

Segal-Bargmann-Transformation
und metaplektische Darstellung
auf Euklidischen Jordan-Algebren

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

vorgelegt dem

Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg

von

Thomas Graeff

aus Dortmund

Marburg/Lahn, Juni 2007

Vom Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
als Dissertation angenommen am: 13.06.2007

Erstgutachter: Prof. Dr. H. Upmeyer
Zweitgutachter: Prof. Dr. W. Gromes

Tag der mündlichen Prüfung: 17.07.2007

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	5
1 Symmetrische Kegel und Jordan-Algebren	9
1.1 Kegel	9
1.2 Jordan-Algebren	11
1.3 Der Kegel der Quadrate	14
1.4 Klassifikation der Euklidischen Jordan-Algebren	15
1.4.1 Die hermiteschen Matrixalgebren	15
1.4.2 Spin-Faktoren	17
1.4.3 Die Ausnahmealgebra	20
2 Die Segal-Bargmann-Transformation und die Siegel-Disk	23
2.1 Klassische Segal-Bargmann-Transformation	23
2.2 Jordan-Algebren und die Wallach-Menge	26
2.3 Differentialoperatoren und das innere Produkt auf $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$	29
3 Die Fortsetzung für reelle symmetrische Matrizen vom Rang eins	35
3.1 Integraloperatoren	35
3.2 Zonale Polynome	39
3.3 Bestimmung des Maßes $d\mu_n$	40
3.4 Die metaplektische Darstellung	44
4 Die Fortsetzung für höheren Rang und allgemeine Jordan-Algebren	51
4.1 Die Segal-Bargmann-Transformation	51

4.2	Die metaplektische Darstellung im allgemeinen Fall	57
5	Der Maslov-Index und seine Anwendung in der metaplektischen Darstellung	61
5.1	Klassischer Maslov-Index auf symplektischen Räumen	61
5.2	Die Schrödinger-Darstellung	65
5.3	Intertwiner, der Maslov-Index und die metaplektische Darstellung	67
5.4	Erweiterte metaplektische Darstellung	70
6	Anhang	73
6.1	Einbettung der Euklidischen Jordan-Algebren in reelle Vektorräume	73
6.1.1	Allgemeines	73
6.1.2	Hermitesche Matrizen über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ und \mathbb{H}	74
6.1.3	Der Spin-Faktor	75
6.1.4	Die Ausnahmealgebra	83
6.2	Anwendung in der metaplektischen Darstellung	84
6.3	Berechnungen zu Satz 5.3.4	84
	Ausblick	91
	Literaturverzeichnis	93
	Stichwortverzeichnis	94

Einleitung

Historisch gesehen sind *Jordan-Algebren* ein Versuch, der Quantenmechanik ein neues mathematisches Gerüst zu verleihen [McC]. Der Physiker Pascual Jordan forderte 1932 eine Verbesserung des bisher verwandten Kopenhagener Modells, das die physikalischen Observablen als hermitesche Matrizen darstellt. Er wollte sich von Matrizen lösen und mit algebraischen Objekten arbeiten. Hermitesche Matrizen haben zwar einige Vorteile, wie zum Beispiel Diagonalisierbarkeit oder die physikalisch essentiellen reellen Eigenwerte, jedoch sind sie auch mit Nachteilen behaftet, sie sind im Allgemeinen nicht stabil unter gewünschten Operationen wie Matrixmultiplikation, also der Komposition zweier Operatoren, oder unter Multiplikation mit komplexen Skalaren. Jordan führte eine allgemeine algebraische Definition für Jordan-Algebren ein, die er 1934 zusammen mit John von Neumann und Eugene Wigner klassifizieren konnte: Jede formal-reelle endlich-dimensionale Jordan-Algebra ist halb-einfach und lässt sich als Summe einfacher Ideale beschreiben. Diese Ideale bestehen aus drei Typen, nämlich den *hermiteschen Matrizen* beliebigen Rangs über den reellen und den komplexen Zahlen sowie den Quaternionen, weiterhin aus den sogenannten *Spin-Faktoren*, und schließlich der *Ausnahmealgebra* $\mathcal{H}_3(\mathbb{O})$, den 3×3 hermiteschen Matrizen über den Cayley-Zahlen \mathbb{O} .

Leider zeigte sich jedoch, dass all jene Fälle, die sich auf unendliche Dimension erweitern lassen, erneut eine unterliegende assoziative Struktur haben. Die Ausnahmealgebra $\mathcal{H}_3(\mathbb{O})$ ist die einzige nicht-spezialisierte Jordan-Algebra, die Dimension ist aber 27. Eine für die Quantenmechanik notwendige Verallgemeinerung auf unendliche Dimension ist hier nicht möglich, 1983 zeigte Efim Zel'manov sogar, dass sämtliche außergewöhnlichen Jordan-Algebren von diesem Typ sind. Allerdings ist die Ausnahmealgebra weiterhin in der Physik in Verwendung, sie spielt in der String-Theorie die Rolle der Raumzeit.

Jordan-Algebren haben eine Fülle von Anwendungen hervorgebracht. Zunächst wurde die Struktur verallgemeinert, um mehr Klassen zu erhalten. Dabei entstanden die Jordan-Tripel-Systeme und die Theorie der Jordan-Paare, sowie in letzter Zeit die Jordan-Superalgebren und die Jordan-Banach-Algebren. Weiterhin stehen Jordan-Algebren in direktem Zusammenhang zu Lie-Algebren, wobei insbesondere die Ausnahmealgebra mit den Ausnahme-Lie-Algebren in Verbindung gebracht werden kann.

Das Hauptaugenmerk in dieser Arbeit liegt jedoch auf einer geometrischen Anwendung von Jordan-Algebren. Jeder Euklidischen Jordan-Algebra kann eindeutig ein *symmetrischer Kegel* zugeordnet werden. Damit können auch symmetrische Gebiete mit Hilfe von Jordan-

Algebren beschrieben werden. Das Ziel dieser Arbeit ist es, klassische Ergebnisse wie die *Segal-Bargmann-Transformation* und die *metaplektische Darstellung* auf geometrisch interessante Grundräume zu erweitern, der bisherige Grundraum \mathbb{R}^n ist durch seine Euklidische Geometrie nur ein - allerdings besonders wichtiger - Spezialfall. Jordan-Algebren sind dabei das entscheidende Hilfsmittel.

Im ersten Kapitel werden die grundlegenden Definitionen und Notationen zu Jordan-Algebren und symmetrischen Kegeln eingeführt. Der Prozess, der einer Jordan-Algebra ihren symmetrischen Kegel zuordnet, wird beschrieben. Außerdem wird die Klassifikation der einfachen Euklidischen Jordan-Algebren erläutert, und es werden jeweils die zugehörigen algebraischen und geometrischen Objekte berechnet.

Im zweiten Kapitel wird die klassische Ausgangslage beschrieben. Die bereits bekannten Ergebnisse zur Segal-Bargmann-Transformation werden kurz dargestellt (vgl. [Fo], [A-U]). Desweiteren werden die Grundlagen für eine Verallgemeinerung geschaffen, indem die bereits aus [A-U] bekannten Beziehungen zwischen Jordan-Algebren und symmetrischen Gebieten sowie das dort gefundene Skalarprodukt für den komplexifizierten Fall erläutert werden.

Im dritten Kapitel beginnt der Verallgemeinerungsprozess. In diesem und im nächsten Kapitel werden die substantiellsten neuen Beiträge dieser Arbeit gebracht. Zunächst wird der wichtige Spezialfall der reellen symmetrischen Matrizen vom Rang eins betrachtet. Die erweiterte Segal-Bargmann-Transformation kann in diesem Fall direkt aus der klassischen gewonnen werden. Dies geschieht mittels einer Identifizierung der Matrizen als dyadisches Produkt eines reellen Vektors. Der dadurch entstehende reelle Grundraum wird in seiner unbeschränkten Realisierung als Kegel und in seiner beschränkten als Kreisscheibe betrachtet, und es wird eine rangerhaltende Cayley-Transformation zwischen diesen Realisierungen angegeben. Weiterhin wird ein Maß auf den reellen symmetrischen Rang-eins-Matrizen definiert, dies setzt sich aus einer Zerlegung in das Haarmaß der orthogonalen Gruppe und einem Radialanteil über den Eigenwert zusammen. Mithilfe dieses Maßes wird ein Skalarprodukt definiert und die Segal-Bargmann-Transformation als Integrkern realisiert. Diese ist bezüglich des neuen Skalarprodukts und des bereits in Kapitel zwei vorgestellten Skalarprodukts aus [A-U] eine Isometrie. Die zum Beweis benötigten zonalen Polynome werden kurz beschrieben.

Außerdem wird die metaplektische Darstellung der symplektischen Gruppe auf dem $L^2(\mathbb{R}^n)$ in der in [Fo] beschriebenen Art und Weise erläutert. Diese wird dann analog auf den hier betrachteten Spezialfall erweitert, insbesondere wird die auf einem Erzeuger auftretende Fourier-Transformation als ein Integrkern durch eine verallgemeinerte Bessel-Funktion dargestellt.

Im vierten Kapitel wird nun der allgemeine Fall beliebiger Euklidischer Jordan-Algebren betrachtet. Die Erkenntnisse aus dem vorhergehenden Kapitel werden verwendet, um die Segal-Bargmann-Transformation für beliebigen Rang und Klasse zu verallgemeinern. Dazu sind abstraktere Methoden notwendig, um die Gesamtheit aller Euklidischen Jordan-Algebren zu erfassen. Die metaplektische Darstellung wird zunächst auf \mathbb{C}^n bzw. \mathbb{H}^n als Grundraum erweitert, die operierende Gruppe ist dann die Automorphismengruppe des zugehörigen symmetrischen Gebietes. Danach erfolgt der Übergang zu den drei großen Klassen der hermiteschen Matrizen über \mathbb{R} , \mathbb{C} und \mathbb{H} . Es kann erneut eine verallgemeinerte Bessel-Funktion gefunden werden, die der dortigen Fourier-Transformation als Integrkern dient.

Im fünften Kapitel wird ein weiterer Ansatz, die metaplektische Darstellung einzuführen, beschrieben [L-V]. Dieser Ansatz ist allgemeiner, er realisiert die metaplektische Darstellung

als Intertwiner der von einem Lagrange-Unterraum abhängigen Schrödinger-Darstellung. Die aus [L-V] bekannten Grundlagen über symplektische Vektorräume, die Heisenberg-Gruppe und die zugehörige Schrödinger-Darstellung werden erläutert. Insbesondere wird der *Maslov-Index* definiert. Dieser wurde 1972 von V.P. Maslov bei der Betrachtung von asymptotischen Lösungen von Differentialgleichungssystemen eingeführt [Mas], die hier verwendete Definition ist jedoch von M. Kashiwara. Mit dem Maslov-Index lässt sich der projektive Faktor der metaplektischen Darstellung beschreiben. Er wurde von J.L. Clerc auf Tubengebiete erweitert [Cl2], also für die hermiteschen Matrizen und für den Spin-Faktor. Ein weiterer Ansatz ist die Beschreibung des Maslov-Index mit differentialgeometrischen Methoden, hierbei spielen Geodäten und Paralleltransport die entscheidende Rolle. Damit lassen sich auch geometrische Objekte berechnen, wie zum Beispiel der Flächeninhalt von bestimmten hyperbolischen Dreiecken, der ebenfalls durch den Maslov-Index ausgedrückt werden kann (vgl. [Cl-Ø],[Cl-Ø2] und [K-W]).

Auch in dieser Realisierung wird die metaplektische Darstellung auf die hermiteschen Matrizen erweitert. Die vorherigen Techniken können dabei übernommen werden, es muss jedoch eine symplektische Beschreibung der hermiteschen Matrizen geschaffen werden. In einem Anhang wird zudem eine explizite Einbettung der Spin-Faktoren in reelle symmetrische Matrizen dargestellt, sodass eine Fortsetzung der metaplektischen Darstellung auch in diesem Fall möglich ist.

Kapitel 1

Symmetrische Kegel und Jordan-Algebren

In diesem Abschnitt werden die Grundlagen über symmetrische Kegel und Jordan-Algebren und deren Beziehung dargestellt. Die hauptsächliche Quelle ist [F-K], allerdings weichen einige Notationen ab, um später einheitlich mit [A-U] zu bleiben. Danach werden die verschiedenen Klassen der einfachen Euklidischen Jordan-Algebren detaillierter betrachtet.

1.1 Kegel

Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum mit innerem Produkt $(\cdot|\cdot)$.

Definition 1.1.1. *Eine Teilmenge $C \subset V$ heißt Kegel, falls gilt*

$$x \in C; \lambda > 0 \Rightarrow \lambda x \in C.$$

Die Menge C heißt konvexer Kegel, wenn

$$x, y \in C; \lambda, \mu > 0 \Rightarrow \lambda x + \mu y \in C.$$

Ein Kegel C heißt echt, wenn

$$\overline{C} \cap (-\overline{C}) = \{0\}.$$

Sei von nun an C ein nicht-leerer, konvexer Kegel. Ein wichtiges Konzept ist der duale Kegel:

Definition 1.1.2. *Die Menge*

$$C^\# := \{y \in V \mid (x|y) \geq 0 \forall x \in C\}$$

heißt abgeschlossener dualer Kegel zu C . Der duale Kegel $C^\#$ ist selbst konvex, und falls C abgeschlossen ist, so folgt $(C^\#)^\# = C$.

Sei Ω ein nicht-leerer, offener konvexer Kegel. Dann ist

$$\Omega^* := \{y \in V \mid (x|y) > 0 \ \forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}\}$$

der offene duale Kegel zu Ω . Der duale Kegel Ω^* ist erneut konvex, und lässt sich durch

$$\Omega^* = \text{Int}(\overline{\Omega}^\#)$$

aus dem abgeschlossenen dualen Kegel bilden. Es gilt $\Omega^* \neq \emptyset$ genau dann, wenn Ω echt ist, in diesem Fall gilt erneut $(\Omega^*)^* = \Omega$.

Gilt $\Omega^* = \Omega$, so heißt Ω selbst-dual. Ein offener selbst-dualer Kegel ist echt.

Ein wesentlicher Bestandteil dieser Arbeit sind Gruppenaktionen. Diese sind auch auf Kegeln möglich:

Definition 1.1.3. Sei Ω ein offener konvexer Kegel.

Die Automorphismengruppe $GL(\Omega)$ sei

$$GL(\Omega) := \{g \in GL(V) \mid g.\Omega = \Omega\} = \{g \in GL(V) \mid g.\overline{\Omega} = \overline{\Omega}\}.$$

Diese ist eine abgeschlossene Untergruppe von $GL(V)$ und daher eine Lie-Gruppe.

Für einen Punkt $a \in \Omega$ seien wie üblich der Stabilisator $GL(\Omega)_a$ von a in $GL(\Omega)$ und der Orbit $\text{Orb}(a)$ definiert als

$$GL(\Omega)_a := \{g \in GL(\Omega) \mid g.a = a\}, \quad \text{Orb}(a) := \{x \in \Omega \mid \exists g \in GL(\Omega) : g.a = x\}.$$

Ein Kegel Ω heißt homogen, wenn $GL(\Omega)$ transitiv auf Ω operiert, d.h. wenn für alle $x, y \in \Omega$ ein $g \in GL(\Omega)$ existiert, sodass $g.x = y$ ist, d.h. wenn für alle $x \in \Omega$ gilt, dass der Orbit der volle Kegel ist, also $\text{Orb}(x) = \Omega$.

Ein Kegel Ω heißt symmetrisch, wenn er homogen und selbst-dual ist.

Für alle $a \in \Omega$ ist $GL(\Omega)_a$ kompakt, dies sind sogar genau alle maximalen kompakten Untergruppen von $GL(\Omega)$. Ist Ω homogen, so sind alle diese Untergruppen konjugiert: Es gilt $GL(\Omega)_b = gGL(\Omega)_a g^{-1}$ für $b = g.a$. Insbesondere folgt für homogene Kegel

$$\Omega = \text{Orb}(a) \simeq GL(\Omega) / GL(\Omega)_a$$

für alle $a \in \Omega$.

Das erste prominente Beispiel ist

Beispiel 1.1.4. (Der Kegel der positiv definiten symmetrischen Matrizen)

Sei $\mathbb{R}_+^{n \times n}$ der Raum der $n \times n$ reellen symmetrischen Matrizen mit dem inneren Produkt $(x|y) = \text{tr}(xy)$. Die Menge

$$\Omega = \{M \in \mathbb{R}_+^{n \times n} \mid M \text{ positiv definit}\}$$

ist ein echter offener konvexer Kegel, tatsächlich ist Ω sogar symmetrisch [F-K, Ex. I.2.2].

Um die Beziehung zwischen symmetrischen Kegeln und Jordan-Algebren zu beschreiben, benötigt man einige weitere Definitionen und Eigenschaften der zugehörigen Lie-Algebra. Dazu sei Ω ein symmetrischer Kegel in einem Euklidischen Vektorraum V .

Definition 1.1.5. Sei G die Zusammenhangskomponente des neutralen Elements in $GL(\Omega)$. Man definiert

$$K = G \cap O(V),$$

den Schnitt von G mit der orthogonalen Gruppe von V . Die Lie-Algebra von G werde mit \mathfrak{g} , die von K mit \mathfrak{k} bezeichnet. Man definiert weiter

$$\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid X^* = X\}.$$

Dann gilt

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid X^* = -X\},$$

und

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}.$$

Die Gruppe K lässt sich mithilfe des Stabilisators eines ausgezeichneten Elements $e \in \Omega$ darstellen, dies wird später die Rolle des Einselementes der zugehörigen Jordan-Algebra spielen.

Proposition 1.1.6. [F-K, I.1.9] Ist Ω ein symmetrischer Kegel, so existiert $e \in \Omega$, sodass

$$GL(\Omega) \cap O(V) \subset GL(\Omega)_e.$$

Es gilt weiterhin, dass

$$K = G_e.$$

Die Gruppe K ist zusammenhängend, und ein Element $X \in \mathfrak{g}$ ist genau dann ein Element von \mathfrak{k} , wenn $X \cdot e = 0$ gilt.

Damit ist das Rüstzeug vorhanden, um die Beziehung zwischen Euklidischen Jordan-Algebren und symmetrischen Kegeln zu beschreiben. Weitere Eigenschaften von Kegeln, insbesondere geometrische Strukturen wie Seiten und Extrempunkte finden sich unter anderem in [Bar, Kap.2], in dieser Arbeit steht jedoch die analytische Anwendung im Vordergrund.

1.2 Jordan-Algebren

Allgemein sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} und V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über \mathbb{K} . Der Vektorraum V heißt eine Algebra, wenn zusätzlich zur Addition ein Produkt, also eine bilineare Abbildung

$$V \times V \rightarrow V; (x, y) \mapsto xy,$$

existiert. Für $x \in V$ sei die Linksmultiplikation $L(x)$ definiert als $L(x)y = xy$. Das neutrale Element bzgl. des Produkts werde mit e bezeichnet. Zu einem Element $x \in V$ sei

$$m(x) := \min\{k > 0 \mid (e, x, x^2, \dots, x^k) \text{ linear abhängig}\} \leq \dim V.$$

Die Zahl $m(x)$ ist der Grad des Minimalpolynoms $f_x(\lambda)$ von x . Man definiert den *Rang* von V als

$$r := \max\{m(x) \mid x \in V\}.$$

Ist $m(x) = r$, so heißt x regulär, und es existiert eine Darstellung

$$f_x(\lambda) = \lambda^r - a_1(x)\lambda^{r-1} + \cdots + (-1)^r a_r(x).$$

Die a_i sind eindeutige, i -homogene Polynome, man bezeichnet insbesondere

$$a_1(x) =: \operatorname{tr}(x), \quad a_r(x) =: \det(x)$$

als Spur und Determinante von x . Die Menge der regulären Elemente ist offen und dicht in V , sodass sich Spur und Determinante auf ganz V fortsetzen lassen (vgl. [F-K, II.2]). Eine Algebra heißt *einfach*, wenn sie nur die trivialen Ideale $\{0\}$ und V besitzt. Die zentralen Algebren in dieser Arbeit sind Jordan-Algebren:

Definition 1.2.1. *Ist V eine \mathbb{K} -Algebra, so heißt V Jordan-Algebra genau dann, wenn für das Produkt die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:*

1. $xy = yx$,
2. $(x^2y)x = x^2(yx)$.

Die zweite Eigenschaft lässt sich auch mit Hilfe der Multiplikationsoperatoren ausdrücken, sie ist äquivalent dazu, dass $L(x)$ mit $L(x^2)$ kommutiert. Eine Jordan-Algebra ist also immer kommutativ, im Allgemeinen allerdings nicht assoziativ.

Jordan-Algebren lassen sich auf natürliche Weise aus assoziativen Algebren gewinnen:

Beispiel 1.2.2.

1. *Ist A eine assoziative \mathbb{K} -Algebra, so ist durch*

$$x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$$

ein Jordan-Produkt definiert. Ist A speziell der Raum der reellen $m \times m$ Matrizen, so ist der Rang $A = m$, das neutrale Element $e = I_m$ und die Spur und Determinante sind die üblichen.

2. *Ist W ein \mathbb{K} -Vektorraum und B eine symmetrische Bilinearform auf W , so ist auf dem Vektorraum $V = \mathbb{K} \times W$ ein Jordan-Produkt definiert durch*

$$(\lambda, v) \circ (\mu, w) := (\lambda\mu + B(v, w), \lambda w + \mu v).$$

Sei im Folgenden V eine Jordan-Algebra mit Einselement e . Man definiert nun eine besondere Klasse von Jordan-Algebren.

Definition 1.2.3. Eine Jordan-Algebra V heißt Euklidisch genau dann, wenn eine positiv definite symmetrische Bilinearform auf V existiert, die assoziativ ist, d.h. es existiert ein inneres Produkt $(u|v)$ auf V , sodass

$$(L(x)u|v) = (u|L(x)v) \quad \forall x, u, v \in V,$$

es gilt also, dass $L(x)$ für alle $x \in V$ selbstadjungiert ist. Eine Jordan-Algebra ist genau dann Euklidisch, wenn sie formal-reell ist, d.h. es gilt für alle $x, y \in V$, dass

$$x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0.$$

Eine besonders wichtige Eigenschaft von Euklidischen Jordan-Algebren ist die Existenz einer Spektralzerlegung, wodurch spätere Beweise deutlich vereinfacht werden. Hierzu benötigt man zunächst den Begriff des *Idempotents*. Diese Elemente werden später die Rolle von Basiselementen in der Spektralzerlegung spielen.

Definition 1.2.4. Ein Element $c \in V$ heißt ein Idempotent, falls $c^2 = c$ gilt. Zwei Idempotente c und d heißen orthogonal genau dann, wenn $cd = 0$, also wenn das Produkt verschwindet. Da $(c|d) = (e|cd)$ wegen der Assoziativität des Skalarprodukts gilt, sind orthogonale Idempotente auch orthogonal bzgl. des inneren Produkts. Ein Idempotent c heißt primitiv, wenn $c \neq 0$ ist und nicht als Summe zweier nicht-verschwindender Idempotente geschrieben werden kann. Eine Menge $\{c_1, \dots, c_k\}$ heißt Jordan frame, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. Alle c_i sind primitive Idempotente,
2. $c_i c_j = 0$ für $i \neq j$,
3. $c_1 + \dots + c_k = e$.

Damit lässt sich nun ein Spektralsatz formulieren:

Satz 1.2.5. [F-K, III.1.2] Sei V eine Euklidische Jordan-Algebra vom Rang r . Dann existieren für jedes $x \in V$ ein Jordan frame c_1, \dots, c_r und $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ sodass

$$x = \sum_{j=1}^r \lambda_j c_j$$

als Linearkombination dargestellt werden kann. Die Zahlen λ_j sind mit Multiplizitäten eindeutig, und es gelten die Formeln

$$\det(x) = \prod_{j=1}^r \lambda_j, \quad \text{tr}(x) = \sum_{j=1}^r \lambda_j$$

für Determinante und Spur von x .

Weiterhin folgt, dass ein Jordan frame in einer Jordan-Algebra V immer genau soviele Elemente besitzt, wie der Rang von V beträgt. Ein Jordan frame erweitert also den Begriff der Eigenraumbasis, ist aber im Allgemeinen keine Basis von V im Vektorraumsinn, da der Rang von V im Allgemeinen kleiner als die Dimension von V ist.

1.3 Der Kegel der Quadrate

Jede Euklidische Jordan-Algebra steht in Beziehung zu einem symmetrischen Kegel und umgekehrt. Dies ist eindeutig bis auf die Wahl des Einselements e . Verschiedene Einselemente lassen sich jedoch auf kanonische Weise ineinander überführen. Näheres hierzu findet man in [F-K, III]. Die Hauptresultate sind:

Satz 1.3.1. *Sei V eine Euklidische Jordan-Algebra und sei Q die Menge ihrer Quadrate, also*

$$Q = \{x^2 \mid x \in V\}.$$

Das Innere Ω von Q ist die Zusammenhangskomponente des neutralen Elements e in den invertierbaren Elementen von V

$$\Omega = \{x^2 \mid x \in V, x \text{ invertierbar}\}^0,$$

und es gilt, dass Ω ein symmetrischer Kegel ist.

Für die Umkehrung greift man auf Proposition 1.1.6 zurück. Ist Ω ein symmetrischer Kegel in einem Euklidischen Vektorraum V , so wählt man ein Element $e \in \Omega$ aus, sodass $K = G_e$ erfüllt ist. Nach 1.1.6 gilt für $X \in \mathfrak{g}$, dass $X \in \mathfrak{k}$ genau dann, wenn $X \cdot e = 0$ ist. Es folgt also $\mathfrak{g} \cdot e = \mathfrak{p} \cdot e = V$, da der Orbit $G \cdot e$ wegen der Transitivität Ω ist. Mit dem Satz von Sard folgt, dass die Abbildung

$$\mathfrak{p} \rightarrow V; X \mapsto X \cdot e$$

bijektiv ist. Bezeichnet man die Umkehrung mit L , d.h. für $x \in V$ sei $L(x)$ das eindeutige Element in \mathfrak{p} , sodass $L(x)e = x$ ist, so folgt:

Satz 1.3.2. *[F-K, II.3.1] Definiert man auf V das Produkt*

$$x \circ y = L(x)y,$$

so ist V eine Euklidische Jordan-Algebra mit Einselement e , und weiterhin ist der Abschluss

$$\overline{\Omega} = \{x^2 \mid x \in V\}$$

der Kegel der Quadrate in V .

Da $L(x) \in \mathfrak{p}$ ist, folgt $L(x) = L(x)^*$, sodass die Assoziativität des Skalarproduktes automatisch gewährleistet ist.

1.4 Klassifikation der Euklidischen Jordan-Algebren

Nach Jordan, von Neumann und Wigner lassen sich einfache Euklidische Jordan-Algebren klassifizieren (vgl. [Baez], [F-K, Kap. V]):

Satz 1.4.1. *Sei V eine einfache Euklidische Jordan-Algebra. Dann gehört V zu einer der folgenden Familien:*

- den hermiteschen Matrizen $\mathcal{H}_r(\mathbb{K})$ vom Rang r über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder \mathbb{H} ,
- dem sogenannten Spin-Faktor, der Algebra vom Rang zwei, die isomorph zu $\mathbb{R} \times W$ ist, wobei W ein Euklidischer Vektorraum ist (vgl. Bsp. 1.2.2.2), oder
- der Ausnahmealgebra, den hermiteschen 3×3 Matrizen $\mathcal{H}_3(\mathbb{O})$ über den Cayley-Zahlen \mathbb{O} .

Hiermit lassen sich alle Euklidischen Jordan-Algebren beschreiben, da nach Proposition [F-K, III.4.4] jede Euklidische Jordan-Algebra halb-einfach und damit eine direkte Summe von eindeutig bestimmten einfachen Euklidischen Jordan-Algebren ist. Die einzelnen Fälle sollen nun genauer betrachtet und die zugehörigen algebraischen Objekte berechnet werden.

1.4.1 Die hermiteschen Matrixalgebren

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder \mathbb{H} . Dann bilden die $r \times r$ hermiteschen Matrizen über \mathbb{K} eine Euklidische Jordan-Algebra mit dem Produkt

$$x \circ y := \frac{1}{2}(xy + yx),$$

die als $\mathcal{H}_r(\mathbb{K})$ bezeichnet wird. Das Produkt \circ ist offensichtlich kommutativ und aufgrund der Assoziativität von \mathbb{K} ist auch $\mathcal{H}_r(\mathbb{K})$ assoziativ, sodass die Jordan-Bedingung erfüllt ist. Das Skalarprodukt ist im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}

$$(x|y) := \text{tr}(xy),$$

Spur und Determinante sind die allgemein üblichen. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ ist das Skalarprodukt

$$(x|y) := \text{Re}(\text{tr}(xy)).$$

Der Unterschied erklärt sich in der Nichtkommutativität der Quaternionen. Im Allgemeinen sind nur Rechtseigenwerte reell (vgl. [D-M]), sodass die Spur des Produkts zweier hermitescher Matrizen im Allgemeinen ebenfalls nicht reell sein muss. Außerdem ist eine zyklische Vertauschung der Matrizen unter der Spur ohne den Realteil im Allgemeinen falsch, sodass keine Symmetrie gelten würde.

Ebenfalls aufgrund der Nichtkommutativität der Quaternionen macht die herkömmliche Determinante keinen Sinn. Es gilt jedoch

Lemma 1.4.2. [Up] Die hermiteschen Matrizen $\mathcal{H}_r(\mathbb{H})$ lassen sich in

$$\mathbb{C}_-^{2r \times 2r} := \{A \in \mathbb{C}^{2r \times 2r} \mid a_{ij} = -a_{ji}\}$$

einbetten. Mit der Zerlegung $\mathcal{H}_r(\mathbb{H}) \ni h = u + vj$ mit $u, v \in \mathbb{C}^{r \times r}$ und $u = u^*, v = -v^t$ folgt

$$h \mapsto \begin{pmatrix} v & u \\ -\bar{u} & \bar{v} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_-^{2r \times 2r}.$$

Man betrachtet daher als Determinante eine Form auf schiefsymmetrischen komplexen Matrizen mit gerader Zeilen- und Spaltenanzahl, die sogenannte

Definition 1.4.3. (Pfaffsche Form)

Sei $s = (s_{ij})$ eine schiefsymmetrische $r \times r$ -Matrix über \mathbb{R} oder \mathbb{C} . Dann ist die Pfaffsche von s definiert als:

$$\Delta(s) := \text{Pf}(s) := \begin{cases} 0 & r=2m+1 \\ \frac{1}{m! 2^m} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \text{sign}(\sigma) s_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots s_{\sigma(r-1)\sigma(r)} & r=2m. \end{cases}$$

Für die Pfaffsche gilt nach [P-S]:

Lemma 1.4.4. Die Determinante einer schiefsymmetrischen Matrix ist das Quadrat eines Polynoms in ihren Einträgen, denn es gilt

$$(\text{Pf}(s))^2 = \det s.$$

In allen drei Fällen ist der Rang r , und das Einselement ist die übliche Einheitsmatrix I_r . Da es sich um hermitesche Matrizen handelt, existiert für alle $x \in \mathcal{H}_r(\mathbb{K})$ eine Matrix $h \in U_r(\mathbb{K})$, den unitären $r \times r$ Matrizen über \mathbb{K} , sodass

$$x = h d_x h^*$$

gilt, wobei d_x eine Diagonalmatrix mit reellen Einträgen, den (Rechts-)Eigenwerten von x , ist. Damit folgt

$$x^2 = h d_x h^* h d_x h^* = h d_x^2 h^*,$$

sodass der zugehörige Kegel

$$\Omega = \Pi_r(\mathbb{K}) := \{x \in \text{GL}(r, \mathbb{K}) \mid x \text{ positiv definit, } x = x^*\}$$

der Kegel der positiv definiten hermiteschen Matrizen über \mathbb{K} ist. Die Automorphismengruppe $\text{GL}(\Omega)$ ist die lineare Gruppe $\text{GL}(r, \mathbb{K})$ mit der Aktion

$$\text{GL}(\Omega) \times \Omega \rightarrow \Omega; g.x = gxg^*.$$

Diese Aktion ist transitiv: Sei $x = h d_x h^* \in \Omega$, dann existiert eine reelle, positiv definite, diagonale Matrix w_x mit $w_x^2 = d_x$, und es gilt

$$\begin{aligned} x &= h d_x h^* \\ &= h w_x^2 h^* \\ &= h w_x w_x^* h^* \\ &= h w_x (h w_x)^* = (h w_x).e. \end{aligned}$$

Der Stabilisator $K = G_e$ von e berechnet sich zu

$$K = \{g \in \text{GL}(\Omega) \mid g.e = e\} = \{g \in \text{GL}(r, \mathbb{K}) \mid gg^* = e\} = U_r(\mathbb{K}).$$

Bemerkung 1.4.5. Um eine disjunkte Klassifizierung zu erhalten, muss der Rang $r \geq 3$ vorausgesetzt werden, da für $r = 2$ die hermiteschen Matrizen isomorph zu einem Spin-Faktor sind.

1.4.2 Spin-Faktoren

Sei W ein reeller, n -dimensionaler Euklidischer Vektorraum und B die zugehörige symmetrische Bilinearform auf W . Der sogenannte Spin-Faktor ist der Vektorraum $V = \mathbb{R} \times W$ mit dem Jordan-Produkt definiert durch

$$(\lambda, v) \circ (\mu, w) := (\lambda\mu + B(v, w), \lambda w + \mu v).$$

Das Skalarprodukt auf V ist die natürliche Fortsetzung von B :

$$(x|y) = ((\lambda, v)|(\mu, w)) := \lambda\mu + B(v, w),$$

also genau der skalare Anteil des Jordan-Produkts. Das Einselement ist $e = (1, 0)$, und für $x = (\lambda, v)$ gilt

$$x^2 - 2\lambda x + (\lambda^2 - B(v, v))e = 0.$$

Es ist daher $\text{Rang } V = 2$, und für Spur und Determinante folgt

$$\text{tr}(x) = 2\lambda, \det(x) = \lambda^2 - B(v, v).$$

Dies ist die *Minkowski-Determinante*. Der Spin-Faktor V lässt sich auch in Matrixform visualisieren, wobei Spur und Determinante leicht ersichtlich werden: Man identifiziert

$$e = (1, 0) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } (0, v) \equiv \begin{pmatrix} 0 & v \\ v^* & 0 \end{pmatrix},$$

wobei v^* der zu v duale Vektor sei. Das Produkt eines Vektors v mit einem dualen w^* ist dann wie üblich $B(v, w)$, und so ergibt sich:

$$\begin{aligned} (\lambda, v) \circ (\mu, w) &\equiv \begin{pmatrix} \lambda & v \\ v^* & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & w \\ w^* & \mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda\mu + B(v, w) & \lambda w + \mu v \\ \lambda w^* + \mu v^* & \lambda\mu + B(v, w) \end{pmatrix} \\ &\equiv (\lambda\mu + B(v, w), \lambda w + \mu v). \end{aligned}$$

Die Spur und die Determinante eines Elements $(\lambda, v) \equiv \begin{pmatrix} \lambda & v \\ v^* & \lambda \end{pmatrix}$ lassen sich dann nach den allgemein üblichen Regeln sofort ablesen.

Der zugehörige Kegel der Quadrate ist der sogenannte *Lorentz-Kegel*

$$\Lambda_{n+1} := \left\{ x = (\lambda, v) \in V \mid \lambda > \sqrt{B(v, v)} \right\} = \{x = (\lambda, v) \in V \mid [x, x] > 0, \lambda > 0\},$$

mit

$$[x, y] = [(\lambda, v), (\mu, w)] := \lambda\mu - B(v, w).$$

Es gilt

Lemma 1.4.6. Λ_{n+1} ist ein symmetrischer Kegel.

Beweis: Der Beweis erfolgt in zwei Schritten. Zunächst wird die Selbst-Dualität gezeigt. Zum Beweis der Inklusion $\Lambda_{n+1} \subset \Lambda_{n+1}^*$ sei $y = (\mu, w) \in \Lambda_{n+1}$, also $\mu > \sqrt{B(w, w)} \geq 0$. Für alle $x = (\lambda, v) \in \overline{\Lambda_{n+1}} \setminus \{0\}$ folgt dann wegen $\lambda \geq \sqrt{B(v, v)} \geq 0$:

$$\begin{aligned} (x|y) &= \lambda\mu + B(v, w) \\ &\geq \lambda\mu - |B(v, w)| \\ &\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\geq} \lambda\mu - \sqrt{B(v, v)}\sqrt{B(w, w)} \\ &> 0, \end{aligned}$$

also ist $y \in \Lambda_{n+1}^*$. Zur anderen Inklusion sei $y = (\mu, w) \in \Lambda_{n+1}^*$. Da insbesondere mit $\lambda > 0$ folgt, dass $x = (\lambda, 0)$ in Λ_{n+1} liegt, muss $\mu > 0$ gelten. Ist $w = 0$, so folgt $y \in \Lambda_{n+1}$. Andernfalls definiert man

$$x = (\lambda, v) := \left(\sqrt{B(w, w)}, -w \right) \neq 0.$$

Es gilt $x \in \overline{\Lambda_{n+1}} \setminus \{0\}$, sodass

$$0 < (x|y) = \lambda\mu + B(v, w) = \sqrt{B(w, w)}\mu - B(w, w)$$

folgt, somit ist $0 < \mu - \sqrt{B(w, w)}$ und y liegt in Λ_{n+1} . Damit ist der Lorentz-Kegel selbst-dual.

Zum Beweis der Homogenität betrachtet man die Gruppe

$$G = \text{GL}(\Omega)^0 = \mathbb{R}_+ \times \text{SO}_B^0(1, n),$$

das Produkt aus den Dilatationen und der Gruppe

$$\text{SO}_B^0(1, n) := \{g \in \text{GL}(V) \mid [gx, gy] = [x, y] \ \forall x, y \in V\}^0,$$

der Identitätskomponente der Transformationen, die das Produkt $[\cdot, \cdot]$ invariant lassen. Zwei spezielle Typen von Elementen in $\text{SO}_B^0(1, n)$ sind

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{U} \end{pmatrix}$$

mit $\tilde{U} \in \text{SO}_B(n) = \{g \in \text{GL}(W) \mid B(gx, gy) = B(x, y) \ \forall x, y \in W\}^0$, der speziellen orthogonalen Gruppe zu B , und hyperbolische Rotationen. Diese Elemente sollen nun näher betrachtet werden:

Da B eine symmetrische, positiv definite Form ist, existiert immer eine orthogonale Matrix $\tilde{S} \in \text{SO}_B(n)$ mit $\tilde{S}^t B \tilde{S} = D_B$, wobei D_B eine diagonale Matrix mit positiven Eigenwerten ist. Sei $b := \sqrt{(D_B)_{nn}}$ die Wurzel des n -ten Eigenwerts. Dann sei die hyperbolische Rotation h_t als

$$h_t := \begin{pmatrix} \cosh(t) & 0 & b \sinh(t) \\ 0 & I_{n-1} & 0 \\ \frac{1}{b} \sinh(t) & 0 & \cosh(t) \end{pmatrix}$$

definiert. Es gilt damit:

$$\begin{aligned}
h_t.x &= \begin{pmatrix} \cosh(t) & 0 & b \sinh(t) \\ 0 & I_{n-1} & 0 \\ \frac{1}{b} \sinh(t) & 0 & \cosh(t) \end{pmatrix} . (\lambda, v) \\
&= \left(\cosh(t)\lambda + b \sinh(t)v_n, \left(v_1, \dots, v_{n-1}, \frac{1}{b} \sinh(t)\lambda + \cosh(t)v_n \right) \right) \\
&=: \left(\cosh(t)\lambda + b \sinh(t)v_n, \left(\tilde{v}, \frac{1}{b} \sinh(t)\lambda + \cosh(t)v_n \right) \right).
\end{aligned}$$

Bezeichne wie oben

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{S} \end{pmatrix}.$$

Hiermit folgt

$$\begin{aligned}
[Sh_{t.x}, Sh_{t.x}] &= (\lambda, v) h_t^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{S} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{S} \end{pmatrix} h_t \begin{pmatrix} \lambda \\ v \end{pmatrix} \\
&= \left(h_t \begin{pmatrix} \lambda \\ v \end{pmatrix} \right)^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\underbrace{\tilde{S}^t B \tilde{S}}_{D_B} \end{pmatrix} \left(h_t \begin{pmatrix} \lambda \\ v \end{pmatrix} \right) \\
&= (\cosh(t)\lambda + b \sinh(t)v_n)^2 \\
&\quad - D_B \left(\left(\tilde{v}, \frac{\sinh(t)}{b} \lambda + \cosh(t)v_n \right), \left(\tilde{v}, \frac{\sinh(t)}{b} \lambda + \cosh(t)v_n \right) \right) \\
&\stackrel{D_B \text{ diag.}}{=} \cosh(t)^2 \lambda^2 + 2 \cosh(t) \sinh(t) b \lambda v_n + b^2 \sinh(t)^2 v_n^2 \\
&\quad - D_B((\tilde{v}, 0), (\tilde{v}, 0)) - b^2 \left(\frac{\sinh(t)}{b} \lambda + \cosh(t)v_n \right)^2 \\
&= \cosh(t)^2 \lambda^2 + 2 \cosh(t) \sinh(t) b \lambda v_n + b^2 \sinh(t)^2 v_n^2 \\
&\quad - D_B((\tilde{v}, 0), (\tilde{v}, 0)) - \sinh(t)^2 \lambda^2 - 2 \cosh(t) \sinh(t) b \lambda v_n - b^2 \cosh(t)^2 v_n^2 \\
&= (\cosh(t)^2 - \sinh(t)^2) \lambda^2 + b^2 (\sinh(t)^2 - \cosh(t)^2) v_n^2 - D_B((\tilde{v}, 0), (\tilde{v}, 0)) \\
&= \lambda^2 - b^2 v_n^2 - D_B((\tilde{v}, 0), (\tilde{v}, 0)) \\
&= \lambda^2 - D_B(v, v) \\
&\stackrel{\tilde{S} \in SO_B}{=} \lambda^2 - B(v, v) \\
&= [x, x].
\end{aligned}$$

Zusätzlich gilt $\det(h_t) = 1$, sodass $H_t := Sh_t \in SO_B(1, n)$ ist.

Mit diesen zwei Typen von Matrizen lässt sich die Transitivität von G auf Λ_{n+1} beweisen. Sei dazu $x = (\lambda, v) \in \Lambda_{n+1}$. Zu zeigen ist, dass ein $g \in G$ existiert, sodass $g.e = x$ ist. Dazu wird x zunächst normiert. Sei

$$c := [x, x]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\lambda^2 - B(v, v)} > 0$$

und

$$y = (\mu, w) := \left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - B(v, v)}}, \frac{v}{\sqrt{\lambda^2 - B(v, v)}} \right).$$

Dann gilt $[y, y] = 1$ und $x = cy$, d.h. man hat einen Einheitsvektor in Richtung x gefunden. Mit $r := \sqrt{B(w, w)}$ existiert eine Drehung $\tilde{U} \in SO_B(n)$, sodass

$$w^t = \tilde{U}\tilde{S}\left(0, \dots, 0, \frac{r}{b}\right)^t$$

gilt, denn $B\left(\left(0, \dots, 0, \frac{r}{b}\right), \left(0, \dots, 0, \frac{r}{b}\right)\right) = b^2 \left(\frac{r}{b}\right)^2 = r^2 = B(w, w)$. Es ist jedoch

$$[y, y] = \mu^2 - r^2 = 1,$$

deswegen existiert ein $t_0 \geq 0$ mit $\mu = \cosh(t_0)$, $r = \sinh(t_0)$, sodass

$$\begin{aligned} cUH_{t_0}e &= cUSh_{t_0}(1, 0, \dots, 0)^t \\ &= cUS\left(\cosh(t_0), 0, \dots, 0, \frac{\sinh(t_0)}{b}\right)^t \\ &= cUS\left(\mu, 0, \dots, 0, \frac{r}{b}\right)^t \\ &= c(\mu, w)^t \\ &= cy = x. \end{aligned}$$

Somit ist die Aktion von G auf Λ_{n+1} transitiv, und Λ_{n+1} ist insgesamt ein symmetrischer Kegel. \square

Um zu zeigen, dass Λ_{n+1} der zu V gehörige Kegel ist, sei $x = (\lambda, v) \in V$. Dann ist

$$x^2 = (\lambda^2 + B(v, v), 2\lambda v) =: y = (\mu, w).$$

Für y folgt

$$\begin{aligned} \mu^2 - B(w, w) &= (\lambda^2 + B(v, v))^2 - B(2\lambda v, 2\lambda v) \\ &= \lambda^4 + 2\lambda^2 B(v, v) + B(v, v)^2 - 4\lambda^2 B(v, v) \\ &= (\lambda^2 - B(v, v))^2 > 0. \end{aligned}$$

Der zugehörige Kegel Ω ist damit in dem Lorentz-Kegel Λ_{n+1} enthalten. Da aber sowohl Ω als auch Λ_{n+1} selbst-dual sind, folgt $\Omega = \Lambda_{n+1}$, denn allgemein gilt für Kegel die Beziehung

$$\Omega_1 \subset \Omega_2 \Rightarrow \Omega_2^* \subset \Omega_1^*.$$

Der Stabilisator $K = G_e$ von e berechnet sich zu

$$K = \{g \in \text{GL}(\Omega) \mid g.e = e\} = \{g \in \mathbb{R}_+ \times SO_B^0(1, n) \mid g.(1, 0, \dots, 0) = (1, 0, \dots, 0)\} = SO_B(n).$$

1.4.3 Die Ausnahmealgebra

Die Ausnahmealgebra oder *Albert-Algebra* $\mathcal{H}_3(\mathbb{O})$ ist die Algebra der 3×3 hermiteschen Matrizen über den Cayley-Zahlen \mathbb{O} . Die Cayley-Zahlen bilden eine reelle Divisionsalgebra mit der Basis $\{1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ und der Involution

$$\begin{aligned} \bar{\cdot} : \mathbb{O} &\longrightarrow \mathbb{O} \\ x = x_0 + \sum_{i=1}^7 x_i e_i &\mapsto \bar{x} = x_0 - \sum_{i=1}^7 x_i e_i, \end{aligned}$$

sie sind aber weder kommutativ noch assoziativ. Die Multiplikation lässt sich mit den folgenden Regeln konstruieren (vgl. [Baez]):

1. Es gilt $e_i^2 = -1$ für alle $1 \leq i \leq 7$.
2. Für $i \neq j$ ist $e_i e_j = -e_j e_i$.
3. Gilt $e_i e_j = e_k$, so folgt $e_{i+1} e_{j+1} = e_{k+1}$ mit Indices in \mathbb{Z}_7 .
4. Gilt $e_i e_j = e_k$, so folgt $e_{2i} e_{2j} = e_{2k}$ mit Indices in \mathbb{Z}_7 .
5. Es gilt $e_1 e_2 = e_4$.

Man definiert analog zu komplexen Zahlen und Quaternionen:

Definition 1.4.7. Für $x \in \mathbb{O}$ ist $n(x) := x\bar{x} = \bar{x}x$ die Norm von x und $Re(x) := \frac{1}{2}(x + \bar{x}) = x_0$ der Realteil von x .

Unter bestimmten Umständen gilt auch bei den Cayley-Zahlen Assoziativität:

Proposition 1.4.8. [Scha] Seien $x, y, z \in \mathbb{O}$. Dann gelten die folgenden Regeln:

1. $(xy)x = x(yx) =: xyx$ (Flexibilität)
2. $x(xy) = (xx)y, (yx)x = y(xx)$ (Alternativ-Gesetze)
3. $x(y(xz)) = (xyx)z, ((zx)y)x = z(xy), (xy)(zx) = x(yz)x$ (Formeln von Moufang)
4. $Re((xy)z) = Re(x(yz)) =: Re(xyz)$

Die Spur auf $\mathcal{H}_3(\mathbb{O})$ ist die allgemein übliche, die Determinante ist jedoch aufgrund der Nicht-Assoziativität von \mathbb{O} die sogenannte *Freudenthal-Determinante* (vgl. [Freu]):

Definition 1.4.9. Sei $x = \begin{pmatrix} \alpha & w & v \\ \bar{w} & \beta & u \\ \bar{v} & \bar{u} & \gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_3(\mathbb{O})$. Dann ist die Determinante von x definiert als

$$\det x := \alpha\beta\gamma - (\alpha n(u) + \beta n(v) + \gamma n(w)) + 2Re(u\bar{v}w).$$

Aufgrund der vorherigen Eigenschaften aus Prop.1.4.8 ist diese trotz der fehlenden Assoziativität wohldefiniert.

Der Rang von $\mathcal{H}_3(\mathbb{O})$ ist drei, das Einselement ist die übliche Einheitsmatrix I_3 . Es gilt

Satz 1.4.10. [F-K, V.2.5] Für alle $x \in \mathcal{H}_3(\mathbb{O})$ existiert ein $h \in F_4$, der speziellen Liegruppe der Automorphismen von $\mathcal{H}_3(\mathbb{O})$, die die Spur invariant lassen, sodass $h.x$ Diagonalgestalt besitzt.

Damit ist der zugehörige Kegel Ω der Kegel

$$\Pi_3(\mathbb{O}) := \{x \in \mathcal{H}_3(\mathbb{O}) \mid x \text{ positiv definit}\}.$$

Die Gruppe $G = GL(\Omega)^0$ ist die Ausnahmegruppe E_6 , die Automorphismengruppe K ist nach dem vorhergehenden Satz F_4 .

Kapitel 2

Die Segal-Bargmann-Transformation und die Siegel-Disk

In diesem Kapitel wird die bereits bekannte Ausgangslage beschrieben. Die klassische Segal-Bargmann-Transformation wird definiert, und das in [A-U] betrachtete Skalarprodukt auf komplexifizierten symmetrischen Gebieten wird eingeführt. Dieses wird dann in dem Spezialfall Rang eins detailliert betrachtet, da im nächsten Kapitel die Verallgemeinerung in dieser Situation durchgeführt wird.

2.1 Klassische Segal-Bargmann-Transformation

Nach [A-U2] definiert man das folgende Skalarprodukt, das sogenannte *Fischer-Produkt*, als

$$\langle f|g \rangle_{\mathcal{F}} = \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^n \int_{\mathbb{C}^n} f(\zeta) \overline{g(\zeta)} e^{-\nu|\zeta|^2} d\zeta.$$

Der Raum der bezüglich des Fischer-Produkts integrierbaren holomorphen Funktionen

$$\mathcal{F}_n := \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n) \mid \langle f|f \rangle_{\mathcal{F}} < \infty\}$$

heißt *Fock-Raum*. Es folgt, dass

$$\left\{ b_{\alpha} \mid b_{\alpha} = \sqrt{\frac{\nu^{|\alpha|}}{\alpha!}} \zeta^{\alpha} \text{ mit } \alpha_i \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

eine Orthonormalbasis von \mathcal{F}_n ist (vgl. [Fo, Th. 1.63]).

Definition 2.1.1. Zu $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\zeta \in \mathbb{C}^n$ und $\nu \in \mathbb{R}$ sei die Segal-Bargmann-Transformation von f erklärt als

$$Bf(\zeta) = \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{n}{4}} \int f(\xi) e^{-\frac{\nu}{2}(\zeta|\bar{\zeta}) - \frac{\nu}{2}(\xi|\xi) + \sqrt{2\nu}(\zeta|\xi)} d\xi.$$

Die Segal-Bargmann-Transformation B ist eine Isometrie von $L^2(\mathbb{R}^n)$ nach \mathcal{F}_n (vgl. [A-U2]), und sie erhält die Parität von Funktionen:

Sei $\widetilde{f}(x) := f(-x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\widetilde{Bf}(\zeta) &= \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{n}{4}} \int f(\xi) e^{-\frac{\nu}{2}(-\zeta|\overline{-\zeta}) - \frac{\nu}{2}(\xi|\xi) + \sqrt{2\nu}(-\zeta|\xi)} d\xi \\ &= \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{n}{4}} \int f(\xi) e^{-\frac{\nu}{2}(\zeta|\overline{\zeta}) - \frac{\nu}{2}(-\xi|-\xi) - \sqrt{2\nu}(\zeta|\xi)} d\xi \\ &= \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{n}{4}} \int f(-x) e^{-\frac{\nu}{2}(\zeta|\overline{\zeta}) - \frac{\nu}{2}(x|x) - \sqrt{2\nu}(\zeta|-x)} dx \\ &= \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{n}{4}} \int f(-x) e^{-\frac{\nu}{2}(\zeta|\overline{\zeta}) - \frac{\nu}{2}(x|x) + \sqrt{2\nu}(\zeta|x)} dx = B\widetilde{f}(\zeta).\end{aligned}$$

Um vom Fock-Raum in den $L^2(\mathbb{R}^n)$ zu gelangen, benötigt man die inverse Segal-Bargmann-Transformation. Diese kann aufgrund der Unitarität von B leicht berechnet werden (analog zu [Fo]). Seien $F \in \mathcal{F}_n$ und $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\langle B^{-1}F | g \rangle_{L^2} &= \langle F | Bg \rangle_{\mathcal{F}} \\ &= \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^n \int_{\mathbb{C}^n} \overline{Bg(\zeta)} F(\zeta) e^{-\nu|\zeta|^2} d\zeta \\ &= \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{n}{4}} \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^n \int_{\mathbb{C}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{g(\xi)} e^{-\frac{\nu}{2}(\overline{\zeta}|\zeta) - \frac{\nu}{2}(\xi|\xi) + \sqrt{2\nu}(\overline{\zeta}|\xi) - \nu|\zeta|^2} d\xi F(\zeta) d\zeta, \\ &= \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{5n}{4}} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{g(\xi)} \int_{\mathbb{C}^n} e^{-\frac{\nu}{2}(\overline{\zeta}|\zeta) - \frac{\nu}{2}(\xi|\xi) + \sqrt{2\nu}(\overline{\zeta}|\xi) - \nu|\zeta|^2} F(\zeta) d\zeta d\xi,\end{aligned}$$

also folgt

$$B^{-1}F(\xi) = \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{5n}{4}} \int_{\mathbb{C}^n} F(\zeta) e^{-\frac{\nu}{2}(\overline{\zeta}|\zeta) - \frac{\nu}{2}(\xi|\xi) + \sqrt{2\nu}(\overline{\zeta}|\xi) - \nu|\zeta|^2} d\zeta.$$

Für weitere Rechnungen erweist es sich jedoch als praktikabler, den Raum $L^2(\mathbb{R}^n)$ mit einem Gaußmaß zu gewichten. Sei

$$L_\nu^2(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \mid (f|f) := \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 e^{-\nu(x|x)} dx < \infty \right\}.$$

Ein großer Vorteil dieses Raumes gegenüber dem L^2 mit Lebesguemaß ist, dass Polynome dicht enthalten sind. Die Segal-Bargmann-Transformation ändert sich nur minimal:

Lemma 2.1.2. *Es gilt*

$$\mathcal{B}f : L_\nu^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}_n; \mathcal{B}f(\zeta) = \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{-\frac{\nu}{2}(\zeta|\overline{\zeta}) - \nu(\xi|\xi) + \sqrt{2\nu}(\zeta|\xi)} d\xi,$$

und

$$\mathcal{B}^{-1}f : \mathcal{F}_n \rightarrow L_\nu^2(\mathbb{R}^n); \mathcal{B}^{-1}f(\xi) = \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^n \int_{\mathbb{C}^n} f(\zeta) e^{-\frac{\nu}{2}(\overline{\zeta}|\zeta) + \sqrt{2\nu}(\overline{\zeta}|\xi) - \nu(\zeta|\zeta)} d\zeta.$$

Die Segal-Bargmann-Transformation \mathcal{B} erhält weiterhin die Parität von Funktionen.

Beweis: Die neue Segal-Bargmann-Transformation muss nun für Funktionen der Form $f^*(\xi) := \left(\frac{\pi}{\nu}\right)^{\frac{n}{4}} f(\xi) e^{\frac{\nu}{2}(\xi|\xi)}$ gelten, wobei aus $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ sofort $f^* \in L^2_\nu(\mathbb{R}^n)$ folgt. \square

Die Segal-Bargmann-Transformation \mathcal{B} lässt sich mit Hilfe eines Integalkerns schreiben:

$$\mathcal{B}f(\zeta) = \langle f | \overline{B} \rangle_{L^2_\nu}, \quad \mathcal{B}^{-1}f(\xi) = \langle f | B \rangle_{\mathcal{F}}$$

mit $B(\zeta, \xi) = e^{-\frac{\nu}{2}(\zeta|\bar{\zeta}) + \sqrt{2\nu}(\zeta|\xi)}$.

Sei nach [Seg, Abschn. 5] V ein reeller Vektorraum mit schiefsymmetrischer Form $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ und Polarisierung $V_{\mathbb{C}} = W \oplus \overline{W}$. Sei $\mathcal{S}(W)$ die *Siegel-Disk*, d.h. Operatoren $z : \overline{W} \rightarrow W$, sodass

1. $\omega(\overline{w_1}, z\overline{w_2}) = \omega(\overline{w_2}, z\overline{w_1})$ gilt und
2. $I - \bar{z}z$ positiv definit ist.

Es gilt für $z, w \in \mathcal{S}(W)$:

$$\left\langle \det(I - \diamond \overline{w})^{-\frac{1}{2}} \middle| \det(I - \diamond \bar{z})^{-\frac{1}{2}} \right\rangle = \left\langle e^{\frac{\overline{w}}{2}} \middle| e^{\frac{\bar{z}}{2}} \right\rangle_{\mathcal{S}(W)}$$

nach [Seg] und [G] mit den dort definierten Skalarprodukten. Man hat also die Beziehung

$$\det(I - \diamond \overline{w})^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}\overline{w}}.$$

Sei $\{e_i\}$ eine Orthonormalbasis von W . Es folgt nach Definition des Skalarprodukts auf $\mathcal{S}(W)$:

$$\left\langle e_1^{i_1} \otimes \dots \otimes e_n^{i_n} \middle| e_1^{j_1} \otimes \dots \otimes e_m^{j_m} \right\rangle = \delta_{mn} \delta_{i_1, j_1} \dots \delta_{i_n, j_n} i_1! \dots i_n!$$

Daher folgt, dass

$$\left\{ E_\alpha \middle| E_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1! \dots \alpha_n!}} e_1^{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_n^{\alpha_n} = \sqrt{\frac{1}{\alpha!}} e^\alpha \right\}$$

eine Orthonormalbasis von $\mathcal{S}(W)$ ist.

Sei

$$w = \sum_{i=1}^n w_i e_i \otimes e_i \in \bigotimes_{\text{sym}}^+(W)$$

gegeben. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} e^{\frac{\overline{w}}{2}} &= e^{\sum_{i=1}^n \frac{\overline{w}_i}{2} e_i \otimes e_i} = \prod_{i=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\overline{w}_i e_i \otimes e_i)^{\otimes k}}{2^k k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|i|=k} \frac{\overline{w}^i}{i! 2^k} e^{\otimes 2i} \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|i|=k} \frac{\nu^i \overline{w}^i}{i! 2^k} \zeta^{2i} = \prod_{i=1}^n e^{\frac{\nu}{2} \overline{w}_i \zeta_i^2} = e^{\frac{\nu}{2}(\zeta|w\bar{\zeta})} \end{aligned}$$

im geraden Fock-Raum. Man erhält das folgende System:

$$\bigotimes_{\text{sym}}^+(W) \xleftarrow[\text{Trans.}]{\text{Basis}} \mathcal{F}_n^+ \xleftarrow{\mathcal{B}} L_+^2(\mathbb{R}^n)$$

Für die folgende Relation kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit w als diagonal angenommen werden, da das Skalarprodukt invariant unter unitären Transformationen ist:

$$\begin{aligned}
\left\langle e^{\frac{\nu}{2}(\zeta|w\bar{\zeta})} \middle| e^{\frac{\nu}{2}(\zeta|w\bar{\zeta})} \right\rangle_{\mathcal{F}} &= \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^n \int_{\mathbb{C}^n} e^{\frac{\nu}{2}(\zeta|w\bar{\zeta})} \overline{e^{\frac{\nu}{2}(\zeta|w\bar{\zeta})}} e^{-\nu|\zeta|^2} d\zeta \\
&= \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^n \int_{\mathbb{C}^n} e^{\nu\left(\frac{\bar{w}_j}{2}\zeta_j^2 + \frac{w_j}{2}\bar{\zeta}_j^2 - |\zeta_j|^2\right)} d\zeta_j \\
&= \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\nu\left(\frac{\bar{w}_j}{2}(x_j^2 + 2ix_jy_j - y_j^2) + \frac{w_j}{2}(x_j^2 - 2ix_jy_j - y_j^2) - x_j^2 - y_j^2\right)} dx_j dy_j \\
&= \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\nu\left((\operatorname{Re}(w_j)-1)x_j^2 - (\operatorname{Re}(w_j)+1)y_j^2 - 2\operatorname{Im}(w_j)x_jy_j\right)} dx_j dy_j \\
&= \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\nu(\operatorname{Re}(w_j)+1)y_j^2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\nu\left((\operatorname{Re}(w_j)-1)\left(x_j - \frac{2\operatorname{Im}(w_j)}{2(\operatorname{Re}(w_j)-1)}y_j\right)^2 - \frac{(\operatorname{Im}(w_j))^2}{\operatorname{Re}(w_j)-1}y_j^2\right)} dx_j dy_j \\
&= \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\nu\left(\operatorname{Re}(w_j)+1 + \frac{(\operatorname{Im}(w_j))^2}{\operatorname{Re}(w_j)-1}\right)y_j^2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\nu(1-\operatorname{Re}(w_j))}} dy_j \\
&= \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^n \prod_{j=1}^n \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\nu\left(\operatorname{Re}(w_j)+1 + \frac{(\operatorname{Im}(w_j))^2}{\operatorname{Re}(w_j)-1}\right)}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\nu(1-\operatorname{Re}(w_j))}} \\
&= \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{(\operatorname{Re}(w_j)+1)(1-\operatorname{Re}(w_j)) - (\operatorname{Im}(w_j))^2}} \\
&= \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 - (\operatorname{Re}(w_j))^2 - (\operatorname{Im}(w_j))^2}} \\
&= \prod_{j=1}^n (1 - |w_j|^2)^{-\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

die Norm wird also wie erwartet erhalten. Das Integral existiert für $F(\zeta) = e^{\frac{\nu}{2}(\zeta|w\bar{\zeta})}$ genau für alle $w \in \mathcal{S}(W)$.

2.2 Jordan-Algebren und die Wallach-Menge

Der Raum, auf den die Segal-Bargmann-Transformation erweitert werden soll, wird nun in einem breiteren Rahmen betrachtet. Dazu sind zunächst einige Resultate der Theorie der Jordan-Algebren und der Wallach-Menge zu nennen (vgl. [A-U]). Sei $B \subset \mathbb{C}^d$ ein irreduzibles beschränktes symmetrisches Gebiet in der Harish-Chandra-Realisierung mit Rang r und komplexer Dimension d . Dann ist die Menge B die offene Einheitskugel in $Z = \mathbb{C}^d$ bezüglich einer bestimmten Norm, sodass $G := \operatorname{Aut}(B)$, die Gruppe der biholomorphen Automorphismen auf

B , transitiv auf B operiert. Die Gruppe G besitzt eine maximale kompakte Untergruppe

$$K := \{\phi \in G \mid \phi(0) = 0\}$$

und es folgt $B \simeq G/K$.

Sei $\{uv^*w\}$ das hermitesche Jordan-Tripel-Produkt auf Z und $u \square v^*$ der lineare Operator $(u \square v^*)w = \{uv^*w\}$, der w das Tripel-Produkt zuordnet. Ein Element $v \in Z$ mit $\{vv^*v\} = v$ heißt Tripotent. Jedes Tripotent v induziert eine zugehörige Peirce-Zerlegung

$$Z = Z_v^1 \oplus Z_v^{\frac{1}{2}} \oplus Z_v^0,$$

wobei $Z_v^\mu := \{z \in Z \mid \{vv^*z\} = \mu z\}$, $\mu = 1, \frac{1}{2}, 0$, die Eigenräume des Operators $v \square v^*$ sind. Die zugehörigen Peirce-Projektionen werden mit P_v^μ bezeichnet. Diese sind nach Definition die Projektionen, deren Bild Z_v^μ und deren Kern die Summe der beiden anderen Peirce-Räume ist. Abkürzend sei

$$M_v^\mu := M \cap Z_v^\mu$$

der Schnitt einer Menge M mit einem Peirce-Raum Z_v^μ .

Die Räume Z_v^μ sind Untertripel von Z und der Rang eines Tripotent v ist nach Definition der Rang von Z_v^1 . Es bezeichne S_j die Menge der Tripotenten von Rang j für $j = 0, \dots, r$. Die Menge $S_r =: S$ ist der Shilov-Rand von B . Fixiert man ein maximales Tripotent e , d.h. es ist $e \in S$ mit $Z_e^0 = 0$, so folgt, dass Z_e^1 eine Jordan- $*$ -Algebra mit Produkt $z \circ w := \{ze^*w\}$, Involution $z^* := \{ez^*e\}$ und neutralem Element e ist. Der reelle Anteil

$$X := \{x \in Z_e^1 \mid x^* = x\}$$

der selbstadjungierten Elemente in Z_e^1 ist eine irreduzible Euklidische Jordan-Algebra vom Rang r .

Sei nun ein festes Jordan-Frame $e = e_1 + \dots + e_r$ gegeben. Dann existieren die zugehörigen Peirce-Zerlegungen

$$X = \bigoplus_{1 \geq i \geq j \geq r} X_{ij}, \quad Z = \bigoplus_{1 \geq i \geq j \geq r} Z_{ij}$$

mit $Z_{ij} = X_{ij}^{\mathbb{C}}$. Es folgt $X_{ii} = \mathbb{R}e_i$ und $a := \dim X_{ij}$ für alle $1 \geq i \geq j \geq r$ ist eine charakteristische Multiplizität von X . Damit ist die Dimension $d = \frac{r(r-1)}{2}a + r$. Für alle $0 \leq l \leq r$ sei

$$u_l = e_1 + \dots + e_l.$$

Bezeichne nun Δ_l die Determinante der Jordan-Unteralgebra $Z_{u_l}^1$, fortgesetzt auf ganz Z mittels $\Delta_l(z) := \Delta_l(P_{u_l}^1 z)$. Zu jedem Vektor $\underline{s} = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{C}^r$ existiert die zugehörige konische Funktion, definiert als

$$\Delta_{\underline{s}}(x) := \Delta_1(x)^{s_1 - s_2} \Delta_2(x)^{s_2 - s_3} \dots \Delta_{r-1}(x)^{s_{r-1} - s_r} \Delta_r(x)^{s_r}.$$

Diese erfüllt die Gleichung $\Delta_{\underline{s}} \left(\sum_{j=1}^r t_j e_j \right) = \prod_{j=1}^r t_j^{s_j} = \underline{t}^{\underline{s}}$. Sei

$$\mathbb{N}_+^r := \{\underline{m} = (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{N}^r \mid m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_r \geq 0\}$$

die Menge der r -Partitionen, dann ist $\Delta_{\underline{\mathbf{m}}}$ ein Polynom auf Z für $\underline{\mathbf{m}} \in \mathbb{N}_+^r$. Die Räume

$$\mathcal{P}_{\underline{\mathbf{m}}}(Z) := \text{span}\{\Delta_{\underline{\mathbf{m}}} \circ k \mid k \in K\}$$

sind irreduzibel und paarweise inäquivalent bezüglich der Aktion $\pi(k)(f) := f \circ k^{-1}$ von K . Der Raum $\mathcal{P}(Z)$ aller holomorphen Polynome auf Z ist deren direkte Summe

$$\mathcal{P}(Z) = \sum_{\underline{\mathbf{m}} \in \mathbb{N}_+^r} \mathcal{P}_{\underline{\mathbf{m}}}(Z).$$

Daher sind die $\mathcal{P}_{\underline{\mathbf{m}}}(Z)$ paarweise orthogonal bezüglich jedes K -invarianten Produkts auf $\mathcal{P}(Z)$, insbesondere bezüglich des Fischer-Produkts. Der reproduzierende Kern von $\mathcal{P}_{\underline{\mathbf{m}}}(Z)$ bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ wird mit $K_{\underline{\mathbf{m}}}(z, w)$ bezeichnet, also gilt

$$\sum_{\underline{\mathbf{m}} \in \mathbb{N}_+^r} K_{\underline{\mathbf{m}}}(z, w) = e^{\nu \langle z, w \rangle}.$$

Sei

$$\Omega := \{x^2 \mid x \in X \text{ invertierbar}\}$$

der zu X gehörige symmetrische Kegel. Die Gindikin-Koecher-Gammafunktion bezüglich Ω ist für jeden Vektor $\underline{\mathbf{s}} \in \mathbb{C}^r$ mit $\text{Re } s_j > (j-1)\frac{a}{2}$ durch das konvergente Integral

$$\Gamma_{\Omega}(\underline{\mathbf{s}}) := \int_{\Omega} \exp\{-(e|x)\} \Delta_{\underline{\mathbf{s}}}(x) \Delta(x)^{-\frac{d}{r}} dx = (2\pi)^{\frac{d-r}{2}} \prod_{j=1}^r \Gamma(s_j - (j-1)\frac{a}{2})$$

definiert (vgl. [Gin]).

Für jede Partition $\underline{\mathbf{m}}$ und jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ sei $\lambda + \underline{\mathbf{m}}$ in der offensichtlichen Weise definiert. Das sogenannte Multi-Pochhammer-Symbol ist dann definiert durch

$$(\lambda)_{\underline{\mathbf{m}}} := \frac{\Gamma_{\Omega}(\lambda + \underline{\mathbf{m}})}{\Gamma_{\Omega}(\lambda)} = \prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^{m_i} (\lambda + j - 1 - (i-1)\frac{a}{2}).$$

Bezeichne $h(z, w)$ das eindeutige K -invariante irreduzible Polynom, das holomorph in z , antiholomorph in w ist, und $h(x, x) = \Delta(e - x^2)$ für alle $x \in X$ erfüllt. Dann ist die Gleichung

$$h(z, w)^{-\lambda} = \sum_{\underline{\mathbf{m}} \in \mathbb{N}_+^r} (\lambda)_{\underline{\mathbf{m}}} K_{\underline{\mathbf{m}}}(z, w) \quad (*)$$

für alle $z, w \in B$ und für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit absoluter und kompakter Konvergenz auf $B \times B \times \mathbb{C}$ richtig (vgl. [F-K]). Die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$, für die $(z, w) \mapsto h(z, w)^{-\lambda}$ positiv definit ist, d.h. für alle $z_1, \dots, z_n \in B$ ist die Matrix $(h(z_i, z_j)^{-\lambda})_{i,j=1}^n$ positiv definit, heißt *Wallach-Menge* und wird mit $W(B)$ bezeichnet. Es ist bekannt, dass $W(B)$ die Vereinigung zweier Teile ist, des diskreten Anteils

$$W_d := \left\{ \frac{la}{2} \mid l = 0, \dots, r-1 \right\}$$

und des stetigen Anteils

$$W_c := \left(\frac{(r-1)a}{2}, \infty \right).$$

Für jeden Wallach-Parameter λ sei \mathcal{H}_λ die Vervollständigung des Spans

$$\text{span}\{h(\cdot, w)^{-\lambda}, w \in B\}$$

bezüglich des inneren Produktes $\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda$, welches durch

$$\langle h(\cdot, w)^{-\lambda}, h(\cdot, z)^{-\lambda} \rangle_\lambda = h(z, w)^{-\lambda} \quad \forall z, w \in B$$

bestimmt ist. Da die Auswertung an Punkten ein stetiges lineares Funktional ist, existiert nach dem Darstellungssatz von Riesz ein eindeutiger reproduzierender Kern, und dieser Kern ist $h(z, w)^{-\lambda}$.

2.3 Differentialoperatoren und das innere Produkt auf $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$

Nun wird das innere Produkt auf \mathcal{H}_λ für die diskrete Wallach-Menge beschrieben, insbesondere der wichtige Spezialfall $\lambda = \frac{1}{2}$, der zu den komplexen symmetrischen Matrizen vom Rang eins gehört. Zunächst allerdings sollen einige allgemeine Eigenschaften von $\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda$ betrachtet werden.

Sei $l \in \{0, \dots, r-1\}$. Der Raum \mathbb{C}^l wird in \mathbb{C}^r durch $(s_1, \dots, s_l) \mapsto (s_1, \dots, s_l, 0, \dots, 0)$ eingebettet. Nun kann man die l -Partitionen als $\mathbb{N}_+^l := \mathbb{N}_+^r \cap \mathbb{C}^l$ definieren. Für $W_d \ni \lambda = \frac{la}{2}$ ist $\mathcal{H}_{\frac{la}{2}}$ die Vervollständigung von

$$\mathcal{P}_l(Z) := \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_+^l} \mathcal{P}_{\mathbf{m}}(Z).$$

Jede Funktion $f \in \mathcal{H}_{\frac{la}{2}}$ kann bezüglich der Partitionen entwickelt werden:

$$f = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_+^l} f_{\mathbf{m}}.$$

Da K irreduzibel auf $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}(Z)$ operiert, ist jedes K -invariante Produkt auf $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}(Z)$ proportional zum Fischer-Produkt. Mittels (*) kann man für alle $\lambda \in W(B)$ und für jede Partition \mathbf{m} mit $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}(Z) \subset \mathcal{H}_\lambda$ folgern, dass

$$\langle f, g \rangle_\lambda = \frac{\langle f, g \rangle_F}{(\lambda)_{\mathbf{m}}}$$

für alle $f, g \in \mathcal{P}_{\mathbf{m}}(Z)$ gilt. Wegen der paarweisen Orthogonalität folgt

$$\langle f, g \rangle_\lambda = \sum_{\mathbf{m}} \frac{\langle f_{\mathbf{m}}, g_{\mathbf{m}} \rangle_F}{(\lambda)_{\mathbf{m}}}$$

für alle $f, g \in \mathcal{H}_\lambda$.

Um das innere Produkt zu beschreiben, werden (Pseudo-)Differentialoperatoren auf Ω benötigt. Sei

$$\mathcal{D}(\Omega) = \text{Diff}(\Omega)^{\text{GL}(\Omega)}$$

der kommutative Ring der $GL(\Omega)$ -invarianten Differentialoperatoren auf Ω und $\mathcal{S}(\mathbb{C}^r)$ der Ring der symmetrischen Polynome in $\underline{s} \in \mathbb{C}^r$. Jeder Operator aus $\mathcal{D}(\Omega)$ besitzt die konischen und die sphärischen Funktionen als Eigenfunktionen und ist vollständig bestimmt durch seine Eigenwerte mit Hilfe des sogenannten Harish-Chandra-Isomorphismus (vgl. [A-U, Kap. 3]). Die Theorie bleibt erhalten unter Einschränkung von Ω auf $\Omega_{u_l}^1$. Jeder Operator $T \in \overline{\mathcal{D}}(\Omega_{u_l}^1)$ induziert eine K -invariante holomorphe Fortsetzung T_Z auf $\mathcal{P}_l(Z)$, welche als Multiplikator auf einer Funktion $f \in \mathcal{P}_{\underline{m}}(Z)$ operiert. Ein wichtiger Spezialfall sind die sogenannten „shift“-Operatoren:

Für alle $\alpha, \beta > (l-1)\frac{a}{2}$ existiert ein Operator $T = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} \in \overline{\mathcal{D}}(\Omega_{u_l}^1)$, sodass die holomorphe Fortsetzung T_Z für alle $f \in \mathcal{P}_l(Z)$ die folgende Eigenschaft besitzt:

$$T_Z f = \sum_{\underline{m} \in \mathbb{N}_+^l} \frac{(\beta)_{\underline{m}}}{(\alpha)_{\underline{m}}} f_{\underline{m}}.$$

Der Operator T_Z ist selbstadjungiert, sogar diagonal. Ist $\beta - \alpha \in \mathbb{N}$, so ist $T \in \mathcal{D}(\Omega)$ ein Differentialoperator, und es existiert eine globale Darstellung:

$$\begin{bmatrix} \alpha + 1 \\ \alpha \end{bmatrix} = \frac{\Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(\alpha)}{\Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(\alpha + 1)} \Delta_l^{\frac{d_l}{l} - \alpha}(x) \Delta_l(\partial_x) \Delta_l^{\alpha + 1 - \frac{d_l}{l}}(x),$$

sodass folgt

$$\begin{bmatrix} \alpha + n \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + n \\ \alpha + n - 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \alpha + 1 \\ \alpha \end{bmatrix} = \frac{\Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(\alpha)}{\Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(\alpha + n)} \Delta_l^{\frac{d_l}{l} - \alpha}(x) \Delta_l^n(\partial_x) \Delta_l^{\alpha + n - \frac{d_l}{l}}(x).$$

Hierbei sind die Dimensionen $d_l = \dim X_{u_l}^1 = l(l-1)\frac{a}{2} + l$ und $d := d_r = \dim X$ (vgl. [A-U]).

Eine Verallgemeinerung sind die „multi-shift“-Operatoren: Zu gegebenen

$$\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_p > (l-1)\frac{a}{2}$$

definiert man

$$\begin{bmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_p \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_p \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \beta_p \\ \alpha_p \end{bmatrix}.$$

Die holomorphe Fortsetzung erfüllt dann die Bedingung

$$\begin{bmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_p \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_p \end{bmatrix}_Z f = \sum_{\underline{m} \in \mathbb{N}_+^l} \frac{(\beta_1)_{\underline{m}} \cdots (\beta_p)_{\underline{m}}}{(\alpha_1)_{\underline{m}} \cdots (\alpha_p)_{\underline{m}}} f_{\underline{m}}.$$

Der Operator, den man für das innere Produkt auf $\mathcal{H}_{\frac{l_a}{2}}$ benötigt, ist der folgende:

$$T := \begin{bmatrix} r\frac{a}{2} & \frac{d}{r} & \alpha \\ l\frac{a}{2} & l\frac{a}{2} & \frac{d_l}{l} \end{bmatrix} \in \overline{\mathcal{D}}(\Omega_{u_l}^1)$$

mit $\alpha > (l-1)a + 1$. Ist $s := \alpha - l\frac{a}{2}$ eine natürliche Zahl, so ist T ein Differentialoperator, der ein Produkt aus drei „shift“-Operatoren ist. Dabei sind für $n := (r-l)\frac{a}{2} = \frac{d}{r} - \frac{d_l}{l}$ zwei Fälle zu unterscheiden:

$$1. \text{ Ist } n \in \mathbb{N}, \text{ so ist } T = \begin{bmatrix} \alpha \\ l \frac{a}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \frac{a}{2} \\ l \frac{a}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d}{r} \\ \frac{d_l}{l} \end{bmatrix}.$$

$$2. \text{ Ist } n \notin \mathbb{N}, \text{ so ist } T = \begin{bmatrix} \alpha \\ l \frac{a}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \frac{a}{2} \\ \frac{d_l}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d}{r} \\ l \frac{a}{2} \end{bmatrix}.$$

Zum ersten Fall:

$$\begin{aligned} T &= \begin{bmatrix} \alpha \\ l \frac{a}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \frac{a}{2} \\ l \frac{a}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d}{r} \\ \frac{d_l}{l} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} l \frac{a}{2} + s \\ l \frac{a}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \frac{a}{2} + n \\ l \frac{a}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d_l}{l} + n \\ \frac{d_l}{l} \end{bmatrix} \\ &= \frac{\Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(l \frac{a}{2})}{\Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(l \frac{a}{2} + s)} \Delta_l^{\frac{d_l}{l} - l \frac{a}{2}}(x) \Delta_l^s(\partial_x) \Delta_l^{l \frac{a}{2} + s - \frac{d_l}{l}}(x) \\ &\quad \frac{\Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(l \frac{a}{2})}{\Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(l \frac{a}{2} + n)} \Delta_l^{\frac{d_l}{l} - l \frac{a}{2}}(x) \Delta_l^n(\partial_x) \Delta_l^{l \frac{a}{2} + n - \frac{d_l}{l}}(x) \\ &\quad \frac{\Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(\frac{d_l}{l})}{\Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(\frac{d_l}{l} + n)} \Delta_l^{\frac{d_l}{l} - \frac{d_l}{l}}(x) \Delta_l^n(\partial_x) \Delta_l^{\frac{d_l}{l} + n - \frac{d_l}{l}}(x) \\ &= \frac{\Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(l \frac{a}{2})}{\Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(l \frac{a}{2} + s)} \frac{\Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(l \frac{a}{2})}{\Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(l \frac{a}{2} + n)} \frac{\Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(\frac{d_l}{l})}{\Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(\frac{d_l}{l} + n)} \Delta_l^{\frac{d_l}{l} - l \frac{a}{2}}(x) \Delta_l^s(\partial_x) \Delta_l^{l \frac{a}{2} + s - \frac{d_l}{l}}(x) \\ &\quad \Delta_l^{\frac{d_l}{l} - l \frac{a}{2}}(x) \Delta_l^n(\partial_x) \Delta_l^{l \frac{a}{2} + n - \frac{d_l}{l}}(x) \Delta_l^{\frac{d_l}{l} - \frac{d_l}{l}}(x) \Delta_l^n(\partial_x) \Delta_l^{\frac{d_l}{l} + n - \frac{d_l}{l}}(x) \\ &= \tilde{\Gamma} \Delta_l^{\frac{d_l}{l} - l \frac{a}{2}}(x) \Delta_l^s(\partial_x) \Delta_l^s(x) \Delta_l^n(\partial_x) \Delta_l^{l \frac{a}{2} + n - \frac{d_l}{l}}(x) \Delta_l^n(\partial_x) \Delta_l^n(x) \\ &\stackrel{(*)}{=} \tilde{\Gamma} \Delta_l^{1 - \frac{a}{2}}(x) \Delta_l^s(\partial_x) \Delta_l^s(x) \Delta_l^n(\partial_x) \Delta_l^{\frac{a}{2} + n - 1}(x) \Delta_l^n(\partial_x) \Delta_l^n(x), \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{\Gamma} := \frac{\left(\Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(l \frac{a}{2})\right)^2 \Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(\frac{d_l}{l})}{\Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(l \frac{a}{2} + s) \Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(l \frac{a}{2} + n) \Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(\frac{d_l}{l} + n)},$$

wobei (*) wegen $\frac{d_l}{l} = (l-1)\frac{a}{2} + 1$ gilt.

Im zweiten Fall folgt:

Wegen $(r-l)\frac{a}{2} \notin \mathbb{N}$ sind $r-l$ und a notwendig ungerade. Dann gilt aber

$$\begin{aligned}
n_1 &:= r\frac{a}{2} - \frac{d_l}{l} \\
&= r\frac{a}{2} - \left((l-1)\frac{a}{2} + 1\right) \\
&= (r-l+1)\frac{a}{2} - 1 \in \mathbb{N} \text{ und} \\
n_2 &:= \frac{d_l}{r} - l\frac{a}{2} \\
&= (r-1)\frac{a}{2} + 1 - l\frac{a}{2} \\
&= (r-l-1)\frac{a}{2} + 1 \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Also folgt

$$\begin{aligned}
T &= \begin{bmatrix} \alpha \\ l\frac{a}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r\frac{a}{2} \\ \frac{d_l}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d_l}{r} \\ l\frac{a}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} l\frac{a}{2} + s \\ l\frac{a}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d_l}{l} + n_1 \\ \frac{d_l}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l\frac{a}{2} + n_2 \\ l\frac{a}{2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{\Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(l\frac{a}{2})}{\Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(l\frac{a}{2} + s)} \Delta_l^{\frac{d_l}{l} - l\frac{a}{2}}(x) \Delta_l^s(\partial_x) \Delta_l^{l\frac{a}{2} + s - \frac{d_l}{l}}(x) \\
&\quad \frac{\Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(\frac{d_l}{l})}{\Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(\frac{d_l}{l} + n_1)} \Delta_l^{\frac{d_l}{l} - \frac{d_l}{l}}(x) \Delta_l^{n_1}(\partial_x) \Delta_l^{\frac{d_l}{l} + n_1 - \frac{d_l}{l}}(x) \\
&\quad \frac{\Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(l\frac{a}{2})}{\Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(l\frac{a}{2} + n_2)} \Delta_l^{\frac{d_l}{l} - l\frac{a}{2}}(x) \Delta_l^{n_2}(\partial_x) \Delta_l^{l\frac{a}{2} + n_2 - \frac{d_l}{l}}(x) \\
&= \frac{\Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(l\frac{a}{2})}{\Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(l\frac{a}{2} + s)} \frac{\Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(\frac{d_l}{l})}{\Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(\frac{d_l}{l} + n_1)} \frac{\Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(l\frac{a}{2})}{\Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(l\frac{a}{2} + n_2)} \Delta_l^{\frac{d_l}{l} - l\frac{a}{2}}(x) \Delta_l^s(\partial_x) \Delta_l^{l\frac{a}{2} + s - \frac{d_l}{l}}(x) \\
&\quad \Delta_l^{n_1}(\partial_x) \Delta_l^{\frac{d_l}{l} - l\frac{a}{2} + n_1}(x) \Delta_l^{n_2}(\partial_x) \Delta_l^{l\frac{a}{2} + n_2 - \frac{d_l}{l}}(x) \\
&= \bar{\Gamma} \Delta_l^{1 - \frac{a}{2}}(x) \Delta_l^s(\partial_x) \Delta_l^{\frac{a}{2} - 1 + s}(x) \Delta_l^{n_1}(\partial_x) \Delta_l^{1 - \frac{a}{2} + n_1}(x) \Delta_l^{n_2}(\partial_x) \Delta_l^{\frac{a}{2} - 1 + n_2}(x)
\end{aligned}$$

mit

$$\bar{\Gamma} := \frac{\left(\Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(l\frac{a}{2})\right)^2 \Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(\frac{d_l}{l})}{\Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(l\frac{a}{2} + s) \Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(l\frac{a}{2} + n_2) \Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(\frac{d_l}{l} + n_1)}.$$

Man betrachtet nun den Spezialfall $l = a = 1$. Für $l = 1$ folgt $\Delta_l(x) = x_{11} =: y$ und

$$\Gamma_{\Omega_{u_l}^1} = \Gamma_{\Omega_{e_1}^1} = \Gamma_{\mathbb{R}^+} = \Gamma,$$

sodass

$$\tilde{\Gamma} = \frac{\left(\Gamma(\frac{a}{2})\right)^2}{\Gamma(\frac{a}{2} + s) \Gamma(\frac{a}{2} + n) \Gamma(1 + n)} = \frac{\left(\Gamma(\frac{1}{2})\right)^2}{\Gamma(\frac{1}{2} + s) \Gamma(\frac{1}{2} + n) \Gamma(1 + n)}$$

und

$$\bar{\Gamma} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^2}{\Gamma(\frac{1}{2} + s)\Gamma(\frac{1}{2} + n_2)\Gamma(n_1 + 1)}$$

gelten.

Der erste Fall bedeutet nun $(r - 1)\frac{1}{2} \in \mathbb{N}$, sodass also $r = 2k + 1$ mit $k \geq 0$ gilt. Die Jordan-Algebra hat daher einen ungeraden Rang und es ist $n = k$. Damit ergibt sich

$$T_- = \tilde{\Gamma} y^{\frac{1}{2}} \frac{d^s}{dy^s} y^s \frac{d^k}{dy^k} y^{k-\frac{1}{2}} \frac{d^k}{dy^k} y^k.$$

Daraus folgt weiter:

$$\begin{aligned} T_- y^m &= \tilde{\Gamma} y^{\frac{1}{2}} \frac{d^s}{dy^s} y^s \frac{d^k}{dy^k} y^{k-\frac{1}{2}} \frac{d^k}{dy^k} y^{k+m} \\ &= \tilde{\Gamma} y^{\frac{1}{2}} \frac{d^s}{dy^s} y^s \frac{d^k}{dy^k} y^{k-\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^k (m+j) y^m \\ &= \tilde{\Gamma} \prod_{j=1}^k (m+j) y^{\frac{1}{2}} \frac{d^s}{dy^s} y^s \prod_{j=1}^k (m - \frac{1}{2} + j) y^{m-\frac{1}{2}} \\ &= \tilde{\Gamma} \prod_{j=1}^k (m+j) \prod_{j=1}^k (m - \frac{1}{2} + j) y^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^s (m - \frac{1}{2} + j) y^{m-\frac{1}{2}} \\ &= \tilde{\Gamma} \prod_{j=1}^k (m+j) \prod_{j=1}^k (m - \frac{1}{2} + j) \prod_{j=1}^s (m - \frac{1}{2} + j) y^m \\ &= \tilde{\Gamma} \frac{\Gamma(k+m+1)}{\Gamma(m+1)} \frac{\Gamma(k+m+\frac{1}{2})}{\Gamma(m+\frac{1}{2})} \frac{\Gamma(s+m+\frac{1}{2})}{\Gamma(m+\frac{1}{2})} y^m \\ &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^2 \Gamma(1)}{\Gamma(\frac{1}{2}+s)\Gamma(\frac{1}{2}+k)\Gamma(k+1)} \frac{\Gamma(k+m+1)}{\Gamma(m+1)} \frac{\Gamma(k+m+\frac{1}{2})}{\Gamma(m+\frac{1}{2})} \frac{\Gamma(s+m+\frac{1}{2})}{\Gamma(m+\frac{1}{2})} y^m \\ &= \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(m+\frac{1}{2})} \right)^2 \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(m+1)} \frac{\Gamma(k+m+1)}{\Gamma(k+1)} \frac{\Gamma(k+m+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+k)} \frac{\Gamma(s+m+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+s)} y^m \\ &= \frac{(\frac{1}{2}+s)_m (\frac{1}{2}+k)_m (n+1)_m}{(1)_m (\frac{1}{2})_m^2} y^m \\ &= \frac{(\alpha)_m (\frac{r}{2})_m (\frac{d}{r})_m}{(\frac{1}{2})_m (\frac{1}{2})_m (d_1)_m} y^m. \end{aligned}$$

Für den zweiten Fall ist $(r - 1)\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$, also ist $r = 2k$ mit $k \geq 1$. Die Jordan-Algebra hat hier einen geraden Rang, und es gilt $n_1 = k - 1$ und $n_2 = k$. Daher ist

$$T_+ = \bar{\Gamma} y^{\frac{1}{2}} \frac{d^s}{dy^s} y^{s-\frac{1}{2}} \frac{d^{k-1}}{dy^{k-1}} y^{k-\frac{1}{2}} \frac{d^k}{dy^k} y^{k-\frac{1}{2}},$$

und somit

$$\begin{aligned}
T_+ y^m &= \bar{\Gamma} y^{\frac{1}{2}} \frac{d^s}{dy^s} y^{s-\frac{1}{2}} \frac{d^{k-1}}{dy^{k-1}} y^{k-\frac{1}{2}} \frac{d^k}{dy^k} y^{k-\frac{1}{2}+m} \\
&= \bar{\Gamma} y^{\frac{1}{2}} \frac{d^s}{dy^s} y^{s-\frac{1}{2}} \frac{d^{k-1}}{dy^{k-1}} y^{k-\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^k \left(m + j - \frac{1}{2} \right) y^{m-\frac{1}{2}} \\
&= \bar{\Gamma} \prod_{j=1}^k \left(m + j - \frac{1}{2} \right) y^{\frac{1}{2}} \frac{d^s}{dy^s} y^{s-\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{k-1} (m + j) y^m \\
&= \bar{\Gamma} \prod_{j=1}^{k-1} (m + j) \prod_{j=1}^k \left(m + j - \frac{1}{2} \right) y^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^s (m + j - \frac{1}{2}) y^{m-\frac{1}{2}} \\
&= \bar{\Gamma} \prod_{j=1}^{k-1} (m + j) \prod_{j=1}^k \left(m + j - \frac{1}{2} \right) \prod_{j=1}^s \left(m + j - \frac{1}{2} \right) y^m \\
&= \bar{\Gamma} \frac{\Gamma(k+m) \Gamma(k+m+\frac{1}{2}) \Gamma(s+m+\frac{1}{2})}{\Gamma(m+1) \Gamma(m+\frac{1}{2}) \Gamma(m+\frac{1}{2})} y^m \\
&= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^2 \Gamma(1)}{\Gamma(\frac{1}{2}+s) \Gamma(\frac{1}{2}+k) \Gamma(k)} \frac{\Gamma(k+m) \Gamma(k+m+\frac{1}{2}) \Gamma(s+m+\frac{1}{2})}{\Gamma(m+1) \Gamma(m+\frac{1}{2}) \Gamma(m+\frac{1}{2})} y^m \\
&= \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(m+\frac{1}{2})} \right)^2 \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(m+1)} \frac{\Gamma(k+m) \Gamma(k+m+\frac{1}{2}) \Gamma(s+m+\frac{1}{2})}{\Gamma(k) \Gamma(\frac{1}{2}+k) \Gamma(\frac{1}{2}+s)} y^m \\
&= \frac{(\frac{1}{2}+s)_m (\frac{1}{2}+k)_m (k)_m}{(1)_m (\frac{1}{2})_m^2} y^m \\
&= \frac{(\alpha)_m (\frac{r}{2})_m (\frac{d}{r})_m}{(\frac{1}{2})_m (d_1)_m (\frac{1}{2})_m} y^m.
\end{aligned}$$

Für das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$d\nu_\alpha^{(l)}(x) := \frac{\Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(\alpha)}{\Gamma_{\Omega_{u_l}^1}((l-1)\frac{a}{2}+1) \Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(\alpha - (l-1)\frac{a}{2} - 1)} \Delta_l(u_l - x)^{\alpha - (l-1)a - 2} dx$$

folgt für $l = a = 1$

$$d\nu_\alpha^{(1)}(x) =: d\nu_\alpha(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-1)} (e_1 - x_{11})^{\alpha-2} dx = (\alpha-1)(e_1 - y)^{\alpha-2} dy,$$

wobei zu bemerken ist, dass für $l = 1$ das Maß nicht von a abhängt. Es ergibt sich also abschließend für das Skalarprodukt (vgl. [A-U, Th.3.11])

$$\langle f, g \rangle_{\frac{1}{2}} = \int_{[0, e_1]} T_\pm \left(\widetilde{f\bar{g}} \right) d\nu_\alpha = (\alpha-1) \int_{[0, e_1]} T_\pm \left(\int_K f(cy^{\frac{1}{2}}) \overline{g(cy^{\frac{1}{2}})} dc \right) (e_1 - y)^{\alpha-2} dy,$$

wobei dc das normalisierte Haarmaß auf K ist.

Kapitel 3

Die Fortsetzung für reelle symmetrische Matrizen vom Rang eins

3.1 Integraloperatoren

Das Ziel ist nun, eine Abbildung zwischen $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}^{\mathbb{R}}$ und $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$ zu finden, die die Segal-Bargmann-Transformation fortsetzt, und diese als einen Integraloperator zu realisieren. Die Abbildungen von \mathcal{F}_n^+ nach $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$ bzw. $L_+^2(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}^{\mathbb{R}}$ sollen ebenfalls durch Integraloperatoren beschrieben werden.

Um von \mathcal{F}_n^+ nach $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$ zu gelangen, wird das System von Abbildungen aus Abschnitt 2.1 erweitert. Da

$$\left\langle e^{\frac{\bar{w}}{2}} \left| e^{\frac{\bar{z}}{2}} \right\rangle_{S(W)} = \det(1 - z\bar{w})^{-\frac{1}{2}} \stackrel{\text{rep. Kern}}{=} \left\langle \det(1 - \diamond \bar{w})^{-\frac{1}{2}} \left| \det(1 - \diamond \bar{z})^{-\frac{1}{2}} \right\rangle_{\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}}$$

gilt, erhält man einen Zusammenhang zwischen $\det(1 - \diamond \bar{w})^{-\frac{1}{2}}$ und $e^{\frac{\bar{w}}{2}}$, und damit

$$\det(1 - \diamond \bar{w})^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \Phi_w(\cdot), \quad \Phi_w(\zeta) = e^{\frac{\zeta}{2}(\zeta|w\bar{\zeta})}.$$

Um eine ähnliche Beziehung auf der reellen Seite zu erhalten, wird das Bild von $\Phi_w(\zeta)$ unter der inversen Segal-Bargmann-Transformation berechnet. Ein sehr nützliches Werkzeug ist der folgende Satz [Fo, Th.A.3], der jedoch an die hier gewählte Normierung angepasst wird.

Satz 3.1.1. *Seien $A, D \in \mathbb{C}^{n \times n}$, sodass*

$$A = A^t, D = D^t, \|A\| \leq 1, \|D\| \leq 1, \|A\| \cdot \|D\| < 1.$$

Dann gilt für alle $u, v \in \mathbb{C}^n, \nu \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{C}^n} \exp \frac{\nu}{2} \left((z|\overline{Az}) + (\overline{z}|\overline{Dz}) + 2(u|\overline{z}) + 2(v|z) \right) e^{-\nu(z|z)} dz \\ &= \left(\frac{\pi}{\nu} \right)^n \det(I-AD)^{-\frac{1}{2}} \exp \frac{\nu}{2} \left((u|\overline{D(I-AD)^{-1}u}) + 2(v|\overline{(I-AD)^{-1}u}) + (v|\overline{A(I-DA)^{-1}v}) \right). \end{aligned}$$

Damit kann nun $f_w(\xi)$ berechnet werden:

$$\begin{aligned} f_w(\xi) &= \mathcal{B}^{-1} \left(e^{\frac{\nu}{2}(\zeta|w\overline{\zeta})} \right) (\xi) \\ &= \left(\frac{\nu}{\pi} \right)^n \int_{\mathbb{C}^n} e^{\frac{\nu}{2}(\zeta|w\overline{\zeta})} e^{-\frac{\nu}{2}(\overline{\zeta}|\zeta) + \sqrt{2\nu}(\overline{\zeta}|\xi) - \nu(\zeta|\xi)} d\zeta \\ &= \det(1+w^*)^{-\frac{1}{2}} e^{\nu(\xi|w(w+1)^{-1}\xi)} \\ &= \det(1+w^*)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\nu}{2}(\xi|(w-1)(w+1)^{-1}\xi) + \frac{\nu}{2}(\xi|\xi)}. \end{aligned}$$

Man erhält also eine Cayley-Transformation von w innerhalb des Exponenten, die aufgrund der Anpassung an das Gaußmaß verschoben ist. Eine auch später nützliche Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned} (w-1)(w+1)^{-1} + \overline{(w-1)(w+1)^{-1}} &= (w+1)^{-1}(w-1) + (w^*-1)(w^*+1)^{-1} \\ &= (w+1)^{-1}((w-1)(w^*+1) + (w+1)(w^*-1))(w^*+1)^{-1} \\ &= 2(w+1)^{-1}(ww^*-1)(w^*+1)^{-1}. \end{aligned}$$

Die Norm wird dabei wie erwartet erhalten, es ist jedoch zu beachten, dass die Konjugation der zweiten Funktion zu verwenden ist, da es sich im Allgemeinen um komplexwertige Funktionen handelt. Es ergibt sich nach [Fo, Th.A.1]

$$\begin{aligned} & \left\langle \mathcal{B}^{-1} \left(e^{\frac{\nu}{2}(\zeta|w\overline{\zeta})} \right) (\xi) \middle| \mathcal{B}^{-1} \left(e^{\frac{\nu}{2}(\zeta|w\overline{\zeta})} \right) (\xi) \right\rangle \\ &= \left(\frac{\nu}{\pi} \right)^{\frac{n}{2}} \det(1+w^*)^{-\frac{1}{2}} \det(1+w)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{\nu}{2}(\xi \left[[(w-1)(w+1)^{-1} + \overline{(w-1)(w+1)^{-1}}] \right] \xi)} d\xi \\ &= \det(1+w^*)^{-\frac{1}{2}} \det(1+w)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi(\xi|(1+w)^{-1}(1-ww^*)(1+w^*)^{-1}\xi)} d\xi \\ &= \det(1+w^*)^{-\frac{1}{2}} \det(1+w)^{-\frac{1}{2}} \det((1+w)^{-1}(1-ww^*)(1+w^*)^{-1})^{-\frac{1}{2}} \\ &= \det(1-ww^*)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Das Integral existiert erneut genau dann, wenn w in der Siegel-Disk liegt.

Man betrachtet nun die Zuordnung

$$\mathcal{I}_{\mathbb{C}} : \mathcal{F}_n^+ \rightarrow \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}; \quad \Phi_w(\zeta) = e^{\frac{\nu}{2}(\zeta|w\overline{\zeta})} \mapsto \det(1-zw^*)^{-\frac{1}{2}} =: d_w(z).$$

Es soll ein Integraloperator gefunden werden, der diese Zuordnung erfüllt. Dazu wird erneut

Satz 3.1.1 mit der Wahl $u = v = 0$, sowie $A = w^*$ und $D = z$ verwendet, sodass

$$\begin{aligned} d_w(z) &= (\det(1 - zw^*))^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{C}^n} \exp \frac{\nu}{2} [(\zeta|w\bar{\zeta}) + (\bar{\zeta}|\bar{z}\zeta)] e^{-\nu(\zeta|\zeta)} d\zeta \\ &= \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{C}^n} e^{\frac{\nu}{2}(\bar{\zeta}|\bar{z}\zeta) - \nu(\zeta|\zeta)} \Phi_w(\zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

Also erhält man mit der Definition

$$(\mathcal{I}_{\mathbb{C}}f)(z) := \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{C}^n} e^{\frac{\nu}{2}(\bar{\zeta}|\bar{z}\zeta) - \nu(\zeta|\zeta)} f(\zeta) d\zeta$$

das gewünschte Resultat

$$(\mathcal{I}_{\mathbb{C}}\Phi_w)(z) = d_w(z),$$

und es ist der gesuchte Integraloperator gefunden.

Um die Segal-Bargmann-Transformation fortzusetzen, wird ein analoger Operator auf der reellen Seite benötigt. Hier kann jedoch kein Zwischenschritt à la Segal benutzt werden, da reproduzierende Kerne nur im Komplexen Sinn ergeben. Es muss also ein anderer Weg eingeschlagen werden, um vom $L^2(\mathbb{R}^n)$ zu Funktionen auf symmetrischen reellen Matrizen vom Rang eins zu gelangen. Hier kann man sich aber zunutze machen, dass nur gerade Funktionen betrachtet werden und definieren:

Lemma 3.1.2. *Auf \mathbb{R}^n ist durch*

$$\xi \sim \eta :\Leftrightarrow \xi = \pm\eta$$

eine Äquivalenzrelation definiert. Dann ist

$$p : L^2_+(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n/\sim) ; f(\xi) \mapsto f([\xi])$$

ein Isomorphismus. Sei $\partial_1\Omega$ der Raum der positiv definiten symmetrischen Operatoren vom Rang eins. Dann gilt: Die Abbildung

$$q : \mathbb{R}^n/\sim \rightarrow \partial_1\Omega ; [\xi] \mapsto \xi\xi^t$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis: Nach Definition des Rangs lässt sich jeder Operator y vom Rang eins auf \mathbb{R}^n durch $y = \eta\xi^t$ mit $\eta, \xi \in \mathbb{R}^n$ darstellen. Da hier symmetrische Operatoren betrachtet werden, muss aber $\eta = \xi$ gelten, sodass q surjektiv ist.

Sei nun $y = \xi\xi^t = \eta\eta^t$ gegeben. Dann ist

$$y\chi = \xi(\xi|\chi) = \eta(\eta|\chi)$$

für alle $\chi \in \mathbb{R}^n$, also ist $\mathbb{R}\eta = \mathbb{R}\xi$. Da aber $\text{tr}(y) = (\xi|\xi) = (\eta|\eta)$ gilt, folgt $\|\xi\| = \|\eta\|$, und damit $\xi = \pm\eta$, also ist $[\xi] = [\eta]$, sodass q injektiv ist. \square

Da jedoch der Parameter ν auf der komplexen Seite durch den Integraloperator $I_{\mathbb{C}}$ eliminiert wird, wäre es unnatürlich, ihn auf der reellen Seite beizubehalten. Eine Skalierung $y := \nu \xi \xi^t$ ist daher sinnvoll.

Damit sich dieser Isomorphismus auch auf die jeweiligen Funktionenräume überträgt, muss sichergestellt werden, dass das Maß auf $\partial_1 \Omega$ mit q verträglich ist. Die Integrierbarkeit einer Funktion muss also unter q^* erhalten bleiben. Hier wird sogar eine stärkere Bedingung gefordert: Die Abbildung

$$q^* : L^2(\mathbb{R}^n / \sim) \rightarrow L^2(\partial_1 \Omega, d\mu)$$

soll eine Isometrie sein. Daher sind nun Bedingungen an $d\mu$ zu finden.

Analog zum komplexen Fall ist es natürlich, auf $\partial_1 \Omega$ eine Polarzerlegung zu betrachten. Die Abbildung q ist invariant unter der Aktion der orthogonalen Gruppe $O(n)$. Daher ist eine Faktorisierung $d\mu = d\mu_n dh$ in einen Radialteil und in das invariante Haarmaß dh der orthogonalen Gruppe sinnvoll. Es gilt:

$$\partial_1 \Omega \ni y = h d_y h^t,$$

wobei $h \in O(n)$ und d_y eine Diagonalmatrix vom Rang eins ist, da y als reelle symmetrische Matrix diagonalisierbar ist. Als Testfunktionen dienen erneut

$$\begin{aligned} f_w(\xi) &= \det(1 + w^*)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\nu}{2}(\xi | ((w-1)(w+1)^{-1} + 1)\xi)} \\ &= \det(1 + w^*)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\nu}{2}(\xi | (c(w)+1)\xi)}, \end{aligned}$$

wobei $c(w) := (w-1)(w+1)^{-1}$ die Cayley-Transformation ist. Insbesondere hat $c(w)$ Rang n und $c(w)+1$ Rang eins, und c geht von der Siegel-Disk in die linke Halbebene.

Wegen

$$\nu(\xi | a\xi) = \nu \operatorname{tr}(a\xi\xi^t) = \operatorname{tr}(ay) = \operatorname{tr}(ya)$$

für $a \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $y = \nu \xi \xi^t \in \partial_1 \Omega$ folgt

$$\begin{aligned} (q^* f_w)(y) &= \det(1 + w^*)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} \operatorname{tr}(y(c(w^*)+1))} \\ &= \det(1 + w^*)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} \operatorname{tr}(h d_y h^t (c(w^*)+1))}. \end{aligned}$$

Somit bleibt

$$\int_0^\infty d\mu_n(y) \int_{O(n)} dh (q^* f_w)(h d_y h^t) \overline{(q^* f_w)(h d_y h^t)},$$

also insbesondere das Integral

$$\int_{O(n)} dh e^{\operatorname{tr}(h a h^t b)}, \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{C}_+^{n \times n},$$

zu berechnen, das unter anderem auch in der mathematischen Statistik eine Rolle spielt (Wishart-Verteilung). Dies geschieht mit Hilfe der sogenannten zonalen Polynome.

3.2 Zonale Polynome

Die zonalen Polynome sind die Jack-Polynome zum Parameter $\alpha = 2$. Sei x eine symmetrische $n \times n$ Matrix, und sei $\underline{\mathbf{m}}$ eine Partition der Länge k . Dann ist $C_{\underline{\mathbf{m}}}(x)$ ein k -homogenes, symmetrisches Polynom in den Eigenwerten von x .

Es sollen hier nun kurz einige Eigenschaften der Jack- und insbesondere der zonalen Polynome beschrieben werden, die im Folgenden benötigt werden.

Lemma 3.2.1. *Ist $\underline{\mathbf{m}} =: m$ die Partition $(m, 0, \dots)$, so lassen sich die Jack-Polynome explizit beschreiben: Man hat*

$$J_m^{(\alpha)}(x) = \sum_{|\kappa|=m} \frac{m!}{\kappa_1! \kappa_2! \dots} \prod_{i \geq 1} \prod_{j=1}^{\kappa_i} (1 + \alpha(j-1)) m_\kappa(x),$$

wobei m_κ das elementare symmetrische Monom bzgl. κ in den singulären Werten von x ist (vgl. [Stan, Prop. 2.2(a)]). Es gilt weiterhin nach [Stan, 5.4], dass

$$J_{\underline{\mathbf{m}}}(1_n) = \prod_{(i,j) \in \underline{\mathbf{m}}} (n - (i-1) + \alpha(j-1))$$

ist und nach [Stan, 1.2] und [MacD] hat man

$$J_{\underline{\mathbf{m}}}^{(2)}(x) = Z_{\underline{\mathbf{m}}}(x) = (2n-1)!! C_{\underline{\mathbf{m}}}(x).$$

Ist weiterhin der Rang von x kleiner als die Anzahl der von Null verschiedenen Elemente in $\underline{\mathbf{m}}$, so folgt $C_{\underline{\mathbf{m}}}(x) = 0$.

Ist dh das normalisierte Haarmaß auf der Gruppe $O(n)$ sowie x positiv definit und y symmetrisch, so gilt

$$\int_{O(n)} C_{\underline{\mathbf{m}}}(xhyh^t) dh = \int_{O(n)} C_{\underline{\mathbf{m}}}(hyh^t x) dh = \frac{C_{\underline{\mathbf{m}}}(x) C_{\underline{\mathbf{m}}}(y)}{C_{\underline{\mathbf{m}}}(1_n)}$$

nach [Mu, 7.2.5].

Insbesondere folgt

$$\begin{aligned} C_m(1_n) &= \frac{1}{(2n-1)!!} \prod_{(i,j) \in m} (n + (i-1) + 2(j-1)) \\ &= \frac{1}{(2n-1)!!} \prod_{j=1}^m (n + 2(j-1)) \\ &= \prod_{j=1}^m \frac{n + 2(j-1)}{1 + 2(j-1)} \\ &= \prod_{j=1}^m \frac{\frac{n}{2} + (j-1)}{\frac{1}{2} + (j-1)} \\ &= \frac{\left(\frac{n}{2}\right)_m}{\left(\frac{1}{2}\right)_m}. \end{aligned}$$

Nun kann das benötigte Maß bestimmt werden.

3.3 Bestimmung des Maßes $d\mu_n$

Das entscheidende Hilfsmittel zur Definition eines geeigneten Skalarprodukts ist

Satz 3.3.1. Sei $d\mu_n(y)$ so gewählt, dass

$$\int_0^\infty d\mu_n(y) y^k = \left(\frac{n}{2}\right)_k$$

ist. Dann gilt

$$\int_0^\infty d\mu_n(x) \int_{O(n)} dh (q^* f_w)(hd_y h^t) \overline{(q^* f_w)(hd_y h^t)} = \det(1 - ww^*)^{-\frac{1}{2}}.$$

Beweis: Nach einer Erweiterung von [Fo, Th.A.1] auf hermitesche Matrizen gilt:

$$\begin{aligned} \det(1 - ww^*)^{-\frac{1}{2}} &= \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f_w(\xi) \overline{f_w(\xi)} e^{-\nu|\xi|^2} d\xi \\ &= \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \det(1 + w^*)^{-\frac{1}{2}} \det(1 + w)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{\nu}{2}(\xi \left[(w-1)(w+1)^{-1} + \overline{(w-1)(w+1)^{-1}} \right] \xi)} d\xi \\ &= \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\nu(\xi|(1-ww^*)\xi)} d\xi \\ &= \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\nu(\xi|ww^*\xi)} e^{-\nu(\xi|\xi)} d\xi, \end{aligned}$$

wobei der Beweis aus [Fo, Th.A.1] übernommen werden kann. Da q^* eine Isometrie sein soll, folgt somit:

$$\begin{aligned} &\det(1 + w^*)^{-\frac{1}{2}} \det(1 + w)^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty d\mu_n(y) \int_{O(n)} dh e^{\frac{1}{2} \text{tr}(hd_y h^t [c(w^*) + c(w) + 2])} \\ &= \int_0^\infty d\mu_n(y) \int_{O(n)} dh e^{\text{tr}(hd_y h^t [ww^*])} \\ &= \int_0^\infty d\mu_n(y) \int_{O(n)} dh \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} (\text{tr}(hd_y h^t [ww^*]))^k \\ &\stackrel{\text{rg}(hd_y h^t ww^*)=1}{=} \int_0^\infty d\mu_n(y) \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} \int_{O(n)} dh C_k(hd_y h^t [ww^*]) \\ &= \int_0^\infty d\mu_n(y) \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} \frac{C_k(d_y) C_k(ww^*)}{C_k(1_n)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{rg}(d_y) = 1 & \int_0^\infty d\mu_n(y) \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} \frac{y^k C_k(ww^*)}{C_k(1_n)} \\
 & = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} \frac{C_k(ww^*)}{C_k(1_n)} \int_0^\infty d\mu_n(y) y^k \\
 & = \sum_{k=0}^\infty \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k}{k!} C_k(ww^*) \\
 \text{rg}(ww^*) = 1 & \det(1 - ww^*)^{-\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

wobei $C_k(1_n) = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k}$ benutzt wurde. □

Damit hat man eine Isometrie gefunden. Es bleibt, das geforderte Maß $d\mu_n(y)$ zu bestimmen. Aus

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty dy e^{-y} y^{k+\frac{n}{2}-1} & = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + k\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \\
 & = \left(\frac{n}{2}\right)_k
 \end{aligned}$$

mit Lebesgue-Maß dy folgt schließlich

$$d\mu_n(y) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-y} y^{\frac{n}{2}-1} dy.$$

Nun kann die Segal-Bargmann-Transformation zunächst für y in den unbeschränkten Rang eins Operatoren $T_1^{\mathbb{R}}$ beschrieben werden:

Satz 3.3.2. Sei $y \in T_1^{\mathbb{R}}$. Man definiert die Funktion

$$K_y(z) := \det(1+z)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} \text{tr}[(c(z)+1)y]} \in \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}.$$

Dann ist

$$\mathcal{B} : \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \rightarrow L^2(T_1^{\mathbb{R}}); \mathcal{B}f(y) := (f|K_y)_{\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}}$$

eine Isometrie.

Beweis: Um $K_y(z) \in \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$ zu zeigen, genügt es wegen

$$\begin{aligned}
 K_y(z) & = \det(1+z)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} \text{tr}[(c(z)+1)y]} \\
 & = \det(1+z)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} \text{tr}[c(z)y]} e^{\frac{1}{2} \text{tr}(y)}
 \end{aligned}$$

zu zeigen, dass $\det(1+z)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} \text{tr}[c(z)y]} \in \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$ ist. Dies ist jedoch klar, da $\text{Re}(\text{tr}(c(z))) < 0$ für alle $z \in S_1^{\mathbb{C}}$ und $\text{tr}(y) > 0$ für alle $y \in T_1^{\mathbb{R}}$ gilt, sodass die Exponentialfunktion beschränkt ist. Außerdem gilt, dass die Spur $\text{tr}(c(z))$ für den Grenzübergang $z \rightarrow -1$ gegen $-\infty$ strebt,

sodass $e^{\frac{1}{2}\text{tr}[c(z)y]} \rightarrow 0$ schneller als jedes Polynom verschwindet, insbesondere also auch als $\det(1+z)^{-\frac{1}{2}}$. Damit ist $K_y(z) \in \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$.

Für $d_w(z) = \det(1-zw^*)^{-\frac{1}{2}}$ gilt, dass $(d_w|d_w) = \det(1-ww^*)^{-\frac{1}{2}}$ ist. Da aber d_w der reproduzierende Kern ist, folgt weiter

$$\begin{aligned} \mathcal{B}d_w(x) &= (d_w|K_y) \\ &= \overline{(K_y|d_w)} \\ &= \overline{K_y(w)} \\ &= K_y(w^*) \\ &= \det(1+w^*)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\text{tr}[(c(w)^*+1)y]} = \det(1+w^*)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}y|(c(w)+1)}. \end{aligned}$$

Nach der obigen Rechnung erhält man

$$\left(\det(1+w^*)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}y|(c(w)+1)} \left| \det(1+w^*)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}y|(c(w)+1)} \right. \right) = \det(1-ww^*)^{-\frac{1}{2}},$$

sodass die Behauptung folgt. Die neu definierte lineare Transformation ist also eine Isometrie für den reproduzierenden Kern für alle w , und damit für alle Funktionen aus $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$. \square

Um eine vollständige Analogie zur ursprünglichen Segal-Bargmann-Transformation zu erhalten, soll jetzt noch der Übergang von den unbeschränkten Operatoren des Rangs eins zu den beschränkten erfolgen. Da auf der komplexen Seite die Operatoren bereits beschränkt waren, ist dies die natürlichere Abbildung. Dies geschieht erneut mithilfe einer Cayley-Transformation, allerdings muss diese noch abhängig von y modifiziert werden, da wie gesehen der Rang nicht erhalten bleibt.

In diesem Spezialfall ist eine Modifikation jedoch einfach: Sei

$$\tilde{c}^{-1} : T_1^{\mathbb{R}} \rightarrow S_1^{\mathbb{R}}; \tilde{c}^{-1}(y) := (y-1)(y+1)^{-1} + \left(1 - \frac{y}{\text{tr}(y)}\right),$$

dann gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{c}^{-1}(y) &= (y-1)(y+1)^{-1} + \left(1 - \frac{y}{\text{tr}(y)}\right) \\ &= (hd_y h^t - hh^t)(hd_y h^t + hh^t)^{-1} + \left(hh^t - \frac{hd_y h^t}{\text{tr}(hd_y h^t)}\right) \\ &= h(d_y - 1)h^t h(d_y + 1)^{-1}h^t + h \left(1 - \frac{d_y}{\text{tr}(d_y)}\right) h^t \\ &= h \left((d_y - 1)(d_y + 1)^{-1} + \left(1 - \frac{d_y}{\text{tr}(d_y)}\right) \right) h^t \\ &= h\tilde{c}^{-1}(d_y)h^t. \end{aligned}$$

Hat d_y den Eigenwert $0 < \lambda < \infty$, so hat $\tilde{c}^{-1}(d_y)$ genau einen nicht-verschwindenden Eigenwert

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda-1}{\lambda+1} + \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda}\right) = \frac{\lambda-1}{\lambda+1}, -1 < \tilde{\lambda} < 1,$$

das ist die übliche eindimensionale Cayley-Transformation von λ . Alle weiteren Eigenwerte verschwinden wie erforderlich:

$$\frac{0-1}{0+1} + \left(1 - \frac{0}{\lambda}\right) = 0,$$

der Rang eins bleibt somit erhalten. Es muss daher nur noch der Radialanteil $d\mu(y)$ Cayley-transformiert werden, um den Ausdruck für die beschränkte Realisierung zu erhalten. Mit der Substitution $x = \frac{y-1}{y+1}$ ergibt sich $y = \frac{1+x}{1-x}$ und $dy = 2(1-x)^{-2}dx$, und so

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-y} y^{k+\frac{n}{2}-1} dy = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{-1}^1 e^{-\frac{1+x}{1-x}} (1+x)^{\frac{n}{2}-1} (1-x)^{-(\frac{n}{2}+1)} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^k dx.$$

Damit folgt

$$\int_0^\infty y^k d\mu(y) = \int_{-1}^1 \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^k d\mu(x)$$

mit dem Maß $d\mu(x) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{1+x}{1-x}} (1+x)^{\frac{n}{2}-1} (1-x)^{-(\frac{n}{2}+1)} dx$. Vollkommen analog zu den obigen Berechnungen folgt

$$\tilde{c} : S_1^{\mathbb{R}} \rightarrow T_1^{\mathbb{R}}; \tilde{c}(x) := (1+x)(1-x)^{-1} - \left(1 - \frac{x}{\text{tr}(x)}\right).$$

Man erhält daher das folgende Skalarprodukt für Funktionen auf $S_1^{\mathbb{R}}$:

$$(f|g)_{S_1^{\mathbb{R}}} = \int_{-1}^1 d\mu(x) \int_{O(n)} dh f(hd_x h^t) \overline{g(hd_x h^t)},$$

und kann daher $L^2(S_1^{\mathbb{R}})$ als den Raum der bzgl. dieses Produkts integrierbaren Funktionen definieren. Insgesamt gilt analog zu Satz 3.3.2

Satz 3.3.3. Seien $x \in S_1^{\mathbb{R}}$ und $z \in S_1^{\mathbb{C}}$. Man definiert die Funktion

$$K_x(z) := \det(1+z)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} \text{tr}[(c(z)+1)\tilde{c}(x)]} \in \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$$

mit

$$c : S_1^{\mathbb{C}} \rightarrow T_-^{\mathbb{C}}; c(z) = (z-1)(z+1)^{-1}$$

und

$$\tilde{c} : S_1^{\mathbb{R}} \rightarrow T_1^{\mathbb{R}}; \tilde{c}(x) = (1+x)(1-x)^{-1} - \left(1 - \frac{x}{\text{tr}(x)}\right).$$

Dann ist

$$\mathcal{B} : \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \rightarrow L^2(S_1^{\mathbb{R}}); \mathcal{B}f(x) := (f|K_x)_{\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}}$$

eine Isometrie.

Da das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_n^+ & \xrightarrow{B} & L_+^2(\mathbb{R}^n) \\ \mathcal{I}_C \downarrow & & \downarrow q^* \\ \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} & \xrightarrow{B} & L^2(S_1^{\mathbb{R}}) \end{array}$$

kommutativ ist, stellt dies eine Erweiterung der Segal-Bargmann-Transformation dar.

3.4 Die metaplektische Darstellung

Um die Aktion der symplektischen Gruppe, die sogenannte metaplektische Darstellung, zu beschreiben, benötigt man zunächst einige Definitionen und Eigenschaften. Danach wird diese erneut auf den Spezialfall $T_1^{\mathbb{R}}$ bzw. $S_1^{\mathbb{R}}$ erweitert.

Allgemein gilt:

Definition 3.4.1. Sei V eine reelle Mannigfaltigkeit. Diese heißt symplektisch, falls es eine nicht-ausgeartete, geschlossene Zweiform ω auf V gibt. Eine symplektische Mannigfaltigkeit ist damit immer von gerader Dimension, falls diese endlich ist.

Beispiel 3.4.2. $V = \mathbb{R}^{2n}$ mit der symplektischen Form

$$\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}; \omega((x, \xi), (y, \eta)) = (x|\eta) - (y|\xi)$$

ist eine symplektische Mannigfaltigkeit. Bezeichnet man

$$J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

so ist $\omega(x, y) = x^t J y$. Dieser Raum wird auch als symplektische Standardraum genannt. Nach dem Satz von Darboux ist jede symplektische Mannigfaltigkeit lokal isomorph zu V . Die symplektische Gruppe $Sp(2n, \mathbb{R})$ wird definiert durch

$$Sp(2n, \mathbb{R}) := \{g \in GL_{2n}(\mathbb{R}) \mid \omega(gx, gy) = \omega(x, y) \forall x, y \in \mathbb{R}^{2n}\}.$$

Diese Bedingung lässt sich auch durch $g^t J g = J$ charakterisieren.

Um die metaplektische Darstellung zu beschreiben, benötigt man zunächst einige Eigenschaften der symplektischen Gruppe und ihrer Komplexifizierung (nach [Fo, (4.17),(4.18)]):

Sei $a = \begin{pmatrix} p & q \\ \bar{q} & \bar{p} \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})_{\mathbb{C}}$. Dann sind äquivalent:

- $a \in Sp_{\mathbb{C}}$.
- $pp^* - qq^* = 1, pq^t = qp^t = (pq^t)^t$.
- $p^*p - \bar{q}q^t = 1, p^t\bar{q} = q^*p = (p^t\bar{q})^t$.

Falls $a \in Sp_{\mathbb{C}}$, so folgt

- p ist invertierbar, und $\|p\| \geq 1$.
- $\|p^{-1}q\|^2 = \|\bar{q}p^{-1}\|^2 = 1 - \|p\|^{-2}$. (*)
- $p^{-1}q = (p^{-1}q)^t, \bar{q}p^{-1} = (\bar{q}p^{-1})^t$. (**)

Die Darstellung der komplexifizierten symplektischen Gruppe lässt sich in geschlossener Form angeben: Nach [Seg] ist die Aktion der symplektischen Gruppe auf $\mathcal{S}(W)$ gegeben durch

$$a.z = \begin{pmatrix} p & q \\ \bar{q} & \bar{p} \end{pmatrix} .z = (pz + q)(\bar{q}z + \bar{p})^{-1}.$$

Laut [Fo, Th.(4.37)] ist die Aktion von $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}$ auf \mathcal{F}_n gegeben durch

$$\mu(a)F(\zeta) = \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^n \det(p)^{-\frac{1}{2}} \int \exp\left(\frac{\nu}{2}(\zeta|qp^{-1}\zeta) + \nu(\bar{p}|\bar{p}^{-1}\zeta) - \frac{\nu}{2}(\bar{p}|\bar{p}^{-1}q\rho)\right) F(\rho) e^{-\nu|\rho|^2} d\rho,$$

wobei sich hier aufgrund des unterschiedlichen Skalarprodukts eine andere Normierung ergibt. Insbesondere folgt

$$\begin{aligned} \mu(a)\left(e^{\frac{\nu}{2}(\eta|w\bar{\eta})}\right)(\zeta) &= \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^n \det(p)^{-\frac{1}{2}} \int e^{\frac{\nu}{2}(\zeta|qp^{-1}\zeta) + \nu(\bar{p}|\bar{p}^{-1}\zeta) - \frac{\nu}{2}(\bar{p}|\bar{p}^{-1}q\rho)} e^{\frac{\nu}{2}(\rho|w\bar{\rho})} e^{-\nu|\rho|^2} d\rho \\ &= \det(p)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\nu}{2}(\zeta|qp^{-1}\zeta)} (\det(1 + \bar{w}p^{-1}q))^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\nu}{2}(\zeta|(\bar{p}^{-1})^t w(1 + \bar{p}^{-1}q w)^{-1} \bar{p}^{-1}\zeta)} \end{aligned}$$

nach Theorem 3.1.1, welches wegen (*), (**) und $w \in \mathcal{S}(W)$ anwendbar ist. Mit (**) gilt weiter

$$\begin{aligned} \overline{qp^{-1}} + (\bar{p}^{-1})^t w(1 + \bar{p}^{-1}q w)^{-1} \bar{p}^{-1} &= \overline{qp^{-1}} + (\bar{p}^{-1})^t w(\bar{p} + \bar{q}w)^{-1} \\ &= (\overline{qp^{-1}}(\bar{p} + \bar{q}w) + (\bar{p}^{-1})^t w)(\bar{p} + \bar{q}w)^{-1} \\ &= (q + (\overline{qp^{-1}q} + (\bar{p}^{-1})^t w))(\bar{p} + \bar{q}w)^{-1} \\ &= (q + (\overline{qq^t(\bar{p}^{-1})^t} + (\bar{p}^{-1})^t w))(\bar{q}w + \bar{p})^{-1} \\ &= (q + (\overline{qq^t} + 1)(\bar{p}^{-1})^t w)(\bar{q}w + \bar{p})^{-1} \\ &= (q + (\overline{pp^t})(\bar{p}^{-1})^t w)(\bar{q}w + \bar{p})^{-1} \\ &= (pw + q)(\bar{q}w + \bar{p})^{-1} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} (\det p)^{-\frac{1}{2}} (\det(1 + \bar{w}p^{-1}q))^{-\frac{1}{2}} &= (\det p)^{-\frac{1}{2}} (\det(1 + (\bar{p}^{-1}q)^t \bar{w}^t))^{-\frac{1}{2}} \\ &= (\det p)^{-\frac{1}{2}} (\det(1 + \bar{p}^{-1}q\bar{w}))^{-\frac{1}{2}} \\ &= (\det(p + qw^*))^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

sodass gilt:

$$\begin{aligned} \mu(a)\left(e^{\frac{\nu}{2}(\rho|w\bar{\rho})}\right)(\zeta) &= (\det(p + qw^*))^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\nu}{2}(\zeta|(pw + q)(\bar{q}w + \bar{p})^{-1}\zeta)\right) \\ &= (\det(p + qw^*))^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\nu}{2}(\zeta|a.w\bar{\zeta})\right). \end{aligned}$$

Im reellen Fall ist die Aktion in dieser Realisierung jedoch nicht durch eine geschlossene Form gegeben. Vielmehr wird sie hier durch die Aktion auf den Erzeugern beschrieben, die mithilfe des Satzes von Stone-von Neumann als Intertwiner der Schrödinger-Darstellung gewonnen wird [Fo, Kap. 4.2].

Die Schrödinger-Darstellung lässt sich auf zwei Arten beschreiben, je nachdem ob die gewöhnliche (Euklidische) oder die symplektische Fourier-Transformation gewählt wird (vgl. [Fo,

S.7]). Für spätere Anwendungen zeigt sich jedoch die in [Fo] nicht gewählte symplektische Form als günstiger, weswegen hier nicht genauer auf die Schrödinger-Darstellung eingegangen wird. Eine ausführliche Beschreibung findet sich in Abschnitt 5.2.

Die Erzeuger der symplektischen Gruppe liefert [Fo, 4.9, 4.10]:

Proposition 3.4.3. *Die Mengen*

$$N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b = b^* \right\}, \bar{N} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}, b = b^* \right\}, D := \left\{ \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & (b^*)^{-1} \end{pmatrix}, b \in GL(n, \mathbb{R}) \right\}$$

sind Untergruppen der symplektischen Gruppe, und es gilt, dass sowohl $N \cup D \cup \{J\}$ als auch $\bar{N} \cup D \cup \{J\}$ die symplektische Gruppe erzeugen. J dient hier als Intertwiner zwischen N und \bar{N} , denn es gilt

$$J\bar{N}J^{-1} = N.$$

Nun kann die metaplektische Darstellung für die reelle symplektische Gruppe beschrieben werden. Es gilt für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$:

- $\mu \left[\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & (b^*)^{-1} \end{pmatrix} \right] f(\xi) = (\det b)^{-\frac{1}{2}} f(b^{-1}\xi),$
- $\mu \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \right] f(\xi) = \pm e^{-\pi i(\xi|b\xi)} f(\xi),$
- $\mu(J) = i^{\frac{n}{2}} \mathcal{F}$, die Fourier-Transformation.

Diese Vorschriften müssen nun zunächst auf L^2_ν und dann auf $S_1^{\mathbb{R}}$ übertragen werden.

Es gilt erneut: Für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt $\tilde{f} \in L^2_\nu(\mathbb{R}^n)$ mit $\tilde{f}(\xi) := \left(\frac{\pi}{\nu}\right)^{\frac{n}{4}} e^{\frac{\nu}{2}(\xi|\xi)} f\left(\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\xi\right)$. Bezeichnet man diese Zuordnung mit m , so ergibt sich das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\mu} & L^2(\mathbb{R}^n) \\ m \downarrow & & \downarrow m \\ L^2_\nu(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & L^2_\nu(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

sodass also die neue Darstellung auf einer Funktion $\tilde{f} \in L^2_\nu(\mathbb{R}^n)$ durch

$$\tilde{\mu}\tilde{f} = m(\mu(m^{-1}\tilde{f}))$$

gegeben ist. Danach wird die neue Darstellung mit q^* zunächst nach $T_1^{\mathbb{R}}$ übertragen, anschließend erfolgt der Übergang nach $S_1^{\mathbb{R}}$ mittels der modifizierten Cayley-Transformation. Man berechnet zuerst

$$m^{-1}\tilde{f}(\xi) = \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{n}{4}} e^{-\frac{\pi}{2}(\xi|\xi)} \tilde{f}\left(\sqrt{\frac{\pi}{\nu}}\xi\right).$$

In den ersten beiden Fällen überträgt sich die Darstellung problemlos. Es gilt im ersten Fall mit $h = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & (b^*)^{-1} \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mu}(h)\tilde{f}(\xi) &= m(\mu(h)(m^{-1}\tilde{f}))(\xi) \\
 &= m\left(\mu(h)\left(\left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{n}{4}} e^{-\frac{\pi}{2}(\xi|\xi)}\tilde{f}\right)\right)\left(\sqrt{\frac{\pi}{\nu}}\xi\right) \\
 &= m\left((\det b)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{n}{4}} e^{-\frac{\pi}{2}(b^{-1}\xi|b^{-1}\xi)}\tilde{f}\right)\left(b^{-1}\sqrt{\frac{\pi}{\nu}}\xi\right) \\
 &= (\det b)^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{\nu}{2}[(\xi|\xi)-(b^{-1}\xi|b^{-1}\xi)]}\tilde{f}(b^{-1}\xi) \\
 &\stackrel{q^*}{\rightarrow} (\det bb^*)^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}\operatorname{tr}[y-b^{-1}y(b^{-1})^*]}\tilde{f}(b^{-1}y(b^{-1})^*) \\
 &= (\det bb^*)^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}\operatorname{tr}(y)}e^{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}(h^{-1}\cdot y)}\tilde{f}(h^{-1}\cdot y) \\
 &= \tilde{\mu}(h)f(y).
 \end{aligned}$$

und der üblichen Aktion $h.y$ wie oben. Der Determinantenfaktor ändert sich unter q^* , da q^* die Norm erhält.

Im zweiten Fall mit $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ folgt:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mu}(h)\tilde{f}(\xi) &= m(\mu(h)(m^{-1}\tilde{f}))(\xi) \\
 &= m\left(\mu(h)\left(\left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{n}{4}} e^{-\frac{\pi}{2}(\xi|\xi)}\tilde{f}\right)\right)\left(\sqrt{\frac{\pi}{\nu}}\xi\right) \\
 &= m\left(\pm e^{-\pi i(\xi|b\xi)}\left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{n}{4}} e^{-\frac{\pi}{2}(\xi|\xi)}\tilde{f}\right)\left(\sqrt{\frac{\pi}{\nu}}\xi\right) \\
 &= \pm e^{-\nu i(\xi|b\xi)}\tilde{f}(\xi) \\
 &\stackrel{q^*}{\rightarrow} \pm e^{-i\operatorname{tr}(by)}\tilde{f}(y) \\
 &= \tilde{\mu}(h)\tilde{f}(y).
 \end{aligned}$$

Für die Fourier-Transformation erhält man:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{F}}\tilde{f}(\eta) &= \left(\frac{\pi}{\nu}\right)^{\frac{n}{4}} e^{\frac{\nu}{2}(\eta|\eta)}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{n}{4}} e^{-\frac{\pi}{2}(\xi|\xi)}\tilde{f}\left(\sqrt{\frac{\pi}{\nu}}\xi\right) e^{-\pi i(\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\eta|\xi)} d\xi \\
 &= e^{\frac{\nu}{2}(\eta|\eta)}\left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\nu}{2}(\xi|\xi)}\tilde{f}(\xi) e^{-\nu i(\eta|\xi)} d\xi.
 \end{aligned}$$

Mit q^* gelangt man nun nach $T_1^{\mathbb{R}}$. Um diese Zuordnung als Integraloperator zu realisieren,

wird erneut auf die Funktionen f_w zurückgegriffen. Speziell für f_w ergibt sich mit [Fo, Th.A.1]

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{F}}f_w(\eta) &= e^{\frac{\nu}{2}(\eta|\eta)} \left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\nu}{2}(\xi|\xi)} f_w(\xi) e^{-\nu i(\eta|\xi)} d\xi \\
&= e^{\frac{\nu}{2}(\eta|\eta)} \det(1+w^*)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\nu}{2}(\xi|\xi)} e^{\frac{\nu}{2}(\xi|(c(w)+1)\xi)} e^{-\nu i(\eta|\xi)} d\xi \\
&= e^{\frac{\nu}{2}(\eta|\eta)} \det(1+w^*)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\nu}{2}(\xi|-c(w)\xi)} e^{-\nu i(\eta|\xi)} d\xi \\
&= \det(1+w^*)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\nu}{2}(\eta|\eta)} \det(-c(w)^*)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\nu}{2}(\eta|-c(w)^{-1}\eta)} \\
&= \det(1-w^*)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\nu}{2}(\eta|(c(w)^{-1}+1)\eta)} = f_{-w}(\eta),
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
c(w)^{-1} &= ((w-1)(w+1)^{-1})^{-1} \\
&= (w+1)(w-1)^{-1} \\
&= (-w-1)(1+(-w))^{-1}.
\end{aligned}$$

In $T_1^{\mathbb{R}}$ erhält man somit

$$\widetilde{\mathcal{F}}\left(e^{\frac{1}{2}\operatorname{tr}(y(c(w^*)+1))}\right)(q) = \det(-c(w^*))^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\operatorname{tr}(q(c(w^*)^{-1}+1))}.$$

Diese Zuordnung soll nun durch einen Integralkern beschrieben werden. Dies gelingt mit einer verallgemeinerten Bessel-Funktion:

Lemma 3.4.4. *Sei*

$$J_{\frac{1}{2}}(y, q) := \frac{e^{\frac{1}{2}\operatorname{tr}(q)}}{2^{\frac{n}{2}}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \left(\frac{1}{2}\right)_k} C_k \left(\frac{y(q+2)}{4}\right)$$

für $y, q \in \partial_1\Omega$. Dann gilt:

$$\int_{\partial_1\Omega} d\mu(y) f_w(y) J_{\frac{1}{2}}(y, q) = \det(1-w^*)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\operatorname{tr}(q(c(w^*)^{-1}+1))}.$$

Beweis: Man betrachtet zunächst nur solche $q \in \partial_1\Omega$, die die Bedingung $\|c(w^*)^{-1}q\| < 1$

erfüllen. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{\partial_1 \Omega} d\mu(y) e^{\frac{1}{2} \operatorname{tr}(y(c(w^*)+1))} C_k \left(\frac{y(q+2)}{4} \right) \\
 &= \int_{\partial_1 \Omega} d\mu(y) e^{\frac{1}{2} \operatorname{tr}(y(1+c(w^*))) + \operatorname{tr}\left(\frac{y(q+2)}{4}\right)} \\
 &= \int_{\partial_1 \Omega} d\mu(y) e^{\operatorname{tr}(y)} e^{\operatorname{tr}\left(y\left(\frac{1}{2}(c(w^*)+\frac{q}{2})\right)\right)} \\
 &= \det \left(-\frac{1}{2} \left(c(w^*) + \frac{q}{2} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \det \left(-\frac{1}{2} c(w^*) \right)^{-\frac{1}{2}} \det \left(1 - c(w^*)^{-1} \frac{q}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \det \left(-\frac{1}{2} c(w^*) \right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k}{k!} C_k \left(\frac{1}{2} c(w^*)^{-1} q \right).
 \end{aligned}$$

Wegen der k -Homogenität folgt also

$$\int_{\partial_1 \Omega} d\mu(y) e^{\frac{1}{2} \operatorname{tr}(y(c(w^*)+1))} C_k \left(\frac{y(q+2)}{4} \right) = 2^{\frac{n}{2}} \det(-c(w^*))^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)_k C_k \left(\frac{1}{2} c(w^*)^{-1} q \right),$$

wobei zu bemerken ist, dass dies wegen der Analytizität der rechten und linken Seite für alle $q \in \partial_1 \Omega$ gilt.

Daher ist

$$\begin{aligned}
 & \int_{\partial_1 \Omega} d\mu(y) f_w(y) J_{\frac{1}{2}}(y, q) \\
 &= \det(1+w^*)^{-\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{1}{2} \operatorname{tr}(q)}}{2^{\frac{n}{2}}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \left(\frac{1}{2}\right)_k} \int_{\partial_1 \Omega} d\mu(y) e^{\frac{1}{2} \operatorname{tr}(y(c(w^*)+1))} C_k \left(\frac{y(q+2)}{4} \right) \\
 &= \det(1+w^*)^{-\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{1}{2} \operatorname{tr}(q)}}{2^{\frac{n}{2}}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}}}{k!} \det(-c(w^*))^{-\frac{1}{2}} C_k \left(\frac{1}{2} c(w^*)^{-1} q \right) \\
 &= \det(1-w^*)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} \operatorname{tr}(q)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} C_k \left(\frac{1}{2} c(w^*)^{-1} q \right) \\
 &= \det(1-w^*)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} \operatorname{tr}(q)} e^{\frac{1}{2} \operatorname{tr}(c(w^*)^{-1} q)} \\
 &= \det(1-w^*)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} \operatorname{tr}(q(c(w^*)^{-1}+1))},
 \end{aligned}$$

was die Behauptung zeigt. Somit ist also ein Integraloperator für die Fourier-Transformation gefunden. \square

Die metaplektische Darstellung wurde damit vollständig auf $T_1^{\mathbb{R}}$ übertragen. Mithilfe eines Lifts der modifizierten Cayley-Transformation \tilde{c} kann diese nun nach $S_1^{\mathbb{R}}$ transportiert werden. Es zeigt sich jedoch, dass die Darstellung dort eher unnatürlich ist. Der Vollständigkeit

halber werden die Formeln im Folgenden angegeben, die unbeschränkte Realisierung ist jedoch günstiger.

Man erhält erneut ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} L^2(T_1^{\mathbb{R}}) & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & L^2(T_1^{\mathbb{R}}) \\ \tilde{c}^* \uparrow & & \uparrow \tilde{c}^* \\ L^2(S_1^{\mathbb{R}}) & \xrightarrow{\hat{\mu}} & L^2(S_1^{\mathbb{R}}) \end{array}$$

Es seien wie oben

$$\begin{aligned} \tilde{c}(x) &= (1+x)(1-x)^{-1} - \left(1 - \frac{x}{\operatorname{tr}(x)}\right) =: c(x) - (1-p_x), \\ \tilde{c}^{-1}(x) &= (x-1)(x+1)^{-1} + \left(1 - \frac{x}{\operatorname{tr}(x)}\right) =: c^{-1}(x) + (1-p_x). \end{aligned}$$

Für $h = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & (b^*)^{-1} \end{pmatrix}$ ergibt sich mit $f \in L^2(S_1^{\mathbb{R}})$:

$$\begin{aligned} (\hat{\mu}(h)f)(x) &= \left((\tilde{c}^*)^{-1} \circ \tilde{\mu} \circ \tilde{c}^* \right) f(x) \\ &= \left((\tilde{c}^*)^{-1} \circ \tilde{\mu} \right) f(c(x) - (1-p_x)) \\ &= (\tilde{c}^*)^{-1} \left((\det bb^*)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} \operatorname{tr}(c(x) - (1-p_x))} e^{-\frac{1}{2} \operatorname{tr}(h^{-1}(c(x) - (1-p_x)))} f \right) (h^{-1}(c(x) - (1-p_x))) \\ &= (\det bb^*)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} \operatorname{tr}(x)} e^{-\frac{1}{2} \operatorname{tr} \left[c^{-1}(b^{-1}c(x)(b^{-1})^* - b^{-1}(1-p_x)(b^{-1})^*) + 1 - p_{b^{-1}c(x)(b^{-1})^* - b^{-1}(1-p_x)(b^{-1})^*} \right]} \\ &\quad f \left(c^{-1}(b^{-1}c(x)(b^{-1})^* - b^{-1}(1-p_x)(b^{-1})^*) + 1 - p_{b^{-1}c(x)(b^{-1})^* - b^{-1}(1-p_x)(b^{-1})^*} \right). \end{aligned}$$

Der Rang bleibt also erhalten, die Aktion von h dreht den Eigenwert von x , wodurch sich natürlich auch der Korrekturterm ändert. Im zweiten Fall mit $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ hat man

$$\begin{aligned} (\hat{\mu}(h)f)(x) &= \left((\tilde{c}^*)^{-1} \circ \tilde{\mu} \circ \tilde{c}^* \right) f(x) \\ &= (\tilde{c}^*)^{-1} \left(\pm e^{-i \operatorname{tr}[b(c(x) - (1-p_x))]} f \right) (c(x) - (1-p_x)) \\ &= \pm e^{-i \operatorname{tr} \left[c^{-1}(b(c(x) - (1-p_x))) + 1 - p_{c^{-1}(b(c(x) - (1-p_x))} \right]} f(x). \end{aligned}$$

Die Fourier-Transformation überträgt sich jedoch problemlos, da die Maße an die Cayley-Transformation angepasst sind. Dadurch erhält man für $x, p \in S_1^{\mathbb{R}}$

$$\hat{\mathcal{F}} \left(e^{\frac{1}{2} \operatorname{tr}(x(c(w^*)+1))} \right) (p) = \det(-c(w^*))^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} \operatorname{tr}(p(c(w^*)^{-1}+1))}.$$

Auch Lemma 3.4.4 ist vollkommen analog zu formulieren, wobei natürlich das Integral über $S_1^{\mathbb{R}}$ mit dem zugehörigen Maß $d\mu(x)$ zu verwenden ist.

Kapitel 4

Die Fortsetzung für höheren Rang und allgemeine Jordan-Algebren

4.1 Die Segal-Bargmann-Transformation

Nachdem im vorherigen Abschnitt der reelle Fall ausführlich und explizit behandelt wurde, soll nun der allgemeine Fall einer Euklidischen Jordan-Algebra vom Rang r und Dimension d betrachtet werden. Bezeichne wie oben K die maximale kompakte Untergruppe von G , also die Automorphismen von B , die den Ursprung fixieren, und

$$H := \mathrm{GL}(\Omega) = \{g \in \mathrm{GL}(X) \mid g\Omega = \Omega\}$$

die Transformationsgruppe, die den Kegel Ω invariant lässt. Es gilt die folgende Hilfsaussage:

Lemma 4.1.1.

$$\int_{H \cap K} dh e^{(z,h|w)} = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_+^r} \frac{\dim \mathcal{P}_{\mathbf{m}}(Z)}{\binom{d}{r}_{\mathbf{m}}} \Phi^{\mathbf{m}}(z) \overline{\Phi^{\mathbf{m}}(w)}.$$

Beweis: Es gilt

$$\sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_+^r} K_{\mathbf{m}}(z, w) = e^{(z|w)}.$$

Bezeichne $d_{\mathbf{m}} := \dim \mathcal{P}_{\mathbf{m}}(Z)$. Nach [F-K, IX.2.2.(iii)] lässt sich jeder reproduzierende Kern $K_{\mathbf{m}}(z, w)$ durch eine Orthonormalbasis des Fock-Raums Z darstellen, welche die normierte sphärische Funktion enthält:

$$K_{\mathbf{m}}(z, w) = \sum_{i=1}^{d_{\mathbf{m}}} u_i^{\mathbf{m}}(z) \overline{u_i^{\mathbf{m}}(w)},$$

mit $(u_i^{\mathbf{m}} | u_j^{\mathbf{m}})_{\mathcal{F}} = \delta_{ij}$, wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$u_1^{\mathbf{m}}(z) = u_1^{\mathbf{m}}(e) \Phi^{\mathbf{m}}(z)$$

sei. Dann folgt

$$1 = (u_1^{\mathbf{m}} | u_1^{\mathbf{m}}) = |u_1^{\mathbf{m}}(e)|^2 (\Phi^{\mathbf{m}} | \Phi^{\mathbf{m}}) = |u_1^{\mathbf{m}}(e)|^2 \frac{\binom{d}{r}_{\mathbf{m}}}{d_{\mathbf{m}}}$$

nach [F-K, S.230]. Es gilt weiterhin

$$\tilde{u}_i := \int_{H \cap K} dh u_i^{\mathbf{m}} \circ h = 0 \quad \forall i > 1,$$

denn:

Aus der K -Invarianz von $u_i^{\mathbf{m}} \in \mathcal{P}_{\mathbf{m}}(Z)$ folgt unmittelbar, dass $\tilde{u}_i \in \mathcal{P}_{\mathbf{m}}(Z)$ ist. Da \tilde{u}_i offensichtlich $H \cap K$ -invariant ist, erhält man $\tilde{u}_i = \lambda_i \Phi^{\mathbf{m}}$. Es gilt jedoch:

$$\begin{aligned} (\tilde{u}_i | \Phi^{\mathbf{m}})_Z &= \lambda_i (\Phi^{\mathbf{m}} | \Phi^{\mathbf{m}})_Z \\ &= \left(\int_{H \cap K} dh u_i^{\mathbf{m}} \circ h \mid \Phi^{\mathbf{m}} \right)_Z \\ &= \int_{H \cap K} dh (u_i^{\mathbf{m}} \circ h | \Phi^{\mathbf{m}})_Z \\ &\stackrel{\text{Inv. von } \Phi^{\mathbf{m}}}{=} \int_{H \cap K} dh (u_i^{\mathbf{m}} \circ h | \Phi^{\mathbf{m}} \circ h)_Z \\ &\stackrel{\text{Inv. von } (\cdot | \cdot)_Z}{=} \int_{H \cap K} dh (u_i^{\mathbf{m}} | \underbrace{\Phi^{\mathbf{m}}}_{=\mu u_1^{\mathbf{m}}})_Z \\ &= 0 \end{aligned}$$

für alle $i > 1$. Also folgt $\lambda_i = 0$, d.h. $\tilde{u}_i = 0$ für alle $i > 1$. Somit gilt

$$\begin{aligned} \int_{H \cap K} dh e^{(z,h|w)} &= \int_{H \cap K} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_+^r} K_{\mathbf{m}}(z \circ h | w) \\ &= \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_+^r} \sum_{i=1}^{d_{\mathbf{m}}} \int_{H \cap K} dh u_i^{\mathbf{m}}(z.h) \overline{u_i^{\mathbf{m}}(w)} \\ &= \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_+^r} \sum_{i=1}^{d_{\mathbf{m}}} \tilde{u}_i \overline{u_i^{\mathbf{m}}(w)} \\ &= \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_+^r} u_1^{\mathbf{m}}(z) \overline{u_1^{\mathbf{m}}(w)} \\ &= \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_+^r} \frac{d_{\mathbf{m}}}{\binom{d}{r}_{\mathbf{m}}} \Phi^{\mathbf{m}}(z) \overline{\Phi^{\mathbf{m}}(w)}. \end{aligned}$$

□

Damit lässt sich nun beweisen:

Satz 4.1.2. Sei $d\mu_\beta(y)$ ein Maß, sodass

$$\int d\mu_\beta(y) \Phi^{\mathbf{m}}(y) = (\beta)_{\underline{\mathbf{m}}}$$

gilt, und sei erneut $c(w) := (w - e)(w + e)^{-1}$. Dann folgt

$$\Delta(e + w)^{-\beta} \Delta(e + w^*)^{-\beta} \int_{H \cap K} d\mu_\beta(y) \int e^{(y, h | (\operatorname{Re}(c(w)) + e))} dh = \Delta(e - ww^*)^{-\beta}.$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} \int d\mu_\beta(y) \int_{H \cap K} e^{(y, h | (\operatorname{Re}(c(w)) + e))} dh &\stackrel{\text{L. 4.1.1}}{=} \int d\mu_\beta(y) \sum_{\underline{\mathbf{m}}} \frac{d_{\underline{\mathbf{m}}}}{\binom{d}{r}_{\underline{\mathbf{m}}}} \Phi^{\mathbf{m}}(y) \overline{\Phi^{\mathbf{m}}(e + \operatorname{Re}(c(w)))} \\ &= \sum_{\underline{\mathbf{m}}} \frac{d_{\underline{\mathbf{m}}}}{\binom{d}{r}_{\underline{\mathbf{m}}}} \overline{\Phi^{\mathbf{m}}(e + \operatorname{Re}(c(w)))} \int d\mu_\beta(y) \Phi^{\mathbf{m}}(y) \\ &= \sum_{\underline{\mathbf{m}}} (\beta)_{\underline{\mathbf{m}}} \frac{d_{\underline{\mathbf{m}}}}{\binom{d}{r}_{\underline{\mathbf{m}}}} \overline{\Phi^{\mathbf{m}}(e + \operatorname{Re}(c(w)))} \\ &\stackrel{*}{=} \Delta(e - (e + \operatorname{Re}(c(w^*))))^{-\beta} \\ &= \Delta(-\operatorname{Re}(c(w^*)))^{-\beta} \end{aligned}$$

wobei in Schritt * die Proposition [F-K, XII.1.3] verwendet wird.

Mit $\operatorname{Re}(c(w^*)) = (e + w)^{-1}(ww^* - e)(e + w^*)^{-1}$ folgt die Behauptung. \square

Insbesondere gilt also für $\beta = \frac{la}{2}$ und

$$f_w(x) := \Delta(e + w^*)^{-\frac{la}{2}} e^{(x | c(w) + e)}$$

die folgende Beziehung

$$\int_{H \cap K} d\mu_{\frac{la}{2}}(y) \int |f_w(x)|^2 = \Delta(e - ww^*)^{-\frac{la}{2}}.$$

Korollar 4.1.3. Ist Rang $y=1$, und gilt für das Maß $d\nu(y)$ die Bedingung

$$\int d\nu(y) y^m = \left(\frac{ra}{2}\right)_m,$$

so folgt die Behauptung von Satz 4.1.2 ebenfalls.

Beweis: Es gilt mit $\alpha = \frac{2}{a}$

$$\begin{aligned} \Phi^{\mathbf{m}}(y) &= \frac{J_m^{(\alpha)}(X)}{J_m^{(\alpha)}(I_r)} \\ &\stackrel{\text{Rang 1}}{=} \prod_{j=1}^m \frac{1 + \alpha(j-1)}{r + \alpha(j-1)} y^m \\ &= \prod_{j=1}^m \frac{\frac{a}{2} + (j-1)}{\frac{ra}{2} + (j-1)} y^m \\ &= \frac{\left(\frac{a}{2}\right)_m}{\left(\frac{ra}{2}\right)_m} y^m, \end{aligned}$$

und somit

$$\int d\nu(y) y^m = \frac{\left(\frac{ra}{2}\right)_m}{\left(\frac{a}{2}\right)_m} \int d\mu_{\frac{a}{2}}(y) \Phi^{\mathbf{m}}(y).$$

□

Dadurch ergibt sich aus den obigen Überlegungen des reellen Falls das Maß

$$d\nu(y) = dy \frac{1}{\Gamma\left(\frac{ra}{2}\right)} e^{-y} y^{\frac{ra}{2}-1}.$$

Man erhält also erneut eine Gammafunktion. Damit lässt sich μ_β ebenfalls durch eine Gammafunktion darstellen. Da hier Multi-Pochhammer-Symbole gefordert werden, muss dies die Gindikin-Koecher-Gammafunktion sein. In der Tat gilt

$$\begin{aligned} (\beta)_{\underline{\mathbf{m}}} &= \frac{\Gamma_{\partial_i\Omega}(\underline{\mathbf{m}} + \beta)}{\Gamma_{\partial_i\Omega}(\underline{\mathbf{m}})} \\ &= \frac{1}{\Gamma_{\partial_i\Omega}(\underline{\mathbf{m}})} \int_{\partial_i\Omega} \exp\{-(e|x)\} \Delta_{\underline{\mathbf{m}}+\beta}(x) \Delta(x)^{-\frac{d_i}{l}} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma_{\partial_i\Omega}(\underline{\mathbf{m}})} \int_{\partial_i\Omega} \exp\{-(e|x)\} \Delta(x)^{\beta-\frac{d_i}{l}} \Delta_{\underline{\mathbf{m}}}(x) dx \\ &=: \int_{\partial_i\Omega} \Delta_{\underline{\mathbf{m}}}(x) d\lambda_\beta(x). \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\Phi^{\mathbf{m}}(y) = \int_{H \cap K} \Delta_{\underline{\mathbf{m}}}(ky) dk = \Delta_{\underline{\mathbf{m}}}^b(y)$$

in der Notation von [Bou, §2, No. 2]. Damit folgt nach der dortigen Proposition 4, dass genau ein Maß $d\mu_\beta(y)$ existiert, sodass

$$\int d\mu_\beta(y) \Phi^{\mathbf{m}}(y) = \int_{\partial_i\Omega} \Delta_{\underline{\mathbf{m}}}(x) d\lambda_\beta(x) = (\beta)_{\underline{\mathbf{m}}}.$$

Es erweist sich jedoch, dass man das hier geforderte Maß von höherer Warte betrachten kann.

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} &\int d\mu_{\frac{la}{2}}(y) \int_{H \cap K} |f_w(x)|^2 \\ &= \Delta(e+w)^{-\frac{la}{2}} \Delta(e+w^*)^{-\frac{la}{2}} \int_{\partial_i\Omega} d\mu_{\frac{la}{2}}(x) e^{(x|(\operatorname{Re}(c(w))+e))} \\ &= \Delta(e-ww^*)^{-\frac{la}{2}}, \end{aligned}$$

also

$$\int_{\partial_i\Omega} d\mu_{\frac{la}{2}}(x) e^{(x|e)} e^{-(x|-\operatorname{Re}(c(w)))} = \Delta(-\operatorname{Re}(c(w)))^{-\frac{la}{2}}.$$

Das Maß $d\mu_{\frac{ia}{2}}(x)e^{(x|e)}$ hat also die Laplace-Transformation $\Delta(\cdot)^{-\frac{ia}{2}}$. Damit ist

$$d\mu_{\frac{ia}{2}}(x) = \frac{1}{\Gamma_{\Omega_{u_l}^1}(\frac{ra}{2})} d\mu_l^\Omega(x)e^{-(x|e)},$$

wobei $d\mu_l^\Omega(x)$ das Lassalle-Maß ist (vgl. [A-U, Prop.2.8]). Die obige Zerlegung ist damit eine Faktorisierung des Lassalle-Maßes bzgl. der Automorphismengruppe $\text{Aut}(X) = H \cap K$.

Insgesamt kann man also die Segal-Bargmann-Transformation für alle Euklidischen Jordan-Algebren in der unbeschränkten Realisierung angeben:

Satz 4.1.4. *Sei $y \in T_l^{\mathbb{R}}$, und es bezeichne erneut*

$$K_y(z) := \Delta(e + z)^{-\frac{ia}{2}} e^{(y|c(z)+e)}.$$

Dann ist

$$\mathcal{B} : \mathcal{H}_{\frac{ia}{2}} \rightarrow L^2(T_l^{\mathbb{R}}); \mathcal{B}f(y) := (f|K_y)_{\mathcal{H}_{\frac{ia}{2}}}$$

eine Isometrie.

Nun ist wieder der Übergang von der unbeschränkten zur beschränkten Realisierung durchzuführen. Analog wird eine modifizierte Cayley-Transformation verwendet, die den Rang l erhält. Es zeigt sich, dass der Korrekturterm im vorherigen Fall ein Spezialfall eines allgemeinen Prinzips ist.

Das Problem der normalen Cayley-Transformation ist, dass der Eigenwert 0 an der k -ten Stelle auf den Eigenwert $\text{tr}(e_k)$ abgebildet wird. Zur Veranschaulichung im Matrixfall:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c} \begin{pmatrix} c(\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{44} \end{pmatrix}.$$

Der Rang eines Cayley-transformierten Elements ist also automatisch maximal. Der gesuchte Korrekturterm muss daher diese neu entstandenen nicht-verschwindenden Eigenwerte wieder annullieren. Es darf jedoch nicht einfach das Einselement e abgezogen werden, da man sonst den Matrix-Einheitsball verlässt. Gesucht ist also das Tripotent p , dessen Peirceraum $Z_1(p)$ das Element x enthält, und das ein Untertripotent von e ist, d.h. $p = \sum_{k \in I} e_k$, wobei I gerade die Indizes von 1 bis r sind, bei denen x einen nicht-verschwindenden Eigenwert besitzt. Es existiert $h \in H \cap K$ mit $h.x = d_x$ diagonal, und es gilt $d_x = pd_x$. Bildet man dann wie oben

$$\tilde{c}(x) := (e + x)(e - x)^{-1} - (e - h^{-1}.p),$$

so bleibt der Rang von $\tilde{c}(x)$ unverändert. Um p zu erhalten, bedient man sich des Minimalpolynoms von x :

$$f(\lambda, x) = \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} \sigma_{r-i}(x) \lambda^i = \sum_{i=0}^r (-1)^i \sigma_i(x) \lambda^{r-i},$$

wobei die $\sigma_i(x)$ die symmetrischen Polynome in den Eigenwerten von x sind. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton folgt nun

$$0 = \sum_{i=0}^r (-1)^i \sigma_i(x) x^{r-i}.$$

Hat x den Rang l , so verschwinden alle $\sigma_k(x)$ mit $k > l$. Damit ist also

$$\begin{aligned} 0 &= h. \left(\sum_{i=0}^l (-1)^i \sigma_i(x) x^{r-i} \right) \\ &= \sum_{i=0}^l (-1)^i \sigma_i(x) d_x^{l-i} \\ &= \left(\sum_{i=0}^{l-1} (-1)^i \sigma_i(x) d_x^{l-i} + (-1)^l \sigma_l(x) p \right) d_x^{r-l}. \end{aligned}$$

Da d_x^k dieselben Eigenräume wie d_x hat, verlässt man den zugehörigen Peirceraum nicht, und es folgt

$$0 = \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^i \sigma_i(x) d_x^{l-i} + (-1)^l \sigma_l(x) p$$

und daher

$$p = \frac{1}{\sigma_l(x)} \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^{l+i-1} \sigma_i(x) d_x^{l-i}.$$

Insbesondere folgt für $l = 1$

$$p = \frac{\sigma_0(x) d_x}{\sigma_1(x)} = \frac{d_x}{\text{tr}(x)},$$

genau wie erwartet. Insgesamt ergibt sich die Transformation

$$\tilde{c}(x) = (e + x)(e - x)^{-1} - \left(e + \frac{1}{\sigma_l(x)} \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^{l+i} \sigma_i(x) x^{l-i} \right).$$

Es gilt daher

$$\tilde{c}: S_l^{\mathbb{R}} \rightarrow \partial_l \Omega.$$

Damit weiterhin die Norm erhalten bleibt, muss schließlich das Bildmass von $d\mu_l$ unter \tilde{c} bestimmt werden. Dazu genügt es, das totale Differential der ursprünglichen Cayley-Transformation zu berechnen, da der Korrekturterm auf $S_l^{\mathbb{R}}$ verschwindet. Dazu gilt:

$$\begin{aligned} D(c(x)).y &= D((e + x)(e - x)^{-1}).y \\ &= y(e - x)^{-1} + (e + x)(e - x)^{-1}y(e - x)^{-1} \\ &= 2(e - x)^{-1}y(e - x)^{-1} \\ &= 2P(e - x)^{-1}(y). \end{aligned}$$

Nach Proposition [F-K, III.4.2] folgt damit für die Jacobi-Determinante

$$\text{Det}(D\tilde{c}) = 2^{d_l} \Delta(e - x)^{-2 \frac{d_l}{l}}.$$

Somit ist die Segal-Bargmann-Transformation für alle einfachen Euklidischen Jordan-Algebren beliebigen Rangs übertragen. Abschließend lässt sich festhalten:

Satz 4.1.5. Sei $x \in S_l^{\mathbb{R}}$ und

$$\tilde{c} : S_l^{\mathbb{R}} \rightarrow \partial_l \Omega; \tilde{c}(x) = (e+x)(e-x)^{-1} - \left(e + \frac{1}{\sigma_l(x)} \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^{l+i} \sigma_i(x) x^{l-i} \right)$$

die rangerhaltende Cayley-Transformation. Dann sei der Kern $K_x(z)$ definiert als

$$K_x(z) := \Delta(e+z)^{-\frac{l\alpha}{2}} e^{(\tilde{c}(x)|(z-e)(z+e)^{-1}+e)}.$$

Damit folgt, dass

$$\mathcal{B} : \mathcal{H}_{\frac{l\alpha}{2}} \rightarrow L^2(S_l^{\mathbb{R}}); \mathcal{B}f(x) := (f|K_x)_{\mathcal{H}_{\frac{l\alpha}{2}}}$$

eine Isometrie ist.

4.2 Die metaplektische Darstellung im allgemeinen Fall

Nun soll auch die metaplektische Darstellung auf die höheren Ränge und die anderen Klassen von Euklidischen Jordan-Algebren erweitert werden. Für weitere Informationen ist [Cl2] zu nennen.

In dieser Arbeit werden jedoch nur die selbst-adjungierten Matrixalgebren betrachtet. Die Spin-Faktoren lassen zwar auch eine Erweiterung dieser Darstellung zu, die Menge der dafür benötigten Theorie würde jedoch den Nutzen für diese Arbeit übersteigen. Ausführliche Angaben finden sich ebenfalls in [Cl2, Kap.5-7]. Für die Ausnahmealgebra ist eine derartige Erweiterung bisher nicht bekannt.

Im komplexen Fall ist die operierende Gruppe isomorph zur unitären Gruppe der Signatur (n, n) , also der Gruppe

$$U(n, n) = \{U \in \text{GL}(2n, \mathbb{C}) \mid U^* H U = H\},$$

mit $H := \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$. Dieser Fall wird in Abschnitt [Fo, 4.7] ausführlich behandelt. Die Gruppe hat drei zum reellen Fall analoge Erzeuger, sämtliche Schritte des reellen Falls ergeben erneut Sinn, allerdings muss nun bei adjungierten Matrizen wie üblich auch komplex konjugiert werden. Es ergeben sich folgende Formeln für $f \in L^2(\mathbb{C}^n)$

- $\mu \left[\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & (b^*)^{-1} \end{pmatrix} \right] f(z) = (\det b)^{-1} f(b^{-1}z).$
- $\mu \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \right] f(z) = e^{-\pi i(z|bz)} f(z).$
- $\mu(J) = i^n \mathcal{F}.$

Damit die Unitarität erhalten bleibt, sind die Normierungsfaktoren an den neuen Grundkörper \mathbb{C} angepasst, die charakteristische Dimension a ist hier 2, sodass man die aus den üblichen Transformationsformeln gewohnte Potenz erhält. Die Formeln werden analog an das Gaußmaß angepasst und auf die Jordan-Algebra $\mathcal{H}_1(\mathbb{C})$ übertragen.

Im Quaternionen-Fall ist die Gruppe isomorph zu

$$SO^*(2n) := \{g \in SO(4n, \mathbb{C}) \mid Jg = \bar{g}J\} = SO(4n, \mathbb{C}) \cap M(2n, \mathbb{H})$$

(vgl. hierzu auch [F-K, S.213]). Die Eigenschaften dieser Gruppe werden ausführlich in [RH, Kap.2] im Abschnitt über \mathbb{H} -schieferhermitesche Formen betrachtet, und nach [RH, Cor. 2.67] und [RH, Prop. 2.89] gilt

$$SO^*(2n) \sqsubset U(2n, 2n) \sqsubset Sp(8n, \mathbb{R}).$$

Man hat erneut die Darstellung auf den Erzeugern, allerdings mit charakteristischer Dimension $a = 4$.

Für den höheren Rang ist zu bemerken, dass sämtliche Formeln für alle Ränge Sinn ergeben. Es müssen jedoch die Transformationseigenschaften des Lassalle-Maßes beachtet werden, damit die Darstellung weiterhin unitär bleibt. Daher muss man alle Normierungsfaktoren anpassen, indem man sie mit dem Rang potenziert. Es werden also die Zuordnungen

$$\Delta(bb^*)^{-\frac{a}{2}} \mapsto \Delta(bb^*)^{-\frac{la}{2}}, \Delta(1-w^*)^{-\frac{a}{2}} \mapsto \Delta(1-w^*)^{-\frac{la}{2}}$$

vorgenommen.

Insgesamt erhält man für die hermiteschen Matrixalgebren:

Sei $f \in L^2(\mathcal{H}_r(\mathbb{K}))$. Dann gilt für die erweiterte metaplektische Darstellung in der unbeschränkten Realisierung:

- $\mu \left[\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & (b^*)^{-1} \end{pmatrix} \right] f(y) = \Delta(bb^*)^{-\frac{la}{2}} e^{\frac{1}{2} \operatorname{tr}(y)} e^{-\frac{1}{2} \operatorname{tr}(h^{-1} \cdot y)} f(h^{-1} \cdot y),$
- $\mu \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \right] f(y) = e^{-i \operatorname{tr}(by)} f(y),$
- $\mu(J) = i^{\frac{nl_a}{2}} \tilde{\mathcal{F}}.$

Die Determinante des reellen bzw. komplexen Falles muss durch die allgemeine Jordan-Determinante ersetzt werden, dies ist auch für die Quaternionen wohldefiniert, da für $b \in \operatorname{GL}(r, \mathbb{H})$ folgt, dass $bb^* \in \mathcal{H}_r(\mathbb{H})$ ist.

Lemma 3.4.4 lässt sich mit Hilfe der Eigenschaften des Lassalle-Maßes leicht auf den allgemeinen Fall übertragen, sodass auch hier ein Integraloperator angegeben werden kann. Die zonalen Polynome werden wegen [F-K, Prop.XII.1.3] durch die allgemeineren sphärischen Polynome ersetzt und der Parameter der verallgemeinerten Bessel-Funktion J_α an die allgemeinere Laplace-Transformation angepasst, sodass gilt:

Satz 4.2.1. *Seien*

$$f_w(y) := \Delta(e + w^*)^{-\frac{la}{2}} e^{\frac{1}{2} \operatorname{tr}[y(c(w^*)+e)]}, J_{\frac{la}{2}}(y, q) = \frac{e^{\frac{1}{2} \operatorname{tr}(q)}}{2^{\frac{lan}{2}}} \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_+^l} \frac{1}{\binom{la}{2}_{\mathbf{m}}} \frac{d_{\mathbf{m}}}{\binom{d}{r}_{\mathbf{m}}} \Phi_{\mathbf{m}} \left(\frac{y(q+2)}{4} \right).$$

Dann gilt:

$$\left(f_w \mid J_{\frac{la}{2}}(q) \right) = \int_{\partial_1 \Omega} d\mu_{\frac{la}{2}}(y) f_w(y) J_{\frac{la}{2}}(y, q) = \Delta(e - w^*)^{-\frac{la}{2}} e^{\frac{1}{2} \operatorname{tr}[q(c(w^*)^{-1}+e)]}.$$

Der Beweis erfolgt analog zu Lemma 3.4.4.

Man hat die folgende Tabelle:

X	$X^{\mathbb{C}}$	Ω	$\text{Aut}(X)$	$H = \text{GL}(\Omega)$	$K = \text{Aut}(Z)$	$G = \text{Aut}(D)$
$\mathcal{H}_r(\mathbb{R})$	$\mathbb{C}_+^{r \times r}$	$\Pi_r(\mathbb{R})$	$U_r(\mathbb{R})$	$\text{GL}_r(\mathbb{R})$	$U_r(\mathbb{C})$	$Sp(2r, \mathbb{R})$
$\mathcal{H}_r(\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^{r \times r}$	$\Pi_r(\mathbb{C})$	$U_r(\mathbb{C})$	$\text{GL}_r(\mathbb{C})$	$S(U_r(\mathbb{C}) \times U_r(\mathbb{C}))$	$U_{\mathbb{C}}(r, r)$
$\mathcal{H}_r(\mathbb{H})$	$\mathbb{C}_-^{2r \times 2r}$	$\Pi_r(\mathbb{H})$	$U_r(\mathbb{H})$	$\text{GL}_r(\mathbb{H})$	$U_{2r}(\mathbb{C})$	$SO^*(2r)$
$\mathbb{R} \times V$	$\mathbb{C} \times V^{\mathbb{C}}$	Λ_{n+1}	$SO(n)$	$SO(1, n) \times \mathbb{R}^+$	$SO(n+1) \times SO(2)$	$SO_0(1, n+1)$
$\mathcal{H}_3(\mathbb{O})$	$\mathbb{O}^{3 \times 3}$	$\Pi_3(\mathbb{O})$	F_4	E_6	$E_6 \times U(1)$	E_7

Dabei ist, wie im ersten Kapitel definiert, $\Lambda_{n+1} := \{(\mu, x) : \mu > (x, x)^{\frac{1}{2}}\}$ der Lorentz-Kegel, und $\Pi_r(\mathbb{K})$ sind die selbst-adjungierten, positiv definiten $r \times r$ Matrizen über \mathbb{K} . Es gelten folgende Relationen

$$\begin{aligned} \text{Aut}(X) &= H \cap K, \\ H^{\mathbb{C}} &= K^{\mathbb{C}}, \end{aligned}$$

sowie aufgrund der Transitivität der Aktion

$$\begin{aligned} D &\simeq G/K, \\ \Omega &\simeq H/\text{Aut}(X). \end{aligned}$$

Speziell für die hermiteschen Matrixalgebren erhält man

$$\begin{aligned} U(r, r) &= Sp(4r, \mathbb{R}) \cap \text{GL}(2r, \mathbb{C}) \\ SO^*(2r) &= U(2r, 2r) \cap \text{GL}(2r, \mathbb{H}). \end{aligned}$$

Die Gruppe G lässt sich daher als eine Restriktion des vorherigen Grundkörpers deuten.

Kapitel 5

Der Maslov-Index und seine Anwendung in der metaplektischen Darstellung

5.1 Klassischer Maslov-Index auf symplektischen Räumen

In diesem Abschnitt wird zunächst die bereits bekannte Theorie kurz zusammengefasst. Dazu wird hauptsächlich auf [L-V] zurückgegriffen. Sei von nun an V ein $2n$ -dimensionaler, symplektischer Vektorraum mit einem symplektischen Produkt ω . Zuerst benötigt man die folgenden Definitionen:

Definition 5.1.1. *Eine Basis $\{P_i, Q_i, i = 1 \dots, n\}$ von V heißt symplektische Basis, wenn gilt:*

- $\omega(P_i, P_j) = 0 = \omega(Q_i, Q_j)$ für alle $1 \leq i, j \leq n$.
- $\omega(P_i, Q_j) = \delta_{ij}$.

Zu jedem endlich-dimensionalen symplektischen Vektorraum lässt sich eine symplektische Basis wählen. Diese wird auch Darboux-Basis genannt, und lässt sich mithilfe eines modifizierten Gram-Schmidt-Verfahrens konstruieren. Im Falle des symplektischen Standardraumes \mathbb{R}^{2n} erfüllt die gewöhnliche Einheitsbasis diese Bedingungen.

Ein weiterer wichtiger Begriff ist das orthogonale Komplement:

Definition 5.1.2. *Ist U ein Unterraum von V , so bezeichnet man*

$$U^\perp := \{x \in V \mid \omega(x, y) = 0 \forall y \in U\}$$

als das orthogonale Komplement von U in V bzgl. ω .

Das orthogonale Komplement erfüllt folgende Eigenschaften:

Lemma 5.1.3.

- $\dim U + \dim U^\perp = \dim V = 2n$.
- $(U^\perp)^\perp = U$.
- $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$.
- $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$.

Eine besondere Klasse von Unterräumen sind die folgenden:

Definition 5.1.4. Sei $\ell \subset V$ ein Unterraum mit $\ell^\perp = \ell$. Dann heißt ℓ Lagrange-Unterraum. Der Unterraum ℓ ist bzgl. ω total isotrop, denn es folgt nach Definition $\omega(x, y) = 0$ für alle $x, y \in \ell$. Es gilt sogar, dass aus

$$x \in V, \omega(x, y) = 0 \quad \forall y \in \ell$$

bereits $x \in \ell$ folgt, sodass ℓ ein maximaler total isotroper Unterraum von V ist. Zwei Lagrange-Unterräume ℓ_1 und ℓ_2 heißen transversal, wenn $\ell_1 \cap \ell_2 = \{0\}$ ist.

Nach Lemma 5.1.3 folgt für transversale Lagrange-Unterräume ℓ_1 und ℓ_2

$$V = \{0\}^\perp = (\ell_1 \cap \ell_2)^\perp = \ell_1^\perp + \ell_2^\perp = \ell_1 \oplus \ell_2.$$

Umkehrt lässt sich zu jedem Lagrange-Unterraum ℓ nach Lemma [L-V, 1.1.4] ein transversaler Lagrange-Unterraum ℓ' mit

$$\ell \oplus \ell' = V$$

finden. Da das Produkt ω nicht ausgeartet ist, induziert es aufgrund der Lagrange-Eigenschaft von ℓ eine Paarung zwischen ℓ und $\ell' = V/\ell$, und so existiert eine symplektische Basis $\{P_i, Q_i\}$ von V mit

$$\ell = \sum_{i=1}^n \mathbb{R}P_i, \quad \ell' = \sum_{i=1}^n \mathbb{R}Q_i.$$

Lagrange-Unterräume lassen sich durch symplektische Transformationen ineinander überführen, es gilt sogar:

Lemma 5.1.5. Die symplektische Gruppe operiert transitiv auf transversalen Paaren von Lagrange-Unterräumen.

Beweis: Seien (ℓ_1, ℓ'_1) und (ℓ_2, ℓ'_2) zwei Paare von transversalen Lagrange-Unterräumen. Da $\ell_i + \ell'_i = V$ für $i = 1, 2$, kann man symplektische Basen $\{P_j^i, Q_j^i\}$ finden, sodass

$$\ell_i = \sum_{j=1}^n \mathbb{R}P_j^i, \quad \ell'_i = \sum_{j=1}^n \mathbb{R}Q_j^i$$

gilt. Es existiert eine Basistransformation $g \in \text{GL}(V)$, die diese beiden Basen ineinander überführt. Da aber beide Basen symplektisch sind, erhält g die symplektische Form ω und so gilt $g \in \text{Sp}(V)$. \square

Damit kann nun der Maslov-Index in der Realisierung nach Kashiwara definiert werden:

Definition 5.1.6. Seien ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 Lagrange-Unterräume von V . Sei W der $3n$ -dimensionale Vektorraum

$$W := \ell_1 \times \ell_2 \times \ell_3.$$

Auf W sei die quadratische Form Q definiert als

$$Q : W \rightarrow \mathbb{R}; Q(x) = Q((x_1, x_2, x_3)) := \omega(x_1, x_2) + \omega(x_2, x_3) + \omega(x_3, x_1).$$

Der Maslov-Index $\tau(\ell_1, \ell_2, \ell_3)$ ist definiert als die Signatur von Q . Nach dem Trägheitssatz von Sylvester hat Q einen eindeutigen Typ (p, q, t) , wobei p die Anzahl der positiven, q die Anzahl der negativen und t die Anzahl der verschwindenden Eigenwerte von Q sind. Die Signatur von Q ist die Spur der diagonalisierten, normierten Matrix zu Q , also gerade $p - q$.

Aus der Definition sind folgende Eigenschaften offensichtlich:

1. Für alle $g \in Sp(V)$ ist $\tau(\ell_1, \ell_2, \ell_3) = \tau(g\ell_1, g\ell_2, g\ell_3)$.
2. Für alle Permutationen $\sigma \in \mathcal{S}_3$ ist $\tau(\ell_{\sigma(1)}, \ell_{\sigma(2)}, \ell_{\sigma(3)}) = (-1)^{\text{sign}(\sigma)} \tau(\ell_1, \ell_2, \ell_3)$. Insbesondere ist τ invariant unter zyklischen Permutationen der Argumente.

Im Gegensatz zu Paaren von transversalen Lagrange-Unterräumen operiert die symplektische Gruppe nicht mehr transitiv auf Tripeln. Natürlich ist es möglich, ℓ_1 und ℓ_2 mithilfe einer symplektischen Transformation g in Lagrange-Unterräume ℓ'_1 und ℓ'_2 zu überführen, falls ℓ_1 und ℓ_2 transversal sind. Die Lage von $g\ell_3$ zu ℓ'_1 und ℓ'_2 jedoch wird gerade durch den Maslov-Index beschrieben.

Um dies zu veranschaulichen, wird nun der Fall $n = 1$ kurz betrachtet. In diesem speziellen Fall sind bereits alle nicht-trivialen Unterräume Lagrange-Unterräume, denn es gilt:

Sei $\ell = \{av \mid a \in \mathbb{R}, v \in V\} \sqsubset V$ eine Gerade, so folgt $\ell^\perp = \ell$, denn für $x_1 = a_1v, x_2 = a_2v$ folgt

$$\omega(x_1, x_2) = a_1a_2\omega(v, v) = 0$$

aufgrund der Antisymmetrie. Seien also ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 Geraden in V mit Richtungsvektoren v_1, v_2, v_3 . Es wird ohne Einschränkung $\ell_1 \neq \ell_2$ angenommen, da sonst der Maslov-Index trivialerweise verschwindet. Durch die Wahl einer geeigneten symplektischen Basis für V lässt sich daher erreichen, dass diese Vektoren durch

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

dargestellt werden. Da $v_3 \neq 0$, sei ohne Einschränkung $y \neq 0$, sodass ohne Beschränkung der Allgemeinheit durch Normierung

$$v_3 = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

erreicht werden kann. Nun ist also die Signatur der quadratischen Form Q zu bestimmen.

Unter Verwendung der Eigenschaften einer symplektischen Basis gilt

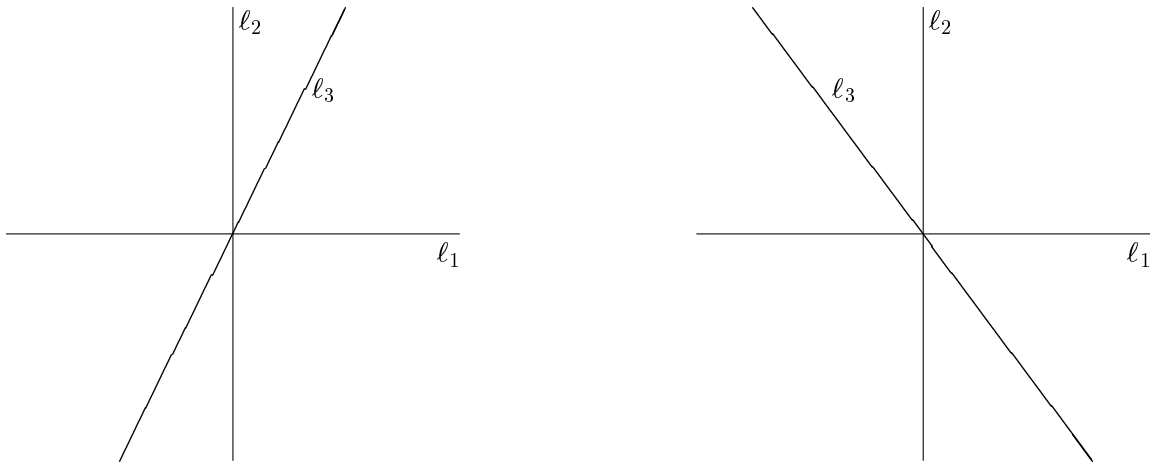
$$\begin{aligned}
 Q(a_1 v_1, a_2 v_2, a_3 v_3) &= a_1 a_2 \omega(v_1, v_2) + a_2 a_3 \omega(v_2, v_3) + a_1 a_3 \omega(v_3, v_1) \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \omega(v_1, v_2) & \omega(v_3, v_1) \\ \omega(v_1, v_2) & 0 & \omega(v_2, v_3) \\ \omega(v_3, v_1) & \omega(v_2, v_3) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -x \\ -1 & -x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Die Eigenwerte der zu Q gehörigen Matrix bestimmen sich zu

$$-\frac{x}{2}, \underbrace{\frac{x + \sqrt{x^2 + 8}}{4}}_{>0 \forall x \in \mathbb{R}}, \underbrace{\frac{x - \sqrt{x^2 + 8}}{4}}_{<0 \forall x \in \mathbb{R}}.$$

Damit ist

$$\text{sign}(Q) = -\text{sign}(x).$$



Das linke Bild zeigt die Situation für $x > 0$, der Maslov-Index ist hier -1 , die Geraden liegen antizyklisch, im rechten Bild ist $x < 0$, der Maslov-Index ist $+1$, die Geraden liegen zyklisch bezüglich einer Drehung gegen den Uhrzeigersinn zueinander. Im Grenzfall $x = 0$ ist $\ell_2 = \ell_3$, der Maslov-Index verschwindet.

Der allgemeine Fall ist in [L-V, 1.5.7] beschrieben:

Satz 5.1.7. *Seien ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 paarweise transversale Lagrange-Unterräume. Dann existiert eine symplektische Basis $\{P_i, Q_j\}$ von V und eine natürliche Zahl $0 \leq k \leq n$, sodass*

$$\begin{aligned}
 \ell_1 &= \bigoplus_{j=1}^n \mathbb{R}P_j \\
 \ell_2 &= \bigoplus_{j=1}^n \mathbb{R}Q_j \\
 \ell_3 &= \bigoplus_{j=1}^n \mathbb{R}(P_j + \varepsilon_j Q_j),
 \end{aligned}$$

wobei

$$\varepsilon_j = \begin{cases} 1 & j \leq k \\ -1 & j > k. \end{cases}$$

Es gilt $\tau(\ell_1, \ell_2, \ell_3) = n - 2k$.

Es gilt weiterhin nach Proposition [L-V, 1.5.8]

Proposition 5.1.8. *Seien $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ Lagrange-Unterräume. Dann erfüllt der Maslov-Index die Gleichung*

$$\tau(\ell_1, \ell_2, \ell_3) = \tau(\ell_4, \ell_2, \ell_3) + \tau(\ell_1, \ell_4, \ell_3) + \tau(\ell_1, \ell_2, \ell_4).$$

5.2 Die Schrödinger-Darstellung

Nun soll die klassische Schrödinger-Darstellung der Heisenberg-Gruppe beschrieben werden. Der vorgestellte Ansatz ist allgemeiner als der aus [Fo], da die Darstellung hier zusätzlich von einem Lagrange-Unterraum abhängt.

Definition 5.2.1. *Sei V ein symplektischer Vektorraum der Dimension $2n$. Die Heisenberg-Algebra η ist die Lie-Algebra*

$$\eta := V \oplus \mathbb{R}T$$

mit der Lie-Klammer

$$\begin{aligned} [,] &: \eta \times \eta \rightarrow \eta \\ [(x, 0), (y, 0)] &:= (0, \omega(x, y)) \quad \forall x, y \in V, \\ [(x, s), (0, t)] &:= 0 \quad \forall (x, s) \in \eta. \end{aligned}$$

Ist $\{P_i, Q_j\}$ eine symplektische Basis von V , so ist $\{(P_i, 0), (Q_j, 0), (0, 1)\}$ eine Basis von η , und es gelten die kanonischen Vertauschungsrelationen:

- $[(P_i, 0), (Q_j, 0)] = (0, \delta_{ij})$.
- $[(P_i, 0), (P_j, 0)] = [(Q_i, 0), (Q_j, 0)] = [(P_i, 0), (0, 1)] = [(Q_i, 0), (0, 1)] = 0$.

Die Heisenberg-Algebra lässt sich auch als Unter algebra der Algebra der Differentialoperatoren mit polynomialen Koeffizienten auffassen. Bezeichnet man mit

$$p_i = \frac{d}{dx_i}, \quad q_i = x_i$$

die natürlichen Differentiations- und Multiplikationsoperatoren, so erfüllen auch diese die kanonische Vertauschungsrelation $[p_i, q_j] = \delta_{ij}$ mit dem üblichen Kommutator $[D_1, D_2] = D_1 D_2 - D_2 D_1$ für Operatoren.

Daher kann η mithilfe von

$$P_i \rightarrow p_i; Q_j \rightarrow iq_j; T \rightarrow iId$$

identifiziert werden.

Wie üblich gelangt man von η zu der Heisenberg-Gruppe N mithilfe der Exponentialabbildung. Hierzu sei auf die Abschnitte [L-V, 1.2] und [Fo, 1.2] verwiesen. Es ergibt sich

Definition 5.2.2. Die Heisenberg-Gruppe N wird mit dem $2n+1$ -dimensionalen Vektorraum $V \oplus \mathbb{R}T$ identifiziert. Die Verknüpfung lautet

$$\langle v, s \rangle \langle w, t \rangle := \left\langle v + w, s + t + \frac{\omega(v, w)}{2} \right\rangle$$

für $v, w \in V, s, t \in \mathbb{R}$. Die Untergruppe $Z := \{ \langle 0, t \rangle \}$ ist das Zentrum von N .

Symbolisch kann $N \ni n = \langle v, t \rangle =: \exp(\langle v, t \rangle) = \exp(v + tT)$ gelesen werden.

Es soll nun die Schrödinger-Darstellung abhängig von einem Lagrange-Unterraum ℓ beschrieben werden. Dazu ist zunächst zu bemerken, dass für jeden Lagrange-Unterraum ℓ die Menge $\ell \oplus \mathbb{R}T$ aufgrund der Isotropie von ℓ bezüglich ω eine kommutative Unteralgebra von η ist. Die entsprechende Lie-Untergruppe $L := \{ \langle \ell, t \rangle \mid \ell \in \ell, t \in \mathbb{R} \}$ ist eine abelsche Untergruppe von N .

Man definiert die Funktion

$$\chi : N \rightarrow \mathbb{S}_1; \chi(\langle v, t \rangle) = e^{2\pi i t}.$$

Erneut wegen der Isotropie von ℓ bezüglich ω folgt, dass $\chi|_L$ ein Charakter von L ist, d.h.

$$\chi(l_1 l_2) = \chi(l_1) \chi(l_2)$$

für alle $l_1, l_2 \in L$.

Sei nun zu ℓ ein transversaler Lagrange-Unterraum ℓ' gegeben. Es folgt $\ell \oplus \ell' = V$ und damit für $n = \langle v, s \rangle \in N$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \langle v, s \rangle &= \langle v_1 + v_2, s \rangle \\ &= \langle v_2, 0 \rangle \left\langle v_1, s + \frac{\omega(v_1, v_2)}{2} \right\rangle, \end{aligned}$$

mit $v_1 \in \ell, v_2 \in \ell'$, sodass sich jedes Element aus N eindeutig in Anteile aus L, L' und Z zerlegen lässt. Dadurch kann man N/L mit ℓ' identifizieren und erhält so ein Haarmaß auf N/L mithilfe des Euklidischen Maßes auf ℓ' . Es lässt sich deshalb eine Quadratintegrierbarkeit definieren, die nach [Bou, §2, No.2] unabhängig von der Wahl von ℓ' ist. Damit hat man alle erforderlichen Voraussetzungen für

Definition 5.2.3. Der Hilbertraum $H(\ell)$ sei der Abschluss des Raums der stetigen Funktionen $\phi : N \rightarrow \mathbb{C}$, sodass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $\phi(nl) = \chi(l)^{-1} \phi(n)$ für alle $n \in N$ und $l \in L$.
2. ϕ ist quadratintegrierbar bezüglich des Haarmaßes dn auf N/L mit der Norm

$$\|\phi\|^2 = \int_{N/L} |\phi(n)|^2 dn.$$

Die Schrödinger-Darstellung W_ℓ ist durch Linkstranslationen definiert:

$$(W_\ell(n_0)\phi)(n) = \phi(n_0^{-1}n)$$

für alle $\phi \in H(\ell)$ und $n_0 \in N$.

Wie gesehen, kann jedes Element $n \in N$ eindeutig als $\langle y, 0 \rangle \langle x, t \rangle$ mit $x \in \ell, y \in \ell'$ beschrieben werden. Damit folgt aber $\langle x, t \rangle \in L$ und so

$$\phi(n) = \phi(\langle y, 0 \rangle \langle x, t \rangle) = \chi(\langle x, t \rangle)^{-1} \phi(\langle y, 0 \rangle) = e^{-2\pi i t} \phi(\langle y, 0 \rangle).$$

Die Funktion ϕ ist also eindeutig durch ihre Einschränkung auf den L' -Anteil bestimmt. Daher ist die Funktion

$$R : H(\ell) \rightarrow L^2(\ell'); \phi(\exp y) \mapsto \phi(y)$$

eine Isometrie. Dadurch erhält man eine Darstellung der Heisenberg-Gruppe auf $L^2(\ell')$:

$$\widetilde{W}_\ell(n) = RW_\ell(n)R^{-1}.$$

Es gelten die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} \left(\widetilde{W}_\ell(\langle x, 0 \rangle) \phi \right) (y) &= R \phi(\langle -x, 0 \rangle \langle y, 0 \rangle) \\ &= R \phi(\langle y, 0 \rangle \langle -x, \omega(-x, y) \rangle) \\ &= e^{2\pi i \omega(x, y)} \phi(y), \\ \left(\widetilde{W}_\ell(\langle y_0, 0 \rangle) \phi \right) (y) &= R \phi(\langle -y_0, 0 \rangle \langle y, 0 \rangle) \\ &= \phi(y - y_0), \\ \left(\widetilde{W}_\ell(\langle 0, t \rangle) \phi \right) (y) &= R \phi(\langle 0, -t \rangle \langle y, 0 \rangle) \\ &= e^{2\pi i t} \phi(y), \end{aligned}$$

für $x \in \ell, y, y_0 \in \ell'$ und $t \in \mathbb{R}$.

5.3 Intertwiner, der Maslov-Index und die metaplektische Darstellung

Das nachfolgende Theorem zeigt, dass die im vorherigen Abschnitt beschriebene Darstellung bis auf Äquivalenz die einzige unitäre Darstellung von N ist. Die hier verwendete Version ist das Theorem [Fo, 1.50], siehe auch Theorem [L-V, 1.3.3].

Theorem 5.3.1. (Stone-von Neumann)

Sei ρ eine unitäre Darstellung von N auf einem Hilbertraum \mathcal{H} , sodass $\rho(\langle 0, t \rangle) = e^{2\pi i t} \text{Id}_{\mathcal{H}}$, d.h. dass das Zentrum invariant gelassen wird. Dann ist

$$\mathcal{H} = \bigoplus \mathcal{H}_\alpha,$$

wobei die \mathcal{H}_α paarweise orthogonale, unter ρ invariante Unterräume von \mathcal{H} sind, sodass $\rho|_{\mathcal{H}_\alpha}$ für alle α unitär äquivalent zu W_ℓ ist. Insbesondere gilt für ρ irreduzibel, dass ρ äquivalent zu W_ℓ ist, also insbesondere ist W_ℓ irreduzibel.

Aufgrund dieses Theorems muss es also für zwei (nicht notwendig transversale) Lagrange-Unterräume ℓ_1 und ℓ_2 eine unitäre Äquivalenz zwischen den induzierten Darstellungen geben, d.h. es existiert ein unitäres $\mathcal{F}_{21} : H(\ell_1) \rightarrow H(\ell_2)$, sodass

$$\mathcal{F}_{21} W_{\ell_1}(n) = W_{\ell_2}(n) \mathcal{F}_{21}$$

gilt. Seien also $L_1 = \langle \ell_1, \mathbb{R} \rangle$ und $L_2 = \langle \ell_2, \mathbb{R} \rangle$ die zu ℓ_1 und ℓ_2 gehörigen Untergruppen von N . Nach dem Abschnitt [L-V, 1.4.5] wird der Intertwiner \mathcal{F}_{21} formal definiert als

$$(\mathcal{F}_{21}\phi)(n) := \int_{L_2/L_1 \cap L_2} \phi(nh) \chi(h) dh.$$

Dieser erfüllt die Invarianz-Bedingung nach Konstruktion, und das Maß dh lässt sich sogar so wählen, daß \mathcal{F}_{21} unitär ist (vgl. Abschnitte [L-V, 1.4.8-13] und [Bou, §2, No.2]).

Man kann sich jedoch auf die Betrachtung von transversalen Unterräumen einschränken. In diesem Fall stellt sich \mathcal{F}_{21} als die Fourier-Transformation heraus:

$$(\mathcal{F}_{21}\phi)(x) = \int_{\ell_2} e^{-2\pi i(x|y)} \phi(y) dy$$

für $x \in \ell_1$. Hier werden analog zu den obigen Rechnungen die Identifizierungen $H(\ell_1) = L^2(dy)$ und $H(\ell_2) = L^2(dx)$ vorgenommen. Dies ist sinnvoll, da wie oben gesehen, $\phi \in H(\ell_1)$ bereits durch die Werte auf ℓ_2 eindeutig bestimmt wird. Weiterhin wird erneut die Beziehung des Haarmaßes des Gruppenquotienten zu dem Euklidischen Maß auf ℓ_2 benutzt.

Für den nicht-transversalen Fall kann man sich auf den transversalen zurückziehen, denn es gilt nach Lemma [L-V, 1.4.6]:

Lemma 5.3.2. *Seien ℓ_1 und ℓ_2 zwei Lagrange-Unterräume von (V, ω) . Dann existiert eine symplektische Basis $\{P_i, Q_j\}$ von V und ein $0 \leq k \leq n$, sodass*

$$\begin{aligned} \ell_1 &= \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{R}P_i \oplus \bigoplus_{i=k+1}^n \mathbb{R}P_i, \\ \ell_2 &= \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{R}Q_i \oplus \bigoplus_{i=k+1}^n \mathbb{R}P_i \end{aligned}$$

erfüllt ist.

Man kann also die Unterräume in transversale und gemeinsame Anteile zerlegen. Der gesuchte Intertwiner ist dann auf dem transversalen Anteil die Fourier-Transformation und die Identität auf dem gemeinsamen Anteil.

Zwischen zwei Lagrange-Unterräumen lässt sich somit ein Intertwiner angeben. Der Maslov-Index tritt erwartungsgemäß jedoch erst bei drei Unterräumen auf, da die symplektische Gruppe wie gesehen erst bei drei Unterräumen nicht mehr transitiv operiert.

Es seien also ℓ_1, ℓ_2 und ℓ_3 Lagrange-Unterräume in (V, ω) . Dann existieren Intertwiner

$$\mathcal{F}_{ij} : H(\ell_j) \rightarrow H(\ell_i)$$

zwischen den jeweiligen Schrödinger-Darstellungen. Bildet man nun den Operator

$$\widehat{\mathcal{F}} := \mathcal{F}_{13}\mathcal{F}_{32}\mathcal{F}_{21} : H(\ell_1) \rightarrow H(\ell_1),$$

so muss $\widehat{\mathcal{F}}$ proportional zur Identität auf $H(\ell_1)$ sein, denn er verbindet die unitäre, projektive Darstellung $W(\ell_1)$ mit sich selbst. Allerdings existiert noch ein Phasenfaktor, der aufgrund der Unitarität vom Betrag eins sein muss. Dieser wird durch den Maslov-Index gegeben, denn nach Satz [L-V, 1.6.1] gilt

Satz 5.3.3.

$$\widehat{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_{13}\mathcal{F}_{32}\mathcal{F}_{21} = e^{-\frac{i\pi}{4}\tau(\ell_1, \ell_2, \ell_3)} Id_{H(\ell_1)}.$$

Der Maslov-Index spielt auch bei der metaplektischen Darstellung eine Rolle. Nach [L-V, 1.6.11] und [L-V, 1.6.20] lässt sich die metaplektische oder Segal-Shale-Weil-Darstellung der symplektischen Gruppe G bezüglich eines Lagrange-Unterraums beschreiben. Sei dazu eine Zerlegung $V = \ell \oplus \ell' = \{(x, y)\}$ in transversale Lagrange-Unterräume gewählt. Es gilt bzgl. dieser Zerlegung

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G \Leftrightarrow g^{-1} = \begin{pmatrix} d^t & -b^t \\ -c^t & a^t \end{pmatrix}.$$

Dann folgt

Satz 5.3.4. *Sei $g \in G$ und $\phi \in L^2(\ell')$. Dann ist die metaplektische Darstellung*

$$\begin{aligned} (R_\ell(g)\phi)(y) &= \int_{\ell/(\ell \cap g\ell)} \phi(\langle g^{-1}x, 0 \rangle \langle g^{-1}y, 0 \rangle) \delta x \\ &= \int_{\ell/\text{Kern}(c^t)} \phi(a^t y + c^t x) e^{i\pi(\omega(ab^t y, y) + 2\omega(b^t y, c^t x) - \omega(dc^t x, x))} \delta x, \end{aligned}$$

wobei $\delta x = \delta_g x$ das von g abhängige Maß ist, das R_ℓ unitär macht. Zudem gilt

$$R_\ell(g_1 g_2) = c_\ell(g_1, g_2) R_\ell(g_1) R_\ell(g_2)$$

mit dem Kozykel

$$c_\ell(g_1, g_2) = e^{-\frac{i\pi}{4}\tau(\ell, g_1 \ell, g_1 g_2 \ell)},$$

der projektive Faktor der metaplektischen Darstellung lässt sich also durch den Maslov-Index ausdrücken.

Detaillierte Berechnungen hierzu finden sich im Anhang. Dort wird auch auf die Konstruktion des Maßes δx eingegangen.

Betrachtet man wie oben die Erzeuger der symplektischen Gruppe, so erhält man

- Ist $g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & (a^t)^{-1} \end{pmatrix}$, $a \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$, so sind $b = 0$ und $c = 0$, also $\text{Kern}(c^t) = \ell$, und

$$(R_\ell(g)\phi)(y) = \int_{\ell/\ell} \phi(a^t y) \delta x = |\det(a)|^{\frac{1}{2}} \phi(a^t y).$$

- Ist $g = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = b^t$, so ist erneut $c = 0$ und $\text{Kern}(c^t) = \ell$, und daher

$$(R_\ell(g)\phi)(y) = \int_{\{0\}} \phi(y) e^{i\pi\omega(by,y)} \delta x = e^{i\pi(by,y)} \phi(y).$$

- Ist $g = J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, so ist $\text{Kern}(c^t) = \{0\}$ und es gilt mit $x \rightarrow -x$

$$(R_\ell(g)\phi)(y) = \int_{\ell} \phi(x) e^{-2\pi i\omega(x,y)} \delta x = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) e^{-2\pi i(x,y)} dx,$$

das ist die Fourier-Transformation.

Man erhält also dieselben Formeln wie bereits zuvor, der einzige Unterschied besteht darin, dass man aufgrund des unterschiedlichen Ansatzes für den ersten Erzeuger ein a^t anstatt eines a^{-1} erhält. Die Ursache hierfür findet sich in der Wahl von ℓ' als definierenden Raum für die Funktionen ϕ . Dadurch spielt der untere und nicht der obere Diagonalblock von g^{-1} die entscheidende Rolle, also tritt in dem diskutierten Spezialfall $a^t = a^t$ und nicht $d^t = ((a^t)^{-1})^t = a^{-1}$ auf.

5.4 Erweiterte metaplektische Darstellung

Wie in den vorherigen Kapiteln lässt sich auch das hier vorgestellte Konzept des Maslov-Indexes und der metaplektischen Darstellung zumindest teilweise auf Jordan-Algebren übertragen. Der erweiterte Maslov-Index aus [Cl2] erfüllt die geforderten Eigenschaften für alle Tubengebiete, also für die Fälle der hermiteschen Matrixalgebren und für den Spin-Faktor. Die Ausnahmealgebra lässt sich jedoch bisher noch nicht behandeln.

Es soll nun der Ansatz für die metaplektische Darstellung aus [L-V] zunächst auf \mathbb{C} und \mathbb{H} , und dann auf den hermiteschen Matrix-Fall erweitert werden. Als Vergleich dienen erneut die Ergebnisse aus den Abschnitten 3.4 und 4.2.

Der symplektische Vektorraum V wird also durch einen $2n$ -dimensionalen komplexen oder quaternionischen Vektorraum mit entsprechendem \mathbb{C} - bzw. \mathbb{H} -schief-hermiteschen inneren Produkt ω ersetzt (vgl. [RH, Kap.2]). Die Gruppe G , die ω invariant lässt, ist wie in Abschnitt 4.2 die Gruppe $U(n, n)$ bzw. $SO^*(2n)$. Die entsprechenden Sätze über Lagrange-Unterräume übertragen sich wörtlich, und es folgt analog zum reellen Fall:

Lemma 5.4.1. *Sei $g \in G$ mit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ bezüglich einer Zerlegung $V = \ell \oplus \ell'$ in transversale Lagrange-Unterräume. Dann gelten:*

- $c^*a = a^*c$
- $d^*b = b^*d$

- $a^*d - c^*b = 1$
- $cd^* = dc^*$
- $ab^* = ba^*$
- $ad^* - bc^* = 1$

und

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} d^* & -b^* \\ -c^* & a^* \end{pmatrix}.$$

Damit lässt sich auch Satz 5.3.4 problemlos übertragen, und es folgt

Satz 5.4.2. *Seien $g \in G$, $V = \ell \oplus \ell'$ und $\phi \in L^2(\ell')$. Dann ist die metaplektische Darstellung*

$$(R_\ell(g)\phi)(y) = \int_{\ell / \text{Kern}(c^*)} \phi(a^*y + c^*x) e^{i\pi(\omega(ab^*y, y) + 2\omega(b^*y, c^*x) - \omega(dc^*x, x))} \delta x,$$

wobei $\delta x = \delta_g x$ das von g abhängige Maß ist, das R_ℓ unitär macht. Zudem gilt

$$R_\ell(g_1 g_2) = c_\ell(g_1, g_2) R_\ell(g_1) R_\ell(g_2)$$

mit dem Kozykel

$$c_\ell(g_1, g_2) = e^{-\frac{i\pi}{4} \tau_V(\ell, g_1 \ell, g_1 g_2 \ell)}.$$

Die Berechnungen sind dabei identisch, es muss jedoch der in [Cl2] definierte erweiterte Maslov-Index verwendet werden. Die Sätze [Cl2, 3.1,4.1] garantieren hier, dass die Rolle des Maslov-Index als projektiver Faktor in der metaplektischen Darstellung weiterhin gültig bleibt.

Nun soll der Fall der hermiteschen Matrixalgebren betrachtet werden. Dafür benötigt man zunächst eine symplektische Struktur mit symplektischem Produkt ω und transversalen Lagrange-Unterräumen, sodass $V = \ell \oplus \ell'$ ist. Die Ausgangslage erzwingt Reduzibilität, wodurch eine Realisierung als ein Typ der einfachen Euklidischen Jordan-Algebren nicht möglich ist. Man bildet daher kanonisch:

$$V = \ell \oplus \ell' := \mathcal{H}_r^l(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{H}_r^l(\mathbb{K}) \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

also die formale direkte Summe zweier Räume von hermiteschen $r \times r$ Matrizen vom Rang l . Die symplektische Form ergibt sich dann als

$$\begin{aligned} \omega(x, y) &= \omega\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= (x_1|y_2) - (y_1|x_2) \\ &= \text{Re}(\text{tr}(x_1 y_2)) - \text{Re}(\text{tr}(y_1 x_2)) = \text{Re}(\text{tr}(x_1 y_2 - y_1 x_2)). \end{aligned}$$

Der Realteil spielt nur im quaternionischen Fall eine Rolle, im reellen bzw. komplexen Fall sind die Spuren ohnehin reell. Nun muss also nur noch die Wirkung der Gruppe, die ω invariant lässt, definiert werden. Man setzt an:

$$g \cdot x := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ax_1a^* + bx_2b^* \\ cx_1c^* + dx_2d^* \end{pmatrix}.$$

Die entstehenden Matrizen sind weiterhin hermitesch, und diese Definition stimmt mit den vorherigen Bedingungen an die Gruppe G überein, denn es gilt:

$$\begin{aligned} \omega(g \cdot x, g \cdot y) &= \operatorname{Re}[\operatorname{tr}((ax_1a^* + bx_2b^*)(cy_1c^* + dy_2d^*) - (ay_1a^* + by_2b^*)(cx_1c^* + dx_2d^*))] \\ &= \operatorname{Re}[\operatorname{tr}(ax_1a^*cy_1c^* + bx_2b^*cy_1c^* + ax_1a^*dy_2d^* + bx_2b^*dy_2d^*)] \\ &\quad - \operatorname{Re}[\operatorname{tr}(ay_1a^*cx_1c^* + by_2b^*cx_1c^* + ay_1a^*dx_2d^* + by_2b^*dx_2d^*)] \\ &= \operatorname{Re}[\operatorname{tr}(c^*ax_1a^*cy_1) + \operatorname{tr}(c^*bx_2b^*cy_1) + \operatorname{tr}(d^*ax_1a^*dy_2) + \operatorname{tr}(d^*bx_2b^*dy_2)] \\ &\quad - \operatorname{Re}[\operatorname{tr}(a^*cx_1c^*ay_1) + \operatorname{tr}(b^*cx_1c^*by_2) + \operatorname{tr}(a^*dx_2d^*ay_1) + \operatorname{tr}(b^*dx_2d^*by_2)] \\ &= \operatorname{Re}[\operatorname{tr}(c^*ax_1a^*cy_1) - \operatorname{tr}(a^*cx_1c^*ay_1) + \operatorname{tr}(d^*bx_2b^*dy_2) - \operatorname{tr}(b^*dx_2d^*by_2)] \\ &\quad + \operatorname{Re}[\operatorname{tr}(d^*ax_1a^*dy_2) - \operatorname{tr}(b^*cx_1c^*by_2) + \operatorname{tr}(a^*dx_2d^*ay_1) - \operatorname{tr}(c^*bx_2b^*cy_1)] \\ &\stackrel{!}{=} \operatorname{Re}(\operatorname{tr}(x_1y_2 - y_1x_2)) = \omega(x, y). \end{aligned}$$

Man erhält damit genau die Bedingungen aus Lemma 5.4.1.

Die lineare Abbildung c_+^* sei durch

$$c_+^* : \ell \rightarrow \ell'; x \mapsto c^*xc$$

definiert. Es folgt analog zu den Berechnungen zu Satz 5.3.4

$$\ell \cap g\ell = \{x \in \ell \mid g^{-1}x \in \ell\} = \operatorname{Kern}(c_+^*).$$

Daher kann man festhalten:

Satz 5.4.3. *Seien $g \in G$, $V = \ell \oplus \ell' = \mathcal{H}_r^l(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{H}_r^l(\mathbb{K})$ und $\phi \in \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}^{\mathbb{R}}$. Dann ist die metaplektische Darstellung durch*

$$(R_\ell(g)\phi)(y) = \int_{\ell / \operatorname{Kern}(c_+^*)} \phi(a^*ya + c^*xc) e^{i\pi(\omega(ab^*ya^*b, y) + 2\omega(b^*yb, c^*xc) - \omega(dc^*xcd^*, x))} \mu_g(x)$$

beschrieben.

Kapitel 6

Anhang

6.1 Einbettung der Euklidischen Jordan-Algebren in reelle Vektorräume

6.1.1 Allgemeines

Wie bereits im ersten Kapitel gesehen, lassen sich einfache Euklidische Jordan-Algebren klassifizieren in

1. $\mathcal{H}_r(\mathbb{K})$, $r \geq 3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder \mathbb{H} ,
2. die Spin-Faktoren $\mathbb{R} \oplus V$, wobei V ein reeller Vektorraum mit $\dim V \geq 2$ ist und
3. die Ausnahmealgebra $\mathcal{H}_3(\mathbb{O})$.

Bis auf die Ausnahmealgebra lässt sich zu einer Jordan-Algebra J eine Einbettung in einen reellen Vektorraum $End(W)$ finden, die die Jordan-Struktur erhält. Eine solche Einbettung $\rho : J \rightarrow End(W)$ muss die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. $\rho(X) = \overline{\rho(X)}$
2. $\rho(X) = \rho(X)^t$
3. $\rho(id) = id$
4. $\rho(X^2) = \rho(X)^2$

Hier ist die vierte Bedingung die wesentliche, da aus ihr mittels Polarisierung folgt, dass

$$\rho(X \circ Y) = \frac{\rho(X)\rho(Y) + \rho(Y)\rho(X)}{2},$$

sodass ρ das Jordan-Produkt erhält.

Es gilt zusätzlich:

Ist Δ die Jordan-Determinante zu J , so ist $\det(\rho(X)) = \Delta(X)^q$, mit $q \in \mathbb{N}$ abhängig von J . Dies ist im Fall der Ausnahmealgebra jedoch im Allgemeinen falsch, die Beziehung gilt nur, falls die außerdiagonalen Cayley-Zahlen paarweise assoziieren.

6.1.2 Hermitesche Matrizen über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ und \mathbb{H}

Hier wird die Multiplikation eines Elements von \mathbb{K} als Multiplikation auf dem zugehörigen reellen Vektorraum $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^4$ gedeutet.

Bei reellen Matrizen ist hier nichts zu tun, die Einbettung ist die Identität. Zu

$$b_{st} = b_{st}^1 + ib_{st}^2 \in \mathbb{C}$$

sei

$$m(b_{st}) := B_{st} := \begin{pmatrix} b_{st}^1 & -b_{st}^2 \\ b_{st}^2 & b_{st}^1 \end{pmatrix},$$

zu

$$b_{st} = b_{st}^1 + ib_{st}^2 + jb_{st}^3 + kb_{st}^4 \in \mathbb{H}$$

die Matrix

$$m(b_{st}) := B_{st} := \begin{pmatrix} b_{st}^1 & -b_{st}^2 & -b_{st}^3 & -b_{st}^4 \\ b_{st}^2 & b_{st}^1 & b_{st}^4 & -b_{st}^3 \\ b_{st}^3 & -b_{st}^4 & b_{st}^1 & b_{st}^2 \\ b_{st}^4 & b_{st}^3 & -b_{st}^2 & b_{st}^1 \end{pmatrix}$$

durch die Rechtsmultiplikation mit b_{st} definiert.

Dann ist die Einbettung gegeben durch

$$\mathcal{H}_r(\mathbb{K}) \ni \begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1r} \\ b_{12}^* & a_{22} & b_{23} & & \\ b_{13}^* & b_{23}^* & a_{33} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ b_{1r}^* & \cdots & & & a_{rr} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}I_q & B_{12} & B_{13} & \cdots & B_{1r} \\ B_{12}^t & a_{22}I_q & B_{23} & & \\ B_{13}^t & B_{23}^t & a_{33}I_q & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ B_{1r}^t & \cdots & & & a_{rr}I_q \end{pmatrix},$$

wobei $q := \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$ die reelle Dimension der zugrunde liegenden Divisionsalgebra ist. Da $B_{st}^t = m(b_{st}^*)$ ist, erfüllt die Einbettung die vier Voraussetzungen, falls

$$m(b_{st})m(b_{kl}) = m(b_{st}b_{kl}).$$

Dies ist aber klar, da \mathbb{R}, \mathbb{C} und \mathbb{H} assoziativ sind.

Lemma 6.1.1. *Es gilt für $X \in \mathcal{H}_r(\mathbb{K})$:*

$$\det(\rho(X)) = \Delta(X)^q.$$

Beweis: Nach dem Spektralsatz ist X diagonalisierbar mit (Rechts-)Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ und zugehörigen (Rechts-)Eigenvektoren $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{K}^r$. Fasst man z_k als Vektor im \mathbb{R}^q auf, so folgt nach Konstruktion von $\rho(X)$:

$$\begin{aligned} B_{ij} \widetilde{z}_{kj} &= \widetilde{z_{kj} b_{ij}} \Rightarrow \\ \rho(X) \widetilde{z}_k &= \widetilde{X z_k} = \widetilde{z_k \lambda_k} = \lambda_k \widetilde{z}_k, \end{aligned}$$

da $\lambda_k \in \mathbb{R}$, sodass λ_k auch Eigenwert zu $\rho(X)$ mit q -dimensionalem Eigenraum über \mathbb{R} ist. Dies sind also alle Eigenwerte von $\rho(X)$, und damit ist

$$\det(\rho(X)) = \prod \lambda_k^q = \left(\prod \lambda_k \right)^q = \Delta(X)^q.$$

□

Die Unterscheidung in Rechts- und Linkseigenwerte ist bei den Quaternionen wesentlich, da Linkseigenwerte im Allgemeinen *nicht* reell sind [D-M].

6.1.3 Der Spin-Faktor

In [G] wird gezeigt: der Spin-Faktor läßt sich als "hermitesche Matrizen" über \mathbb{R}^n interpretieren, als Dimension wird hier n genommen. Zu einer Matrix $X \in J$ erhält man

$$X \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & d \end{pmatrix}, \quad a, d \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^n.$$

Zusätzlich seien

$$I := \text{Id}, \quad J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Involution im reellen Spin-Faktor ist definiert als (vgl. [G]):

$$X^* = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -b^* & a \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{aligned} a &\mapsto d \\ d &\mapsto a \\ b_i &\mapsto -b_i. \end{aligned}$$

Es gilt daher

$$X + X^* = (a + d)I.$$

Es ist

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + (b|b) & (a + d)b \\ (a + d)b^* & d + (b|b) \end{pmatrix}.$$

Da die vierte Bedingung $\rho(X)^2 = \rho(X^2)$ erfüllt werden muss, folgen für die Zuordnung $\rho(X) \mapsto \rho(X)^2$ die Bedingungen:

$$\begin{aligned} a &\mapsto a + \sum b_i^2 \\ d &\mapsto d + \sum b_i^2 \\ b_i &\mapsto (a + d)b_i. \end{aligned}$$

Hiermit lässt sich eine induktive Konstruktion einer Einbettung der Dimension n aus der Dimension $n - 1$ angeben:

Lemma 6.1.2. *Sei A_{n-1} eine $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ -Einbettung, die das Jordan-Produkt erhält. Dann betrachtet man*

$$A_n := \begin{pmatrix} A_{n-1} & b_k K \\ b_k K^t & A_{n-1}^* \end{pmatrix}.$$

Dies ist genau dann eine $2^n \times 2^n$ -Einbettung des k -dimensionalen Spin-Faktors, falls für K gilt:

1. $KK^t = I$, d.h. K ist orthogonal,
2. $[K, A_{n-1}] = 0$.

Der genaue Zusammenhang zwischen n und k wird später erläutert, es liegt nicht immer eine Verdoppelung der Dimension vor.

Beweis: Es gilt

$$\begin{pmatrix} A_{n-1} & b_k K \\ b_k K^t & A_{n-1}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & b_k K \\ b_k K^t & A_{n-1}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n-1}^2 + b_k^2 KK^t & b_k A_{n-1}K + b_k K A_{n-1}^* \\ b_k K^t A_{n-1} + b_k A_{n-1}^* K^t & (A_{n-1}^*)^2 + b_k^2 K^t K \end{pmatrix}.$$

Da A_{n-1} laut Voraussetzung das Jordan-Produkt erhält, erfüllt A_n genau dann die vierte Bedingung, falls

1. $KK^t = I$,
2. $A_{n-1}K + KA_{n-1}^* = (a + d)K$.

Für die zweite Bedingung folgt jedoch

$$\begin{aligned} A_{n-1}K + KA_{n-1}^* &\stackrel{!}{=} (a + d)K \\ &= K(a + d)I \\ &= K(A_{n-1} + A_{n-1}^*) \end{aligned}$$

und daher ist die Bedingung äquivalent zu $KA_{n-1} = A_{n-1}K$. Insbesondere folgt wegen der Orthogonalität von K daraus auch $KA_{n-1}^* = A_{n-1}^*K$.

Findet man zwei solche Matrizen K_1 und K_2 , so kann man bilden:

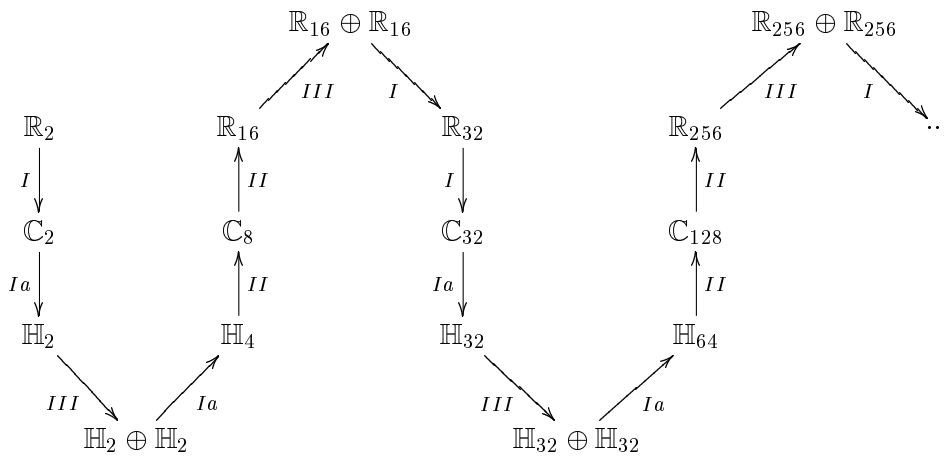
$$\begin{pmatrix} A_{n-1} & b_k K_1 + b_l K_2 \\ b_k K_1^t + b_l K_2^t & A_{n-1}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & b_k K_1 + b_l K_2 \\ b_k K_1^t + b_l K_2^t & A_{n-1}^* \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} A_{n-1}^2 + b_k^2 K_1 K_1^t + b_l^2 K_2 K_2^t + b_k b_l (K_1 K_2^t + K_2 K_1^t) & A_{n-1} (b_k K_1 + b_l K_2) + (b_k K_1 + b_l K_2) A_{n-1}^* \\ (b_k K_1^t + b_l K_2^t) A_{n-1} + A_{n-1}^* (b_k K_1^t + b_l K_2^t) & (A_{n-1}^*)^2 + b_k^2 K_1^t K_1 + b_l^2 K_2^t K_2 + b_k b_l (K_1^t K_2 + K_2^t K_1) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} A_{n-1}^2 + (b_k^2 + b_l^2) I + b_k b_l (K_1 K_2^t + K_2 K_1^t) & (a + d) (b_k K_1 + b_l K_2) \\ (a + d) (b_k K_1^t + b_l K_2^t) & (A_{n-1}^*)^2 + (b_k^2 + b_l^2) I + b_k b_l (K_1^t K_2 + K_2^t K_1) \end{pmatrix}.$$

Dies ist also erneut eine Einbettung, wenn gilt: $K_1 K_2^t + K_2 K_1^t = 0 = K_1^t K_2 + K_2^t K_1$. \square

Nach [Cl] verhalten sich die Einbettungen wie die folgende Kette:



Dabei deuten I, Ia, II, III Anwendungen des Verfahrens an, die aber von verschiedener Art sind. Dies wird an den konkreten Einbettungen des ersten Zyklus deutlich:

Für den eindimensionalen Fall ist nichts zu tun, die Einbettung ist die Identität, da bereits eine reelle Matrix vorliegt. Dies ist der Anfangsschritt des Verfahrens:

$$\begin{pmatrix} a & b_1 \\ b_1 & d \end{pmatrix} =: A_1$$

Im zweidimensionalen Fall erhält man eine Verdoppelung des eindimensionalen Falls mittels des Verfahrens. Dies ist vom Typ I, die einzige außerdiagonale Matrix, die die Bedingungen erfüllt, ist die Identität I :

$$\begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 & 0 \\ b_1 & d & 0 & b_2 \\ b_2 & 0 & d & -b_1 \\ 0 & b_2 & -b_1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & b_2 I \\ b_2 I & A_1^* \end{pmatrix} =: A_2$$

Für den dreidimensionalen Fall liegt ebenfalls eine Verdoppelung vor:

$$\begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & d & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & d & -b_1 & 0 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & b_2 & -b_1 & a & 0 & 0 & 0 & b_3 \\ b_3 & 0 & 0 & 0 & d & -b_1 & -b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & -0 & 0 & -b_1 & a & 0 & -b_2 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 & -b_2 & 0 & a & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 & -b_2 & b_1 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & b_2 I & b_3 I & 0 \\ b_2 I & A_1^* & 0 & b_3 I \\ b_3 I & 0 & A_1^* & -b_2 I \\ 0 & b_3 I & -b_2 I & A_1 \end{pmatrix} =: A_3$$

Dieser Schritt wird aber mit Typ Ia bezeichnet, da man hier das erste Mal zwei mögliche außerdiagonale Matrizen erhält, diese entsprechen den Erzeugern der komplexen Zahlen \mathbb{C} :

$$K_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \hat{=} 1, K_2 = \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix} \hat{=} i.$$

Die entstehenden Darstellungen sind äquivalent. Dies ändert sich jedoch im nächsten Fall. Hier tritt keine Verdoppelung auf, da die außerdiagonalen Matrizen miteinander verträglich sind. Man füllt hier maximal auf und erhält zwei inäquivalente Darstellungen im vierdimensionalen Fall. Daher liegt hier Typ III vor es ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 \\ b_1 & d & 0 & b_2 & 0 & b_3 & -b_4 & 0 \\ b_2 & 0 & d & -b_1 & 0 & b_4 & b_3 & 0 \\ 0 & b_2 & -b_1 & a & -b_4 & 0 & 0 & b_3 \\ b_3 & 0 & 0 & -b_4 & d & -b_1 & -b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & b_4 & 0 & -b_1 & a & 0 & -b_2 \\ 0 & -b_4 & b_3 & 0 & -b_2 & 0 & a & b_1 \\ b_4 & 0 & 0 & b_3 & 0 & -b_2 & b_1 & d \end{pmatrix} = A_3 + b_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & J \\ 0 & 0 & J & 0 \\ 0 & -J & 0 & 0 \\ -J & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

diese ist äquivalent zur normalen, zyklischen Multiplikation der Quaternionen ($ij = k$):

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & b_1 & -b_2 & -b_3 & -b_4 \\ 0 & a & 0 & 0 & b_2 & b_1 & b_4 & -b_3 \\ 0 & 0 & a & 0 & b_3 & -b_4 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & a & b_4 & b_3 & -b_2 & b_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & d & 0 & 0 & 0 \\ -b_2 & b_1 & -b_4 & b_3 & 0 & d & 0 & 0 \\ -b_3 & b_4 & b_1 & -b_2 & 0 & 0 & d & 0 \\ -b_4 & -b_3 & b_2 & b_1 & 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 \\ b_1 & d & 0 & b_2 & 0 & b_3 & -b_4 & 0 \\ b_2 & 0 & d & -b_1 & 0 & b_4 & b_3 & 0 \\ 0 & b_2 & -b_1 & a & -b_4 & 0 & 0 & b_3 \\ b_3 & 0 & 0 & -b_4 & d & -b_1 & -b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & b_4 & 0 & -b_1 & a & 0 & -b_2 \\ 0 & -b_4 & b_3 & 0 & -b_2 & 0 & a & b_1 \\ b_4 & 0 & 0 & b_3 & 0 & -b_2 & b_1 & d \end{pmatrix} C^{-1},$$

mit

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es gibt hier jedoch zusätzlich eine neue, inäquivalente Darstellung, die der anti-zyklischen Multiplikation der Quaternionen mit der Vorschrift $ij = -k$ entspricht:

$$\begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 & 0 & b_3 & 0 & 0 & -b_4 \\ b_1 & d & 0 & b_2 & 0 & b_3 & b_4 & 0 \\ b_2 & 0 & d & -b_1 & 0 & -b_4 & b_3 & 0 \\ 0 & b_2 & -b_1 & a & b_4 & 0 & 0 & b_3 \\ b_3 & 0 & 0 & b_4 & d & -b_1 & -b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & -b_4 & 0 & -b_1 & a & 0 & -b_2 \\ 0 & b_4 & b_3 & 0 & -b_2 & 0 & a & b_1 \\ -b_4 & 0 & 0 & b_3 & 0 & -b_2 & b_1 & d \end{pmatrix}$$

Man kann immer nur Ähnlichkeitsoperationen mit zwei "Positionen" durchführen, also z.B. Vertauschen von b_i und b_j , oder Multiplizieren mit -1 von b_i und b_j . Bei den nicht maximal gefüllten Dimensionen kann das Vorzeichen durch eine "leere" Position aufgefangen werden, sodass dann auch einzelne b_i durch eine Ähnlichkeitsoperation mit negativen Vorzeichen versehen werden können. Dadurch kann eine Dimension höher wieder nur eine Darstellung gefunden werden, die mit Verfahren konstruierten Darstellungen des 5-dimensionalen Falls sind äquivalent, obwohl die Ausgangsdarstellungen inäquivalent sind.

Im fünfdimensionalen Fall wird das Verfahren aus der ersten Darstellung verwendet. Dies ist nach dem obigen Argument äquivalent zu der Einbettung, die mit Hilfe des Verfahrens aus der zweiten Darstellung gewonnen werden kann, und vom Typ Ia, da erneut mehrere mögliche außerdiagonale Matrizen verwendet werden können:

$$\begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 & b_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & d & 0 & b_2 & 0 & b_3 & -b_4 & 0 & 0 & b_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & d & -b_1 & 0 & b_4 & b_3 & 0 & 0 & 0 & b_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & -b_1 & a & -b_4 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 0 & b_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 & -b_4 & d & -b_1 & -b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & b_4 & 0 & -b_1 & a & 0 & -b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_5 & 0 & 0 \\ 0 & -b_4 & b_3 & 0 & -b_2 & 0 & a & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_5 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & b_3 & 0 & -b_2 & b_1 & d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_5 \\ b_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & -b_1 & -b_2 & 0 & -b_3 & 0 & 0 & -b_4 \\ 0 & b_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_1 & a & 0 & -b_2 & 0 & -b_3 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & b_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_2 & 0 & a & b_1 & 0 & -b_4 & -b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_2 & b_1 & d & b_4 & 0 & 0 & -b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_5 & 0 & 0 & 0 & -b_3 & 0 & 0 & b_4 & a & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_5 & 0 & 0 & 0 & -b_3 & -b_4 & 0 & b_1 & d & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_5 & 0 & 0 & b_4 & -b_3 & 0 & b_2 & 0 & d & -b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_5 & -b_4 & 0 & 0 & -b_3 & 0 & b_2 & -b_1 & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 & b_2 I & b_3 I & b_4 J & b_5 I & 0 & 0 & 0 \\ b_2 I & A_1^* & b_4 J & b_3 I & 0 & b_5 I & 0 & 0 \\ b_3 I & -b_4 J & A_1^* & -b_2 I & 0 & 0 & b_5 I & 0 \\ -b_4 J & b_3 I & -b_2 I & A_1 & 0 & 0 & 0 & b_5 I \\ b_5 I & 0 & 0 & 0 & A_1^* & -b_2 I & -b_3 I & -b_4 J \\ 0 & b_5 I & 0 & 0 & -b_2 I & A_1 & -b_4 J & -b_3 I \\ 0 & 0 & b_5 I & 0 & -b_3 I & b_4 J & A_1 & b_2 I \\ 0 & 0 & 0 & b_5 I & b_4 J & -b_3 I & b_2 I & A_1^* \end{pmatrix}.$$

Hier gibt es 4 mögliche außerdiagonale Matrizen, diese entsprechen den Erzeugern der Quaternionen \mathbb{H} :

$$K_1 := \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \hat{=} 1, K_2 := \begin{pmatrix} 0 & J & 0 & 0 \\ J & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J \\ 0 & 0 & J & 0 \end{pmatrix} \hat{=} i,$$

$$K_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J \\ J & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -J & 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{=} j, K_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ -I & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{=} k.$$

Die Reihenfolge der Matrizen, die für zusätzliche b_j verwendet werden, ist natürlich beliebig. Alle K_i sind miteinander verträglich, deswegen erfolgt nun ein Auffüllen des außerdiagonalen Blocks (Typ II), da hier die maximale Anzahl b_i noch nicht erreicht ist, gibt es wieder nur eine Darstellung:

Für den sechsdimensionalen Fall:

$$\begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 & b_5 & 0 & 0 & b_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & d & 0 & b_2 & 0 & b_3 & -b_4 & 0 & 0 & b_5 & -b_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & d & -b_1 & 0 & b_4 & b_3 & 0 & 0 & b_6 & b_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & -b_1 & a & -b_4 & 0 & 0 & b_3 & -b_6 & 0 & 0 & b_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 & -b_4 & d & -b_1 & -b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_5 & 0 & 0 & b_6 \\ 0 & b_3 & b_4 & 0 & -b_1 & a & 0 & -b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_5 & -b_6 & 0 \\ 0 & -b_4 & b_3 & 0 & -b_2 & 0 & a & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_6 & b_5 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & b_3 & 0 & -b_2 & b_1 & d & 0 & 0 & 0 & -b_6 & 0 & 0 & 0 & b_5 \\ b_5 & 0 & 0 & -b_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & -b_1 & -b_2 & 0 & -b_3 & 0 & 0 & -b_4 \\ 0 & b_5 & b_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_1 & a & 0 & -b_2 & 0 & -b_3 & b_4 & 0 \\ 0 & -b_6 & b_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_2 & 0 & a & b_1 & 0 & -b_4 & -b_3 & 0 \\ b_6 & 0 & 0 & b_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_2 & b_1 & d & b_4 & 0 & 0 & 0 & -b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_5 & 0 & 0 & -b_6 & -b_3 & 0 & 0 & b_4 & a & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_5 & b_6 & 0 & 0 & -b_3 & -b_4 & 0 & b_1 & d & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_6 & b_5 & 0 & 0 & b_4 & -b_3 & 0 & b_2 & 0 & d & -b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_6 & 0 & 0 & b_5 & -b_4 & 0 & 0 & -b_3 & 0 & b_2 & -b_1 & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 & b_2 I & b_3 I & b_4 J & b_5 I & b_6 J & 0 & 0 \\ b_2 I & A_1^* & b_4 J & b_3 I & b_6 J & b_5 I & 0 & 0 \\ b_3 I & -b_4 J & A_1^* & -b_2 I & 0 & 0 & b_5 I & b_6 J \\ -b_4 J & b_3 I & -b_2 I & A_1 & 0 & 0 & b_6 J & b_5 I \\ b_5 I & -b_6 J & 0 & 0 & A_1^* & -b_2 I & -b_3 I & -b_4 J \\ -b_6 J & b_5 I & 0 & 0 & -b_2 I & A_1 & -b_4 J & -b_3 I \\ 0 & 0 & b_5 I & -b_6 J & -b_3 I & b_4 J & A_1 & b_2 I \\ 0 & 0 & -b_6 J & b_5 I & b_4 J & -b_3 I & b_2 I & A_1^* \end{pmatrix}.$$

Auch der siebendimensionale Fall ist vom Typ II, es wird noch nicht maximal aufgefüllt:

$$\begin{pmatrix}
 a & b_1 & b_2 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 & b_5 & 0 & 0 & b_6 & 0 & b_7 & 0 & 0 \\
 b_1 & d & 0 & b_2 & 0 & b_3 & -b_4 & 0 & 0 & b_5 & -b_6 & 0 & -b_7 & 0 & 0 & 0 \\
 b_2 & 0 & d & -b_1 & 0 & b_4 & b_3 & 0 & 0 & b_6 & b_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_7 \\
 0 & b_2 & -b_1 & a & -b_4 & 0 & 0 & b_3 & -b_6 & 0 & 0 & b_5 & 0 & 0 & b_7 & 0 \\
 b_3 & 0 & 0 & -b_4 & d & -b_1 & -b_2 & 0 & 0 & b_7 & 0 & 0 & b_5 & 0 & 0 & b_6 \\
 0 & b_3 & b_4 & 0 & -b_1 & a & 0 & -b_2 & -b_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_5 & -b_6 & 0 \\
 0 & -b_4 & b_3 & 0 & -b_2 & 0 & a & b_1 & 0 & 0 & 0 & -b_7 & 0 & b_6 & b_5 & 0 \\
 b_4 & 0 & 0 & b_3 & 0 & -b_2 & b_1 & d & 0 & 0 & b_7 & 0 & -b_6 & 0 & 0 & b_5 \\
 b_5 & 0 & 0 & -b_6 & 0 & -b_7 & 0 & 0 & d & -b_1 & -b_2 & 0 & -b_3 & 0 & 0 & -b_4 \\
 0 & b_5 & b_6 & 0 & b_7 & 0 & 0 & 0 & -b_1 & a & 0 & -b_2 & 0 & -b_3 & b_4 & 0 \\
 0 & -b_6 & b_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_7 & -b_2 & 0 & a & b_1 & 0 & -b_4 & -b_3 & 0 \\
 b_6 & 0 & 0 & b_5 & 0 & 0 & -b_7 & 0 & 0 & -b_2 & b_1 & d & b_4 & 0 & 0 & -b_3 \\
 0 & -b_7 & 0 & 0 & b_5 & 0 & 0 & -b_6 & -b_3 & 0 & 0 & b_4 & a & b_1 & b_2 & 0 \\
 b_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_5 & b_6 & 0 & 0 & -b_3 & -b_4 & 0 & b_1 & d & 0 & b_2 \\
 0 & 0 & 0 & b_7 & 0 & -b_6 & b_5 & 0 & 0 & b_4 & -b_3 & 0 & b_2 & 0 & d & -b_1 \\
 0 & 0 & -b_7 & 0 & b_6 & 0 & 0 & b_5 & -b_4 & 0 & 0 & -b_3 & 0 & b_2 & -b_1 & a
 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}
 A_1 & b_2 I & b_3 I & b_4 J & b_5 I & b_6 J & b_7 J & 0 \\
 b_2 I & A_1^* & b_4 J & b_3 I & b_6 J & b_5 I & 0 & -b_7 J \\
 b_3 I & -b_4 J & A_1^* & -b_2 I & b_7 J & 0 & b_5 I & b_6 J \\
 -b_4 J & b_3 I & -b_2 I & A_1 & 0 & -b_7 J & b_6 J & b_5 I \\
 b_5 I & -b_6 J & -b_7 J & 0 & A_1^* & -b_2 I & -b_3 I & -b_4 J \\
 -b_6 J & b_5 I & 0 & b_7 J & -b_2 I & A_1 & -b_4 J & -b_3 I \\
 -b_7 J & 0 & b_5 I & -b_6 J & -b_3 I & b_4 J & A_1 & b_2 I \\
 0 & b_7 J & -b_6 J & b_5 I & b_4 J & -b_3 I & b_2 I & A_1^*
 \end{pmatrix}.$$

Im achtdimensionalen Fall liegt wieder ein maximales Auffüllen vor. Man erhält also Typ III mit zwei inäquivalenten Darstellungen:

$$\begin{pmatrix}
 a & b_1 & b_2 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 & b_5 & 0 & 0 & b_6 & 0 & b_7 & b_8 & 0 \\
 b_1 & d & 0 & b_2 & 0 & b_3 & -b_4 & 0 & 0 & b_5 & -b_6 & 0 & -b_7 & 0 & 0 & b_8 \\
 b_2 & 0 & d & -b_1 & 0 & b_4 & b_3 & 0 & 0 & b_6 & b_5 & 0 & -b_8 & 0 & 0 & -b_7 \\
 0 & b_2 & -b_1 & a & -b_4 & 0 & 0 & b_3 & -b_6 & 0 & 0 & b_5 & 0 & -b_8 & b_7 & 0 \\
 b_3 & 0 & 0 & -b_4 & d & -b_1 & -b_2 & 0 & 0 & b_7 & b_8 & 0 & b_5 & 0 & 0 & b_6 \\
 0 & b_3 & b_4 & 0 & -b_1 & a & 0 & -b_2 & -b_7 & 0 & 0 & b_8 & 0 & b_5 & -b_6 & 0 \\
 0 & -b_4 & b_3 & 0 & -b_2 & 0 & a & b_1 & -b_8 & 0 & 0 & -b_7 & 0 & b_6 & b_5 & 0 \\
 b_4 & 0 & 0 & b_3 & 0 & -b_2 & b_1 & d & 0 & -b_8 & b_7 & 0 & -b_6 & 0 & 0 & b_5 \\
 b_5 & 0 & 0 & -b_6 & 0 & -b_7 & -b_8 & 0 & d & -b_1 & -b_2 & 0 & -b_3 & 0 & 0 & -b_4 \\
 0 & b_5 & b_6 & 0 & b_7 & 0 & 0 & -b_8 & -b_1 & a & 0 & -b_2 & 0 & -b_3 & b_4 & 0 \\
 0 & -b_6 & b_5 & 0 & b_8 & 0 & 0 & b_7 & -b_2 & 0 & a & b_1 & 0 & -b_4 & -b_3 & 0 \\
 b_6 & 0 & 0 & b_5 & 0 & b_8 & -b_7 & 0 & 0 & -b_2 & b_1 & d & b_4 & 0 & 0 & -b_3 \\
 0 & -b_7 & -b_8 & 0 & b_5 & 0 & 0 & -b_6 & -b_3 & 0 & 0 & b_4 & a & b_1 & b_2 & 0 \\
 b_7 & 0 & 0 & -b_8 & 0 & b_5 & b_6 & 0 & 0 & -b_3 & -b_4 & 0 & b_1 & d & 0 & b_2 \\
 b_8 & 0 & 0 & b_7 & 0 & -b_6 & b_5 & 0 & 0 & b_4 & -b_3 & 0 & b_2 & 0 & d & -b_1 \\
 0 & b_8 & -b_7 & 0 & b_6 & 0 & 0 & b_5 & -b_4 & 0 & 0 & -b_3 & 0 & b_2 & -b_1 & a
 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}
 A_1 & b_2 I & b_3 I & b_4 J & b_5 I & b_6 J & b_7 J & b_8 I \\
 b_2 I & A_1^* & b_4 J & b_3 I & b_6 J & b_5 I & -b_8 I & -b_7 J \\
 b_3 I & -b_4 J & A_1^* & -b_2 I & b_7 J & b_8 I & b_5 I & b_6 J \\
 -b_4 J & b_3 I & -b_2 I & A_1 & -b_8 I & -b_7 J & b_6 J & b_5 I \\
 b_5 I & -b_6 J & -b_7 J & -b_8 I & A_1^* & -b_2 I & -b_3 I & -b_4 J \\
 -b_6 J & b_5 I & b_8 I & b_7 J & -b_2 I & A_1 & -b_4 J & -b_3 I \\
 -b_7 J & -b_8 I & b_5 I & -b_6 J & -b_3 I & b_4 J & A_1 & b_2 I \\
 b_8 I & b_7 J & -b_6 J & b_5 I & b_4 J & -b_3 I & b_2 I & A_1^*
 \end{pmatrix}.$$

Die zweite Darstellung ergibt sich durch $b_8 \mapsto -b_8$, da sich die außerdiagonalen Matrizen wie Quaternionen verhalten. Als alternative Sichtweise entspricht die gesamte Matrix $\mathcal{H}_2(\mathbb{O})$,

daher ist auch hier die Unterscheidung zwischen zyklischer Multiplikation $e_1e_2 = e_4$ und anti-zyklischer Multiplikation $e_1e_2 = -e_4$ möglich.

Die zwei fundamentalen Relationen zur Konstruktion der außerdiagonalen Matrizen sind:

$$\begin{aligned} A_1J + JA_1 &= (a + d)J = A_1^*J + JA_1^*, \\ A_1I + IA_1^* &= A_1 + A_1^* = (a + d)I. \end{aligned}$$

Ab Dimension neun wird Kette periodisch, alle weiteren Darstellungen lassen sich auf die obigen zurückführen.

Abschließend wird nun noch die Eigenschaft der Determinante gezeigt:

Lemma 6.1.3. *Sei $X \in \mathcal{H}_2(V)$ mit $\dim(V) = k$, sodass $\rho(X) \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$. Dann gilt:*

$$\det(\rho(X)) = \left(ad - \sum_{i=1}^k b_i^2 \right)^{\frac{n}{2}} = \Delta(X)^{\frac{n}{2}}.$$

Beweis: Nach Konstruktion ist die Einbettung eine $n \times n$ -Matrix

$$\rho(X) = \begin{pmatrix} \rho(A_l) & B \\ B^t & \rho(A_l^*) \end{pmatrix},$$

wobei

$$BB^t = B^tB = \sum_{i=l+1}^k b_i^2 I_{\frac{n}{2}}$$

da auf der Außerdiagonalen bis zu $k - l$ neue Dimensionen hinzukommen können. Die Dimension n ist nach Konstruktion gerade. Die Einbettung $\rho(A_l)$ ist von niederer Dimension mit

$$[B, \rho(A_l)] = [B, \rho(A_l^*)] = [B^t, \rho(A_l)] = [B^t, \rho(A_l^*)] = 0.$$

Da die invertierbaren Matrizen dicht sind und die Determinante ein stetiges Polynom ist, kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\rho(A_l)$ als invertierbar annehmen. Dann gilt

mit $c := \sum_{i=l+1}^k b_i^2$, dass

$$\rho(X) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ B^t \rho(A_l)^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho(A_l) & 0 \\ 0 & \rho(A_l^*) - B^t \rho(A_l)^{-1} B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \rho(A_l)^{-1} B \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

und daher folgt

$$\begin{aligned} \det(\rho(X)) &= \det(\rho(A_l)) \det(\rho(A_l^*) - B^t \rho(A_l)^{-1} B) \\ &= \det(\rho(A_l)) \det(\rho(A_l^*) - \rho(A_l)^{-1} B^t B) \\ &= \det(\rho(A_l)) \det(\rho(A_l^*) - c \rho(A_l)^{-1}) \\ &= \det(\rho(A_l) \rho(A_l)^* - c I_{\frac{n}{2}}) \end{aligned}$$

Es gilt aber $[A_l, A_l^*] = 0$, daher ist $A_l \circ A_l^* = A_l A_l^*$, und damit, da ρ linear ist und das Jordan-Produkt erhält, auch

$$\rho(A_l)\rho(A_l^*) = \rho(A_l A_l^*).$$

Weiterhin ist

$$A_l A_l^* = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -b^* & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - (b|b) & 0 \\ 0 & ad - (b|b) \end{pmatrix}.$$

Also ist $\rho(A_l A_l^*) = \left(ad - \sum_{i=1}^l b_i^2 \right) I_{\frac{n}{2}}$, und damit

$$\det(\rho(X)) = \det(\rho(A_l A_l^*) - cI_{\frac{n}{2}}) = \left(ad - \sum_{i=1}^k b_i^2 \right)^{\frac{n}{2}}.$$

□

6.1.4 Die Ausnahmealgebra

Es gibt hier keine Darstellung außer der trivialen. Da die Cayley-Zahlen \mathbb{O} nicht assoziativ sind, wird die vierte Bedingung nicht erfüllt.

Trotzdem erhält man mit der üblichen Konstruktion mittels Auffassen der Rechtsmultiplikation als Operation auf \mathbb{R}^8 :

$$m(b_{ij}) := B_{ij} := \begin{pmatrix} b_{ij}^0 & -b_{ij}^1 & -b_{ij}^2 & -b_{ij}^3 & -b_{ij}^4 & -b_{ij}^5 & -b_{ij}^6 & -b_{ij}^7 \\ b_{ij}^1 & b_{ij}^0 & b_{ij}^4 & b_{ij}^7 & -b_{ij}^2 & b_{ij}^6 & -b_{ij}^5 & -b_{ij}^3 \\ b_{ij}^2 & -b_{ij}^4 & b_{ij}^0 & b_{ij}^5 & b_{ij}^1 & -b_{ij}^3 & b_{ij}^7 & -b_{ij}^6 \\ b_{ij}^3 & -b_{ij}^7 & -b_{ij}^5 & b_{ij}^0 & b_{ij}^6 & b_{ij}^2 & -b_{ij}^4 & b_{ij}^1 \\ b_{ij}^4 & b_{ij}^2 & -b_{ij}^1 & -b_{ij}^6 & b_{ij}^0 & b_{ij}^7 & b_{ij}^3 & -b_{ij}^5 \\ b_{ij}^5 & -b_{ij}^6 & b_{ij}^3 & -b_{ij}^2 & -b_{ij}^7 & b_{ij}^0 & b_{ij}^1 & b_{ij}^4 \\ b_{ij}^6 & b_{ij}^5 & -b_{ij}^7 & b_{ij}^4 & -b_{ij}^3 & -b_{ij}^1 & b_{ij}^0 & b_{ij}^2 \\ b_{ij}^7 & b_{ij}^3 & b_{ij}^6 & -b_{ij}^1 & b_{ij}^5 & -b_{ij}^4 & -b_{ij}^2 & b_{ij}^0 \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man eine Einbettung (allerdings ohne Erhaltung des Jordan-Produkts) durch

$$\mathcal{H}_3(\mathbb{O}) \ni A = \begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12}^* & a_{22} & b_{23} \\ b_{13}^* & b_{23}^* & a_{33} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}I_8 & B_{12} & B_{13} \\ B_{12}^t & a_{22}I_8 & B_{23} \\ B_{13}^t & B_{23}^t & a_{33}I_8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^{24 \times 24}.$$

Dies liefert außerdem im Allgemeinen keine Potenzbeziehung der Determinanten. Ein Beweis wie in Lemma 6.1.1 ist nicht möglich. Es existiert zwar ein Spektralsatz, aber die Determinante ist im Allgemeinen nicht das Produkt der Eigenwerte, da die Eigenwerte im Allgemeinen nicht reell sind [D-M]. Die Beziehung ist jedoch korrekt, falls die b_{ij} paarweise assoziieren.

6.2 Anwendung in der metaplektischen Darstellung

Nach [G] folgt: Sind X, Y Elemente der Siegel-Disk vom Rang r , so gilt mit einem geeignetem Skalarprodukt, der Permanente, dass

$$\left\langle \exp\left(\frac{X}{2}\right) \middle| \exp\left(\frac{Y}{2}\right) \right\rangle = \det(1 - XY^*)^{-\frac{1}{2}}.$$

Hier kann man sich auf diagonale X zurückziehen, und aufgrund der Sesquiholomorphie des Skalarproduktes $X = Y$ betrachten. Es ergibt sich

$$\left\langle \exp\left(\frac{X}{2}\right) \middle| \exp\left(\frac{X}{2}\right) \right\rangle = \prod_{i=1}^r (1 - |\lambda_i|^2)^{-\frac{1}{2}},$$

was die Behauptung zeigt.

Nutzt man nun die Ergebnisse von Abschnitt 6.1, so lassen sich nicht nur reelle, symmetrische Matrizen betrachten, sondern mithilfe der Einbettungen auch die anderen Jordan-Algebren bis auf die Ausnahmealgebra. Betrachtet man zusätzlich die Darstellung ρ von $\mathcal{H}_r(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, V$ allgemeiner auf $\mathbb{C}^{r \times l}$, $0 \leq l \leq r - 1$ mittels

$$\rho_l(X) = \underbrace{\begin{pmatrix} \rho(X) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho(X) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho(X) \end{pmatrix}}_{l\text{-mal}} \in \mathbb{R}_+^{lqr \times lqr},$$

so kann diese in eine große metaplektische Darstellung eingebettet werden, und nach der obigen Formel gilt

$$\left\langle \exp\left(\frac{\rho_l(X)}{2}\right) \middle| \exp\left(\frac{\rho_l(X)}{2}\right) \right\rangle = \prod_{i=1}^{lqr} (1 - |\lambda_i|^2)^{-\frac{1}{2}} = \det(1 - XX^*)^{-\frac{lq}{2}},$$

da jeder Eigenwert nach den obigen Ergebnissen die Multiplizität lq hat. Nach [Cl] sind dies bereits alle Jordan-Darstellungen, sodass man sich also immer auf eine metaplektische Darstellung zurückziehen kann.

6.3 Berechnungen zu Satz 5.3.4

Um die metaplektische Darstellung zu realisieren, wird eine Darstellung der symplektischen Gruppe G auf dem Hilbert-Raum $H(\ell)$ gesucht. Diese wird als Intertwiner der Schrödinger-Darstellung realisiert, der aufgrund des Satzes von Stone-von Neumann existieren muss, denn es gilt: die symplektische Gruppe operiert auf N durch

$$\begin{aligned} g.n &= g.\langle v, t \rangle \\ &:= \langle gv, t \rangle. \end{aligned}$$

Diese Aktion lässt das Zentrum Z fest, daher muss ein unitärer Operator $R(g)$ existieren, der die Schrödinger-Darstellungen $W(n)$ und $W(g.n)$ verbindet, d.h.

$$R(g)W(n) = W(g.n)R(g)$$

für alle $n \in N$. Man setzt an:

$$(A(g)\phi)(n) := \phi(g^{-1}.n).$$

Es folgt

Lemma 6.3.1. *Ist $\phi \in H(\ell)$, so ist $A(g)\phi \in H(g\ell)$. Es gilt weiterhin*

$$A(g)W_\ell(n) = W_{g\ell}(g.n)A(g).$$

Beweis: Seien $n = \langle v, t \rangle, n_0 = \langle v_0, t_0 \rangle \in N, h_0 = \langle l_0, s_0 \rangle \in L, \phi \in H(\ell)$. Damit folgt zunächst

$$\begin{aligned} (A(g)\phi)(n(g.h_0)) &= (A(g)\phi)(\langle v, t \rangle \langle gl_0, s_0 \rangle) \\ &= (A(g)\phi)\left(\left\langle v + gl_0, t + s_0 + \frac{\omega(v, gl_0)}{2} \right\rangle\right) \\ &\stackrel{g^{-1} \in G}{=} \phi\left(\left\langle g^{-1}v + l_0, t + s_0 + \frac{\omega(g^{-1}v, l_0)}{2} \right\rangle\right) \\ &= \phi(\langle g^{-1}v, t \rangle \langle l_0, s_0 \rangle) \\ &\stackrel{\phi \in H(\ell)}{=} e^{-2\pi i s_0} \phi(\langle g^{-1}v, t \rangle) \\ &= \chi(g.h_0)^{-1} (A(g)\phi)(n). \end{aligned}$$

Zusätzlich ist

$$\begin{aligned} \int_{N/gL} |(A(g)\phi)(n)|^2 dn &= \int_{N/gL} |\phi(g^{-1}.n)|^2 dn \\ &= \int_{g\ell'} |\phi(g^{-1}x)|^2 dx \\ &= \int_{\ell'} |\phi(y)|^2 dy \\ &= \int_{N/L} |\phi(n)|^2 dn < \infty, \end{aligned}$$

sodass $A(g)\phi \in H(g\ell)$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
(A(g)W_\ell(n_0)\phi)(n) &= (W_\ell(n_0)\phi)(g^{-1}.n) \\
&= \phi(n_0^{-1}(g^{-1}.n)) \\
&= \phi(\langle -v_0, -t_0 \rangle \langle g^{-1}v, t \rangle) \\
&= \phi\left(\left\langle g^{-1}v - v_0, t - t_0 - \frac{\omega(v_0, g^{-1}v)}{2} \right\rangle\right) \\
&\stackrel{g \in G}{=} \phi\left(\left\langle g^{-1}(v - gv_0), t - t_0 - \frac{\omega(gv_0, v)}{2} \right\rangle\right) \\
&= (A(g)\phi)\left(\left\langle v - gv_0, t - t_0 - \frac{\omega(gv_0, v)}{2} \right\rangle\right) \\
&= (A(g)\phi)(\langle -gv_0, -t_0 \rangle \langle v, t \rangle) \\
&= (A(g)\phi)((g.n_0)^{-1}n) \\
&= (W_{g\ell}(g.n_0)A(g)\phi)(n).
\end{aligned}$$

□

Die Funktion $A(g)\phi$ gehört also zum falschen Hilbert-Raum. Jedoch gelangt man mithilfe des bereits bekannten Intertwiners \mathcal{F} in den gewünschten, sodass man definiert:

$$R_\ell : H(\ell) \rightarrow H(\ell); R_\ell(g) := \mathcal{F}_{\ell, g\ell}A(g).$$

Hiermit folgt

$$\begin{aligned}
R_\ell(g)W_\ell(n) &= \mathcal{F}_{\ell, g\ell}A(g)W_\ell(n) \\
&= \mathcal{F}_{\ell, g\ell}W_{g\ell}(g.n)A(g) \\
&= W_\ell(g.n)\mathcal{F}_{\ell, g\ell}A(g) \\
&= W_\ell(g.n)R_\ell(g),
\end{aligned}$$

wie gefordert. Die Darstellung R_ℓ ist damit bereits bis auf einen Faktor vom Modulus 1 festgelegt, also eine projektive, unitäre Darstellung von G .

Sei nun

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G \text{ und damit } g^{-1} = \begin{pmatrix} d^t & -b^t \\ -c^t & a^t \end{pmatrix},$$

zerlegt bezüglich $V = \ell \oplus \ell'$. Es gilt mit $x \in \ell$ und $y \in \ell'$

$$\begin{aligned}
(R_\ell(g)\phi)(y) &= (\mathcal{F}_{\ell, g\ell}A(g)\phi)(y) \\
&= \int_{\ell' / (\ell \cap g\ell)} (A(g)\phi)(\langle y, 0 \rangle \langle x, 0 \rangle) \delta x \\
&= \int_{\ell' / (\ell \cap g\ell)} (A(g)\phi)\left(\left\langle y + x, \frac{\omega(y, x)}{2} \right\rangle\right) \delta x \\
&= \int_{\ell' / (\ell \cap g\ell)} \phi\left(\left\langle g^{-1}(y + x), \frac{\omega(y, x)}{2} \right\rangle\right) \delta x \\
&= \int_{\ell' / (\ell \cap g\ell)} \phi(\langle g^{-1}y, 0 \rangle \langle g^{-1}x, 0 \rangle) \delta x.
\end{aligned}$$

Man berechnet $g^{-1}x = d^t x - c^t x$ und $g^{-1}y = -b^t y + a^t y$ mit $d^t x, b^t y \in \ell$ sowie $c^t x, a^t y \in \ell'$.
Damit ist

$$\ell \cap g\ell = \{x \in \ell \mid g^{-1}x \in \ell\} = \{x \in \ell \mid c^t x = 0\} = \text{Ker}(c^t)$$

und weiterhin:

$$\begin{aligned} \phi(\langle g^{-1}y, 0 \rangle \langle g^{-1}x, 0 \rangle) &= \phi(\langle g^{-1}y, 0 \rangle \langle d^t x - c^t x, 0 \rangle) \\ &= \phi\left(\langle g^{-1}y, 0 \rangle \langle -c^t x, 0 \rangle \underbrace{\left\langle d^t x, \frac{\omega(c^t x, d^t x)}{2} \right\rangle}_{\in L}\right) \\ &= \phi(\langle g^{-1}y, 0 \rangle \langle -c^t x, 0 \rangle) e^{-\pi i \omega(c^t x, d^t x)} \\ &= \phi(\langle -b^t y + a^t y, 0 \rangle \langle -c^t x, 0 \rangle) e^{-\pi i \omega(c^t x, d^t x)} \\ &= \phi(\langle -c^t x, 0 \rangle \langle -b^t y + a^t y, 0 \rangle) e^{-2\pi i \omega(-b^t y + a^t y, -c^t x)} e^{-\pi i \omega(c^t x, d^t x)} \\ &= \phi(\langle -c^t x, 0 \rangle \langle a^t y, 0 \rangle) e^{-\pi i \omega(-b^t y, a^t y)} e^{-2\pi i \omega(b^t y, c^t x)} e^{-\pi i \omega(c^t x, d^t x)} \\ &= \phi(\langle a^t y - c^t x, 0 \rangle) e^{\pi i (\omega(ab^t y, y) - 2\omega(b^t y, c^t x) - \omega(dc^t x, x))}. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} (R_\ell(g)\phi)(y) &= \int_{\ell / (\ell \cap g\ell)} \phi(\langle g^{-1}y, 0 \rangle \langle g^{-1}x, 0 \rangle) \delta x \\ &= \int_{\ell / \text{Ker}(c^t)} \phi(\langle a^t y - c^t x, 0 \rangle) e^{\pi i (\omega(ab^t y, y) - 2\omega(b^t y, c^t x) - \omega(dc^t x, x))} \delta x \\ &= \int_{\ell / \text{Ker}(c^t)} \phi(a^t y + c^t x) e^{\pi i (\omega(ab^t y, y) + 2\omega(b^t y, c^t x) - \omega(dc^t x, x))} \delta x \end{aligned}$$

mit einem Übergang zu $-x$.

Als letztes soll nun der projektive Faktor der metaplektischen Darstellung berechnet werden. Dazu benötigt man zunächst die allgemeine Beziehung

$$A(g)\mathcal{F}_{\ell_2, \ell_1} = \mathcal{F}_{g\ell_2, g\ell_1}A(g),$$

also die Kommutativität des folgenden Diagramms:

$$\begin{array}{ccc} H(\ell_1) & \xrightarrow{\mathcal{F}_{\ell_2, \ell_1}} & H(\ell_2) \\ A(g) \downarrow & & \downarrow A(g) \\ H(g\ell_1) & \xrightarrow{\mathcal{F}_{g\ell_2, g\ell_1}} & H(g\ell_2) \end{array}$$

Nach den obigen Berechnungen zu den Intertwinern reicht es, ℓ_1 und ℓ_2 als transversal anzunehmen, auf dem gemeinsamen Anteil ist die Beziehung trivial, da \mathcal{F} die Identität ist. Sei

also $\phi \in H(\ell_1)$ und $x \in g\ell_1$. Es gilt

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}_{g\ell_2, g\ell_1} A(g)\phi)(\langle x, 0 \rangle) &= \int_{gL_2/Z} (A(g)\phi)(\langle x, 0 \rangle \langle y, 0 \rangle) dy \\
&= \int_{gL_2/Z} \phi(\langle g^{-1}x, 0 \rangle \langle g^{-1}y, 0 \rangle) dy \\
&= \int_{gL_2/Z} \phi(\langle g^{-1}y, 0 \rangle) e^{-2\pi i \omega(g^{-1}x, g^{-1}y)} dy \\
&= \int_{g\ell_2} \phi(g^{-1}y) e^{-2\pi i \omega(g^{-1}x, g^{-1}y)} dy \\
&\stackrel{y=g\underline{y'}, y' \in \ell_2}{=} \int_{\ell_2} \phi(y') e^{-2\pi i \omega(g^{-1}x, y')} dy'.
\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}
(A(g)\mathcal{F}_{\ell_2, \ell_1} \phi)(\langle x, 0 \rangle) &= (\mathcal{F}_{\ell_2, \ell_1} \phi)(\langle g^{-1}x, 0 \rangle) \\
&= \int_{L_2/Z} \phi(\langle g^{-1}x, 0 \rangle \langle y, 0 \rangle) dy \\
&= \int_{L_2/Z} \phi(\langle y, 0 \rangle) e^{-2\pi i \omega(g^{-1}x, y)} dy \\
&= \int_{\ell_2} \phi(y) e^{-2\pi i \omega(g^{-1}x, y)} dy,
\end{aligned}$$

sodass die Behauptung folgt. Aus Satz 5.3.3 erhält man

$$\mathcal{F}_{\ell, g_1 \ell} \mathcal{F}_{g_1 \ell, g_1 g_2 \ell} \mathcal{F}_{g_1 g_2 \ell, \ell} = e^{-\frac{i\pi}{4} \tau(\ell, g_1 g_2 \ell, g_1 \ell)} \text{id},$$

und daher

$$\mathcal{F}_{\ell, g_1 \ell} \mathcal{F}_{g_1 \ell, g_1 g_2 \ell} = e^{\frac{i\pi}{4} \tau(\ell, g_1 \ell, g_1 g_2 \ell)} \mathcal{F}_{\ell, g_1 g_2 \ell}.$$

Damit ist schließlich folgende Rechnung richtig:

$$\begin{aligned}
R_\ell(g_1)R_\ell(g_2) &= \mathcal{F}_{\ell, g_1 \ell} A(g_1) \mathcal{F}_{\ell, g_2 \ell} A(g_2) \\
&= \mathcal{F}_{\ell, g_1 \ell} \mathcal{F}_{g_1 \ell, g_1 g_2 \ell} A(g_1) A(g_2) \\
&= \mathcal{F}_{\ell, g_1 \ell} \mathcal{F}_{g_1 \ell, g_1 g_2 \ell} A(g_1 g_2) \\
&= e^{\frac{i\pi}{4} \tau(\ell, g_1 \ell, g_1 g_2 \ell)} \mathcal{F}_{\ell, g_1 g_2 \ell} A(g_1 g_2) \\
&= e^{\frac{i\pi}{4} \tau(\ell, g_1 \ell, g_1 g_2 \ell)} R_\ell(g_1 g_2),
\end{aligned}$$

und die Berechnungen sind vollständig abgeschlossen.

Die Konstruktion des Masses erfolgt nach [L-V, 1.6.20]. Seien

$$v \in \Lambda^{\max}(g.\ell / (\ell \cap g.\ell)), \alpha \in \Lambda^{\max}(\ell \cap g.\ell).$$

Dann existiert genau ein $u \in \Lambda^{\max}(\ell / (\ell \cap g.\ell))$, sodass

$$v \wedge \alpha = g.(u \wedge \alpha)$$

und

$$|u \wedge v| = |\omega'|,$$

wobei ω' die kanonische symplektische Form auf $(\ell + g.\ell) / (\ell \cap g.\ell)$ ist. Dies ist möglich nach den Überlegungen von [L-V, 1.4.10, 1.4.11], damit ist

$$\Lambda^{\max}(g.\ell / (\ell \cap g.\ell)) \otimes \Lambda^{\max}(\ell \cap g.\ell) \cong \Lambda^{\max}(g.\ell)$$

und

$$\Lambda^{\max}(\ell / (\ell \cap g.\ell)) \otimes \Lambda^{\max}(\ell \cap g.\ell) \cong \Lambda^{\max}(\ell).$$

Die Form δ , die das Mass δx bestimmt, wird als $|(\delta|u)| = 1$ gewählt.

Zur Illustration werden nun die Erzeuger der symplektischen Gruppe ausführlich behandelt.

Im ersten Fall ist $g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & (a^t)^{-1} \end{pmatrix}$, $a \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$. Es folgt

$$g.\ell = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & (a^t)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ 0 \end{pmatrix} = \ell,$$

also $\ell \cap g.\ell = \ell$. Damit sind u und v Punktmaße mit $|u \wedge v| = |\omega'| = 1$. Für $\alpha \in \Lambda^{\max}(\ell)$ muss dann gelten:

$$v \wedge \alpha = g(u \wedge \alpha).$$

Es ist aber $g.\alpha = |\det(a)|\alpha$ aufgrund der obigen Rechnung. Da u, v Punktmaße sind, folgt

$$|u|\alpha = |v||\det(a)|\alpha.$$

Aus $|uv| = 1$ folgt $|u| = \det(a)^{-\frac{1}{2}}$, und aus $|(\delta|u)| = 1$ folgt deshalb, dass

$$\delta = |\det(a)|^{\frac{1}{2}} \delta_{\{0\}},$$

wobei $\delta_{\{0\}}$ das Punktmaß ist, dass $\{0\}$ die Masse 1 zuordnet.

Im zweiten Fall ist $g = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = b^t$. Es folgt

$$g.\ell = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \ell$$

Damit gilt erneut $\ell \cap g.\ell = \ell$, und aus dem ersten Fall erhält man sofort

$$\delta = \delta_{\{0\}}.$$

Ist $g = J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, so folgt

$$g.\ell = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x \end{pmatrix} = \ell'.$$

Damit ist $\ell \cap g.\ell = \ell \cap \ell' = \{0\}$. Man erhält $u \in \Lambda^{\max}(\ell)$, $v \in \Lambda^{\max}(\ell')$ und α ist diesmal ein Punktmaß. Aus $u \wedge v = \omega'$ folgt sofort, dass δ das Lebesgue-Maß auf ℓ sein muss, denn ω ist die kanonische Form auf

$$(\ell + g.\ell) / (\ell \cap g.\ell) = (\ell + \ell') / \{0\} = V.$$

Ausblick

In diesem Abschnitt sollen einige weitere mögliche Fragestellungen aufgeführt werden.

Eine weitere Forschungsrichtung könnte ein Übergang zu unendlicher Dimension sein. Der Hauptfall der hermiteschen Matrizen ergibt auch für unendlichen Rang Sinn. Dies wirft eine Fülle von neuen Fragen auf, wie zum Beispiel die Klassen von Matrizen (beispielsweise Spurklasse, Hilbert-Schmidt, etc.), die zugelassen werden können, damit die Integraloperatoren konvergieren. Auch das Skalarprodukt muss dann überarbeitet werden, eine Integration über die Eigenwerte ist dann nicht mehr ohne weiteres möglich. Der Rang im Spin-Faktor ist zwar mit zwei festgelegt, jedoch kann auch hier eine Verallgemeinerung unendlicher Dimension vorgenommen werden, indem der zugehörige Euklidische Vektorraum unendliche Dimension besitzt.

Die Verallgemeinerung der metaplektischen Darstellung lässt sich wie in [Cl2] angeben auch für den Spin-Faktor durchführen. Jedoch wird hier bereits neue Theorie benötigt, die der Clifford-Algebren und der Spinor-Darstellungen. Der letzte Schritt, die vorliegende Problemstellung auch auf die Ausnahmealgebra zu erweitern, ist bis jetzt noch nicht gelungen. Da $\mathcal{H}_3(\mathbb{O})$ nicht-speziell ist, sich also wie gesehen nicht in geeigneter Weise einbetten lässt, scheitern die bisherigen Techniken. Es wird eine vollkommen neue Theorie nötig sein, dieses Problem zu bewältigen.

Eine weitere Möglichkeit ist die Übertragung der in [K-W] für den reellen Fall betrachteten differentialgeometrischen Methoden auf die allgemeine Situation.

Literaturverzeichnis

- [A-U] J. Arazy, H. Upmeyer, *Boundary Measures for Symmetric Domains and Integral Formulas for the Discrete Wallach Points*, Integral Equations and Operator Theory **47** (2003)
- [A-U2] J. Arazy, H. Upmeyer, *Weyl Calculus for Complex and Real Symmetric Domains*, Rend. Mat. Acc. Lincei (2002)
- [Baez] J.C. Baez, *The Octonions*, Bull. Amer. Math. Soc. **39** (2002), 145-205.
- [Bar] A. Barvinok, *A Course in Convexity*, Graduate Studies in Mathematics **54**, Am. Math. Soc., (2002).
- [Bou] N. Bourbaki, *Intégration, Chapitre VII: Mesure de Haar*, Hermann, Paris, (1963).
- [Cl] J.-L. Clerc, *Représentation d'une algèbre de Jordan, polynômes invariants et harmoniques de Stiefel*, J. reine angew. Math., **423** (1992), 47-71
- [Cl2] J.-L. Clerc, *The Maslov index on the Shilov boundary of a classical domain*, Journal of Geometry and Physics, **49/1** (2004), 21-51
- [Cl-Ø] J.-L. Clerc, B. Ørsted, *The Maslov index revisited*, Transformation groups **6** (2001), 303-320.
- [Cl-Ø2] J.-L. Clerc, B. Ørsted, *The Gromov norm of the Kaehler class and the Maslov index*, Asian J. Math. **7** (2003), 269-296.
- [D-M] T. Dray, C. A. Manogue, *The Octonionic Eigenvalue Problem*, Advances in Applied Clifford Algebras **8** No.2, 341-364, (1998).
- [F-K] J. Faraut, A. Korányi, *Analysis on Symmetric Cones*, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford, (1994).
- [Fo] G. B. Folland, *Harmonic Analysis in Phase Space*, Annals of Mathematics Studies **122**, (1989).
- [Freu] H. Freudenthal, *Zur ebenen Oktavengeometrie*, Indag. Math. **15** (1953), 195-200.

- [Gin] S. Gindikin, *Analysis on Homogeneous Domains*, Russ. Math. Surv. **19** (1964), 1-89
- [G] T. Graeff, *Geradenbündel und Fundamental-Darstellung auf Grassmann-Räumen*, Diplomarbeit, (2003)
- [K-W] W. D. Kirvin, S. Wu *Geometric Quantization, Parallel Transport and the Fourier Transform*, Comm. Math. Phys. **266** (2006), 577-594.
- [L-V] G. Lion, M. Vergne, *The Weil representation, Maslov index and the Theta series*, Progress in Mathematics 6, Birkhäuser (1980).
- [MacD] I. G. MacDonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford University Press, (1999).
- [Mas] V.P. Maslov, *Theorie des perturbations et methodes asymptotiques*, Dunod Paris, (1972).
- [McC] K. McCrimmon, *A Taste of Jordan Algebras*, Springer New York, (2004).
- [Mu] R. J. Muirhead, *Aspects of Multivariate Statistical Theory*, J. Wiley, (1982).
- [P-S] A. Pressley, G. Segal, *Loop groups*, Oxford University Press, 1986.
- [RH] F. Reese Harvey, *Spinors and Calibrations*, Perspectives in Mathematics, 1990.
- [Scha] R.D. Schafer, *An introduction to nonassociative algebras*, Acad. Press, New York - London, 1966.
- [Seg] G. Segal, *Unitary Representations of some Infinite Dimensional Groups*, Comm. Math. Phys. **80** (1981), 301-342.
- [Stan] R. P. Stanley, *Some Combinatorial Properties of Jack Symmetric Functions*, Adv. Math. **77** (1989), 76-115.
- [Up] H. Upmeyer, *Harmonische Analysis und Toeplitz-Operatoren auf beschränkten symmetrischen Gebieten*, Habilitationsschrift, Eberhard-Karls-Universität Tübingen, 1982.

Stichwortverzeichnis

- Cayley-Transformation, 36
 - Rang-erhaltende, 42, 55
- Cayley-Zahlen, 20
- Determinante, 12
- Fischer-Produkt, 23
- Fock-Raum, 23
- Fourier-Transformation, 46, 49, 58, 68
- Freudenthal-Determinante, 21
- Harish-Chandra-Realisierung, 27
- Heisenberg-Algebra, 65
- Heisenberg-Gruppe, 66
- Idempotent, 13
- Intertwiner, 68
- Jack-Polynome, 39
- Jordan-Algebra, 12
 - Euklidische, 13
 - Klassifikation, 15
 - Spektralsatz, 13
- Jordan-Tripel-Produkt, 27
- kanonische Vertauschungsrelationen, 65
- Kegel, 9
 - konvexer, 9
 - homogener, 10
 - symmetrischer, 10
- konische Funktion, 27
- Lagrange-Unterraum, 62
- Lassalle-Maß, 55
- Lorentz-Kegel, 17
- Maslov-Index, 63
- als Phasenfaktor, 69
- Metaplektische Darstellung
 - auf Erzeugern, 46
 - auf hermiteschen Matrixalgebren, 57
 - auf Jordan-Algebren, 46
 - Intertwiner-Ansatz, 69
- Minkowski-Determinante, 17
- Pfaffsche Form, 16
- reproduzierender Kern, 28, 43
- Satz von Stone-von Neumann, 67
- Schrödinger-Darstellung, 46, 66
- Segal-Bargmann-Transformation
 - als Integralkern, 25
 - der Rang-eins-Fall, 43
 - für beliebigen Rang, 55, 57
 - klassische, 23
- Siegel-Disk, 25
- sphärische Funktion, 51
- Spur, 12
- symplektische Basis, 61
- symplektische Gruppe, 44
 - Erzeuger, 46
- symplektische Mannigfaltigkeit, 44
- Tripotent, 27
- Wallach-Menge, 28
- Zonale Polynome, 39

Danksagung

An erster Stelle danke ich Herrn Prof. Dr. Harald Upmeyer für Möglichkeit, diese Arbeit anfertigen zu können, für das stets offene Ohr und die sehr gute Betreuung meiner Arbeit.

Bei Herrn Prof. Dr. Wolfgang Gromes bedanke ich mich für die Übernahme des Zweitgutachtens.

Des Weiteren bedanke ich mich bei der German Israeli Foundation, ohne deren finanzielle Unterstützung diese Arbeit nicht möglich gewesen wäre.

Der Mittags- und Arbeitsgruppe Anke, Benjamin, Daniel, Daniel, Dennis, Karina, Martina, Michael, Roland, Thomas, Thomas und Volkmar danke ich für das angenehme Arbeitsklima und die gute Zusammenarbeit.

Bei Benjamin und Michael bedanke ich mich für das gewissenhafte Korrekturlesen und die wertvollen Anregungen.

Ich danke meiner Familie und Camelia für die liebevolle Unterstützung.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Dissertationsschrift selbständig verfasst und keine anderen Hilfsmittel als die angegebenen verwendet habe. Die Dissertation wurde in der jetzigen oder einer ähnlichen Form noch bei keiner anderen Hochschule eingereicht und hat noch keinen sonstigen Prüfungszwecken gedient.

Marburg, den 13. 06. 2007

Thomas Graeff

Lebenslauf

PERSÖNLICHE DATEN

Name	Thomas Graeff
Geburtsdatum/-ort	26. 04. 1976 in Dortmund
Staatsangehörigkeit	deutsch
Familienstand	ledig

AUSBILDUNG

08/1986 – 06/1995	Theodor-Heuss-Schule Pinneberg
04/1997 – 12/2003	Studium der Mathematik und Physik an der Philipps-Universität Marburg
12/2003	Diplom in Mathematik
Seit 01/2004	Promotionsstudium im Bereich „Geometrie und angewandte Analysis“ an der Philipps-Universität Marburg im Rahmen eines Stipendiums der German Israeli Foundation (GIF) in dem Projekt „Covariant Quantization on Complex and Real Symmetric Domains“

BERUFSTÄTIGKEIT

01/1996 – 01/1997	Zivildienst im Heilpädagogischen Kindergarten Appen-Etz
Seit 01/2004	wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachbereich Mathematik und Informatik der Philipps-Universität Marburg