei Translate beide gerade.*

Beweis. Wir betrachten auf der Kummerfläche X_1 zwei verschiedene Geraden L_k und $L_{k'}$. Dann ist

$$0 = L_k \cdot L_{k'} = \frac{1}{2} \left(\widehat{F}_k^- - \sum_{i \in I_{10}^{(k)}} E_i \right) \cdot \left(\widehat{F}_{k'}^- - \sum_{\ell \in I_{10}^{(k')}} E_\ell \right)$$

genau dann erfüllt, wenn $|I_{10}^{(k)} \cap I_{10}^{(k')}| = 6$ gilt. Also stimmen sechs der jeweils zehn Halbperioden einer Parität von $t_{\bar{c}_k}^* \mathcal{L}$ und $t_{\bar{c}_{k'}}^* \mathcal{L}$ überein.

Betrachten wir nun eine Gerade $L_{k'}$ und einen Kegelschnitt C_{jk} für $k \neq k'$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} L_{k'} \cdot C_{jk} &= \frac{1}{2} \left(\widehat{F}_{k'}^- - \sum_{i \in I_{10}^{(k')}} E_i \right) \cdot \left(\widehat{F}_{jk}^+ - 2E_j - \sum_{\ell \in I_6^{(k)}} E_\ell \right) \\ &= \begin{cases} 1, & \text{falls } L_{k'} \cdot D_j = 0, \\ 0, & \text{falls } L_{k'} \cdot D_j = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Außerdem wissen wir, dass $L_{k'} \cdot D_j = 1$ äquivalent ist zu $j \in I_{10}^{(k')}$. Die obige Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $|I_6^{(k)} \cap I_{10}^{(k')}| = 4$ ist. Vertauschen der Rollen von k und k' impliziert $|I_6^{(k')} \cap I_{10}^{(k)}| = 4$, was schlussendlich $|I_6^{(k)} \cap I_6^{(k')}| = 2$ zur Folge hat. Da die Parität einer Halbperiode nur vom Typ des Geradenbündels abhängt, liegt die hier angegebene Verteilung der Paritäten nicht nur auf der zu X_1 gehörigen abelschen Fläche vor, sondern auf jeder (d_1, d_2) -polarisierten abelschen Fläche mit ungeraden Zahlen d_1 und d_2 . Damit ist (i) bewiesen. Behauptung (ii) folgt aus der Äquivalenz (4.6). \square

Dieses Resultat sowie die Symmetrie der Matrix T erhält man auch auf rechnerischem Weg über Lemma 4.2.1.

Kehren wir zurück zu den Kubiken und Quartiken auf X_1 .

Proposition 4.3.8. *Zu jeder der 1680 negativen Kubiken $K \subset X_1$ gibt es einen Hyper-ebenenchnitt $L_k + D_j + C_{jk} \subset X_1$ und eine Gerade $L_{k'} \subset X_1$ mit $k \neq k'$, so dass gilt:*

$$K = \begin{cases} C_{jk} + L_{k'} , & \text{falls } L_{k'} \cdot C_{jk} = 1 , \\ D_j + L_k + L_{k'} , & \text{falls } L_{k'} \cdot D_j = 1 . \end{cases}$$

Umgekehrt stellt jedes Paar $(C_{jk}, L_{k'})$ mit $L_{k'} \cdot C_{jk} = 1$ und jedes Tripel $(D_j, L_k, L_{k'})$ mit $L_{k'} \cdot D_j = L_k \cdot D_j = 1$ eine negative Kubik $K \subset X_1$ dar.

Beweis. Sei $(C_{jk}, L_{k'})$ ein Paar mit $L_{k'} \cdot C_{jk} = 1$. Dann verschwindet die zu $L_{k'} + C_{jk}$ gehörige Kurve auf der abelschen Fläche in acht Halbperioden einer Parität mit Multiplizität 1 und in fünf Halbperioden mit Multiplizität 2, sie ist also eine der uns bekannten Kubiken. Der Index j ist aus der Menge $I_{10}^{(k)} \cap I_6^{(k')}$ zu wählen, wofür es nach Proposition 4.3.7 vier Möglichkeiten gibt. Für die Wahl von k gibt es 16 und für die Wahl von k' gibt es 15 Möglichkeiten, so dass wir auf diese Weise $16 \cdot 15 \cdot 4$ Kubiken konstruiert haben. Analog argumentieren wir im Fall eines Tripels $(D_j, L_k, L_{k'})$ mit $D_j \cdot L_k = D_j \cdot L_{k'} = 1$. Hier ist $j \in I_{10}^{(k)} \cap I_{10}^{(k')}$, was $(16 \cdot 15 \cdot 6) \cdot \frac{1}{2}$ reduzible Kubiken zur Folge hat. Insgesamt ergeben sich 1680 reduzible Kubiken, so dass die Behauptung folgt. \square

Proposition 4.3.9. *Seien X_1 die Kummerfläche und $\Gamma_1^\pm, \dots, \Gamma_4^\pm$ die Linearsysteme von oben.*

- (i) *Jede Quartik aus den Linearsystemen Γ_2^\pm und Γ_4^\pm zerfällt in eine Kubik K und eine Gerade $L_{k''}$, genauer gesagt entweder in $C_{jk} + L_{k'} + L_{k''}$ mit $C_{jk} \cdot L_{k'} = C_{jk} \cdot L_{k''} = 1$ oder in $D_j + L_k + L_{k'} + L_{k''}$, wobei D_j die drei verschiedenen Geraden $L_k, L_{k'}$ und $L_{k''}$ schneidet.*
- (ii) *Jedes der Linearsysteme Γ_3^\pm ist mindestens zweidimensional, insbesondere enthält jedes $16 \cdot 10 \cdot 9$ reduzible Quartiken der Form $C_{jk} + L_k + L_{k'}$ mit $C_{jk} \cdot L_{k'} = 0$.*
- (iii) *Die Linearsysteme Γ_1^\pm enthalten je 5760 Quartiken der Formen $C_{jk} + C_{\ell m}$ mit $C_{jk} \cdot C_{\ell m} = 1$ und $C_{jk} + L_m + D_\ell$ mit $L_m \cdot D_\ell = C_{\ell m} \cdot D_\ell = 1$. Außerdem enthalten die Systeme Γ_1^\pm irreduzible Quartiken.*

Beweis. Für vorgegebene Translationsvektoren c_k und $c_{k'}$ entsteht beim Zusammentreffen von $C_{jk} + L_{k'}$ mit einer Geraden $L_{k''}$ zur Erzeugung einer Quartik aus den Linearsystemen Γ_2^\pm und Γ_4^\pm für sechs Translate $c_{k''}$ zweimal die Möglichkeit, j zu wählen, in den übrigen acht Fällen je einmal die Möglichkeit, j zu wählen. Daraus resultieren, Mehrfachzählungen ausgeglichen, zum einen $16 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}$ Quartiken in den Systemen Γ_4^\pm und zum anderen $16 \cdot 15 \cdot 1 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}$ Quartiken in den Systemen Γ_2^\pm . Beim Zusammentreffen von $D_j + L_k + L_{k'}$ und $L_{k''}$ bekommen wir in acht Translaten $c_{k''}$ für j drei Möglichkeiten, in sechs Translaten für j vier Möglichkeiten der Konstruktion einer Quartik. Auf diese Weise entstehen in den Systemen Γ_4^\pm folglich $(16 \cdot 15 \cdot 3) \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{1}{3}$ Quartiken und in den Systemen Γ_2^\pm schließlich $(16 \cdot 15 \cdot 4) \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{1}{3}$ Quartiken. Insgesamt ergeben sich in Γ_4^\pm 2400 und in Γ_2^\pm 1920 reduzible Quartiken. Damit folgt (i).

Zu jedem Kegelschnitt C_{jk} gibt es neben L_k neun weitere Geraden $L_{k'}$, die die Ebene, in der C_{jk} liegt, in D_j schneiden. Der Divisor $C_{jk} + L_k + L_{k'}$ liegt in einem der Systeme Γ_3^\pm . Für die reduzierten und zusammenhängenden Kurven L_k und $C_{jk} + L_k$ gilt nach [S-D74, Lemma 2.2] $h^0(L_{k'}) = 1$ sowie $h^0(C_{jk} + L_k) = 2$. Folglich sind die Linearsysteme Γ_3^\pm mindestens zweidimensional.

Zwei Kegelschnitte C_{jk} und $C_{\ell m}$, die $j \in I_{10}^{(k)} \cap I_{10}^{(m)}$ sowie $\ell \in I_6^{(k)} \cap I_{10}^{(m)}$ für $k \neq m$ erfüllen, haben einen gemeinsamen Schnittpunkt und liegen in einem der Linearsysteme Γ_1^\pm , ebenso wie $C_{jk} + L_m + D_\ell$ für die Wahl $j \in I_{10}^{(k)} \cap I_{10}^{(m)}$ und $\ell \in I_6^{(k)} \cap I_{10}^{(m)}$ im Fall $k \neq m$. Auf diese Weise bekommen wir $2 \cdot 5760$ Quartiken in den Systemen Γ_1^\pm . Unter Beteiligung von Kegelschnitten entstehen keine weiteren Quartiken. Betrachten wir den Fall $Q = K + L$ mit einer irreduziblen Kubik K und einer Geraden L , so muss wegen $Q^2 = -2$ eine der beiden Komponenten von Q eine (-2) -Kurve sein, die andere eine elliptische Kurve. Für die (-2) -Kurve kommt nur die Gerade L in Frage, so dass $L = L_k$ oder $L = D_j$ gilt. Folglich ist $C^2 = 0$. Wir behaupten, dass K eine ebene Kubik ist. Für einen Hyperebenenschnitt H gilt $H \cdot C = 3$, was $(H - C)^2 = -2$ sowie $H \cdot (H - C) = 1$ zur Folge hat. Dies bedeutet, dass K mit einer Geraden in einer Ebene liegt. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1: $K + D_j \in |H|$. Dann verschwindet die zu K gehörige symmetrische Kurve auf der abelschen Fläche in 15 Halbperioden mit Multiplizität 1 und in einer Halbperiode mit Multiplizität 2. Mit dieser Verteilung der Multiplizitäten können wir $K + L \in \Gamma_1^\pm$ nicht erreichen.

Fall 2: $K + L_k \in |H|$. Dann verschwindet die zu K gehörige symmetrische Kurve auf der abelschen Fläche in den sechs ungeraden Halbperioden mit Multiplizität 1. Auch hier lässt sich die gewünschte Verteilung für Γ_1^\pm nicht herstellen.

Folglich enthalten die Linearsysteme Γ_1^\pm irreduzible Quartiken. \square

4.4. Zariski-Zerlegung und Zariski-Kammern auf Kummerflächen

Wir haben im vorigen Abschnitt gesehen, dass jede Kummerfläche unendlich viele negative Kurven enthält, und haben auf der Barth-Nieto-Fläche X_1 einige negative Kurven bestimmt. In Kapitel 2 haben wir algorithmisch die von vorgegebenen negativen Kurven induzierten Zariski-Kammern gezählt. Wir werden den Algorithmus 2.2.3 auch auf die Kummerfläche X_1 anwenden, um die Zariski-Kammern zu zählen, die von den 32 Geraden und 160 Kegelschnitten induziert werden. Jedoch werden wir bei der Bestimmung der maximalen Zariski-Kammern nicht über Algorithmus 2.3.2, sondern geometrisch argumentieren. Wir konstruieren big Divisoren, deren negativer Anteil in der Zariski-Zerlegung nur Geraden enthält, dabei haben wir maximal negative Mengen von Geraden im Blick.

Wir wollen folgender Frage nachgehen: Welche Divisoren im Big-Kegel zeichnen sich dadurch aus, dass in ihrer Nähe besonders viele Zariski-Kammern liegen? Mit anderen Worten: Welche Divisoren müssen wir betrachten, um lokal viele Zariski-Kammern erschließen zu können? Es wird sich zeigen, dass solche Divisoren auf dem Rand des Nef-Kegels liegen.

Wir bezeichnen auf einer glatten projektiven Fläche X für einen Divisor $D \in \text{Big}(X)$ mit $\Psi(D)$ die Menge der Zariski-Kammern, in deren Abschluss D liegt. Die Mengen $\Psi(D)$ sind nicht-leer und es gilt $|\Psi(D)| = 1$ genau dann, wenn D im Inneren einer Zariski-Kammer liegt.

Proposition 4.4.1. *Sei auf einer glatten projektiven Fläche ein Divisor D gegeben, der big, aber nicht ample ist. Der Divisor habe die Zariski-Zerlegung $D = P_D + N_D$. Dann gilt:*

$$|\Psi(P_D)| = 2^{|\text{Null}(P_D)|}.$$

Beweis. Betrachten wir zu einem gegebenen Divisor D die Zariski-Zerlegung $D = P_D + N_D$, so ist P_D big und nef, liegt also auf dem Rand des Nef-Kegels. (Wir bemerken, dass P_D wegen $P_D \cdot C = 0$ für alle Komponenten C von N_D nicht ample ist.) Der Divisor P_D liegt auf dem Schnitt aller Hyperebenen E^\perp mit $E \in \text{Null}(P_D)$ und induziert die Zariski-Kammer Σ_{P_D} sowie alle Nachbarkammern, die zu jeder Teilmenge $S \subsetneq \text{Null}(P_D)$ gegeben sind und demnach für einen big und nef Divisor P mit $\text{Null}(P) = S$ wie folgt beschrieben werden können:

$$\Sigma_P = \left\{ \tilde{D} \in \text{Big}(X) \mid \text{Neg}(\tilde{D}) = \text{Null}(P) \subsetneq \text{Null}(P_D) \right\}.$$

Da jede Hauptuntermatrix einer negativ definiten Matrix wieder negativ definit ist, existieren alle diese Nachbarkammern nach Proposition 2.1.1. Wegen $\text{Neg}(P_D) = \emptyset$ liegt P_D nach Proposition 1.2.6.(iii) im Abschluss jeder der Nachbarkammern. Davon gibt es genau $2^{|\text{Null}(P_D)|} - 1$. \square

Bemerkung 4.4.2. In Bemerkung 2.1.5 haben wir für einen big und nef Divisor P festgehalten: $|\text{Null}(P)| \leq \rho(X) - 1$. Auf Kummerflächen können wir also lokal maximal 2^{16} Zariski-Kammern erwarten. Wir werden in diesem Abschnitt untersuchen, ob diese obere Schranke angenommen wird.

Proposition 4.4.3. *Auf einer glatten projektiven Fläche X gilt für jeden Divisor D , der big, aber nicht nef ist:*

$$\Psi(D) \subsetneq \Psi(P_D),$$

wobei P_D der positive Anteil der Zariski-Zerlegung von D ist.

Beweis. Gegeben sei ein Divisor D , der big, aber nicht nef ist. Es gelte:

$$\Psi(D) = \{\Sigma_{P_1}, \dots, \Sigma_{P_n}\}.$$

Da die Zerlegung des Big-Kegels in Zariski-Kammern lokal endlich ist, gilt $n < \infty$. Im Fall $n = 1$ liegt D im Inneren einer Zariski-Kammer und es gilt nach Proposition 1.2.6.(ii) $\text{Neg}(D) = \text{Null}(P_D)$ und somit $D \in \Sigma_{P_D}$. Der Divisor P_D liegt auch auf dem Rand der Nef-Kammer, so dass $\Psi(D) \subsetneq \Psi(P_D)$ folgt. Für $n > 1$ liegt der Divisor D auf den Rändern aller Zariski-Kammern Σ_{P_i} für $1 \leq i \leq n$, d. h.

$$D \in \bigcap_{i=1}^n \partial \Sigma_{P_i}.$$

Nach Proposition 1.2.6.(i) liegt ein Divisor D genau dann auf dem Rand einer Kammer, wenn $\text{Neg}(D) \neq \text{Null}(P_D)$ gilt, d. h. es ist $\text{Neg}(D) \subsetneq \text{Null}(P_D)$. Seien $C_1, \dots, C_s \in \text{Neg}(D)$ und $C_{s+1}, \dots, C_r \in \text{Null}(P_D) \setminus \text{Neg}(D)$. Dann liegt D auf den Rändern aller Kammern Σ_P mit big und nef Divisoren P , die so beschaffen sind, dass $\text{Null}(P) = \{C_1, \dots, C_s\} \cup M_P$ gilt, wobei M_P eine Teilmenge von $\{C_{s+1}, \dots, C_r\}$ ist. (Es gilt also $n = 2^{r-s-1}$.) Insbesondere liegt D auf dem Rand der Kammer Σ_{P_D} , wo auch P_D selbst liegt. Es folgt $\Psi(D) \subsetneq \Psi(P_D)$. \square

Im Folgenden wollen wir auf der Kummerfläche X_1 Divisoren D bestimmen mit $\text{Neg}(D) \subset \{L_1, \dots, L_{16}, D_1, \dots, D_{16}\}$, in deren Nähe viele Zariski-Kammern liegen. Die vorstehenden Propositionen zeigen, dass solche Divisoren in kleinen Umgebungen um big und nef Divisoren zu finden sind. Praktisch gehen wir von D zu P_D über.

Satz 4.4.4. *Wir betrachten die Kummerfläche X_1 aus Abschnitt 4.3.*

- (i) *Zu jedem $1 \leq \ell \leq 16$ gibt es einen big Divisor D auf X_1 mit Zariski-Zerlegung $D = P_D + N_D$ und $\text{Neg}(D) \subset \{L_1, \dots, L_{16}, D_1, \dots, D_{16}\}$, so dass $|\Psi(P_D)| = 2^\ell$ gilt.*
- (ii) *Sei $D = P_D + N_D$ ein big Divisor auf X_1 mit $\text{Neg}(D) \subset \{L_1, \dots, L_{16}, D_1, \dots, D_{16}\}$. Es gelte $|\Psi(P_D)| = 2^\ell$ für ein $1 \leq \ell \leq 16$. Dann gibt es einen big Divisor D^* , so dass $|\Psi(P_{D^*})| \geq 2^7$ und*

$$\text{Neg}(D) \subset \text{Neg}(D^*) \subset \{L_1, \dots, L_{16}, D_1, \dots, D_{16}\}$$

gelten.

- (iii) *Sei $D = P_D + N_D$ ein big Divisor auf X_1 mit $\text{Neg}(D) \subset \{L_1, \dots, L_{16}, D_1, \dots, D_{16}\}$ und $|\Psi(P_D)| \geq 2^{11}$. Dann gilt:*

$$\text{Neg}(D) \subset \{L_1, \dots, L_{16}\} \quad \text{oder} \quad \text{Neg}(D) \subset \{D_1, \dots, D_{16}\} .$$

- (iv) *Es gibt einen big Divisor $D = P_D + N_D$ auf X_1 mit folgenden Eigenschaften: Es gilt $|\Psi(P_D)| = 2^{10}$ und es gibt Geraden L_k und D_j mit $\{L_k, D_j\} \subset \text{Neg}(D)$.*

Wenn wir big Divisoren betrachten, bei denen der Träger des negativen Anteils nur aus Geraden besteht, so gibt der Satz Auskunft über die lokal vorkommenden Zariski-Kammern auf X_1 . Unter Verwendung der Maximalitätsbegriffe aus Kapitel 2 ergibt sich:

Korollar 4.4.5. (i) *Auf der Kummerfläche X_1 gibt es zu jedem $1 \leq \ell \leq 16$ eine Zariski-Kammer, die von einer ℓ -elementigen Menge negativer Geraden auf X_1 erzeugt wird.*

- (ii) *Eine maximal negative Menge $\Delta \subset \{L_1, \dots, L_{16}, D_1, \dots, D_{16}\}$ auf X_1 ist mindestens siebenelementig.*
- (iii) *Sei $\Delta \subset \{L_1, \dots, L_{16}, D_1, \dots, D_{16}\}$ eine maximal negative Menge auf X_1 . Falls Δ mindestens eine Gerade von jedem Typ enthält, dann ist Δ höchstens zehnelementig.*
- (iv) *Es gibt eine zehnelementige negative Menge $\Delta \subset \{L_1, \dots, L_{16}, D_1, \dots, D_{16}\}$, die von jedem Typ mindestens eine Gerade enthält.*

Bevor wir uns dem Beweis des Satzes widmen, wollen wir aus den Geraden L_1, \dots, L_{16} und D_1, \dots, D_{16} zusammenhängende ADE-Kurven konstruieren, die dann nach Proposition 2.1.1 eine Zariski-Kammer induzieren. Zur Konstruktion wählen wir wie nachstehend beschrieben abwechselnd Geraden der Typen D und L aus und erhalten somit eine zusammenhängende ADE-Kurve.

Konstruktionsverfahren:

- Schritt 1: Start mit D_{j_1}
- Schritt 2: Wähle L_{k_1} mit $j_1 \in I_{10}^{(k_1)}$
- Schritt 3: Wähle D_{j_2} mit $j_2 \in I_{10}^{(k_1)} \setminus \{j_1\}$
- Schritt 4: Wähle L_{k_2} mit $j_2 \in I_{10}^{(k_2)}$, $j_1 \in I_6^{(k_2)}$
- Schritt 5: Wähle D_{j_3} mit $j_3 \in I_{10}^{(k_2)} \cap I_6^{(k_1)}$
- Schritt 6: Wähle L_{k_3} mit $j_3 \in I_{10}^{(k_3)}$, $j_2 \in I_6^{(k_3)}$, $j_1 \in I_6^{(k_3)}$
- Schritt 7: Wähle D_{j_4} mit $j_4 \in I_{10}^{(k_3)} \cap I_6^{(k_2)} \cap I_6^{(k_1)}$
- Schritt 8: Wähle L_{k_4} mit $j_4 \in I_{10}^{(k_4)}$, $j_3 \in I_6^{(k_4)}$, $j_2 \in I_6^{(k_4)}$, $j_1 \in I_6^{(k_4)}$
- Schritt 9: Wähle D_{k_5} mit $j_5 \in I_{10}^{(k_4)} \cap I_6^{(k_3)} \cap I_6^{(k_2)} \cap I_6^{(k_1)}$

Lemma 4.4.6. *Das Konstruktionsverfahren endet spätestens nach neun Schritten und liefert eine ADE-Kurve, welche durch einen Dynkin-Graphen A_n mit $n \leq 9$ beschrieben wird.*

Für den Beweis des Lemmas führen wir folgende Begriffe ein:

- Definition 4.4.7.** (i) Eine Gerade L_k oder D_j auf der Kummerfläche X_1 heißt *m-frei*, kurz *frei*, wenn sie die Gerade aus dem Konstruktionsschritt $m - 1$ schneidet, jedoch keine der Geraden, die in den Konstruktionsschritten p mit $p < m - 1$ ausgewählt wurden.
- (ii) Eine *m-freie* Gerade, die im Konstruktionsschritt m nicht ausgewählt wird und disjunkt zu der Geraden ist, die im Konstruktionsschritt $m + 1$ ausgewählt wird, heißt *besonders m-frei*, kurz *besonders frei*.

Beweis des Lemmas 4.4.6. Wir zeigen, dass es in jedem Konstruktionsschritt freie Geraden gibt, welche dann in dem entsprechenden Schritt zur Verlängerung der ADE-Kurve herangezogen werden können. Im ersten Schritt gibt es zehn freie Geraden, im zweiten neun. Nach Proposition 4.3.7 gibt es in den Konstruktionsschritten 4 und 5 jeweils vier freie Geraden. (Die Bedingung $j_2 \in I_{10}^{(k_2)}$, $j_1 \in I_6^{(k_2)}$ aus Schritt 4 ist äquivalent zu $k_2 \in I_{10}^{(j_1)} \cap I_6^{(j_2)}$.) Wir behaupten, dass es in den Schritten 6 und 7 jeweils mindestens eine und höchstens zwei freie Geraden gibt. „Höchstens zwei“ ist klar, da in den Schritten 2 bis 5 schon 14 der 16 Geraden eines Typs verbraucht sind. (Eine n -freie Gerade ist nicht $(n + i)$ -frei für alle $i > 0$.) Für Schritt 7 ist zu zeigen:

$$1 \leq \left| I_{10}^{(k_3)} \cap I_6^{(k_2)} \cap I_6^{(k_1)} \right| \leq 2. \quad (4.7)$$

Nach Proposition 4.3.7 hat die Menge $I_6^{(k_2)} \cap I_6^{(k_1)}$ zwei Elemente. Angenommen die Menge $I_{10}^{(k_3)} \cap I_6^{(k_2)} \cap I_6^{(k_1)}$ ist leer. Dann folgt $\left| I_6^{(k_3)} \cap I_6^{(k_2)} \cap I_6^{(k_1)} \right| = 2$. Seien $j_1, j_2 \in I_6^{(k_3)} \cap I_6^{(k_2)} \cap I_6^{(k_1)}$. Mit (4.6) ergibt sich dann $k_1, k_2, k_3 \in I_6^{(j_1)} \cap I_6^{(j_2)}$; ein Widerspruch zu Proposition 4.3.7. Es folgt die Abschätzung (4.7). Für Schritt 6 argumentieren wir unter Verwendung von (4.6) analog.

Entstehen im Konstruktionsschritt 6 zwei freie Geraden, so endet das Verfahren mit dem Schritt 7, da danach keine freien Geraden mehr vorhanden sind.

Entsteht dagegen im Schritt 6 nur eine freie Gerade, so kann im Schritt 8 noch eine freie Gerade existieren, ebenso im Schritt 9, wenn im Schritt 7 nur eine freie Gerade entstanden ist. Spätestens nach neun Schritten existieren keine freien Geraden mehr. \square

Bemerkung 4.4.8. Nur m -freie Geraden, die im Konstruktionsschritt m nicht ausgewählt werden, also unverbrauchte m -freie Geraden, können in späteren Konstruktionsschritten zur Ausweitung von Dynkin-Graphen A_n auf Graphen D_n verwendet werden. Besonders freie Geraden können zur Ausweitung auf die Typen E_6 , E_7 sowie E_8 verwendet werden.

Aus dem Verfahren ergibt sich, dass eine zusammenhängende ADE-Kurve, deren Komponenten Geraden sind, maximal neun Komponenten hat. Der zugehörige Dynkin-Graph ist A_9 . Ein Graph D_9 ist nicht möglich, da dieser nur entstehen kann, wenn im Schritt 7 zwei freie Geraden existieren. In diesem Fall endet das Verfahren aber spätestens mit Schritt 8. Das nachfolgende Beispiel wird zeigen, dass Graphen A_9 vorkommen.

Beispiel 4.4.9. Der Divisor

$$D_1 + L_1 + D_2 + L_{15} + D_{14} + L_{12} + D_{12} + L_{11} + D_6$$

ist eine zusammenhängende ADE-Kurve mit Dynkin-Graph A_9 . Man prüfe dies anhand der Matrix (4.5) nach. Die Divisoren

$$D_1 + L_1 + D_2 + L_{15} + D_{15} + L_{11} + D_{12} + L_{12}$$

und

$$D_1 + L_1 + D_2 + L_{15} + D_{15} + L_{11} + D_{12} + D_6$$

stellen zusammenhängende ADE-Kurven vom Typ A_8 bzw. D_8 dar. In allen Beispielen sind die Komponenten in der Reihenfolge aufgelistet, wie sie im Konstruktionsverfahren ausgewählt wurden.

Für den Beweis des Satzes 4.4.4 zeigen wir zunächst

Proposition 4.4.10. *Jede negative Menge $\Delta \subset \{L_1, \dots, L_{16}, D_1, \dots, D_{16}\}$ mit weniger als sieben Elementen kann zu einer siebenelementigen negativen Menge durch Hinzunahme von Geraden L_k oder D_j ergänzt werden.*

Beweis. Zur Konstruktion eines (maximal) negativen Divisors, dessen Träger aus Geraden L_k oder D_j besteht, sind folgende Regeln nützlich. Diese sind offensichtlich oder ergeben sich aus Proposition 4.3.7.

- (a) Geraden eines Typs sind disjunkt.
- (b) Zu einer Geraden eines Typs existieren immer genau sechs zu dieser disjunkte Geraden des anderen Typs.
- (c) Zu jedem Geradenpaar $(D_j, D_{j'})$ gibt es genau ein dazu disjunktes Geradenpaar $(L_k, L_{k'})$.
- (d) Zu jedem Geradentripel $(D_j, D_{j'}, D_{j''})$ gibt es höchstens eine dazu disjunkte Gerade L_k .

Mögliche Konstruktionsschritte bestehen in der Verlängerung einer ADE-Kurve oder in der Hinzunahme einer zu allen anderen Geraden disjunkten Geraden.

Seien $\Delta \subset \{L_1, \dots, L_{16}, D_1, \dots, D_{16}\}$ eine negative Menge und $n = |\Delta|$.

Wir zeigen für $n = 1, \dots, 6$: Zu jeder n -elementigen Menge $\Delta \subset \{L_1, \dots, L_{16}, D_1, \dots, D_{16}\}$ gibt es eine Gerade $M \in \{L_1, \dots, L_{16}, D_1, \dots, D_{16}\}$, so dass $\Delta \cup \{M\}$ eine negative Menge ist.

Fall $n \leq 4$: Alle ein- bis vierelementigen Mengen sind negativ, da alle Zusammenhangskomponenten ADE-Kurven bilden. Diese können immer nach den Regeln (a), (b) oder (c) ergänzt werden: Besteht eine Menge beispielsweise aus vier disjunkten Geraden, die ohne Einschränkung nicht alle vom selben Typ sind, so schneidet eine beliebige Gerade entweder mindestens eine und höchstens drei andere Geraden oder sie ist zu allen disjunkt (typabhängig). In jedem Falle entsteht eine negative Menge.

Schneiden sich mindestens zwei der vier vorgegebenen Geraden, dann wählen wir gemäß der Regel (a) im Fall der 3:1-Verteilung der Geraden auf die Typen eine Gerade vom majorisierten Typ, die zur Gerade vom minorisierten Typ disjunkt ist. In Fall einer 2:2-Verteilung wählen wir eine zu zwei typfremden disjunkte Gerade. Diese existiert nach Regel (c), weil wir mindestens einen Schnittpunkt fordern.

Fall $n = 5$: Sind die Geraden im Verhältnis 4:1 auf die Typen verteilt, so wenden wir Regel (b) an. Bei einer 3:2-Verteilung müssen wegen Regel (c) Schnitte vorhanden sein. Falls zwei zu allen übrigen disjunkte Geraden vom majorisierten Typ existieren, d. h. die beiden Geraden vom minorisierten Typ sind zu diesen disjunkt, wählen wir eine Gerade vom minorisierten Typ, die disjunkt zur Geraden vom majorisierten Typ ist, welche wiederum von mindestens einer Geraden des minorisierten Typs geschnitten wird oder deren Zusammenhangskomponente die meisten Komponenten hat. Eine solche Gerade schneidet dann entweder eine oder beide typfremden Geraden; sie existiert nach Regel (c).

Andernfalls, also falls es keine zwei zu allen übrigen disjunkte Geraden vom majorisierten Typ gibt, d. h. mindestens eine wird von der zweiten Geraden des minorisierten Typs geschnitten, wählen wir eine Gerade gemäß Regel (c), also eine Gerade vom majorisierten Typ, die zu den zwei Geraden vom minorisierten Typ disjunkt ist.

Fall $n = 6$: Sind die Geraden im Verhältnis 5:1 auf die Typen verteilt, so wenden wir wieder Regel (b) an. Bei einer 4:2-Verteilung müssen wegen Regel (c) Schnitte vorhanden sein. Falls zwei zu allen übrigen disjunkte Geraden vom majorisierten Typ existieren – mehr als zwei können wegen Regel (d) nicht existieren – wählen wir wie oben eine Gerade vom minorisierten Typ, die zu den (höchstens zwei existierenden) mehrkomponentigen Zusammenhangskomponenten disjunkt ist. Wir bemerken, dass bei einer 4:2-Verteilung die beiden Geraden vom minorisierten Typ wegen Regel (d) mindestens zwei Geraden vom majorisierten Typ schneiden. Auf diese Schnittgeraden können wir Regel (c) anwenden. Andernfalls kann wieder zu den zwei Geraden vom minorisierten Typ eine Gerade vom majorisierten Typ gemäß Regel (c) gewählt werden.

Bei einer 3:3-Verteilung kann es maximal eine Gerade von jedem Typ geben, die zu allen übrigen disjunkt ist (Regel (d)). Folglich schneiden mindestens zwei Geraden jedes Typs mindestens eine typfremde Gerade und mindestens zwei Geraden jedes Typs werden von mindestens einer typfremden Geraden geschnitten. Nun verfolgen wir die Strategie, den kürzesten Graphen zu verlängern. Es gibt vier Möglichkeiten für die kürzeste Zusammenhangskomponente. Im Fall von einer disjunkten Geraden oder zwei disjunkten Geraden verschiedenen Typs finden wir eine Gerade, die den Graphen verlängert. Besteht

der kürzeste Graph aus einem sich schneidenden Geradenpaar, so ist eine Verlängerung durch eine neue Gerade möglich, aber nicht zwingend; die neue Gerade könnte auch disjunkt zu allen übrigen liegen. Liegt eine kürzeste Zusammenhangskomponente aus drei Geraden vor, können wir den Graphen durch eine Gerade verlängern, wenn wir diese vom in der betrachteten Zusammenhangskomponente minorisierten Typ wählen. \square

Proposition 4.4.11. *Jede zehnelementige negative Menge*

$$\Delta \subset \{L_1, \dots, L_{16}, D_1, \dots, D_{16}\},$$

die von jedem Typ mindestens eine Gerade enthält, lässt sich nicht mehr zu einer negativen Menge durch Hinzunahme von Geraden L_k oder D_j ergänzen. Insbesondere bestehen alle negativen Mengen $\Delta \subset \{L_1, \dots, L_{16}, D_1, \dots, D_{16}\}$, die mindestens elf Elemente besitzen, aus Geraden eines Typs.

Beweis. Wir beziehen uns in diesem Beweis wieder auf die Regeln, die wir im Beweis zu Proposition 4.4.10 formuliert haben.

Wie können zehnelementige negative Mengen $\Delta \subset \{L_1, \dots, L_{16}, D_1, \dots, D_{16}\}$ aussehen? Bei einer 9:1-Verteilung – nehmen wir an, wir haben neun Geraden L_k und eine Gerade D_j vorliegen – schneidet die Gerade D_j vier der L_k wegen Regel (b). Jede weitere Gerade $L_{k'}$ würde einen Schnitt mit einer der Geraden D_j verursachen und jede weitere Gerade $D_{j'}$ würde genau vier der vorgegebenen Geraden L_k schneiden, die D_j nicht schneidet, möglicherweise noch weitere. Aus dieser Konstellation sind also keine elf Komponenten realisierbar.

Seien acht Geraden L_k vorgegeben. Damit eine negative Menge entsteht, schneidet jede Gerade D_j mindestens zwei und höchstens drei der Geraden L_k . Des Weiteren ist ein Paar von Geraden vom Typ D nach Regel (c) genau zu einem Paar von Geraden vom Typ L disjunkt. Unter diesen Bedingungen können noch zwei Geraden vom Typ D ergänzt werden, jede weitere Gerade $D_{j'}$ würde wieder vier Geraden vom Typ L schneiden und jede weitere Gerade $L_{k'}$ würde wegen Regel (c) eine der beiden vorgegebenen Geraden vom Typ D schneiden. Schließlich erhalten wir maximal eine zehnelementige negative Menge. Bei sieben vorgegebenen Geraden eines Typs können mit ähnlichen Überlegungen lediglich negative Mengen mit höchstens neun Elementen gebildet werden.

Bei der Konstruktion von zehnelementigen negativen Mengen mit 6:4- bzw. 5:5-Verteilung nutzen wir die Regel (c) aus, indem wir Paare disjunkter Geraden $(D_j, D_{j'})$ und $(L_k, L_{k'})$ suchen. Bei der Paarbildung müssen alle bis auf zwei typfremde Geraden von einem Paar geschnitten werden. Das sind bei einer 6:4-Verteilung vier bzw. zwei Geraden und bei einer 5:5-Verteilung drei Geraden.

Angenommen, es existieren fünf Schnittgeraden, dann kann es nur eine Gerade geben, die nur einmal schneidet, alle übrigen vier schneiden mindestens zweimal. Sonst finden wir ein Geradenpaar, bei denen beide nur einmal schneiden, damit erhalten wir ein Geradenpaar, das zu drei Geraden des anderen Typs disjunkt ist; dies widerspricht Regel (c). Also existieren insgesamt mindestens neun Schnittpunkte. Da sich mehrere Zusammenhangskomponenten mit neun oder mehr Schnittpunkten nicht realisieren lassen, bliebe nur eine zehnkomponentige ADE-Kurve, die nach Bemerkung 4.4.8 nicht existiert. Folglich sind keine zehn- oder elfelementigen Mengen realisierbar.

Bei sechs vorgegebenen Geraden vom Typ L können wir drei Geraden vom Typ D zu einer negativen Menge ergänzen, eine vierte Gerade vom Typ D verursacht Schnittpunkte, so dass die Menge nach der Ergänzung einer solchen Geraden nicht mehr negativ bleibt. \square

Beweis des Satzes 4.4.4. Der Divisor $L_1 + \cdots + L_{16}$ ist negativ. Im Beweis zu Proposition 2.1.1 haben wir zu einem gegebenen reduzierten negativen Divisor einen big Divisor $D = P_D + N_D$ konstruiert, so dass $\text{Null}(P_D)$ gerade aus den Komponenten des gegebenen Divisors besteht. In unserer Situation finden wir also nach Proposition 2.1.1 einen big Divisor $D = P_D + N_D$ mit $\text{Null}(P_D) = \{L_1, \dots, L_{16}\}$. Das Argument überträgt sich auf die negativen Divisoren $L_1 + \cdots + L_\ell$ für $1 \leq \ell < 16$, so dass schließlich mithilfe von Proposition 4.4.1 Behauptung (i) folgt. Nach Proposition 4.4.10 ergeben sich unter den 32 Geraden mindestens siebenelementige maximal negative Mengen, so dass wieder mit Proposition 2.1.1 der zweite Teil der Satzaussage folgt, (iii) ist eine unmittelbare Konsequenz aus Proposition 4.4.11. Der Divisor

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_7 + L_8 + L_{14} + L_{16} + D_{11}$$

ist negativ. Die Gerade D_{11} schneidet L_3, L_4 sowie L_7 und ist zu den übrigen disjunkt. Mit Proposition 2.1.1 folgt (iv). \square

Abschließend wollen wir wie in Kapitel 2 angekündigt die Zariski-Kammern auf der Kummerfläche X_1 zählen, die einerseits von Geraden und andererseits von Kegelschnitten herrühren.

Satz 4.4.12. (i) Auf der Kummerfläche X_1 beträgt die Anzahl der Zariski-Kammern, die von den 32 Geraden $L_1, \dots, L_{16}, D_1, \dots, D_{16}$ induziert werden, 1774951.

(ii) Es gibt auf X_1 für jedes $11 \leq \ell \leq 16$ genau $2 \cdot \binom{16}{\ell}$ Zariski-Kammern, die von ℓ -elementigen Mengen negativer Geraden erzeugt werden. Im Fall $\ell = 10$ bekommen wir 23696 Zariski-Kammern, das sind mehr als $2 \cdot \binom{16}{10}$.

(iii) Auf X_1 werden 29855617 Zariski-Kammern von den 160 Kegelschnitten C_{jk} induziert. Dabei ist die maximale Anzahl von Kegelschnitten, welche im Träger des negativen Anteils der Zariski-Zerlegung von big Divisoren auf X_1 vorkommen, zehn.

Beweis. Sämtliche Werte lassen sich über Algorithmus 2.2.3 bestimmen. Dieser benötigt als Eingabe die Schnittmatrix der 32 Geraden bzw. der 160 Kegelschnitte. \square

Die Aussage (ii) des vorstehenden Satzes entspricht der Aussage von Proposition 4.4.11. Aus (iii) folgt, dass eine maximal negative Menge auf X_1 , die nur Kegelschnitte C_{jk} enthält, höchstens zehnelementig ist.

Auf der Kummerfläche X_1 könnten sich hieran noch weitere Studien anschließen, bezogen auf die von irreduziblen negativen Kurven von höherem Grad induzierten Zariski-Kammern. Weiterhin ließen sich Kummerflächen aus [Bau97] für $d > 1$ untersuchen.

Literaturverzeichnis

- [BN94] BARTH, W., NIETO, I.: Abelian surfaces of type $(1, 3)$ and quartic surfaces with 16 skew lines. *J. Algebr. Geom.* 3, 173-222, 1994
- [Bau94] BAUER, TH.: Projective images of Kummer surfaces. *Math. Ann.* 299, 155-170, 1994
- [Bau97] BAUER, TH.: Smooth Kummer surfaces in projective three-space. *Proc. Amer. Math. Soc.* 125, 2537-2541, 1997
- [BKS04] BAUER, TH., KÜRONYA, A., SZEMBERG, T.: Zariski chambers, volumes, and stable base loci. *J. reine angew. Math.* 576, 209-233, 2004
- [Bau08] BAUER, TH.: A simple proof for the existence of Zariski decompositions on surfaces. *J. Algebr. Geom.* (to appear)
- [BFN08] BAUER, TH., FUNKE, M., NEUMANN, S.: Counting Zariski chambers on Del Pezzo surfaces. preprint, 2008
- [CAV] BIRKENHAKE, C., LANGE, H.: *Complex Abelian Varieties*. Springer-Verlag, 2004
- [DPT80] DEMAZURE, M., PINKHAM, H., TEISSIER, B.: *Séminaire sur les Singularités des Surfaces*. *Lect. Notes Math.* 777, Springer-Verlag, 1980
- [DJT07] DERENTHAL, U., JOYCE, M., TEITLER, Z.: The nef cone volume of generalized Del Pezzo surfaces. preprint, arXiv:math.AG/0703202 v2, 2007
- [EL⁺06] EIN, L., LAZARSFELD, R., MUSTATA, M., NAKAMAYE, M., POPA, M.: Asymptotic invariants of base loci. *Ann. Inst. Fourier* 56, No. 6, 1701-1734, 2006
- [Fu79] FUJITA, T.: On Zariski problem. *Proc. Japan Acad.* 55, Ser. A, 106-110, 1979
- [Ha] HARTSHORNE, R.: *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, 1977
- [KMM87] KAWAMATA, Y., MATSUDA, K., MATSUKI, K.: Introduction to the minimal model problem. *Algebraic Geometry, Proc. Symp., Sendai/Jap. 1985*, *Adv. Stud. Pure Math.* 10, 283-360, 1987
- [Ke] KEUM, J.: Lorentzian lattices and K3 surfaces. (unpublished manuscript)
- [Kov94] KOVÁCS, S.J.: The cone of curves of a K3 surface. *Math. Ann.* 300, 681-691, 1994
- [PAG] LAZARSFELD, R.: *Positivity in Algebraic Geometry I*. Springer-Verlag, 2004

- [Ma74] MANIN, Y.I.: *Cubic Forms. Algebra, Geometry, Arithmetic*. North-Holland Mathematical Library. Vol. 4. North Holland, 1974
- [Na00] NAKAMAYE, M.: Stable base loci on linear series. *Math. Ann.* 318, 837-847, 2000
- [Na03] NAKAMAYE, M.: Base loci of linear series are numerically determined. *Trans. Amer. Math. Soc.* 355, 551–566, 2003
- [Nar91] NARUKI, I.: On smooth quartic embedding of Kummer surfaces. *Proc. Japan Acad.* 67, Ser. A, 223-225, 1991
- [Nik75] NIKULIN, V.V.: On Kummer surfaces. *Math. USSR Izvestija* 9, No. 2, 261-275, 1975
- [Nik83] NIKULIN, V.V.: Factor groups of groups of automorphisms of hyperbolic forms with respect to subgroups generated by 2-reflections. *Algebraic geometric applications. J. Sov. Math.* 22, 1401-1475, 1983
- [PS71] PIATETSKI-SHAPIRO, I.I., SHAFAREVICH, I.R.: A Torelli theorem for algebraic surfaces of type K3. *Math. USSR Izvestija* 5, No. 3, 547-588, 1971
- [S-D74] SAINT-DONAT, B.: Projective models of K3 surfaces. *Amer. J. Math.* 96, No. 4, 602-639, 1974
- [Zar62] ZARISKI, O.: The theorem of Riemann-Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface. *Ann. Math.* 76, 560-615, 1962

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich all denen meinen besonderen Dank aussprechen, die mich während der Erstellung dieser Arbeit in vielfacher Hinsicht unterstützt haben. Mein Dank gilt:

Prof. Dr. Thomas Bauer für die Betreuung dieser Arbeit sowie für die hilfreichen Diskussionen und Ratschläge.

Prof. Dr. Georg Schumacher für die Übernahme des Zweitgutachtens.

Prof. Dr. Volkmar Welker für seine Anregungen und die rechentechnische Unterstützung.

Der Mittagsgruppe von A8, A7 und D6 für das angenehme Arbeitsklima und die vielen Jahre der guten Zusammenarbeit.

Meinem Zimmernachbarn Benjamin für die vielen lieben Gespräche und die stets offene Tür, für eine Zeit des Miteinanders, die so unvergesslich ist wie unser Ausblick auf die Amöneburg.

Benjamin, Katharina, Marina und Matthias für die gewissenhafte Durchsicht des Manuskriptes und ihre wertvollen Anregungen.

Meiner lieben Familie für die Förderung und das Vertrauen in all den Jahren.

Erklärung

Ich versichere, dass ich meine Dissertation

Zariski-Kammern und stabile Basisorte auf Del-Pezzo- und $K3$ -Flächen

selbstständig, ohne unerlaubte Hilfsmittel angefertigt und mich dabei keiner anderen als der von mir ausdrücklich bezeichneten Quellen und Hilfen bedient habe.

Die Dissertation wurde in der jetzigen oder einer ähnlichen Form noch bei keiner anderen Hochschule eingereicht und hat keinen sonstigen Prüfungszwecken gedient.

Marburg, 9. Januar 2009

Lebenslauf

PERSÖNLICHE DATEN

Name Michael Funke
Geburtsdatum 30. September 1979
Geburtsort Bad Arolsen
Familienstand ledig

AUSBILDUNG

08/1990 – 06/1999 Christian-Rauch-Schule in Bad Arolsen
10/1999 – 11/2004 Studium der Mathematik und Physik für das Lehramt
an Gymnasien an der Philipps-Universität Marburg
11/2004 Erste Staatsprüfung für das Lehramt an Gymnasien
Seit 12/2004 Promotionsstudium im Bereich „Algebraische Geometrie“
an der Philipps-Universität Marburg

BERUFLICHE TÄTIGKEIT

01/2005 – 01/2009 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachbereich Mathematik
und Informatik an der Philipps-Universität Marburg