

Über die Fortsetzbarkeit der Periodenabbildung für Degenerationen von Flächen vom allgemeinen Typ

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

vorgelegt dem

Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg

von

Michael Koch

aus Dillenburg

Marburg/Lahn, April 2005

Vom Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg als Dissertation
angenommen am: 28.04.2005

Erstgutachter: Professor Dr. Georg Schumacher
Zweitgutachter: Professor Dr. Thomas Bauer

Tag der mündlichen Prüfung: 05.07.2005

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Einleitung	5
Kapitel 2. Hodge-Theorie und Periodenabbildungen	9
§1. Hodge-Strukturen	9
§2. Klassifizierende Räume	12
§3. Variation der Hodge-Struktur	13
§4. Periodenabbildungen	14
Kapitel 3. Degenerationen von Hodge-Strukturen	17
§1. Semistabile Entartungen	17
§2. Die Monodromie-Filtrierung	19
§3. Die Clemens-Schmid-Sequenz	21
§4. Gemischte Hodge-Strukturen und der Satz vom nilpotenten Orbit	22
Kapitel 4. Schnitttheorie für Flächendegenerationen	25
Kapitel 5. Gemischte Hodge-Strukturen von Flächendegenerationen	31
Kapitel 6. Die Mumford-Kompaktifizierung	37
§1. Die Baily-Borel-Kompaktifizierung	37
§2. Die Mumford-Kompaktifizierung	39
Kapitel 7. Flächen von allgemeinem Typ und ihr Modulraum	43
§1. Die Klassifikation nach Iitaka	43
§2. Modulräume für Flächen vom allgemeinen Typ	44

Kapitel 8. Semi-log-kanonische Singularitäten und Anwendungen	47
§1. Semi-log-kanonische Singularitäten	47
§2. Degenerationen von Flächen vom allgemeinen Typ	56
Literaturverzeichnis	61
Anhang.	65
Danksagung	65
Erklärung	67

Einleitung

In dieser Arbeit werden wir einige Untersuchungen zu Degenerationen von Flächen vom allgemeinen Typ (d.h. maximaler Kodaira-Dimension $\kappa = 2$) anstellen, insbesondere werden wir untersuchen, unter welchen Bedingungen sich Griffiths' Periodenabbildung $\Phi : S \rightarrow D/\Gamma$ für semistabile Degenerationen solcher Flächen in die Mumford-Kompaktifizierung $\overline{D/\Gamma}^M$ fortsetzen lässt. Es sei $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \Delta^*$ eine Familie polarisierter Varietäten mit degenerierter zentraler Faser $X := \mathcal{X}_0 := \pi^{-1}(0)$ über einer punktierten Kreisscheibe. Griffiths' Theorie der Variation der Hodge-Struktur liefert nun eine holomorphe Abbildung

$$\Phi : \Delta^* \rightarrow D/\Gamma$$

der punktierten Kreisscheibe in das sogenannte Periodengebiet D/Γ , und es stellt sich die Frage nach der Fortsetzbarkeit dieser Periodenabbildung, d.h. einer Abbildung $\bar{\Phi} : \Delta \rightarrow \overline{D/\Gamma}$ in eine geeignete Kompaktifizierung von D/Γ . Für die Kompaktifizierung $\overline{D/\Gamma}$ hat man nun im Wesentlichen zwei Möglichkeiten. Zum einen kann man die sogenannte Satake-Baily-Borel-Kompaktifizierung $\overline{D/\Gamma}^{BB}$ wählen. Diese hat den Vorteil, dass sie eindeutig ist, und nach einem Resultat von Borel (siehe [4]) lässt sich jede holomorphe Abbildung

$$f : (\Delta^*)^k \times \Delta^{n-k} \rightarrow D/\Gamma$$

zu einer holomorphen Abbildung

$$f^* : \Delta^n \rightarrow \overline{D/\Gamma}^{BB}$$

fortsetzen. Leider ist der Randdivisor $\overline{D/\Gamma}^{BB} - D/\Gamma$ in der Regel hochgradig singulär, so dass sich hier nur sehr schwer mit differentialgeometrischen Methoden arbeiten lässt. Als Alternative bietet sich die Mumford-Kompaktifizierung $\overline{D/\Gamma}^M$ an, eine Art Aufblasung von $\overline{D/\Gamma}^{BB}$. Diese ist glatt bis auf sehr milde Singularitäten in hoher Kodimension und Quotientensingularitäten endlicher Gruppenoperationen, und der Randdivisor $\overline{D/\Gamma}^M - D/\Gamma$ hat normale Überkreuzungen. Allerdings ist diese Art der Kompaktifizierung nicht eindeutig.

Im zweiten Kapitel stellen wir zunächst die notwendigen Grundlagen über Hodge-Theorie und Periodenabbildungen nach Griffiths [15] zusammen, diese werden in Kapitel 3 auf den Fall von Degenerationen polarisierter Varietäten übertragen. In Kapitel 4 wird mit Hilfe der Schnitttheorie für Degenerationen komplexer Flächen eine Formel für die Selbstschnittzahl des kanonischen Bündels der allgemeinen Faser hergeleitet. Im sechsten Abschnitt skizzieren wir schließlich kurz die Konstruktion der Kompaktifizierung des Periodengebietes nach Baily und Borel und die alternative Kompaktifizierung nach Mumford. Hierbei erhalten wir ein Kriterium für die Fortsetzbarkeit der Periodenabbildung in den Nullpunkt in Abhängigkeit der Monodromie. In Kapitel 7 beschreiben wir die Konstruktion des Modulraums für Flächen von allgemeinem Typ nach [42], und im letzten Abschnitt wenden wir das Fortsetzungskriterium (Satz 6.2) aus Kapitel 6 auf den Fall einer Degeneration an, deren zentrale Faser eine semi-log-terminale Singularität besitzt.

Die Idee dieser Dissertation entstand aus einer Arbeit von R. Friedman [13], in der er einen globalen Torelli-Satz für $K3$ -Flächen beweist. Hierbei benötigt er für die Fortsetzung der Periodenabbildung in die Randpunkte des Modulraums ebenfalls das Kriterium von Mumford. Im $K3$ -Fall lassen sich dabei die semistabilen Punkte (d.h. die zentralen Fasern einer semistabilen Degeneration von $K3$ -Flächen) recht einfach beschreiben, es gilt nämlich folgender

Satz 1.1 (Kulikov [35]). *Eine semistabile Degeneration von $K3$ -Flächen ist birational äquivalent zu einer Degeneration, bei der die zentrale Faser unter einen der drei folgenden Typen fällt:*

- i) *Die zentrale Faser X ist eine glatte $K3$ -Fläche.*
- ii) *Man hat eine Zerlegung in Komponenten $X = X_0 \cup X_1 \cup \dots \cup X_{k+1}$. X_i trifft hierbei lediglich $X_{i\pm 1}$, und jeder Durchschnitt $X_i \cap X_{i+1}$ ist eine elliptische Kurve. X_0 und X_{k+1} sind rational, und für $1 \leq i \leq k$ ist X_i eine Regelfläche über $X_i \cap X_{i-1}$.*

- iii) *Alle Komponenten von X sind rationale Flächen, $X_i \cap (\cup_{j \neq i} X_j)$ ist ein Zykel rationaler Kurven, und für den zugehörigen Schnittgraphen gilt $|\Gamma| \cong S^2$.*

Bei der Kompaktifizierung des Modulraums der $K3$ -Flächen tauchen nun gerade jene Flächen vom Typ ii) als zentrale Fasern semistabiler Degenerationen auf. Der zugehörige Schnittgraph ist eindimensional, d.h. es ist $h^2(|\Gamma|) = 0$, somit das Fortsetzungskriterium Satz 6.2 erfüllt und die Fortsetzbarkeit der Periodenabbildung in die Mumford-Kompaktifizierung gegeben.

Hodge-Theorie und Periodenabbildungen

In diesem Kapitel stellen wir zunächst die notwendigen Grundlagen zur Theorie einer Variation der Hodge-Struktur und der zugehörigen Periodenabbildung zusammen.

1. Hodge-Strukturen

Es sei X eine kompakte Kählermannigfaltigkeit, und es bezeichne $\mathcal{A}^n(X)$ die C^∞ - n -Formen bzw. $\mathcal{A}^{p,q}(X)$ die C^∞ - (p, q) -Formen auf X . Man hat nun folgende Zerlegung:

$$\mathcal{A}^n(X) = \bigoplus_{p+q=n} \mathcal{A}^{p,q}(X).$$

Die Kohomologie $H^{p,q}(X)$ ist für $p + q = n$ definiert als

$$H^{p,q}(X) := \{\phi \in \mathcal{A}^{p,q}(X) : d\phi = 0\} / d\mathcal{A}^{n-1}(X) \cap \mathcal{A}^{p,q}(X),$$

wobei

$$d : \mathcal{A}^{n-1}(X) \longrightarrow \mathcal{A}^n(X)$$

die äußere Ableitung bezeichnet.

Satz 2.1 (Hodge-Zerlegung). *In jeder Dimension n lässt sich die de Rham-Kohomologie als direkte Summe schreiben:*

$$H_{DR}^n(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}(X), \quad H^{q,p} = \overline{H^{p,q}}.$$

Zum Beweis siehe [20], S. 116 f.. Auf $\mathcal{A}^n(X)$ kann man nun durch

$$F^p \mathcal{A}^n(X) := \mathcal{A}^{n,0}(X) \oplus \dots \oplus \mathcal{A}^{p,n-p}(X)$$

und auf H_{DR}^n durch

$$F^p H_{DR}^n := H^{n,0}(X) \oplus \dots \oplus H^{p,n-p}(X)$$

eine absteigende Filtrierung erklären. Dies liefert die Grundidee folgender

Definition 2.1. *Eine Hodge-Struktur $\{H_{\mathbb{Z}}, H^{p,q}\}$ vom Gewicht n wird gegeben durch ein Gitter $H_{\mathbb{Z}}$ von endlichem Rang (d.h. eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe) zusammen mit einer Zerlegung von $H = H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$:*

$$H = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q},$$

so dass

$$H^{p,q} = \overline{H^{q,p}}.$$

Setzt man

$$F^p := H^{n,0} \oplus \dots \oplus H^{p,n-p},$$

so erhält man eine Filtrierung

$$H = F^0 \supset F^1 \supset \dots \supset F^n$$

mit

$$H \cong F^p \oplus \overline{F}^{n-p+1},$$

und hat man umgekehrt eine Filtrierung $\{F^p\}_{p=0,\dots,n}$ gegeben, so liefert

$$H^{p,q} = F^p \cap \overline{F}^q$$

die zugehörige Zerlegung. Wir nennen $H^{p,q}$ die *Hodge-Komponenten* und $\{F^p\}$ die *Hodge-Filtrierung* von H .

Beispiel 2.1. Für eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit X und $n \in \mathbb{N}$ fest wählt man

$$H_{\mathbb{Z}} = H^n(X, \mathbb{Z})/Torsion,$$

dann ist

$$H = H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C} = H_{DR}^n(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}(X),$$

und das Paar $\{H_{\mathbb{Z}}, H^{p,q}(X)\}$ liefert eine Hodge-Struktur vom Gewicht n .

Definition 2.2. *Eine polarisierte algebraische Varietät ist ein Paar (X, ω) bestehend aus einer algebraischen Varietät X zusammen mit dem Repräsentanten ω der ersten Chernklasse eines positiven (d.h. amplen) Geradenbündels auf X .*

Es sei (X, ω) eine polarisierte algebraische Varietät der Dimension d . Wir betrachten den sogenannten *Lefschetz-Operator*

$$L : H^d(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^{d+2}(X, \mathbb{C}), \quad \varphi \mapsto \varphi \wedge \omega.$$

Satz 2.2 (Lefschetz). *Die Abbildung*

$$L^k : H^{d-k}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^{d+k}(X, \mathbb{C})$$

ist ein Isomorphismus für alle $k \leq d$.

Wir definieren nun für $n \leq d$ die primitive Kohomologie $P^n(X, \mathbb{C})$ von X als $\text{Kern}(L^{d-n+1})$. Hierdurch lässt sich nun die gesamte Kohomologie bestimmen:

Satz 2.3. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die folgende Zerlegung:*

$$H^n(X, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} L^k P^{n-2k}(X, \mathbb{C})$$

Zum Beweis der beiden Sätze siehe [20], S. 118 ff.. Die primitive Kohomologie liefert durch

$$H_{\mathbb{Z}} = P^n(X, \mathbb{C}) \cap H^n(X, \mathbb{Z})$$

und

$$H^{p,q} = P^n(X, \mathbb{C}) \cap H^{p,q}(X)$$

eine Hodge-Struktur $\{H_{\mathbb{Z}}, H^{p,q}\}$ vom Gewicht n . Man definiert nun hierauf eine Bilinearform

$$Q : H_{\mathbb{Z}} \times H_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

durch

$$Q(\phi, \psi) = (-1)^{n(n-1)/2} \int_X \phi \wedge \psi \wedge \omega^{d-n},$$

was uns zum Begriff einer *polarisierten Hodge-Struktur* führt:

Definition 2.3. *Eine polarisierte Hodge-Struktur vom Gewicht n ist ein Tripel $\{H_{\mathbb{Z}}, H^{p,q}, Q\}$ gegeben durch eine Hodge-Struktur vom Gewicht n zusammen mit einer Bilinearform*

$$Q : H_{\mathbb{Z}} \times H_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{Z},$$

die symmetrisch für gerades n und schiefsymmetrisch für ungerades n ist und die folgenden Hodge-Riemann-Bedingungen erfüllt:

- i) $Q(H^{p,q}, H^{p',q'}) = 0$ außer für $p' = n - p$ und $q' = n - q$,
- ii) $(\sqrt{-1})^{p-q} Q(\psi, \bar{\psi}) > 0$ für alle $\psi \neq 0 \in H^{p,q}$.

Der sogenannte *Weil-Operator* $C : H \rightarrow H$ ist gegeben durch

$$C|_{H^{p,q}} = (\sqrt{-1})^{p-q} id_H.$$

Bezüglich der Filtrierung $\{F^p\}$ übersetzen sich die Hodge-Riemann-Bedingungen also in

- i) $Q(F^p, F^{n-p+1}) = 0$,
- ii) $Q(C\psi, \bar{\psi}) > 0$ für alle $\psi \neq 0$ in H .

Die Bilinearform Q heißt *Polarisierung* der Hodge-Struktur.

2. Klassifizierende Räume

Wir fixieren ein Gitter $H_{\mathbb{Z}}$, $n \in \mathbb{N}$ und eine Bilinearform Q auf $H_{\mathbb{Z}}$. Der *klassifizierende Raum* D einer polarisierten Hodge-Struktur vom Typ $\{H_{\mathbb{Z}}, H^{p,q}, Q\}$ ist die Menge aller Zerlegungen $\{H^{p,q}\}$ von H , so dass

$$H = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}, \quad \dim H^{p,q} = h^{p,q},$$

auf denen die Bilinearform Q die beiden Hodge-Riemann-Bedingungen erfüllt. D wird auch als *Periodengebiet* bezeichnet. Setzt man

$$f^p = h^{n,0} + \dots + h^{p,n-p},$$

so kann man D auch als die Menge aller Filtrierungen

$$H = F^0 \supset F^1 \supset \dots \supset F^n, \quad \dim F^p = f^p,$$

erklären, so dass Q die beiden Hodge-Riemann-Bedingungen erfüllt. Es bezeichne $H_{\mathbb{R}} := H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R}$ und $H := H_{\mathbb{C}} := H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$. Man hat nun folgende drei auf D operierende Lie-Gruppen:

$$G_{\mathbb{Z}} = \text{Aut}(H_{\mathbb{Z}}, Q) = \{g : H_{\mathbb{Z}} \rightarrow H_{\mathbb{Z}} \mid Q(g\phi, g\xi) = Q(\phi, \xi) \text{ für alle } \phi, \xi \in H_{\mathbb{Z}}\},$$

$$G_{\mathbb{R}} = \text{Aut}(H_{\mathbb{R}}, Q) = \{g : H_{\mathbb{R}} \rightarrow H_{\mathbb{R}} \mid Q(g\phi, g\xi) = Q(\phi, \xi) \text{ für alle } \phi, \xi \in H_{\mathbb{R}}\}$$

sowie

$$G_{\mathbb{C}} = \text{Aut}(H, Q) = \{g : H \rightarrow H \mid Q(g\phi, g\xi) = Q(\phi, \xi) \text{ für alle } \phi, \xi \in H\}.$$

Es lässt sich nun leicht nachrechnen, dass $G_{\mathbb{R}}$ und damit auch $G_{\mathbb{C}}$ transitiv auf D operiert (siehe [17], Prop. 8.12). D ist somit eine komplexe Mannigfaltigkeit.

Definition 2.4. *Es sei $G(f^p, H)$ die Grassmann-Mannigfaltigkeit der f^p -dimensionalen Unterräume von H . Das kompakte Dual \check{D} von D ist der Unterraum von $\prod_{p=0}^n G(f^p, H)$ aller Filtrierungen $\{F^p\}$ auf H , welche die erste Hodge-Riemann-Bedingung erfüllen.*

Da \check{D} homogen bezüglich $G_{\mathbb{C}}$ ist (siehe [15]) und es eine kanonische Einbettung

$$\check{D} \hookrightarrow \prod_{p=1}^n G(f^p, H)$$

gibt, ist \check{D} eine glatte algebraische Untervarietät der algebraischen Varietät $\prod_{p=1}^n G(f^p, H)$ und die komplexe Mannigfaltigkeit D wiederum eine offene Teilmenge von \check{D} , d.h. wir erhalten somit eine natürliche Einbettung

$$D \hookrightarrow \prod_{p=1}^n G(f^p, H).$$

3. Variation der Hodge-Struktur

Wir wollen im Folgenden nicht nur die Hodge-Struktur einer einzelnen Varietät, sondern von Familien polarisierter Varietäten untersuchen.

Definition 2.5. *Es sei S eine komplexe Mannigfaltigkeit. Eine Variation der Hodge-Struktur vom Gewicht m über S ist ein Tripel $(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}, \mathcal{F}^p, \nabla)$, für das folgende Eigenschaften gelten:*

- i) $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$ ist eine lokalkonstante Garbe endlich erzeugter freier abelscher Gruppen über S .
- ii) \mathcal{F}^p ist eine absteigende Filtrierung durch holomorphe Unterbündel von $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_S$.
- iii) In jedem Punkt $s \in S$ induziert die Filtrierung \mathcal{F}^p faserweise eine Hodge-Filtrierung $\{F_s^p\}$ einer Hodge-Struktur vom Gewicht m .
- iv) Für den natürlichen flachen Zusammenhang $\nabla : \mathcal{H} \rightarrow \Omega_S^1 \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{H}$ gilt für alle $0 \leq p \leq m$

$$\nabla \mathcal{F}^p \subset \Omega_S^1 \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F}^{p-1}$$

(Griffiths-Transversalität).

Hat man zusätzlich noch eine nichtdegenerierte, flache bilineare Paarung

$$\mathcal{Q} : \mathcal{H}_{\mathbb{Z}} \times \mathcal{H}_{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{Z}$$

gegeben, die faserweise eine Polarisierung der Variation der Hodge-Struktur liefert, so spricht man von einer *polarisierten Variation der Hodge-Struktur*.

Beispiel 2.2. Es sei \mathcal{X} eine komplexe Mannigfaltigkeit. Wir betrachten eine glatte Familie $g : \mathcal{X} \rightarrow S$ polarisierter Varietäten der Dimension n bezüglich der relativ amplen Garbe $L_{\mathcal{X}}$ auf \mathcal{X} über einer komplexen Mannigfaltigkeit S , d.h. es gibt eine durch $L_{\mathcal{X}}$ induzierte Einbettung $\mathcal{X} \subset S \times \mathbb{P}^N$, und die Fasern von $g : \mathcal{X} \rightarrow S$ sind glatte projektive Varietäten. Die Garbe

$L_{\mathcal{X}}$ induziert einen lokalkonstanten Schnitt $u \in H^0(S, R^2 g_* \mathbb{Z}_{\mathcal{X}})$, und das Cup-Produkt mit u definiert für $m \geq 0$ einen Garbenhomomorphismus

$$R^m g_* \mathbb{Z}_{\mathcal{X}} \longrightarrow R^{m+2} g_* \mathbb{Z}_{\mathcal{X}}.$$

Man definiert nun die primitive Kohomologiegarbe als

$$(R^m g_* \mathbb{Z}_{\mathcal{X}})_0 := \text{Kern} \left\{ R^m g_* \mathbb{Z}_{\mathcal{X}} \xrightarrow{\cup u^{n-m+1}} R^{2n+2-m} g_* \mathbb{Z}_{\mathcal{X}} \right\}.$$

Da $g : \mathcal{X} \rightarrow S$ nach dem Satz von Ehresmann (siehe z.B. [29], S. 61) ein C^∞ -Faserbündel ist, liefert $(R^m g_* \mathbb{Z}_{\mathcal{X}})_0$ eine lokalkonstante Garbe endlich erzeugter freier \mathbb{Z} -Moduln auf S , und $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}} = (R^m g_* \mathbb{Z}_{\mathcal{X}})_0$ ist das zugehörige Gitter einer polarisierten Variation der Hodge-Struktur vom Gewicht m über S .

4. Periodenabbildungen

Es sei $(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}, \mathcal{F}^p, \nabla)$ eine polarisierte Variation der Hodge-Struktur vom Gewicht k über einer zusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeit S . Mit $\pi : \tilde{S} \rightarrow S$ bezeichnen wir die universelle Überlagerung von S . Der Pullback von $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$ unter π auf \tilde{S} ist eine konstante Garbe, und man erhält nach der Wahl eines Basispunktes $s_0 \in S$ und einer Referenz-Hodge-Struktur eine holomorphe Abbildung

$$\tilde{\Phi} : \tilde{S} \longrightarrow D,$$

wobei D das Periodengebiet der Referenz-Hodge-Struktur ist (vgl. [47], S. 230). Sei $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}, s_0}$ die Faser von $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$ über s_0 . Die Fundamentalgruppe $\pi_1(S, s_0)$ operiert durch Isometrien auf $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}, s_0}$, und deshalb induziert die lokalkonstante Garbe $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$ eine Darstellung

$$\pi_1(S, s_0) \xrightarrow{\rho} G_{\mathbb{Z}}.$$

Hierbei gilt

$$\tilde{\Phi}(\gamma \tilde{s}) = \rho(\gamma) \tilde{\Phi}(\tilde{s})$$

für $\gamma \in \pi_1(S, s_0)$ und $\tilde{s} \in \tilde{S}$.

Definition 2.6. *Das Bild von $\pi_1(S, s_0)$ in $G_{\mathbb{Z}}$ wird als Monodromiegruppe der polarisierten Variation der Hodge-Struktur bezeichnet.*

Ist Γ eine diskrete Untergruppe von $G_{\mathbb{Z}}$, die die Monodromiegruppe enthält, so induziert $\tilde{\Phi}$ eine holomorphe Abbildung

$$\Phi : S \longrightarrow D/\Gamma.$$

Definition 2.7. *Die Abbildung Φ heißt Periodenabbildung der polarisierten Variation der Hodge-Struktur $(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}, \mathcal{F}^p, \nabla)$ zum Periodengebiet D/Γ .*

Im Allgemeinen ist die Periodenabbildung nicht konstant. So gelten für eine große Klasse von Varietäten sogenannte *Torelli-Sätze*; so ist etwa im Beispiel von Enriques-Flächen (d.h. $K_Y^2 = 0$, $K_Y \neq 0$) die Periodenabbildung ein lokaler und im Fall von $K3$ -Flächen sogar ein globaler Isomorphismus (lokaler bzw. globaler Torelli-Satz), siehe [7], Kapitel *VIII*. Auch für Flächen vom allgemeinen Typ gilt in einigen Fällen ein solcher Satz, siehe z.B. [46] oder auch [8].

Die Periodenabbildung $\Phi : S \rightarrow D/\Gamma$ erfüllt nach [17], Prop. 9.3, die Eigenschaft, dass jeder Punkt $s \in S$ eine Umgebung U besitzt, so dass es eine Liftung

$$\tilde{\Phi}_U : \tilde{U} \subset \tilde{S} \rightarrow D$$

der Abbildung $\Phi|_U : U \rightarrow D/\Gamma$ gibt und das natürliche Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & \xrightarrow{\tilde{\Phi}_U} & D \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{\Phi|_U} & D/\Gamma \end{array}$$

kommutativ ist. Diese Eigenschaft bezeichnet man als *lokale Liftbarkeit*.

Degenerationen von Hodge-Strukturen

In diesem Kapitel verallgemeinern wir nun die Überlegungen aus dem vorherigen Kapitel auf den Fall einer Degeneration projektiver Varietäten.

1. Semistabile Entartungen

Wir betrachten im Folgenden eine Familie $\pi : \mathcal{X} \rightarrow S$ polarisierter Varietäten über der eindimensionalen, glatten Basis S , bei der die zentrale Faser $\pi^{-1}(0)$ singularär ist. Wir nennen eine solche Degeneration *semistabil*, falls die zentrale Faser \mathcal{X}_0 ein Divisor mit normalen Überkreuzungen ist, d.h. man hat eine Zerlegung in irreduzible Komponenten X_i

$$\mathcal{X}_0 = \bigcup_{i=1}^k X_i,$$

in der jede Komponente X_i glatt ist und sich zwei Komponenten jeweils transversal schneiden. Die Abbildung π wird auf einer Umgebung des Nullpunktes in lokalen Koordinaten gegeben durch

$$s = x_1 x_2 \cdots x_k.$$

Wir benötigen zunächst das folgende grundlegende Resultat über die semistabile Reduktion einer Familie projektiver Varietäten.

Satz 3.1 (Mumford [28]). *Es sei $\pi : \mathcal{X} \rightarrow S$ eine Degeneration projektiver Varietäten. Dann gibt es einen endlichen Basiswechsel*

$$b : S \rightarrow S, \quad s \mapsto s^N \quad \text{für ein } N \in \mathbb{N},$$

eine semistabile Degeneration $\psi : \mathcal{Y} \longrightarrow S$ und ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{Y} & \xrightarrow{f} & \mathcal{X}_b & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ & \searrow \psi & \downarrow & & \downarrow \pi \\ & & S & \xrightarrow{b} & S, \end{array}$$

wobei $f : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}_b$ eine bimeromorphe Abbildung ist, die man durch Auf- und Niederblasen von Untervarietäten der zentralen Faser erhält.

Es sei

$$X_{i_0 \dots i_p} := X_{i_0} \cap \dots \cap X_{i_p}$$

der Durchschnitt von jeweils $p + 1$ Komponenten,

$$X^{[p]} := \bigcup_{i_0 < \dots < i_p} X_{i_0 \dots i_p}$$

die disjunkte Vereinigung und $\iota_p : X^{[p]} \longrightarrow \mathcal{X}$ die natürliche Einbettung. Man wählt eine Überdeckung \mathfrak{U} einer Umgebung der zentralen Faser \mathcal{X}_0 in \mathcal{X} , so dass folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

- i) Für die Čech-Kohomologie gilt $\check{H}(\mathfrak{U} \cap \mathcal{X}_0, \mathbb{Q}) \cong \check{H}(\mathcal{X}_0, \mathbb{Q})$.
- ii) $\check{H}(\iota_p^{-1} \mathfrak{U}, \mathbb{Q}) \cong \check{H}(X^{[p]}, \mathbb{Q})$.

Es seien ${}^{DR}E_0^{p,q} := \mathcal{A}^q(X^{[p]})$ die komplexen C^∞ - q -Formen auf $X^{[p]}$ zusammen mit der äußeren Ableitung

$$d : \mathcal{A}^q(X^{[p]}) \longrightarrow \mathcal{A}^{q+1}(X^{[p]})$$

sowie dem Kodifferential

$$\delta : \mathcal{A}^q(X^{[p]}) \longrightarrow \mathcal{A}^q(X^{[p+1]})$$

$$\delta \psi|_{V \cap X_{j_0 \dots j_{p+1}}} = \sum_{\alpha} (-1)^\alpha \psi|_{V \cap X_{j_0 \dots \hat{j}_\alpha \dots j_{p+1}}}, \quad V \in \mathfrak{U}.$$

Dann ist ${}^{DR}E_1^{p,q} = H^q(X^{[p]})$ (vgl. [20], S. 438ff.). Griffiths und Schmid haben nun gezeigt (siehe [19], S. 71):

Satz 3.2. Die Spektralsequenz mit E_0, E_1 wie oben und den zugehörigen Differentialen d, δ degeneriert auf E_2 -Stufe.

Es sei

$$W_k := \bigoplus_{q \leq k} E_0^{*,q},$$

dann induziert $W_k := W_k(H^m)$ eine Filtrierung auf der Kohomologie $H^m := H^m(\mathcal{X}_0, \mathbb{Q})$:

$$0 \subset W_0 \subset W_1 \subset \dots \subset W_m = H^m.$$

Für die graduierten Anteile $Gr_k := W_k/W_{k-1}$ ist $Gr_k(H^m) = E_2^{m-k,k}$, und es gilt $Gr_k(H^m) = 0$ für $k < 0$ oder $k > m$ (vgl. [39], S. 105).

Man kann nun durch Dualität analog eine Filtrierung auf der Homologie $H_m(\mathcal{X}_0, \mathbb{Q})$ erklären, indem man

$$W_{-k}(H_m) := Ann(W_{k-1}(H^m)) := \{h \in H_m \mid (W_{k-1}(H^m), h) = 0\}$$

setzt, somit ist $Gr_k(H_m) \cong (Gr_{-k}(H^m))^*$, folglich $Gr_k(H_m) = 0$ für $k < -m$ oder $k > 0$.

2. Die Monodromie-Filtrierung

Es sei $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \Delta$ eine Degeneration projektiver Varietäten über einer Kreisscheibe, und $\pi^* : \mathcal{X}^* \rightarrow \Delta^*$ bezeichne die Einschränkung auf die punktierte Kreisscheibe. Es sei eine generische glatte Faser \mathcal{X}_t fest gewählt. Der kanonische Erzeuger von $\pi_1(\Delta^*)$ induziert eine Abbildung

$$T : H^m(\mathcal{X}_t) \rightarrow H^m(\mathcal{X}_t),$$

die sogenannte *Picard-Lefschetz-Transformation* (vgl. Abschnitt 2.4). Es gilt nun

- Satz 3.3** ([36], S. 124). i) *Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $(T^k - I)^{m+1} = 0$, d.h. T ist quasi-unipotent.*
 ii) *Ist die Degeneration semistabil, so ist $k = 1$. Man sagt dann auch, dass T in diesem Fall unipotent ist.*

Im semistabilen Fall erhalten wir somit eine nilpotente Abbildung

$$N = \log T = (T - I) - \frac{1}{2}(T - I)^2 + \frac{1}{3}(T - I)^3 - \dots + (-1)^m \frac{1}{m}(T - I)^m.$$

Der Nilpotenz-Index entspricht hierbei genau dem Index der Unipotenz, und speziell gilt $T = I$ genau dann, wenn $N = 0$. Die Abbildung N liefert nun induktiv eine Filtrierung

$$0 \subset W_0 \subset W_1 \subset \dots \subset W_{2m} = H^m(\mathcal{X}_t)$$

der Kohomologie wie folgt: Es sei $W_0 := \text{Bild}(N^m)$ und $W_{2m-1} := \text{Kern}(N^m)$. Wegen

$$N = (T - I)\tilde{N} = \tilde{N}(T - I)$$

und

$$N^{2m} = (T - I)^{2m}\tilde{N}^{2m} = 0 \text{ wegen } (T - I)^{m+1} = 0$$

gilt

$$W_0 \subset W_{2m-1}.$$

Offenbar ist nun

$$N^m(W_{2m-1}) \subset W_0,$$

folglich können wir den Quotienten

$$W_1/W_0 = \text{Bild}(N^{m-2}|_{W_{2m-1}/W_0})$$

bilden. Wegen $N^{2m-2} = 0$ ist $N^{m-2}(W_0) = \{0\}$ und

$$W_1 = \text{Bild}(N^{m-2}|_{W_{2m-1}/W_0}) \oplus W_0.$$

Ist nun für ein $l < m$

$$0 \subset W_{l-1} \subset W_{2m-l} \subset W_{2m} = H^m(\mathcal{X}_t)$$

mit $N^{m-l+1}(W_{2m-l}) \subset W_{l-1}$, so werden die W_l und W_{2m-l-1} über die Quotienten

$$W_l/W_{l-1} = \text{Bild}(N^{m-l}|_{W_{2m-l}/W_{l-1}}),$$

$$W_{2m-l-1}/W_{l-1} = \text{Kern}(N^{m-l}|_{W_{2m-l}/W_{l-1}})$$

definiert. Wegen

$$W_l/W_{l-1} \subset W_{2m-l-1}/W_{l-1}$$

ist $W_l \subset W_{2m-l-1}$, und es gilt

$$N^{m-l}(W_{2m-l-1}) \subset W_l.$$

Die so definierte Filtrierung erfüllt nun folgende Eigenschaften:

Satz 3.4 ([39], S. 107). *Es sei $K = \text{Kern}(N)$, $Gr_k(H) = W_k/W_{k-1}$, $Gr_k(K) = (W_k \cap K)/(W_{k-1} \cap K)$. Dann gilt:*

- i) $N(W_k) \subset W_{k-2}$.
- ii) $N(W_k) = \text{Bild}(N) \cap W_{k-2}$.
- iii) *Die Abbildung $N^k : Gr_{m+k}(H) \longrightarrow Gr_{m-k}(H)$ ist ein Isomorphismus.*
- iv) *Für $k \leq m$ ist $Gr_k(H) \cong \bigoplus_{\alpha=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} Gr_{k-2\alpha}(K)$.*
- v) *Für $0 < k \leq m$ gilt $N^k = 0$ genau dann, wenn $W_{m-k} = 0$, genau dann, wenn $W_{m-k} \cap K = 0$.*
- vi) $Gr_m(H)/\text{Bild}(N : Gr_{m+2}(H) \longrightarrow Gr_m(H)) \cong Gr_m(K)$.

Durch die Eigenschaften i)-iii) ist die Filtrierung bereits eindeutig bestimmt.

Bemerkung: Man kann alternativ noch eine topologische Beschreibung von $Gr_0(H^m)$ geben. Der sogenannte *duale Graph* Γ der zentralen singulären Faser \mathcal{X}_0 ist der simpliziale Komplex, dessen Ecken P_i den Komponenten X_i von \mathcal{X}_0 entsprechen, und der Simplex $\langle P_{i(0)}, \dots, P_{i(k)} \rangle$ gehört genau dann zu Γ , falls $X_{i(0)\dots i(k)} \neq \emptyset$. Damit ist dann $E_1^{p,0} = H^0(X^{[p]})$, und

$$H^0(X^{[0]}) \xrightarrow{\delta} H^0(X^{[1]}) \xrightarrow{\delta} \dots$$

ist der zugehörige Čech-Komplex von Γ , d.h. es ist $Gr_0(H^m) \cong E_2^{m,0} \cong H^m(|\Gamma|)$ (vgl. [39], S. 105).

3. Die Clemens-Schmid-Sequenz

Es sei $\mathcal{X} \rightarrow \Delta$ eine semistabile Degeneration, \mathcal{X}_t eine generische glatte Faser (fest gewählt) und $i : \mathcal{X}_t \hookrightarrow \mathcal{X}$ die Inklusion. Nach [10] gibt es eine starke Retraktion $r : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_0$, diese induziert Isomorphismen $r^* : H^m(\mathcal{X}_0, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^m(\mathcal{X}, \mathbb{Q})$ und $r_* : H_m(\mathcal{X}_0, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H_m(\mathcal{X}, \mathbb{Q})$.

Es seien

$$p : H_{2n+2-m}(\mathcal{X}) \rightarrow H^m(\mathcal{X}, \partial\mathcal{X}),$$

$$p_t : H^m(\mathcal{X}_t) \rightarrow H_{2n-m}(\mathcal{X}_t)$$

die Poincaré-Dualitätsabbildungen, und mit α bzw. β bezeichnen wir jeweils die Kompositionen

$$\alpha : H_{2n+2-m}(\mathcal{X}) \xrightarrow{p} H^m(\mathcal{X}, \partial\mathcal{X}) \rightarrow H^m(\mathcal{X})$$

und

$$\beta : H^m(\mathcal{X}_t) \xrightarrow{p_t} H_{2n-m}(\mathcal{X}_t) \xrightarrow{i_*} H_{2n-m}(\mathcal{X}).$$

Satz 3.5 (Clemens-Schmid, siehe [39], S. 108). *Die Sequenz*

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_{2n+2-m}(\mathcal{X}) \xrightarrow{\alpha} H^m(\mathcal{X}) \xrightarrow{i^*} H^m(\mathcal{X}_t) \xrightarrow{N} H^m(\mathcal{X}_t) \xrightarrow{\beta} H_{2n-m}(\mathcal{X}) \\ \xrightarrow{\alpha} H^{m+2}(\mathcal{X}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

ist exakt.

Korollar 3.1. *Es sei $K^m := \text{Kern}(N : H^m(\mathcal{X}_t) \rightarrow H^m(\mathcal{X}_t))$. Dann gilt $W_k(H^m(\mathcal{X}_0)) \xrightarrow{\sim} W_k(K^m)$ für $k < m$.*

Beweis: Wir betrachten folgenden Ausschnitt der Clemens-Schmid-Sequenz:

$$H^m(\mathcal{X}) \xrightarrow{i^*} H^m(\mathcal{X}_t) \xrightarrow{N} H^m(\mathcal{X}_t).$$

Durch Anwendung der Poincaré-Dualität genügt es also zu zeigen, dass $W_{k-2n-2}(H_{2n+2}) = 0$ für $k < m$ bzw. $Gr_{k-2n-2}(H_{2n+2-m}) = 0$ für $k < m$. Nun ist offenbar $k - 2n - 2 < -(2n + 2 - m)$, und die Behauptung folgt aus der Bemerkung nach Satz 3.2. \square

Korollar 3.2. *Es sei $k > 0$. Dann gilt $N^k = 0$ genau dann, wenn $W_{m-k}(H^m) = 0$. Speziell gilt $N^{m+1} = 0$, und es ist $N^m = 0$ genau dann, wenn $H^m(|\Gamma|) = 0$.*

Beweis: Nach Satz 3.4 v) gilt $N^k = 0$ genau dann, wenn $W_{m-k}(H^m(\mathcal{X}_t)) = 0$, und nach Korollar 3.1 genau dann, wenn $W_{m-k}(H^m(\mathcal{X}_0)) = 0$. Die zweite Aussage ergibt sich aus $W_0(H^m(\mathcal{X}_t)) \cong Gr_0(H^m(\mathcal{X}_t)) \cong H^m(|\Gamma|)$. \square

4. Gemischte Hodge-Strukturen und der Satz vom nilpotenten Orbit

Definition 3.1. Eine gemischte Hodge-Struktur auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum H wird gegeben durch zwei Filtrierungen, einer aufsteigenden Filtrierung

$$0 \subset W_{m-1} \subset W_m \subset W_{m+1} \subset H,$$

so dass $W_m = H$ für $m \gg 0$ und $W_m = 0$ für $m \ll 0$ sowie einer absteigenden Filtrierung

$$0 \subset F^{p+1} \subset F^p \subset F^{p-1} \subset \dots \subset F^0 = H.$$

Ein *Morphismus* von gemischten Hodge-Strukturen (H, W, F) und (H', W', F') vom Typ (r, r) ist eine lineare Abbildung $\tau : H \rightarrow H'$ mit

$$\begin{aligned} \tau(W_m) &\subset W'_{m+2r}, \\ \tau(F^p) &\subset F'^{p+r}. \end{aligned}$$

Für Morphismen gemischter Hodge-Strukturen gilt die Striktheits-Bedingung (siehe [41], S. 63):

$$\tau(W_m) = W'_{m+2r} \cap \text{Bild}(\tau), \quad \tau(F^p) = F'^{p+r} \cap \text{Bild}(\tau).$$

Aus Satz 3.4 ergibt sich nun

Korollar 3.3. Die Abbildungen α, i^*, N, β der Clemens-Schmid-Sequenz sind vom Typ $(n+1, n+1)$, $(0, 0)$, $(-1, -1)$ und (n, n) .

Für jedes $m = m(F)$ induziert nun die absteigende Hodge-Filtrierung eine Filtrierung auf dem Quotienten W_m/W_{m-1} , und zwar durch

$$F_m^p := F^p(W_m/W_{m-1}) := F^p \cap W_m / F^p \cap W_{m-1},$$

und liefert somit durch

$$H_m^{p,q} = F_m^p \cap \overline{F}_m^q,$$

eine gemischte Hodge-Struktur vom Gewicht m . Wir betrachten nun eine Variation der Hodge-Struktur über der punktierten Kreisscheibe Δ^* zusammen mit der zugehörigen Periodenabbildung

$$\Phi : \Delta^* \rightarrow D/\Gamma$$

Nach semistabiler Reduktion können wir annehmen, dass die Monodromie unipotent ist und erhalten somit durch die obere Halbebene $\mathfrak{h} = \{z \in$

$\mathbb{C}, \text{Im}(z) > 0\}$ eine verzweigte Überlagerung von Δ^* . Da \mathfrak{h} einfach zusammenhängend ist, hebt sich die Periodenabbildung Φ zu einer globalen Abbildung auf \mathfrak{h} hoch,

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h} & \xrightarrow{\tilde{\Phi}} & D \\ \pi \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^* & \xrightarrow{\Phi} & D/\Gamma, \end{array}$$

und es gilt

$$\tilde{\Phi}(z + 1) = T\tilde{\Phi}(z).$$

Die Fortsetzung in den Nullpunkt liefert dann

$$H_{e^{2\pi i s}} = TH_s.$$

Wir definieren nun

$$\tilde{\psi}(z) := \exp(-zN)\tilde{\Phi}(z) \in \check{D},$$

dann gilt

$$\tilde{\psi}(z + 1) = \tilde{\psi}(z),$$

und ψ lässt sich somit durch

$$\psi(s) := \tilde{\psi}(w) := \tilde{\psi}\left(\frac{1}{2\pi i} \log s\right) = \exp\left(-\frac{N}{2\pi i} \log s\right)\Phi(s)$$

zu einer Abbildung $\psi : \Delta^* \rightarrow \check{D}$ herunterdrücken.

Satz 3.6. Die Abbildung $\psi : \Delta^* \rightarrow \check{D}$ ist zu einer Abbildung $\psi : \Delta \rightarrow \check{D}$ fortsetzbar.

Zum Beweis siehe [19], S. 104. Die durch den Punkt $\{F_\infty^p\} := \psi(0) \in \check{D}$ definierte Filtrierung wird auch als *Grenzfiltrierung* bezeichnet.

Definition 3.2. Der nilpotente Orbit einer Degeneration über der punktierten Kreisscheibe Δ^* ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \Omega : \mathfrak{h} &\longrightarrow \check{D} \\ z &\longmapsto \exp(zN)\psi(0). \end{aligned}$$

Hierbei gilt

$$\Omega(z + 1) = T\Omega(z).$$

In seiner grundlegenden Arbeit über die Singularitäten der Periodenabbildung [47] hat Schmid nun gezeigt:

Satz 3.7 (Nilpotent-Orbit-Theorem, [47], Th. 4.9). i) Für $\text{Im}(z) \gg 0$ gilt $\Omega(0) \in D$.

- ii) *Bezüglich der durch die Polarisierung induzierten $G_{\mathbb{R}}$ -invarianten Metrik d auf D gilt*

$$d(\exp(zN)\psi(0), \tilde{\Phi}(z)) = O(\exp(-2\pi\text{Im}(z)))$$

für $\text{Im}(z) \rightarrow \infty$.

Der nilpotente Orbit liefert somit eine recht gute Approximation der ursprünglichen Periodenabbildung.

Schnitttheorie für Flächendegenerationen

In diesem Kapitel leiten wir mit Hilfe einer speziellen Schnitttheorie eine Formel für die Selbstschnittzahl des kanonischen Bündels der allgemeinen Faser einer Degeneration komplexer Flächen her.

Wir betrachten die folgende Situation: Es sei

$$\pi : \mathcal{X} \longrightarrow S$$

eine Familie komplexer Flächen, d.h. \mathcal{X} eine glatte dreidimensionale Mannigfaltigkeit über \mathbb{C} , S eine komplexe eindimensionale Mannigfaltigkeit (für lokale Betrachtungen genügt eine Kreisscheibe), π eine eigentliche, flache Abbildung, die über $S^* := S - \{0\}$ glatt ist. Es bezeichne $\mathcal{X}_s := \pi^{-1}(s)$, $s \neq 0$, die allgemeine glatte Faser und $X := \mathcal{X}_0 := \pi^{-1}(0)$ die zentrale singuläre Faser. Nach eventueller semistabiler Reduktion können wir für unsere Flächendegeneration folgende Annahmen machen:

- i) Zwei Komponenten sind entweder disjunkt oder schneiden sich transversal in einer glatten, irreduziblen Kurve.
- ii) Drei Komponenten schneiden sich in höchstens einem Punkt.
- iii) Der Durchschnitt von vier Komponenten ist immer leer.

Wir bezeichnen mit

$$\mathbb{D} := \bigcup_{V \neq W} V \cap W$$

die Vereinigung aller *Doppel-Kurven* (d.h. $\mathcal{X}_0 - \mathbb{D}$ ist der glatte Anteil von \mathcal{X}_0), und mit

$$\mathbb{T} := \bigcup_{V \neq W \neq U} V \cap W \cap U$$

die Vereinigung aller *Tripel-Punkte* (d.h. $\mathbb{D} - \mathbb{T}$ ist der glatte Anteil des singulären Anteils von \mathcal{X}_0). Ferner sei

$$\mathbb{D}_V := \bigcup_{W, W \neq V} V \cap W$$

der Divisor der Doppel-Kurven auf einer Komponente V und

$$\mathbb{T}_C := \bigcup_{W, W \not\supseteq C} C \cap W$$

der Divisor der Tripel-Punkte auf einer Doppel-Kurve C .

Wir betrachten \mathcal{X} über einer abgeschlossenen Kreisscheibe und können den Totalraum somit als Mannigfaltigkeit mit Rand auffassen. Einen Divisor D auf \mathcal{X} fassen wir als Element in $H_4(\mathcal{X}, \partial\mathcal{X})$ auf, wobei wir voraussetzen, dass alle Fasern (auch \mathcal{X}_0) nullhomolog sind.

Man hat nun auf dem Totalraum folgende nichtausgeartete Paarungen:

$$H_4(\mathcal{X}, \partial\mathcal{X}) \times H^4(\mathcal{X}, \partial\mathcal{X}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (\gamma, \omega) \mapsto \int_{\gamma} \omega$$

$$H^2(\mathcal{X}) \times H^4(\mathcal{X}, \partial\mathcal{X}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (c, \omega) \mapsto \int_{\mathcal{X}} c \wedge \omega.$$

und erhält somit einen Isomorphismus

$$c_1 : H_4(\mathcal{X}, \partial\mathcal{X}) \xrightarrow{\sim} H^2(\mathcal{X}).$$

Nach Definition gilt

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\mathcal{X}} c_1(\gamma) \wedge \omega.$$

Wir ordnen einem Divisor D seine erste Chernklasse zu: D entspricht einem Geradenbündel L , dort wählt man einen Schnitt σ mit

$$D = \{\sigma = 0\}.$$

Nun wählen wir eine Metrik auf L und nehmen als Repräsentanten von $c_1(D)$ die $(1, 1)$ -Form

$$-\frac{1}{2\pi i} \partial \bar{\partial} \log \|\sigma\|^2.$$

Gegeben sei nun ein Divisor D und ein (glatter) Divisor E . Wir betrachten die folgende Komposition von Abbildungen

$$p : H_4(\mathcal{X}, \partial\mathcal{X}) \xrightarrow{c_1} H^2(\mathcal{X}) \xrightarrow{\text{restr.}} H^2(E) \xrightarrow{c_1^{-1}} H_2(E, \partial E)$$

und definieren

$$D_E := p(D),$$

d.h. wir fassen D als Divisor in E auf. Für eine Komponentenzerlegung

$$E = \bigcup E_i,$$

E_i glatt, sei

$$D_E := \bigoplus D_{E_i} \in \bigoplus H_2(E_i, \partial E_i).$$

Falls E kählersch ist, so gilt $c_1(D_E) \in H^{1,1}(E, \mathbb{C})$ für jeden Divisor D (man nehme einfach die Einschränkung des $(1, 1)$ -Repräsentanten von $c_1(D) \in H^2(\mathcal{X})$, der einen $(1, 1)$ -Repräsentanten in $H^2(E)$ liefert).

Gegeben sei nun eine (abgeschlossene) komplexe Fläche X . Das Cup-Produkt und der kanonische Isomorphismus

$$H^4(X) \cong \mathbb{C}, \quad \omega \mapsto \int_X \omega$$

liefern eine Paarung

$$H^2(X) \times H^2(X) \longrightarrow \mathbb{C},$$

und via Poincaré-Dualität erhält man eine Schnittpaarung auf X . Falls $X = \bigcup X_i$ mit glatten Komponenten X_i , so erhalten wir durch $H_2(X_i) \times H_2(X_j) \longrightarrow 0$ für $i \neq j$ eine Schnittpaarung auf $\bigoplus H_2(X_i)$. Man definiert nun

$$D_E \cdot D_{E'} := \sum \int_{E_i} c_1(D) \wedge c_1(D').$$

Proposition 4.1. *Es seien D, D' zwei Divisoren in \mathcal{X} , $X = \bigcup V$, und es seien $D_s := D_{\mathcal{X}_s}$, $D'_s := D'_{\mathcal{X}_s}$. Dann gilt:*

$$D_s \cdot D'_s = \sum_V D_V \cdot D'_V = D_0 \cdot D'_0.$$

Beweis: Sei $s \in S$ beliebig gegeben. Wir verbinden s mit dem Nullpunkt durch eine glatte Kurve γ , und es sei $\Gamma := \pi^{-1}(\gamma)$. Wir erhalten

$$\int_{\mathcal{X}_s} c_1(D) \wedge c_1(D') - \int_X c_1(D) \wedge c_1(D') = \int_{\Gamma} d(c_1(D) \wedge c_1(D')) = 0$$

nach dem Satz von Stokes, folglich

$$D_s \cdot D'_s = \int_{\mathcal{X}_s} c_1(D) \wedge c_1(D') = \sum \int_V c_1(D) \wedge c_1(D').$$

□

Korollar 4.1. *Es seien V, W zwei Komponenten von X , die sich in einer Doppel-Kurve C schneiden. Dann gilt*

$$C_V^2 + C_W^2 = -t_C,$$

wobei t_C die Anzahl der Tripel-Punkte auf C ist.

Beweis: Es sei $X = V + W + \sum U$ mit $U \neq V, W$. Da $X \sim 0$, erhalten wir bei Schnitt mit V und W :

$$V_V + W_V + \sum U_V \sim 0,$$

$$V_W + W_W + \sum U_W \sim 0$$

und somit

$$V_V W_V + W_V^2 + \sum U_V W_V = 0,$$

$$V_W^2 + W_W V_W + \sum U_W V_W = 0.$$

Offensichtlich gilt

$$V_W = C_W,$$

$$W_V = C_V$$

und

$$t_C = \sum U_V V_V = \sum U_W V_W = \sum V_U W_U,$$

folglich

$$V_V W_V = -C_V^2 - t_C,$$

$$V_W W_W = -C_W^2 - t_C.$$

Nach Proposition 4.1 erhält man somit

$$0 = V_V W_V + V_W W_W + \sum V_U W_U = -(C_V^2 + C_W^2) - 2t_C + t_C.$$

□

Zu jedem Divisor D hat man das zugehörige Geradenbündel $\mathcal{O}(D)$ ($\mathcal{O} := \mathcal{O}_X$). Für eine beliebige Untervarietät B definieren wir D_B durch

$$\mathcal{O}(D_B) := \mathcal{O}(D) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_B$$

Dies liefert eine Definition bis auf lineare Äquivalenz.

Proposition 4.2. *Für jede Komponente V der zentralen Faser X gibt es Isomorphismen*

$$\alpha_V : \mathcal{O}_V(V_V) \otimes \mathcal{O}_V(\mathbb{D}_V) \longrightarrow \mathcal{O}_V,$$

$$\alpha_C : N_{C|V} \otimes N_{C|W} \otimes \mathcal{O}_C(\mathbb{T}_C) \longrightarrow \mathcal{O}_C,$$

wobei $N_{C|V}$ bzw. $N_{C|W}$ das Normalenbündel von C in V bzw. W bezeichnet, und für jeden Tripel-Punkt T einen Isomorphismus

$$\alpha_T : \mathcal{O}_T \longrightarrow \mathcal{O}_T.$$

α_V, α_C und α_T sind jeweils mit den Einschränkungsabbildungen

$$\begin{aligned}\beta_{V,C} : \mathcal{O}_V(V_V) \otimes \mathcal{O}_V(\mathbb{D}_V) &\longrightarrow N_{C|V} \otimes N_{C|W} \otimes \mathcal{O}_C(\mathbb{T}_C) \quad \text{für } C \subset V, \\ \beta_{V,T} : \mathcal{O}_V(V_V) \otimes \mathcal{O}_V(\mathbb{D}_V) &\longrightarrow \mathcal{O}_T \quad \text{für } T \subset V, \\ \beta_{C,T} : N_{C|V} \otimes N_{C|W} \otimes \mathcal{O}_C(\mathbb{T}_C) &\longrightarrow \mathcal{O}_T \quad \text{für } T \subset C\end{aligned}$$

kompatibel.

Beweis: (vgl. [41], S. 41) Da $X = \pi^{-1}(0)$ als Urbild des Nullpunktes linear äquivalent zu null ist, erhalten wir einen Isomorphismus

$$\alpha_V : \mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathcal{O}.$$

Durch Tensorieren mit \mathcal{O}_V erhalten wir

$$\alpha_V : \mathcal{O}_V(V_V) \otimes \mathcal{O}_V(\sum U_V) \longrightarrow \mathcal{O}_V.$$

Da für alle U gilt $U \neq V$, ist

$$V + \sum U_V \sim 0,$$

und offensichtlich ist $\sum U_V = \mathbb{D}_V$. Tensorieren mit \mathcal{O}_C liefert nun

$$\alpha_C : \mathcal{O}_C(V_C) \otimes \mathcal{O}_C(W_C) \otimes \mathcal{O}_C(\sum U_C) \longrightarrow \mathcal{O}_C.$$

Nun ist

$$\mathcal{O}_V(V_V) = N_{V|\mathcal{X}}$$

(siehe [20], S. 146), und da sich V und W transversal schneiden, erhalten wir

$$(N_{V|\mathcal{X}})|_C = N_{C|W}, \quad (N_{W|\mathcal{X}})|_C = N_{C|V}.$$

Offenbar ist

$$\sum U_C = \mathbb{T}_C,$$

und Tensorieren mit \mathcal{O}_T liefert den gesuchten Isomorphismus $\alpha_T : \mathcal{O}_T \longrightarrow \mathcal{O}_T$. □

Wir betrachten nun den kanonischen Divisor $K_{\mathcal{X}}$ des Totalraums \mathcal{X} . Für jeden glatten Divisor D auf \mathcal{X} erhalten wir mit der Adjunktionsformel

$$(K_{\mathcal{X}} + D)|_D = K_D,$$

wobei K_D den kanonischen Divisor von D bezeichnet. Speziell gilt

$$K_{\mathcal{X}_s} = K_{\mathcal{X}}|_{\mathcal{X}_s} \quad \text{für } s \neq 0.$$

Proposition 4.3. *Es sei $X := \bigcup V$ die Zerlegung von X in die einzelnen Komponenten.*

- i) *Ist V eine Komponente von X , so gilt $K_{\mathcal{X}}|_V = K_V + \mathbb{D}_V$.*
- ii) *Für die allgemeine Faser gilt $K_{\mathcal{X}_s}^2 = \sum_V K_V^2 + 8 \sum_C (g(C) - 1) + 9t$, wobei t die Anzahl der Tripel-Punkte auf X bezeichnet.*

Beweis: (vgl. [41], S. 48) Zu i): Die erste Aussage folgt einfach aus der Adjunktionsformel

$$K_{\mathcal{X}}|_V + V_V = (K_{\mathcal{X}} + V)|_V = K_V$$

und der Tatsache, dass

$$V_V = -\mathbb{D}_V$$

nach Proposition 4.2.

Zu ii): Nach i) ist nun $\sum (K_V + \mathbb{D}_V)^2$ zu berechnen. Wir schreiben

$$\mathbb{D}_V = \sum C_V.$$

Für jede einzelne Komponente V erhalten wir den Beitrag

$$K_V^2 + \sum_C 2K_V C_V + 2 \sum_{C \neq C'} C_V \cdot C'_V + \sum C_V^2.$$

Summation über alle V liefert nun als ersten Term $\sum K_V^2$. Für den mittleren Term betrachten wir für $C = V \cap W$

$$2K_V C_V + C_V^2 + 2K_W C_W + C_W^2.$$

Nach Korollar 4.1 ist

$$C_V^2 + C_W^2 = -t_C,$$

und wir erhalten mit Hilfe der Adjunktionsformel für Kurven auf Flächen ($2g(C) - 2 = C \cdot (C + K)$), siehe [23], S. 361)

$$\begin{aligned} 2K_V C_V + C_V^2 + 2K_W C_W + C_W^2 &= 2 \cdot 2(2g(C) - 2) + t_C \\ &= 8(g(C) - 1) + t_C. \end{aligned}$$

Summation liefert nun

$$\sum 8(g(C) - 1) + 3t,$$

da jeder Tripel-Punkt dreifach gezählt wird (jeweils für jede Doppel-Kurve, die ihn trifft). Für jeden Tripel-Punkt erhält man schließlich die drei Schnittterme $2C_V \cdot C'_V$, $2C_W \cdot C'_W$ und $2C_U \cdot C'_U$, insgesamt also $6t$.

□

Gemischte Hodge-Strukturen von Flächendegenerationen

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse aus Kapitel 3 speziell auf den zwei-dimensionalen Fall übertragen. Als Ergebnis erhalten wir eine Formel für das geometrische Geschlecht der allgemeinen Faser einer Degeneration komplexer Flächen.

Es sei also $\pi : \mathcal{X} \rightarrow S$ eine Familie komplexer Flächen mit singulärer zentraler Faser $X := \mathcal{X}_0 = \pi^{-1}(0)$, die in Komponenten $X = V_1 \cup \dots \cup V_n$ mit normalen Überkreuzungen zerfällt. Wir setzen zusätzlich voraus, dass die Fasern \mathcal{X}_s , $s \neq 0$, kählersch sind. Zunächst übertragen wir die Überlegungen aus Kapitel 3 auf diesen speziellen Fall. Man erhält also konkret:

$$X = X^{[0]} = \bigcup_{V \in \{V_i\}} V, \quad X^{[1]} = \bigcup_{U, V \in \{V_i\}} V \cap U, \quad X^{[2]} = \bigcup_{U, V, W \in \{V_i\}} V \cap U \cap W.$$

Wir definieren

$$d : \mathcal{A}^{p,q} \rightarrow \mathcal{A}^{p+1,q}$$

als die gewöhnliche äußere Ableitung und

$$\delta : \mathcal{A}^q(X^{[p]}) \rightarrow \mathcal{A}^q(X^{[p+1]})$$

entsprechend als

$$\delta\omega|_{V \cap W} := \omega|_W - \omega|_V,$$

$$\delta\omega|_{V \cap W \cap U} := \omega|_{W \cap U} - \omega|_{V \cap U} + \omega|_{V \cap W}.$$

Für eine Degeneration $\pi : \mathcal{X} \rightarrow S$ erhält man nun über die Monodromie eine gemischte Hodge-Struktur

$$0 \subset W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset W_3 \subset W_4 \subset H$$

auf $H^* = H^*(\mathcal{X}_s)$. Im Fall komplexer Flächen liefert die Clemens-Schmid-Sequenz die exakten Sequenzen

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(\mathcal{X}_s) \rightarrow H_4(X) \rightarrow H^2(X) \rightarrow H^2(\mathcal{X}_s) \rightarrow H^2(\mathcal{X}_s) \rightarrow H_2(X) \\ \rightarrow H^4(X) \rightarrow H^4(\mathcal{X}_s) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(X) \rightarrow H^1(\mathcal{X}_s) \rightarrow H^1(\mathcal{X}_s) \rightarrow H_3(X) \rightarrow H^3(X) \rightarrow H^3(\mathcal{X}_s) \\ \rightarrow H^3(\mathcal{X}_s) \rightarrow H_1(X) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Des Weiteren ergibt sich für die graduierten Anteile:

$$\begin{aligned} \text{auf } W_2/W_1 : \quad & H_2^{2,0} = F_2^2 \cap \bar{F}_2^0 \\ & H_2^{1,1} = F_2^1 \cap \bar{F}_2^1 \\ & H_2^{0,2} = F_2^0 \cap \bar{F}_2^2 \\ \text{auf } W_1/W_0 : \quad & H_1^{1,0} = F_1^1 \cap \bar{F}_1^0 \\ & H_1^{0,1} = F_1^0 \cap \bar{F}_1^1 \\ \text{auf } W_3/W_2 : \quad & H_3^{2,1} = F_3^2 \cap \bar{F}_3^1 \\ & H_3^{1,2} = F_3^1 \cap \bar{F}_3^2 \\ \text{auf } W_4/W_3 : \quad & H_4^{2,2} = F_4^2 \cap \bar{F}_4^2 \\ \text{auf } W_0 : \quad & H_0^{0,0} = F_0^0 \cap \bar{F}_0^0 \end{aligned}$$

Es seien nun $h_m^{p,q} := \dim H_m^{p,q}$, $f_m^p = \dim F_m^p$, $H^m := H^m(\mathcal{X}_s)$ und $h^{p,q} := \dim H^{p,q}(\mathcal{X}_s)$, $f^p := \dim F^p H(\mathcal{X}_s)$. Offenbar gilt nach Definition

$$f^p = \sum f_m^p$$

und

$$N^k H_{2-k}^{p,q} \cong H_{2+k}^{p+k, q+k},$$

folglich

$$h_{2-k}^{p,q} = h_{2+k}^{p,q}.$$

Man hat

$$\sum_{p,q,m} h_m^{p,q} = h^2$$

wegen

$$\sum_{p,q} h_m^{p,q} = h_m^2 = \dim W_m/W_{m-1}.$$

Da

$$F_m^p \oplus \bar{F}_m^{m-p+1} = W_m/W_{m-1} \quad \text{und} \quad F^3 = 0,$$

folgt für $m = 3$ und $m = 4$

$$\overline{F}_3^1 = \overline{F}_3^0 = W_3/W_2, \quad \overline{F}_4^2 = \overline{F}_4^1 = \overline{F}_4^0 = W_4/W_3$$

(beachte $\overline{F}_m^0 = W_m/W_{m-1}$) und somit

$$H_2^{2,0} = F_2^2, H_3^{2,1} = F_3^2, H_4^{2,2} = F_4^2.$$

Für $m < 2$ ist $F_m^2 = 0$, folglich

$$h^{2,0} = f^2 = f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 = h_2^{2,0} + h_3^{2,1} + h_4^{2,2}.$$

Es seien $h := h^{2,0}, k := h^{1,1}, a := h_3^{2,1}, b := h_4^{2,2}$, dann ist $h^2 = 2h + k$. Die Anteile von H^2 lassen sich nun in folgender Matrixform darstellen:

$$\begin{array}{l} h^{2,0} : \\ h^{1,1} : \\ h^{0,2} : \end{array} \begin{array}{ccc} h - (a + b) & a & b \\ a & k - 2a & a \\ b & a & h - (a + b). \end{array}$$

Es ist $b = 0$ genau dann, wenn $N^2 = 0$ auf H^2 , und $a + b = 0$ genau dann, wenn $N = 0$ auf H^2 . Analog erhält man für H^1 (mit $q = h^{1,0}$)

$$\begin{array}{l} h^{1,0} : \\ h^{0,1} : \end{array} \begin{array}{cc} q - c & c \\ q & q - c, \end{array}$$

und man bemerkt $q = 0$ genau dann, wenn $N = 0$ auf H^1 . Die Definition der gemischten Hodge-Struktur liefert des Weiteren (siehe [41], 2.7.1, oder auch [39], S. 105):

Proposition 5.1. *Es gilt $W_0(H^m(X)) \cong H^m(|\Gamma|)$, wobei Γ der duale Graph von X ist.*

Lemma 5.1. *Es ist*

- i) $(W_1/W_0)(H^1(X)) = \text{Kern}(\oplus H^1(V) \rightarrow \oplus H^1(C))$,
- ii) $(W_1/W_0)(H^2(X)) = \text{Coker}(\oplus H^1(V) \rightarrow \oplus H^1(C))$,
- iii) $(W_2/W_1)(H^2(X)) = \text{Kern}(\oplus H^2(V) \rightarrow \oplus H^2(C))$,
- iv) $H_2^{2,0} \cong \oplus_V H_2^{2,0}(V)$, $H_2^{0,2} \cong \oplus_V H_2^{0,2}(V)$.

Beweis: Die Aussagen i)-iii) folgen unmittelbar aus der Definition der Filtrierung (vgl. Kapitel 3). Da $H^2(C)$ aus Dimensionsgründen lediglich einen $H^{1,1}$ -Anteil enthält, ist jede $(2,0)$ - bzw. $(0,2)$ -Form identisch Null auf $H^2(C)$. Nach Definition von $H_2^{2,0}$ bzw. $H_2^{0,2}$ folgt die Behauptung zusammen mit iii). \square

Die Anwendung der Clemens-Schmid-Sequenz liefert nun folgende

Proposition 5.2 ([41], S. 69). *Es sei $\pi : \mathcal{X} \rightarrow S$ eine Degeneration komplexer Flächen. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} h^1(\mathcal{X}_s) &= \sum h^1(V) - \sum h^1(C) + k + 2h^1(|\Gamma|), \\ h^2(\mathcal{X}_s) &= \sum h^2(V) - 2(n-1) - t + 2k + 4h^2(|\Gamma|), \end{aligned}$$

wobei $k := \dim \text{Coker}(\oplus H^1(V) \rightarrow \oplus H^1(C))$, n die Anzahl der Komponenten, d die Anzahl der Doppel-Kurven und t die Anzahl der Tripel-Punkte bezeichnet.

Beweis: (vgl. [39], S. 110) Es seien $W_m := W_m(H^*)$, ${}_0W_m := W_m(H^*(X))$,

$$0 \subset W_{m-1} \subset W_m \subset W_{m+1} \subset H.$$

Wegen $H_{2n+1} = H_{2n+1}(X) = 0$ liefert die Clemens-Schmid-Sequenz die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H^1(X) \xrightarrow{\beta} H^1 \xrightarrow{N} H^1.$$

Somit ist $\text{Kern}(N) \cong H^1$, und für die graduierten Anteile erhält man:

$$\begin{aligned} Gr_2 H^1(X) &\cong Gr_0 H^1(X) \cong Gr_0 H^1 \cong H^1(|\Gamma|), \\ Gr_1 H^1(X) &\cong Gr_1 H^1 \cong \text{Kern}(H^1(X^{[0]}) \rightarrow H^1(X^{[1]})), \end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned} h^1(\mathcal{X}_s) &= \dim Gr_0 H^1 + \dim Gr_1 H^1 + \dim Gr_2 H^1 \\ &= \dim Gr_1 H^1 + 2h^1(|\Gamma|) \\ &= \sum h^1(V) - \sum h^1(C) + k + 2h^1(|\Gamma|). \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Sequenz

$$0 \rightarrow H^0 \rightarrow H_4(X) \xrightarrow{\alpha} H^2(X) \xrightarrow{\beta} H^2 \xrightarrow{N} H^2 \xrightarrow{\gamma} H_2(X).$$

Wegen $h_3^2 = h_1^2$ und $h_4^2 = h_0^2$ gilt

$$h^2 = h_2^2 + 2h_1^2 + 2h_0^2,$$

wobei $h_2^2 = \dim W_2/W_1$, $h_1^2 = \dim W_1/W_0$, $h_0^2 = \dim W_0$. Betrachten wir zunächst

$$H_4(X) \xrightarrow{\alpha} H^2(X) \xrightarrow{\beta} H^2.$$

Da α vom Typ $(3, 3)$ und $H_4(X)$ vom Gewicht -4 ist, gilt $\text{Bild}(\alpha) \cap W_1 = 0$, $\beta({}_0W_0) = W_0$ und $\beta({}_0W_1) = W_1$. Somit liefert β einen Isomorphismus auf sein Bild in $H^2 = H^2(\mathcal{X}_s)$. Nach Proposition 5.1 gilt

$$\dim {}_0W_0 = h^2(|\Gamma|)$$

und nach Lemma 5.1, ii)

$$\dim {}_0W_1/{}_0W_0 = \dim \text{Coker}(\oplus H^1(V) \rightarrow \oplus H^1(C)).$$

Aufgrund der Striktheit von α, β, N liefert die obige Sequenz (vgl. [41], S. 70):

$$0 \longrightarrow H_4(X) \longrightarrow {}_0W_2/{}_0W_1 \longrightarrow W_2/W_1 \longrightarrow W_0 \longrightarrow 0.$$

Somit ist

$$\dim W_2/W_1 = 1 - n + \dim {}_0W_2/{}_0W_1 + h_0^2,$$

$n = \dim H_4(X)$ (=Anzahl der Komponenten), und

$$\dim {}_0W_2/{}_0W_1 = h^2(V) + \dim \text{Coker}(\oplus H^1(V) \rightarrow \oplus H^1(C)).$$

nach Lemma 5.1, iii). □

Für das folgende Korollar benötigen wir noch folgende Formel für die Euler-Charakteristik der allgemeinen Faser:

Lemma 5.2 ([41], Prop 2.5.2). *Es ist*

$$e(\mathcal{X}_t) = \sum e(V) - 2 \sum e(C) + 3t.$$

Aufgrund der Kähler-Bedingung ist $2q(\mathcal{X}_s) = h^1(\mathcal{X}_s)$ und $2q(V) = h^1(V)$, und die Noether-Formel (vgl. [7], S. 20) liefert

$$p_g - q + 1 = \frac{K^2 + e}{12},$$

wobei $p_g := \dim H^0(X, \Omega^2)$ das geometrische Geschlecht, $q = \dim H^1(X, \mathcal{O})$ die Irregularität und e die Euler-Charakteristik bezeichnet. Zusammen mit Proposition 4.3, ii) erhält man nun folgendes

Korollar 5.1 ([41], S. 72). *Es gilt*

$$p_g(\mathcal{X}_s) = \sum p_g(V) + h^2(|\Gamma|) + \frac{1}{2}k.$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}
p_g(\mathcal{X}_s) &= q(\mathcal{X}_s) - 1 + \frac{1}{12} [K_{\mathcal{X}_s}^2 + e(\mathcal{X}_s)] \\
&= \frac{1}{2} h^1(\mathcal{X}_s) - 1 + \frac{1}{12} [K_{\mathcal{X}_s}^2 + 1 - h^1(\mathcal{X}_s) + h^2(\mathcal{X}_s)] \\
&= \frac{1}{2} \left[\sum h^1(V) - \sum h^1(C) + k + 2h^1(|\Gamma|) \right] - 1 \\
&\quad + \frac{1}{12} \left[\sum K_V^2 + 8 \sum (g(C) - 1) + 9t - \sum h^1(V) + \sum h^1(C) \right. \\
&\quad \left. - k - 2h^1(|\Gamma|) + \sum h^2(V) - 2(n-1) - t + 2k + 4h^2(|\Gamma|) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\sum h^1(V) - \sum h^1(C) + k + 2h^1(|\Gamma|) \right] - 1 \\
&\quad + \frac{1}{12} \left[\sum 12(p_g(V) - q(V) + 1) - e(V) + 8 \sum (g(C) - 1) \right. \\
&\quad \left. + 9t + 1 - \sum h^1(V) + \sum h^1(C) - k - 2h^1(|\Gamma|) \right. \\
&\quad \left. + \sum h^2(V) - 2(n-1) - t + 2k + 4h^2(|\Gamma|) \right] \\
&= \frac{1}{2} k + \sum p_g(V) + \frac{1}{2} \left[- \sum h^1(C) + 2h^1(\Gamma) \right] - 1 \\
&\quad + \frac{1}{12} \left[8 \sum (g(C) - 1) + 8t + k + \sum h^1(C) - 2h^1(|\Gamma|) \right. \\
&\quad \left. + 4h^2(|\Gamma|) - 2n + 3 \right].
\end{aligned}$$

Lemma 5.2 liefert nun

$$4t = -3n + 3 + 4h^2(|\Gamma|) + \sum (2 - h^1(C)) + k$$

und somit die Behauptung. \square

Die Mumford- Kompaktifizierung

In diesem Abschnitt beschreiben wir die Konstruktion der Kompaktifizierung des Periodengebiets nach Mumford und erhalten ein Kriterium zur Fortsetzbarkeit der Periodenabbildung.

1. Die Baily-Borel-Kompaktifizierung

Es sei $G = G(\mathbb{Q})$ eine semisimple algebraische Gruppe über \mathbb{Q} ¹ und $K \subset G$ eine maximale kompakte Untergruppe, so dass

$$D = G/K$$

ein hermitesch-symmetrisches Gebiet ist. Nach einem Satz von Harish-Chandra ([2], S. 170) lässt sich D als beschränktes Gebiet in einen \mathbb{C}^m einbetten. Die Gruppenoperation von G setzt sich nun fort auf den Abschluss \bar{D} , und für den Rand $\partial D = \bar{D} - D$ hat man eine Zerlegung in Komponenten

$$\partial D = \bigcup F_i.$$

Definition 6.1. *Eine Hyperebene $H \subset \mathbb{C}^m$ heißt unterstützend, falls $H \cap \bar{D} \neq \emptyset$ und $H \cap D = \emptyset$.*

Es sei nun H eine unterstützende Hyperebene, $\bar{F} := H \cap \bar{D} = H \cap \partial D$. $L \subset \mathbb{C}^m$ sei der kleinste affine Unterraum, der \bar{F} enthält und somit der

¹Eine algebraische Gruppe definiert über einem Körper k ist eine algebraische k -Varietät G zusammen mit einer Gruppenstruktur, die ebenfalls über k definiert ist (vgl. [6], S. 85 ff.)

Abschluss einer einzelnen Randkomponente von D . Wir halten $F = H \cap D$ fest und betrachten den Normalisator

$$N_F(G) = \{\sigma \in G, \sigma(x) \in F \text{ für alle } x \in F\}.$$

$N_F(G)$ ist dann eine echte parabolische Untergruppe von G .² Eine Randkomponente F heißt *rational*, falls $N_F(G)$ rational in G definiert ist.³ Es sei

$$G = G_1 \times \cdots \times G_k$$

eine Zerlegung von G in einfache rationale Faktoren. Dann zerlegt sich D entsprechend in

$$D = D_1 \times \cdots \times D_k.$$

Jede Randkomponente F lässt sich somit schreiben als

$$F = F_1 \times \cdots \times F_k,$$

wobei entweder $F_i = D_i$ gilt oder aber F_i eine echte rationale Randkomponente von D_i ist. Analog kann man dann den Normalisator darstellen als

$$N_F(G) = N_{F_1}(G_1) \times \cdots \times N_{F_k}(G_k).$$

Ist G bereits einfach über \mathbb{Q} , so ist $N_F(G)$ eine maximale parabolische Untergruppe von G . Die *Baily-Borel-Satake-Kompaktifizierung* \overline{D}^{BB} ist dann die Vereinigung von D mit allen rationalen Randkomponenten zusammen mit der Satake-Topologie.⁴

Man hat nun folgenden grundlegenden

Satz 6.1 (Baily-Borel [4]). *Der Abschluss \overline{F} jeder rationalen Randkomponente $F \subset \overline{D}^{BB}$ ist die Baily-Borel-Satake-Kompaktifizierung \overline{F}^{BB} von F . Die Gruppenoperation von G setzt sich fort auf die Kompaktifizierung \overline{D}^{BB} . Für jede arithmetische Untergruppe $\Gamma \subset G$ ist der Quotient \overline{X}^{BB} kompakt und trägt darüber hinaus noch die Struktur einer algebraischen Varietät.*

²Eine abgeschlossene Untergruppe $P \subset G$ heißt *parabolisch*, falls G/P eine vollständige algebraische Varietät ist. Da der homogene Raum G/P bereits quasiprojektiv ist, ist die Vollständigkeit äquivalent zur Algebraizität von G/P (vgl. [5], S. 262).

³D.h. die Verknüpfung und Inversion sind über \mathbb{Q} erklärt, siehe [6].

⁴Die Satake-Topologie auf \overline{D}^{BB} ist eindeutig durch die folgenden Eigenschaften bestimmt (vgl. [4], S. 482 ff.):

- i) Sie induziert die natürliche Topologie auf D und auf dem Abschluss jedes Fundamentalggebietes Ω für jede arithmetische Untergruppe $\Gamma \subset G$.
- ii) G operiert stetig auf \overline{D}^{BB} .
- iii) Sind $x, x' \in \overline{D}^{BB}$ nicht äquivalent bezüglich Γ , dann gibt es Umgebungen $U = U(x)$, $U' = U'(x')$, so dass $\Gamma \cdot U \cap U' = \emptyset$.
- iv) Für jedes $x \in \overline{D}^{BB}$ gibt es eine Umgebungsbasis $\{U\}$ von x , so dass $U \cdot \gamma = U$ für $\gamma \in \{\gamma \in \Gamma; \gamma x = x\}$ und $U \cdot \gamma = \emptyset$ sonst.

Unter Umständen kann der Rand von $\overline{D/\Gamma}^{BB}$ jedoch eine sehr komplizierte geometrische Struktur besitzen. So hat z.B. für den Fall der Siegelschen oberen Halbebene $D = \mathfrak{S}_g = \{\tau \in M(g, \mathbb{C}); \tau^t = \tau, \text{Im}(\tau) > 0\}$ und $\Gamma = Sp(g, \mathbb{Z})$ der Rand $\overline{D/\Gamma}^{BB} - D/\Gamma$ Kodimension g und wird hochgradig singular, vgl. [40].

2. Die Mumford-Kompaktifizierung

Als Alternative zur Baily-Borel-Kompaktifizierung bietet sich deshalb D. Mumfords toroidale Kompaktifizierung an. Hierbei ist die Idee, jeder möglichen gewichteten Monodromie-Filtrierung W eine Randkomponente zuzuordnen, so dass diese zusammen mit W eine polarisierte gemischte Hodge-Struktur bildet. Wir halten uns an dieser Stelle an die Darstellung der Konstruktion der Kompaktifizierung in [9] und beschränken uns in der Darstellung auf den Fall einer Hodge-Filtrierung vom Gewicht 1 (die allgemeine Konstruktion findet sich in [2]). Es sei W_0 ein rationaler Q -isotropischer Unterraum⁵ von $H = H^{1,0} \oplus H^{0,1}$, W_1 der Q -Annihilator von W_0 , d.h. $W_1 = W_0^\perp = \{u \in H : Q(u, v) = 0 \text{ für alle } v \in W_0\}$ und $\mathfrak{n}(W_0)$ die Lie-Algebra

$$\mathfrak{n}(W_0) := \{N \in \mathfrak{g}_0; \text{Bild}(N) \subset W_0\},$$

wobei

$$\mathfrak{g}_0 = \{X \in \text{Hom}(H_{\mathbb{R}}, H_{\mathbb{R}}); Q(X\cdot, \cdot) + Q(\cdot, X\cdot) = 0\}.$$

Dann ist $\text{Kern}(N) \supset W_1$, folglich induziert die quadratische Form $Q_N := Q(\cdot, N\cdot)$ eine quadratische Form \tilde{Q}_N auf dem Quotienten H/W_1 . Wir definieren

$$\mathfrak{n}(W_0)^+ := \{N \in \mathfrak{n}(W_0) : \tilde{Q}_N \text{ ist positiv definit}\}$$

und $\overline{\mathfrak{n}(W_0)^+}$ als den Abschluss in $\mathfrak{n}(W_0)$. Jedes $N \in \mathfrak{n}(W_0)^+$ liefert nun eine Monodromie-Filtrierung

$$W : \quad \{0\} \subset W_0 \subset W_1 \subset H,$$

vgl. Kapitel 3. Es sei nun

$$\sigma := \left\{ \sum \lambda_i N_i; \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i > 0, N_i \in \overline{\mathfrak{n}(W_0)^+} \right\}$$

und $B(\sigma) \subset \check{D}$ die Menge aller Filtrierungen in \check{D} , die zusammen mit W für jedes $N \in \text{Int}(\sigma)$ eine gemischte Hodge-Struktur liefern. $B(\sigma)$ lässt sich auch schreiben als

$$B(\sigma) = \exp(\sigma_{\mathbb{C}}) \cdot D = \exp(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}(W_0)) \cdot D,$$

⁵Es sei V ein Vektorraum über \mathbb{C} zusammen mit einer symmetrischen oder symplektischen Multilinearform Q und $U \subset V$ ein Unterraum. U heißt Q -isotropisch, falls $Q|_U = 0$.

wobei $\sigma_{\mathbb{C}}$ der komplexifizierte Kegel $\sigma_{\mathbb{C}} = \{\sum \lambda_i N_i; \lambda_i \in \mathbb{C}\}$ ist (vgl. [9], S. 91). Die zum Kegel σ zugehörige *Randkomponente* ist nun definiert als

$$\mathcal{B}(\sigma) = B(\sigma) / \exp(\sigma_{\mathbb{C}}).$$

Definition 6.2. Eine Γ -zulässige rationale polyhedrale Zerlegung von $\mathfrak{n}(W_0)^+$ ist eine Familie von rationalen polyhedralen Kegeln $\{\sigma_{\alpha}\} \subset \overline{\mathfrak{n}(W_0)^+}$ mit folgenden Eigenschaften:

- i) Für $\sigma \in \{\sigma_{\alpha}\}$ und eine Seite τ von σ gilt $\tau \in \{\sigma_{\alpha}\}$.
- ii) Für $\sigma, \sigma' \in \{\sigma_{\alpha}\}$ ist $\sigma \cap \sigma'$ eine gemeinsame Seite von σ und σ' .
- iii) Es sei $\Gamma(W_0) := \exp(\mathfrak{n}(W_0)) \cap \Gamma$. Dann gilt für $\gamma \in \Gamma(W_0)$ und $\sigma \in \{\sigma_{\alpha}\}$, dass $\gamma\sigma \in \{\sigma_{\alpha}\}$.
- iv) Es gibt nur endlich viele $\Gamma(W_0)$ -Äquivalenzklassen in $\{\sigma_{\alpha}\}$.
- v) $\mathfrak{n}^+(W_0) = \bigcup_{\alpha} (\sigma_{\alpha} \cap \mathfrak{n}^+(W_0))$.

Die Mumford-Kompaktifizierung von D ist nun $\overline{D}^M = \bigcup \mathcal{B}(\sigma_{\alpha})$, wobei σ_{α} alle Γ -zulässigen Zerlegungen durchläuft. \overline{D}^M ist kompatibel mit der Operation von Γ und liefert somit eine Kompaktifizierung \overline{D}/Γ^M des Quotienten D/Γ .

In [13] wird nun folgendes allgemeines Resultat über die Fortsetzbarkeit holomorpher Abbildungen bewiesen:

Satz 6.2 ([13], Th. (4.2)). Für eine lokal nach D hebbare Abbildung $f : \Delta^n \times \Delta^* \rightarrow D/\Gamma$ mit unipotenter Monodromie und $N^2 = 0$ setzt sich f fort zu einer Abbildung

$$\overline{f} : \Delta^{n+1} \rightarrow \overline{D}/\Gamma^M.$$

Zusammen mit Korollar 5.1 erhalten wir

Korollar 6.1. Es sei $\pi : \mathcal{X} \rightarrow S$ eine Familie komplexer Flächen mit $p_g(\mathcal{X}_s) = 0$ und singulärer zentraler Faser \mathcal{X}_0^6 . Dann lässt sich die zugehörige Periodenabbildung $\Phi_{\pi} : S^* \rightarrow D/\Gamma$ zu einer Abbildung

$$\overline{\Phi}_{\pi} : S \rightarrow \overline{D}/\Gamma^M$$

fortsetzen.

Beweis: Nach Korollar 5.1 gilt

$$p_g(\mathcal{X}_s) = \sum p_g(V) + h^2(|\Gamma|) + \frac{1}{2}k,$$

⁶Zum Beispiel eine Familie von Regelflächen, das heißt \mathcal{X}_s ist birational zum direkten Produkt $C \times \mathbb{P}^1$, wobei C eine glatte Kurve ist, oder auch die in Kapitel 1 erwähnten Enriques-Flächen

somit folgt

$$0 = p_g(\mathcal{X}_s) = \sum p_g(V) = h^2(|\Gamma|) = k,$$

und die Behauptung ergibt sich aus der Tatsache, dass $N^2 = 0$ genau dann, wenn $h^2(|\Gamma|) = 0$. \square

Flächen von allgemeinem Typ und ihr Modulraum

In diesem Kapitel wird die Konstruktion des Modulraums komplexer Flächen vom allgemeinen Typ beschrieben. Ich halte mich hierbei im Wesentlichen an die Darstellung in [42].

1. Die Klassifikation nach Iitaka

Es sei X eine algebraische Varietät über \mathbb{C} , K_X das kanonische Bündel von X , mK_X ein positives Vielfaches und

$$H^0(X, mK_X) = \{f; f \text{ eine rationale Funktion auf } X \text{ mit } (f) \geq -mX \}$$

der zugehörige Schnittmodul. $p_m(X) := \dim H^0(X, mK_X)$ wird dann als *m-tes Plurigeschlecht* bezeichnet und ist invariant unter birationalen Abbildungen. Es sei $p_m(X) > 0$. Für $N := p_m(X) - 1$ wählen wir eine Basis f_0, \dots, f_N von $H^0(X, mK_X)$ und erhalten eine Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi_m : X &\longrightarrow \mathbb{P}_N \\ p &\longmapsto [f_0(p) : \dots : f_N(p)] \end{aligned}$$

Die Abbildung Φ_m heißt *m-kanonische Abbildung*. Sie ist eindeutig bestimmt bis auf projektive Transformationen (je nach Wahl der Basis von $H^0(X, mK_X)$) und unabhängig von der Wahl eines Repräsentanten des kanonischen Divisors K_X . Die *Kodaira-Dimension* von X wird nun definiert als

$$\kappa(X) = \begin{cases} \max_{p_m > 0} \dim \Phi_m(X) & \text{falls } p_m(X) > 0 \text{ für ein } m \\ -\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Nach Iitaka lassen sich algebraische Varietäten fester Dimension nun in folgende vier Klassen einteilen

- i) Varietäten mit $\kappa(X) = \dim X$, diese heißen dann auch von *allgemeinem Typ*,
- ii) algebraische Varietäten mit $\kappa(X) = 0$, genannt *parabolisch*,
- iii) algebraische Varietäten mit $\dim X > \kappa(X) \geq 1$,
- iv) algebraische Varietäten mit $\kappa(X) = -\infty$, d.h. von *elliptischem Typ*.

2. Modulräume für Flächen vom allgemeinen Typ

Wir betrachten die Menge \mathfrak{M}_h der Isomorphieklassen polarisierter algebraischer Varietäten über dem Körper k mit festem Hilbert-Polynom h . Das Modulproblem besteht nun vereinfacht ausgedrückt darin, die Menge \mathfrak{M}_h mit einer geometrischen Struktur zu versehen, etwa der eines komplexen oder algebraischen Raumes oder Schemas¹. Es sei $\widetilde{\mathcal{M}}_h(S)$ die Menge der Isomorphieklassen von Familien polarisierter Varietäten in \mathfrak{M}_h über einem noetherschen k -Schema S als Basis. $\widetilde{\mathcal{M}}_h(S)$ ist dann ein bezüglich des Pullbacks kontravarianter Funktor von der Kategorie der noetherschen k -Schemata in die Kategorie der Mengen. Man garbifiziert nun $\mathcal{M}_h(S)$ bezüglich der étalen Topologie² der Schemata und setzt $\widetilde{\mathcal{M}}_h(S)$ fort auf die Kategorie der noetherschen algebraischen k -Räume. Dieser fortgesetzte Funktor ist dann der sogenannte *Modulfunktor* für \mathfrak{M}_h und wird mit \mathcal{M}_h bezeichnet. Ist \mathcal{M}_h nun darstellbar in der Kategorie der algebraischen Räume, so heißt der darstellende algebraische Raum auch *feiner Modulraum* für \mathfrak{M}_h . Die Darstellbarkeit von \mathcal{M}_h ist jedoch so gut wie nie gegeben. Man geht deswegen dazu über, zusätzliche Bedingungen an die Varietäten in \mathfrak{M}_h zu stellen und erhält den Begriff des sogenannten *groben Modulraums*.

¹Zur Definition vgl. [34], S. 92. Da wir lediglich über \mathbb{C} arbeiten, genügt für unsere Zwecke auch folgende Definition: Ein algebraischer Raum über \mathbb{C} von endlichem Typ ist ein komplexer Raum X , zu dem es ein affines \mathbb{C} -Schema X' von endlichem Typ und eine surjektive, étale Abbildung $f : X' \rightarrow X$ gibt, so dass das Faserprodukt $X' \times_X X'$ ein affines Unterschema des kartesischen Produktes $X' \times X'$ ist.

²Es seien X, Y Schemata über einem (algebraisch abgeschlossenen) Körper k . Eine reguläre Abbildung $\phi : X \rightarrow Y$ heißt étale, falls sie flach und unverzweigt ist. Étale Abbildungen sind nach Definition von endlichem Typ und offen. Die étale Topologie auf X wird nun derart erklärt, dass die offenen Mengen gerade die étalen Abbildungen $U \rightarrow X$ sind, wobei $U \subset X$ eine offene Menge ist.

Definition 7.1. Ein grober Modulraum für \mathfrak{M}_h besteht aus einem algebraischen k -Raum M und einer Abbildung $\Phi : \mathcal{M}_h \rightarrow M$, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- i) Für alle algebraischen Räume N und Abbildungen $F : \mathcal{M}_h \rightarrow N$ gibt es einen eindeutigen Morphismus $f : M \rightarrow N$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_h & \xrightarrow{\Phi} & M \\ & \searrow F & \downarrow f \\ & & N \end{array}$$

kommutiert.

- ii) Für jeden algebraisch abgeschlossenen Körper k' , der k enthält, ist die durch Φ induzierte Abbildung

$$\mathcal{M}_h(k') \rightarrow M(k')$$

bijektiv.

Es sei nun X eine komplexe Fläche vom allgemeinen Typ. Wir fixieren $K^2 = K_X^2$ und das arithmetische Geschlecht $p_a(X) = \chi(X) - 1$, und mit \mathfrak{M}_{K^2, p_a} bezeichnen wir die zugehörige Menge der Isomorphieklassen minimaler Flächen vom allgemeinen Typ³ mit Invarianten $K_X^2 = K^2$ und $p_a(X) = p_a$. Für das m -te Plurigeschlecht gilt nun (siehe [42])

$$P_m(X) = \frac{1}{2}m(m-1)K_X^2 + p_a(X)$$

für $m \geq 2$.

Bombieri zeigt nun in [5], dass die m -kanonische Abbildung Φ_{mK} für $m \geq 3$ ein birationaler, eigentlicher Morphismus ist und für $m \geq 5$ das Bild $\Phi_{mK}(X)$ normal ist und höchstens rationale Doppelpunkte als Singularitäten besitzt. Für $N = 10K^2 + p_a - 1$ kann man nun alle minimalen Flächen vom allgemeinem Typ in denselben \mathbb{P}_N abbilden, und zwar so, dass das Bild $W = \Phi_{5K}(X)$ das zugehörige Hilbert-Polynom

$$h(t) = \frac{5}{2}t(5t - 1)$$

besitzt. Es gilt nun folgende

Proposition 7.1. Es seien X, X' minimale Flächen von allgemeinem Typ über \mathbb{C} mit $K_X^2 = K_{X'}^2$ und $p_a(X) = p_a(X')$. Dann gilt: $X \cong X'$ genau dann, wenn $\Phi_{8K}(X)$ und $\Phi_{8K}(X')$ projektiv äquivalent sind, d.h es eine projektive Transformation $\sigma \in PGL(N)$, $N = 10K_X^2 + p_a(X) - 1$ und $\sigma : \Phi_{8K}(X) \rightarrow \Phi_{8K}(X')$ gibt.

³Eine komplex-algebraische Fläche heißt minimal, falls sie keine (-1) -Kurven enthält.

Beweis: Ein Isomorphismus $\psi : X \rightarrow X'$ induziert offenbar eine projektive Transformation σ , die $\Phi_{5K}(X)$ und $\Phi_{5K}(X')$ isomorph aufeinander abbildet und umgekehrt. Sind nun $\Phi_{5K}(X)$ und $\Phi_{5K}(X')$ projektiv äquivalent, bedeutet dies, dass X und X' birational äquivalent und wegen der Minimalität auch isomorph sind. \square

Es sei nun $H_{\mathbb{P}_N}^{h(t)}$ das Hilbertschema, welches diejenigen Flächen vom allgemeinen Typ mit festem Hilbert-Polynom $h(t)$ parametrisiert, $N = 10K^2 + p_a - 1$, $h(t) = \frac{5}{2}t(5t - 1)$, und

$$\Gamma \rightarrow H_{\mathbb{P}_N}^{h(t)}, \quad \Gamma \subset \mathbb{P}_N \times H_{\mathbb{P}_N}^{h(t)},$$

die zugehörige universelle Familie. Mit Γ_p bezeichnen wir die Faser von $\Gamma \rightarrow H_{\mathbb{P}_N}^{h(t)}$. Man kann nun zeigen:

Proposition 7.2 ([43], Prop. 2.2). *Es gibt ein lokal abgeschlossenes Unterschema $H \subset H_{\mathbb{P}_N}^{h(t)}$, so dass ein \mathbb{C} -wertiger Punkt p genau dann in H liegt, wenn die Faser Γ_p eine 5-kanonische Fläche im \mathbb{P}_N ist.*

Man betrachtet jetzt den Quotienten $M_{K^2, p_a} := H/PGL(N)$ und kann zeigen, dass die induzierte Gruppenoperation von $PGL(N)$ auf H eigentlich ist und dass für jeden Punkt $p \in H$ die Stabilisatorgruppe

$$I_p := \{\sigma \in PGL(N), \sigma(p) = p\}$$

endlich ist. Die Ergebnisse aus [42], Kapitel 4, liefern dann:

Korollar 7.1. *Der Quotient M_{K^2, p_a} ist ein grober Modulraum für die Flächen vom allgemeinen Typ mit Invarianten K^2 und p_a .*

Semi-log-kanonische Singularitäten und Anwendungen

In diesem Abschnitt werden die wesentlichen Eigenschaften derjenigen (sog. semistabilen) Flächen beschrieben, die am Rand des Modulraums auftreten können. Wir halten uns im Wesentlichen an die Darstellung in [31]. Schließlich werden wir untersuchen, bei welcher Art von Singularitäten sich der Fortsetzungssatz 6.2 anwenden lässt.

1. Semi-log-kanonische Singularitäten

Es sei Z ein algebraisches \mathbb{C} -Schema von Dimension $n \geq 1$, eingebettet in eine glatte Varietät P von Dimension $m \geq n$. Die *dualisierende Garbe* ist definiert als

$$\omega_Z := \mathbf{Ext}_{\mathcal{O}_P}^{m-n}(\mathcal{O}_Z, \Omega_P^m),$$

wobei Ω_P^m die Garbe der Keime regulärer Differentialformen vom Grad m auf P ist. ω_Z erfüllt die folgenden Eigenschaften (siehe etwa [24]):

- i) ω_Z ist ein kohärenter \mathcal{O}_Z -Modul und unabhängig von der Einbettung $Z \subset P$.
- ii) ω_Z stimmt in den glatten Punkten von Z mit Ω_Z^n überein.

- iii) Ist Z eine projektive Cohen-Macaulay-Varietät¹, gilt $H^p(Z, F) \cong H^{n-p}(Z, \check{F} \otimes \omega_Z)$ für jeden lokal freien \mathcal{O}_Z -Modul F , wobei \check{F} das Dual von F ist (Grothendieck-Serre-Dualität).
- iv) Ist Z Cohen-Macaulay, dann ist die Garbe ω_Z genau dann auf einer Umgebung eines Punktes $z \in Z$ invertierbar, wenn der lokale Ring $\mathcal{O}_{Z,z}$ Gorenstein ist.²
- v) Ist D ein effektiver Cartier-Divisor auf Z , so gilt die Adjunktionsformel:

$$\omega_D \cong \omega_Z \otimes \mathcal{O}_Z(D) \otimes \mathcal{O}_D.$$

Speziell gilt: Ist Z normal und projektiv, so erfüllt Z bereits die Cohen-Macaulay-Bedingung, und sämtliche obigen Eigenschaften sind erfüllt.

Definition 8.1. *Wir bezeichnen eine Flächensingularität als*

- i) *Punkt mit normalen Überkreuzungen (normal crossing point, kurz n.c.p.), falls er analytisch isomorph ist zu $(xy = 0, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$.*
- ii) *Pinch-Point, falls $(X, x) \cong (x^2 = zy^2, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$.*

Eine komplexe Fläche heißt semi-glatt, falls jeder abgeschlossene Punkt von X entweder glatt, ein n.c.p. oder ein Pinch-Point ist. Der singuläre Ort einer semi-glatten Fläche ist eine glatte Kurve D_X , die sogenannte Doppelkurve von X . Die Normalisierung $\pi : \bar{X} \rightarrow X$ und $\bar{D}_X := \pi^{-1}(D_X)$ sind ebenfalls glatt; $\pi : \bar{X} \rightarrow X$ ist über dem singulären Ort von X generisch vom Grad 2 und genau über den Pinch-Points verzweigt (siehe [33], §3).

Definition 8.2. *Eine Abbildung $f : Y \rightarrow X$ heißt Semi-Auflösung von X , falls folgende Bedingungen erfüllt sind:*

- i) *f ist eigentlich,*
- ii) *Y ist semi-glatt,*
- iii) *für die Doppel-Kurve D_Y von Y wird keine Komponente auf einen Punkt abgebildet,*
- iv) *es gibt eine endliche Punktmenge $S \subset X$, so dass*

$$f : f^{-1}(X - S) \rightarrow X - S$$

ein Isomorphismus ist.

¹Für einen Ring A und einen A -Modul M heißt eine Folge x_1, \dots, x_r von Elementen aus A *regulär*, falls x_1 kein Nullteiler in M und für alle $i = 2, \dots, r$ x_i kein Nullteiler in $M/(x_1, \dots, x_{i-1})M$ ist. Für einen lokalen Ring mit maximalem Ideal \mathfrak{m} ist die *Tiefe* von M die maximale Länge einer regulären Sequenz x_1, \dots, x_r in M , wobei $x_1, \dots, x_r \in \mathfrak{m}$. Ein lokaler noetherscher Ring A heißt nun *Cohen-Macaulay*, falls die Dimension von A gleich der Tiefe ist, und eine Varietät Z heißt *Cohen-Macaulay*, falls alle lokalen Ringe diese Eigenschaft besitzen.

²Dies wird auch oft als Definition der Gorenstein-Eigenschaft benutzt. Allgemein heißt ein lokaler Artinscher Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} \subset A$ *Gorenstein*, falls der Annihilator von \mathfrak{m} die Dimension 1 als Vektorraum über $K = A/\mathfrak{m}$ hat.

Für eine Semi-Auflösung $f : Y \rightarrow X$ nennen wir eine Kurve $E_i \subset Y$ *exzeptionell*, falls $f(E_i)$ ein Punkt ist. Mit $E = \bigcup E_i$ bezeichnen wir die Vereinigung aller exzeptionellen Kurven. Eine Semi-Auflösung $f : Y \rightarrow X$ heißt *gut*, falls $E \cup D_Y$ glatte Komponenten mit normalen Überkreuzungen besitzt.

Proposition 8.1 ([48]). *Es sei X eine Fläche, die außerhalb endlich vieler Punkte $S \subset X$ entweder glatt ist oder normale Überkreuzungen besitzt. Dann besitzt X eine gute Semi-Auflösung.*

Es sei $C \subset X$ eine Kurve, welche nicht in D_X enthalten ist, und es sei $\bar{C} = \pi^{-1}(C)$. Wegen

$$\omega_{\bar{X}} = \pi^* \omega_X(-\bar{D}_X)$$

erhält man mit der Adjunktionsformel (vgl. [23], S. 361)

$$2g(\bar{C}) - 2 = (\omega_{\bar{X}} + \bar{C}) \cdot \bar{C} = \bar{C}^2 + \deg_C \omega_X - \bar{C} \cdot \bar{D}_X.$$

Mit $C := E$ folgt somit

Korollar 8.1 ([31]). i) $\bar{E}^2 < 0$ und $\deg_E \omega_X < 0$ genau dann, wenn \bar{E} exzeptioneller Divisor erster Ordnung ist und \bar{D}_X nicht schneidet.
ii) $\bar{E}^2 < 0$ und $\deg_E \omega_X = 0$ genau dann, wenn \bar{E} entweder exzeptioneller Divisor erster Ordnung ist und \bar{D}_X einmal schneidet oder $\bar{E}^2 = -2$, $\bar{E} \cong \mathbb{P}_1$ und \bar{E} nicht \bar{D}_X schneidet.

In den ersten beiden Fällen (d.h. bei $\bar{E}^2 = -1$) heißt E eine (-1) -Kurve auf X . Die Fläche, die man durch Herunterblasen von E erhält, ist dann wiederum semi-glatt.

Proposition 8.2 (vgl. [31], Cor. 4.7). *Es sei X semi-glatt und $f : Y \rightarrow X$ eine Semi-Auflösung. Dann erhält man X aus Y durch wiederholtes Herunterblasen von (-1) -Kurven.*

Beweis: Sei $\bar{f}_{\bar{Y}} : \bar{Y} \rightarrow \bar{X}$ die induzierte Abbildung zwischen den jeweiligen Normalisierungen. Ist \bar{f} ein Isomorphismus, so ist nichts zu beweisen. Falls nicht, dann gibt es eine exzeptionelle Kurve erster Ordnung $\bar{E} \subset \bar{Y}$, die durch \bar{f} kontrahiert wird. Es ist

$$\bar{E} \cdot \bar{D}_Y \leq 1,$$

sonst wäre \bar{D}_X singularär. Folglich ist E eine (-1) -Kurve und lässt sich zusammenziehen. \square

Korollar 8.2 ([31]). *Es seien $E_i \subset Y$ die exzeptionellen Kurven. Dann gilt*

$$\omega_Y = f^*\omega_X(\sum a_i E_i)$$

mit $a_i \geq 0$.

Beweis: Ohne Einschränkung können wir nach Übergang zur Normalisierung Y als glatt voraussetzen. Es sei $E \subset Y$ eine exzeptionelle Kurve und $f : Y \rightarrow X$ die Kontraktion. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 > K_Y \cdot E &= (f^*K_X + aE) \cdot E \\ &= f^*K_X \cdot E + aE^2 \\ &= K_X \cdot \pi_*E + aE^2 \\ &= a(E^2) \end{aligned}$$

und somit $a \geq 0$, da $(E^2) < 0$. Der allgemeine Fall folgt somit aus Proposition 8.2. \square

Definition 8.3. *Eine Semi-Auflösung heißt minimal, falls f keine (-1) -Kurve kontrahiert.*

Durch sukzessives Herunterblasen der (-1) -Kurven einer Semi-Auflösung erhält man somit eine eindeutige minimale Semi-Auflösung.

Definition 8.4. *Es seien $f : Y \rightarrow X$ eine gute Semi-Auflösung und E_i die zugehörigen exzeptionellen Kurven. $f : Y \rightarrow X$ heißt minimale gute Semi-Auflösung, falls für jede (-1) -Kurve, die f kontrahiert, gilt*

$$\bar{E}_i \cdot \sum_{j \neq i} \bar{E}_j + \bar{E}_i \cdot \bar{D}_Y > 2.$$

Wiederum durch sukzessives Herunterblasen von (-1) -Kurven erhält man somit eine minimale gute Semi-Auflösung.

Proposition 8.3. [44] *Es seien $f : Y \rightarrow X$ und E_i wie oben. Dann gilt:*

- i) *Es gibt einen eindeutigen Zykel $Z = -\sum a_i E_i$, so dass $\bar{Z} \cdot \bar{E}_i = -\deg_{E_i} \omega_Y$.*
- ii) *Ist f minimal, so gilt $Z \geq 0$.*
- iii) *Ist X Cohen-Macaulay, f minimal und $Z = 0$, dann ist X entweder glatt, ein n.c.p., ein Pinch-Point oder eine Quotientensingularität.*
- iv) *Ist X Cohen-Macaulay und f minimal, dann ist entweder $Z = 0$ oder $a_i < 0$ für alle i .*
- v) *Ist X Gorenstein und f eine minimale gute Semi-Auflösung, dann ist entweder $Z = 0$ oder $a_i < 0$ für alle i .*

Semi-glatte Flächen haben nun ähnliche Eigenschaften wie Flächen mit rationalen Doppelpunkten, es gilt nämlich:

Proposition 8.4 ([31], Prop. 4.13). *Es sei $f : Y \rightarrow X$ eine Semi-Auflösung einer Cohen-Macaulay-Fläche. Dann gilt:*

- i) $f_*\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X$,
- ii) $R^1f_*\omega_Y = 0$,
- iii) $R^1f_*\mathcal{O}_Y = (\omega_X/f_*\omega_Y)^*$.

Beweis: i): Es ist $\mathcal{O}_X \subset f_*\mathcal{O}_Y$, und bis auf Kodimension eins gilt sogar Gleichheit. Da X Cohen-Macaulay ist, gilt die Serre-Bedingung S_2^3 , und es folgt die Behauptung. ii): Wir betrachten die Sequenz

$$0 \rightarrow \pi_*\omega_{\overline{Y}} \rightarrow \omega_Y \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0$$

mit $\text{Supp}(\mathcal{C}) \subset D_Y$. Der Verschwindungssatz von Grauert und Riemenschneider ([14], Satz 2.3) liefert

$$R^1f_*\pi_*\omega_{\overline{Y}} = 0,$$

und da $\pi|_{D_Y}$ endlich ist, gilt ferner auch $R^1f_*\mathcal{C} = 0$ und somit auch $R^1f_*\omega_Y = 0$. iii): Es sei $y \in X$ die Singularität und $E = f^{-1}(y)$. Wir erhalten das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow H_E^0(\omega_Y) & \longrightarrow & H^0(Y, \omega_Y) & \longrightarrow & H^0(Y - E, \omega_Y) & \longrightarrow & H_E^1(\omega_Y) \\ & & \downarrow a & & \downarrow b & & \\ 0 \rightarrow H_y^0(\omega_X) & \longrightarrow & H^0(X, \omega_X) & \longrightarrow & H^0(X - y, \omega_X) & \longrightarrow & H_y^1(\omega_X). \end{array}$$

Da für ω_X die S_2 -Bedingung gilt, ist $H_y^0(\omega_X) = H_y^1(\omega_X) = 0$ und c somit ein Isomorphismus. Da ω_Y torsionsfrei ist, gilt $H_E^0(\omega_Y) = 0$, und wiederum nach Grauert-Riemenschneider ist $H^1(Y, \omega_Y) = 0$. Es ist $\omega_X/f_*\omega_Y = H_E^1(\omega_Y)$ (vgl. [32], 3.3.3). Nach [22], II.6, gilt

$$H_E^1(\omega_Y) = \lim_{\rightarrow} \mathbf{Ext}^1(\mathcal{O}_{2E}, \omega_Y),$$

was wiederum nach Serre-Dualität dual zu $\lim_{\leftarrow} H^{n-1}(Y, \mathcal{O}_{2E})$ ist, und nach dem Satz über formale Funktionen (siehe [23], Th. 11.1) ist letztere Gruppe gleich $R^1f_*\mathcal{O}_Y$. \square

Die obigen Eigenschaften führen somit zu folgender natürlicher

Definition 8.5. *Es sei $f : Y \rightarrow X$ eine Semi-Auflösung einer Cohen-Macaulay-Flächensingularität. X heißt semi-rational, falls $R^1f_*\mathcal{O}_Y = 0$.*

³d.h. regulär in Kodimension 1, vgl. hierzu etwa [12], S. 255.

Es sei $f : Y \rightarrow X$ eine Semi-Auflösung einer semi-rationalen Singularität, $g : Z \rightarrow X$ eine weitere Semi-Auflösung, und es seien \bar{Z}, \bar{Y} die zugehörigen Normalisierungen. Da für eine birationale Transformation $u : \bar{Z} \rightarrow \bar{Y}$ gilt $R^1 u_* \mathcal{O}_{\bar{Z}} = 0$ (siehe [23], S. 384), folgt somit auch $R^1 g_* \mathcal{O}_Z = 0$, und wir erhalten:

Lemma 8.1. *Die Definition ist unabhängig von der jeweiligen Semi-Auflösung.*

Man kann zeigen, dass jede Deformation einer semi-rationalen Singularität wieder semi-rational ist (siehe [48]). Eine Singularität heißt \mathbb{Q} -Gorenstein, falls $\omega_X^{[s]}$ lokal frei ist für ein $s > 0$ und X Cohen-Macaulay ist, wobei $\omega_X^{[s]}$ das Doppel-Dual des s -fachen Tensorprodukts von ω_X mit sich selbst ist. Das kleinste solche s heißt *Index* von (X, x) .

Definition 8.6. *Es sei (X, x) eine Gorenstein-Flächensingularität, so dass $X - x$ semi-glatt ist. Es sei $f : Y \rightarrow X$ eine gute Semi-Auflösung von X . Wir schreiben*

$$\omega_Y^{[s]} \cong f^* \omega_X^{[s]} \otimes \mathcal{O}(\sum sa_i E_i),$$

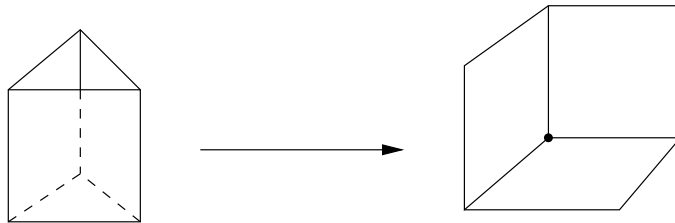
wobei E_i die exzeptionellen Divisoren und die $a_i \in \mathbb{Q}$ sind. Mit der Notation von Proposition 8.3 ist $Z = \sum a_i E_i$. Die Singularität heißt

- i) *semi-kanonisch*, falls $a_i \geq 0$,
- ii) *semi-log-terminal*, falls $a_i > -1$,
- iii) *semi-log-kanonisch*, falls $a_i \geq -1$.

Speziell für Flächen mit semi-log-terminalen Singularitäten gilt nun:

Proposition 8.5 ([33], Cor. 12.2.7, S. 142). *Es sei X der Keim einer semi-log-terminalen Fläche. Dann besteht X aus höchstens zwei irreduziblen Komponenten.*

Beispiel 8.1 ([11]). Es sei $X \subset \mathbb{P}_3$ die Vereinigung von drei Hyperebenen H_1, H_2, H_3 mit $H_1 \cap H_2 \cap H_3 = \{P\}$ für einen Punkt P . Es sei $\tilde{X} = Bl_P X \subset Bl_P \mathbb{P}_3 = B$ die Aufblasung von X in P , diese ist dann auch gleichzeitig eine gute Semi-Auflösung.



Die Adjunktionsformel liefert:

$$K_{\tilde{X}} = (K_B + \tilde{X})|_{\tilde{X}},$$

wobei \tilde{X} als Divisor in B aufgefasst wird. Nach [23], Kap. II, Bsp. 8.5, gilt nun $K_B = f^*K_{\mathbb{P}_3} + 2E$ und $f^*X = \tilde{X} + 3E$ (jeweils eine Kopie von E für jede der H_i). Somit ist

$$\begin{aligned} K_{\tilde{X}} &= (f^*K_{\mathbb{P}_3} + f^*X - E)|_{\tilde{X}} \\ &= (f^*(K_{\mathbb{P}_3} + X) - E)|_{\tilde{X}} \\ &= f^*(K_{\mathbb{P}_3} + X)|_X - E|_{\tilde{X}} \\ &= f^*K_X - E|_{\tilde{X}}. \end{aligned}$$

$E|_{\tilde{X}}$ ist die Vereinigung dreier Kurven $E_i \subset \tilde{X}$, wobei jedes E_i dem Durchschnitt von E mit der eigentlich Transformierten von H_i entspricht. Folglich ist $K_{\tilde{X}} = f^*K_X - E_1 - E_2 - E_3$ und X damit semi-log-kanonisch.

Im Folgenden werden wir nun eine Übersicht über die verschiedenen Klassen von semi-log-kanonischen Singularitäten geben. Hierbei nennen wir eine normale Gorenstein-Flächensingularität *einfach elliptisch*, falls der exzeptionelle Divisor der minimalen Auflösung eine glatte elliptische Kurve ist. Eine normale Gorenstein-Flächensingularität heißt *Spitze (Cusp)*, wenn der exzeptionelle Divisor der minimalen Auflösung ein Zykel von rationalen Kurven oder eine rationale nodale Kurve ist. X heißt *entartete Spitze*, falls X nicht normal ist und der exzeptionelle Divisor einer minimalen Semi-Auflösung $f : Y \rightarrow X$ ein Zykel von rationalen Kurven oder eine rationale nodale Kurve ist. In diesem Fall hat Y keine Pinch-Points, und die irreduziblen Komponenten von X haben zyklische Quotientensingularitäten.

Satz 8.1 ([31], Th. 4.21). *Es sei (X, x) eine Gorenstein-Flächensingularität, so dass $X - x$ semi-glatt ist. Dann gilt:*

- i) X ist semi-kanonisch genau dann, wenn X glatt, ein Pinch-Point, ein n.c.point oder eine A-D-E-Singularität ist.
- ii) X ist semi-log-kanonisch genau dann, wenn X einfach elliptisch, eine Spitze, eine entartete Spitze oder semi-kanonisch ist.

Beweis: Zu i): Es sei X semi-kanonisch, und es sei $f : Y \rightarrow X$ die minimale gute Semi-Auflösung. Wir schreiben

$$\omega_Y = f^*\omega_X \otimes \mathcal{O}(-Z).$$

Nach Voraussetzung ist dann $-Z \geq 0$, aber nach Proposition 8.3 ist auch $Z \geq 0$, also insgesamt $Z = 0$, und die Behauptung folgt aus 8.3, iii).

Zu ii): Es sei $Z = \sum a_i E_i$. Ist $Z = 0$, so ist X bereits semi-kanonisch. Falls $Z \neq 0$, gilt nach Prop. 8.3 $a_i > 0$, und nach Definition ist $a_i \leq 1$,

folglich $Z = \sum E_i$. Es ist

$$\omega_Z \cong \omega_Y \otimes \mathcal{O}(Z)|_Z \cong f^* \omega_X \otimes \mathcal{O}(-Z + Z)|_Z \cong \mathcal{O}_Z.$$

Da Z reduziert und zusammenhängend ist, folgt somit $h^0(\mathcal{O}_Z) = h^1(\mathcal{O}_Z) = 1$. Die Adjunktionsformel liefert

$$2g(\overline{E}_i) - 2 = \overline{E}_i^2 - Z \cdot \overline{E}_i - \overline{E}_i \cdot \overline{D}_Y = -\overline{E}_i \cdot \sum_{j \neq i} \overline{E}_j - \overline{E}_i \cdot \overline{D}_Y,$$

somit ist $g(\overline{E}_i) \leq 1$. Gilt $g(\overline{E}_i) = 1$, dann schneidet \overline{E}_i weder \overline{D}_Y noch $\overline{E}_j, j \neq i$. Folglich ist E_i die einzige Ausnahmekurve und $\overline{D}_Y = 0$. Somit ist X normal und entweder einfach elliptisch oder eine Spitze und E_i eine nodale Kubik. Falls $g(\overline{E}_j) = 0$ für alle j , dann hat E_j jeweils zwei Schnittpunkte mit den anderen \overline{E}_i und \overline{D}_Y . Ist X normal, dann ist $\overline{D}_Y = 0$, folglich schneidet jedes E_i zwei andere. Die E_i bilden also einen Zykel, und X ist somit eine Spitze. Ist X nicht normal, dann bilden die exzeptionellen Kurven auf jeder Komponente von \overline{Y} eine Kette, und die letzten beiden schneiden \overline{D}_Y . Auf Y bilden die E_i entweder einen Zykel, so dass X in diesem Fall eine entartete Spitze ist, oder eine Kette, wobei letzteres wegen $h^1(\mathcal{O}_Z) = 1$ nicht möglich ist. \square

Die Situation, in denen die Gorenstein-Bedingung nicht erfüllt ist, lässt sich durch eine zyklische Überlagerung auf den Gorenstein-Fall zurückführen, es gilt nämlich

Proposition 8.6 ([45]). *Es sei (Z, z) eine semi-log-kanonische Flächensingularität. Dann gibt es eine semi-log-kanonische Gorenstein Singularität (X, x) zusammen mit einer Gruppenoperation von \mathbb{Z}_r auf (X, x) , s.d. gilt:*

- i) Die Gruppe operiert frei auf $X - x$.
- ii) Die Operation von \mathbb{Z}_r auf ω_X/m_x ist treu.
- iii) $(Z, z) \cong (X, x)/\mathbb{Z}_r$, r der Index von Z . Ist Z semi-log-terminal, dann ist X semi-kanonisch.

Satz 8.2 ([31], Th. 4.23). *Die semi-log-terminalen Flächensingularitäten sind genau die folgenden:*

- i) Quotientensingularitäten nach Brieskorn,
- ii) n.c.p. oder Pinch-Points,
- iii) $xy = 0$ modulo der Gruppenoperation $x \mapsto \epsilon^a x; y \mapsto \epsilon^b y; z \mapsto \epsilon z$, ϵ eine r -te Einheitswurzel; $(a, r) = 1$ und $(b, r) = 1$,
- iv) $xy = 0$ modulo der Gruppenoperation $x \mapsto \epsilon^a y; y \mapsto x; z \mapsto \epsilon z$, ϵ eine r -te Einheitswurzel; $4|r$ und $(a, r) = 2$,
- v) $x^2 = zy^2$ modulo der Gruppenoperation $x \mapsto \epsilon^{1+a} x; y \mapsto \epsilon^a y; z \mapsto \epsilon^2 z$, r ungerade; $4|r$ und $(a, r) = 1$.

Satz 8.3 ([31], Th. 4.24). *Die semi-log-kanonischen Flächensingularitäten sind genau die folgenden:*

- i) *Die semi-log-terminalen Singularitäten aus Satz 8.2,*
- ii) *Die Gorenstein-Singularitäten aus Satz 8.1, ii),*
- iii) \mathbb{Z}_2 -, \mathbb{Z}_3 -, \mathbb{Z}_4 - und \mathbb{Z}_6 -Quotienten von einfach elliptischen Singularitäten.
- iv) \mathbb{Z}_2 -Quotienten von Spitzen und entarteten Spitzen.

Man kann nun die semi-log-kanonischen Singularitäten von einem etwas andere Standpunkt aus betrachten. Hierzu definiert man: Eine normale \mathbb{Q} -Gorenstein-Varietät X^4 von Dimension n hat *kanonische Singularitäten*, falls es eine Auflösung $f : V \rightarrow X$ gibt, so dass

$$K_V = f^* K_X + \sum a_i E_i$$

mit $a_i \geq 0$. Es sei $\Delta \subset X$ ein \mathbb{Q} -Cartier Divisor. Das Paar (X, Δ) heißt *log-kanonisch*, falls für eine Auflösung $\mu : W \rightarrow X$ gilt

$$K_W = \mu^*(K_X + \Delta) + \sum a_j F_j$$

wobei $F_j = \Delta'_j := \mu^{-1} \Delta_j$ für $1 \leq j \leq \alpha$ und $F_{\alpha+k} = E_k$ für $1 \leq k \leq \beta$ und $a_j \geq -1$, $E = \sum E_i$ der exzeptionelle Divisor von μ und $F = \sum F_j$ die Vereinigung von E mit der eigentlich transformierten von $\Delta = \sum \Delta_i$ ist.

Proposition 8.7 (vgl. [31], Prop. 4.30). *Ist X \mathbb{Q} -Gorenstein, dann ist X genau dann semi-log-kanonisch, wenn (\bar{X}, Δ) log-kanonisch im Kawamata-Sinn ist.*

Beweis: Es sei X semi-log-kanonisch, $g : \bar{X} \rightarrow X$ die Normalisierung und $\mu : Y \rightarrow X$ eine gute Semi-Auflösung. Wir können schreiben:

$$K_Y = \mu^* K_{\bar{X}} + \sum a_i E_i$$

mit $a_i \geq -1$. $\mu : Y \rightarrow X$ liefert nun aber auch eine minimale gute Auflösung im Sinne von Kawamata, folglich

$$K_Y = \mu^*(K_{\bar{X}} + \Delta) + \sum a_j F_j,$$

wobei $\Delta = g^* D$. □

⁴Eine normale Varietät Y heißt \mathbb{Q} -Gorenstein, falls ein ganzzahliges Vielfaches mK_Y des kanonischen Divisors K_Y Cartier und Y Cohen-Macaulay ist.

2. Degenerationen von Flächen vom allgemeinen Typ

Es sei nun $f : \mathcal{X} \rightarrow T$ ein Morphismus eines komplex-algebraischen dreidimensionalen Raumes auf eine glatte Kurve T . f besitze eine semistabile Auflösung. Nach Kawamata (siehe [27]) gibt es einen projektiven birationalen Morphismus $g : \bar{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$, so dass $\bar{\mathcal{X}}$ lediglich terminale Singularitäten besitzt, und für jede Kurve $C \subset \bar{\mathcal{X}}$, die durch g auf einen Punkt kontrahiert wird, gilt $C \cdot K_{\bar{\mathcal{X}}} \geq 0$, d.h. $K_{\bar{\mathcal{X}}}$ ist nef. Man kann des Weiteren eine Transformation $\tilde{g} : \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \bar{\mathcal{X}}$ finden, so dass $\tilde{\mathcal{X}}$ nur noch kanonische Singularitäten besitzt und $C \cdot K_{\tilde{\mathcal{X}}} > 0$ für jede durch \tilde{g} kontrahierte, kompakte Kurve $C \subset \tilde{\mathcal{X}}$. Dieses $\tilde{\mathcal{X}}$ ist eindeutig und wird als das *relative kanonische Modell* von \mathcal{X} bezeichnet.

Der folgende Satz liefert eine Aussage über das Deformationsverhalten von Flächen vom allgemeinen Typ.

Satz 8.4 (vgl. [31], Th. 5.1). *Es sei $\mathcal{X} \rightarrow \Delta$ eine eindimensionale \mathbb{Q} -Gorenstein-Deformation der komplexen Fläche $X := \mathcal{X}_0$.*

- i) \mathcal{X} besitze eine Auflösung $\tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$, so dass die Komposition $\tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \Delta$ semi-stabil ist. Dann hat \mathcal{X} kanonische Singularitäten genau dann, wenn X semi-log-kanonische Singularitäten und die \mathcal{X}_t für $t \neq 0$ nur rationale Doppelpunkte besitzen.
- ii) Es gibt einen endlichen Basiswechsel $\Delta_1 \rightarrow \Delta$, so dass das Produkt $\mathcal{X} \times_{\Delta} \Delta_1$ kanonische Singularitäten besitzt genau dann, wenn X semi-log-kanonische Singularitäten und die \mathcal{X}_t für $t \neq 0$ nur rationale Doppelpunkte besitzen.

Beweis: (vgl. [25]) Zu i): “ \Rightarrow ” Es sei $g : \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$ eine semistabile Auflösung, und \mathcal{X} habe kanonische Singularitäten, d.h.

$$K_{\tilde{\mathcal{X}}} = g^* K_{\mathcal{X}} + \sum a_i E_i + \sum b_j F_j, \quad (*)$$

wobei die exzeptionellen Divisoren E_i auf $0 \in \Delta$ abgebildet werden, die F_j flach über Δ sind (F_j entsprechen den exzeptionellen Divisoren, die bei der Auflösung der Singularitäten der übrigen Fasern \mathcal{X}_s auftreten) und $a_i, b_j \geq 0$ für alle i, j . Es sei $X' := g^{-1}(X)$ die eigentlich transformierte von X . Die Adjunktionsformel liefert:

$$\begin{aligned} K_{X'} &= (K_{\tilde{\mathcal{X}}} + X')|'_X \\ &= (K_{\tilde{\mathcal{X}}} - \sum E_i)|'_X \\ &= (g^* K_{\mathcal{X}} + \sum (a_i - 1) E_i + \sum b_j F_j)|'_X. \quad (**) \end{aligned}$$

Es sei $\nu : Y \rightarrow X'$ die Normalisierung. Dann gilt $K_Y = \nu^* K_{X'} - \nu^{-1}(D)$, wobei für keine Komponente von $\nu^{-1}(D)$ der Träger auf den E_i liegt. Da $g \circ \nu : Y \rightarrow X$ eine Auflösung liefert, ist das Paar (X, D) log-kanonisch,

und es folgt die Behauptung. Da der Totalraum kanonische Singularitäten besitzt, gilt dies insbesondere auch für die Fasern, was im zweidimensionalen Fall genau den rationalen Doppelpunkten entspricht (siehe [37], S. 166 ff.). “ \Leftarrow ” Es sei $g : \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$ das relative kanonische Modell von \mathcal{X} . Da die Faser \mathcal{X}_s für $s \neq 0$ nur kanonische Singularitäten besitzt, liefert g einen Isomorphismus außerhalb der speziellen Faser; insbesondere tauchen keine exzeptionellen Divisoren F_j auf, die flach über Δ sind (siehe [25], S. 84). Angenommen, in der Darstellung (*) ist ein $a_i \geq 0$, ohne Einschränkung $a_0 \geq 0$ mit a_0 maximal. Es sei $C \subset E_0$ eine Kurve, die auf einen Punkt $p \in \mathcal{X}$ kontrahiert wird und die in keiner weiteren Komponente von \tilde{X} liegt. Da $\sum_{i \neq 0} E_i \sim 0$, ist

$$K_{\tilde{\mathcal{X}}} \cdot C = \sum_{i \neq 0} a_i E_i \cdot C = \sum_{i \neq 0} a_i E_i \cdot C - \sum_{i \neq 0} a_0 E_i \cdot C \leq 0,$$

was einen Widerspruch zur g -Neftheit von $K_{\tilde{\mathcal{X}}}$ liefert. Folglich sind alle $a_i < 0$, und da X semi-log-kanonisch ist, ergibt sich mit der Adjunktionsformel (**), dass es keine exzeptionellen Divisoren E_i geben kann, d.h. \mathcal{X} besitzt kanonische Singularitäten.

Zu ii): “ \Rightarrow ” Nach endlichem Basiswechsel $\Delta_1 \rightarrow \Delta$ besitzt $\mathcal{X}' = \mathcal{X} \times_{\Delta} \Delta_1$ eine semistabile Auflösung, und die spezielle Faser $X' \cong X$ hat nach i) semi-log-kanonische, die allgemeine Faser kanonische Singularitäten.

“ \Leftarrow ” Wir wählen einen endlichen Basiswechsel $\Delta' \rightarrow \Delta$, s.d. $\mathcal{X}' = \mathcal{X} \times_{\Delta} \Delta'$ eine semi-stabile Auflösung und nach i) somit kanonische Singularitäten besitzt. Es sei $h : \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$ eine Auflösung der Singularitäten von \mathcal{X} , und es sei $\tilde{\mathcal{X}}' = \tilde{\mathcal{X}} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}'$. Wir erhalten das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{X}}' & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{\mathcal{X}} \\ g \downarrow & & h \downarrow \\ \mathcal{X}' & \xrightarrow{f} & \mathcal{X} \end{array}$$

Zunächst werde \mathcal{X} als normal angenommen. Zum einen erhält man nun

$$K_{\tilde{\mathcal{X}}'} = g^* K_{\mathcal{X}'} + \sum a_i E_i = g^* f^* K_{\mathcal{X}} + m\tilde{X}' + \sum a_i E_i,$$

andererseits

$$K_{\tilde{\mathcal{X}}'} = \tilde{f}^* K_{\tilde{\mathcal{X}}} + m\tilde{X}' = \tilde{f}^* h^* K_{\mathcal{X}} + \tilde{f}^* \sum b_j F_j + m\tilde{X}'.$$

Da $\tilde{\mathcal{X}}'$ nun kanonische Singularitäten besitzt, ist $a_i \geq 0$ für alle i , somit auch $b_j = 0$ für alle j , und \mathcal{X} hat kanonische Singularitäten. Ist $\tilde{\mathcal{X}}'$ nicht normal, betrachten wir die Normalisierung $\nu : \tilde{\mathcal{X}}^\nu \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}'$. Wie oben ist

$$K_{\tilde{\mathcal{X}}^\nu} = \nu^* K_{\tilde{\mathcal{X}}'} - \nu^{-1}(D),$$

und durch Berechnung von $K_{\tilde{\mathcal{X}}^\nu}$ wie oben erhält man

$$\nu^* f^* \sum b_j F_j = \sum a_i E_i + \nu^{-1}(D)$$

mit $a_i \geq 0$. Da $\nu^{-1}(D)$ effektiv ist, folgt $b_j \geq 0$ und somit die Behauptung. \square

Wir wollen nun das Fortsetzungskriterium 6.2 aus Kapitel 6 auf eine Familien komplexer Flächen anwenden, deren zentrale Faser eine semi-log-terminale Singularität besitzt.

Satz 8.5. *Es sei $\mathcal{X} \rightarrow \Delta$ eine einparametrische \mathbb{Q} -Gorenstein Deformation einer Fläche X mit einer semi-log-terminalen Singularität. Dann lässt sich die zugehörige Periodenabbildung $\Phi : \Delta^* \rightarrow D/\Gamma$ fortsetzen zu einer Abbildung $\tilde{\Phi} : \Delta \rightarrow \overline{D/\Gamma}^M$.*

Beweis: Wie im obigen Beweis gehen wir über zum kanonischen Modell $\tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$ einer semistabilen Reduktion von $\mathcal{X} \rightarrow \Delta$, bei der die exzeptionellen Divisoren E_i verschwinden (s.o.), so dass $\tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$ bimeromorph ist. Die zentrale Faser \tilde{X} besteht nun nach Proposition 8.5 aus höchstens zwei glatten Komponenten, die sich transversal schneiden. Somit ist der zugehörige Schnittgraph Γ eindimensional, und mit Korollar 3.2 folgt $N^2 = 0$. Die Behauptung ergibt sich nun aus Satz 6.2. \square

Beispiel 8.2 (Pinch-Point). Hierzu betrachten wir die einparametrische Familie

$$\{x^2 - zy^2 = s\} \subset \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}.$$

Der singuläre Ort ist gerade

$$\{x = y = 0, z \text{ beliebig}\}$$

Zur Berechnung einer semistabilen Reduktion blasen wir die Familie entlang dieser Geraden auf und erhalten

$$\tilde{\mathcal{X}} := \{(x, y, z, s) \times [w_0, w_1, w_2] \in \mathbb{C}^4 \times \mathbb{P}_2; xw_1 = yw_0, xw_2 = sw_0, \\ yw_2 = sw_1, x^2 - zy^2 = 0\}.$$

Wir wählen eine Überdeckung $\mathbb{P}_2 = \bigcup_{i=1}^3 U_i$, wobei

$$U_i := \{[w_0, w_1, w_2] \in \mathbb{P}_2; w_i \neq 0\}.$$

Auf der Karte $U_0 = \{w_0 = 1\}$ erhalten wir somit die Gleichungen

$$xw_1 = y, \quad xw_2 = s, \quad yw_2 = sw_1,$$

folglich

$$x^2 - zy^2 - s = x^2 - zx^2w_1^2 - xw_2 = 0.$$

und somit

$$x(x - zzw_1^2 - w_2) = 0.$$

Im Punkt $s = 0$ folgt also $x = 0$ oder $w_2 = 0$, folglich

$$x(1 - zw_1^2) = 0.$$

Auf $U_1 = \{w_1 = 1\}$ erhalten wir

$$x = yw_0, \quad xw_2 = sw_0, \quad yw_2 = s,$$

folglich wie oben

$$y(w_0^2 - z) = 0,$$

und auf $U_2 = \{w_2 = 1\}$ die Gleichung

$$s(sw_0^2 - zsw_1^2 - 1) = 0.$$

Die zentrale Faser \tilde{X} der Aufblasung besteht somit aus zwei glatten Komponenten, deren Schnitt transversal ist.

Es sei nun $H \subset H_{\mathbb{P}^N}^{h(t)}$ das lokal abgeschlossene Unterschema von $H_{\mathbb{P}^N}^{h(t)}$ aus Proposition 7.2, und es sei $H_0 \subset H'$ glatt. Nach einem endlichen Basiswechsel (siehe [30], Abschnitt 4.3) lässt sich die zugehörige Familie $\Gamma \rightarrow H_0$ simultan auflösen, und wir erhalten eine induzierte Periodenabbildung $\Phi : H_0 \rightarrow D/\Gamma$. Es sei \bar{H} die Vereinigung von H_0 zusammen mit dem einer Fläche X mit semi-log-terminalen Singularitäten entsprechenden Randpunkt $\{p_0\}$, und es sei $C \subset \bar{H}$ eine Kurve, die durch diesen Punkt läuft. Satz 8.5 liefert nun:

Korollar 8.3. *Die Einschränkung der Periodenabbildung $\Phi : H_0 \rightarrow D/\Gamma$ auf $C - \{p_0\}$ besitzt eine Fortsetzung zu einer Abbildung $\tilde{\Phi} : C \rightarrow \overline{D/\Gamma}^M$.*

Literaturverzeichnis

- [1] A. Andreotti, Sopra le superficie che possegono trasformazioni birazionale in se, *Rend. Mat. Appl.* **9** (1950), 255-279 .
- [2] A. Ash, D. Mumford, M. Rapoport, and Y. Tai, *Smooth Compactification of Locally Symmetric Varieties*, Math. Sci. Press, Brookline, 1975.
- [3] L. Badescu, *Algebraic Surfaces*, Springer Universitext, 2001.
- [4] W. Baily, A. Borel, Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains, *Ann. of Math.* **84** (1966), 442-528.
- [5] E. Bombieri, Canonical models of surfaces of general type, *Publ. Math.* **42** (1973), 171-220.
- [6] A. Borel, *Linear Algebraic Groups*, W.A. Benjamin, 1969.
- [7] W. Barth, C. Peters, A. Van de Ven, *Compact Complex Surfaces*, Springer, 1984.
- [8] F. Catanese, Surfaces with $K^2 = p_g = 1$ and their period mapping, *Algebraic Geometry, Lecture Notes in Mathematics* **732**, Springer, 1979, 1-29.
- [9] E. Cattani, Mixed Hodge Structures, Compactifications and Monodromy Weight Filtration, in [15].
- [10] H. Clemens, Picard-Lefschetz theorem for families of nonsingular algebraic varieties acquiring ordinary singularities, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 136 (1969), 93-108.
- [11] Davis C. Doherty, Semi Log Canonical Singularities and Generic Projections, www.math.washington.edu/~doherty/papers/slcsings.pdf
- [12] D. Eisenbud, *Commutative Algebra*, Graduate Texts in Mathematics **150**, Springer, 1994.
- [13] R. Friedman, A new proof of the global Torelli theorem for K3 surfaces, *Ann. of Math.* **120** (1984), 237-269.
- [14] H. Grauert, O. Riemenschneider, Verschwindungssätze für analytische Kohomologiegruppen auf komplexen Räumen, *Inv. Math.* **11** (1970), 263-292.
- [15] P. Griffiths, (Editor), *Topics in transcendental algebraic geometry*, *Ann. of Math. Stud.* **106**, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1984.
- [16] P. Griffiths, Periods of integrals on algebraic manifolds: Summary of main results and discussion of open problems, *Bull. A.M.S.* **76** (1970), 228-296.

- [17] P. Griffiths, Periods of integrals on algebraic manifolds III, *Publ. Math. I.H.E.S.* **38** (1970), 125-180.
- [18] P. Griffiths, W. Schmid, Locally homogeneous complex manifolds, *Acta Math.* **123**, 253-302.
- [19] P. Griffiths, W. Schmid, Recent developments in Hodge theory: a discussion of techniques and results, *Discrete Subgroups of Lie Groups*, Bombay, Oxford Univ. Press (1973), 31-127.
- [20] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley, 1994.
- [21] A. Grothendieck, Les schémas de Hilbert, *Sém. Bourbaki* **221** (1960/61).
- [22] A. Grothendieck et al. , Cohomologie Locale des Faisceaux Cohérents et Théorèmes de Lefschetz Locaux et Globaux, North Holland, Amsterdam (1968).
- [23] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry, Graduate Texts in Mathematics* **52**, Springer, 1977.
- [24] R. Hartshorne, *Residues and Duality, Lecture Notes in Mathematics* **20**, Springer, 1966.
- [25] K. Karu, Semistable reduction in characteristic zero, Dissertation, Boston University, 1999.
- [26] Y. Kawamata, Crepant blowings-up of three-dimensional canonical singularities and its application to degenerations of surfaces, *Ann. Math.* **127** (1988), 893-899.
- [27] Y. Kawamata, On the finiteness of generators of a pluricanonical ring for a 3-fold of general type, *Am. J. Math.* **106**, 1503-1512.
- [28] G. Kempf et. al. , *Toroidal Embeddings I, Lecture Notes in Mathematics* **339**, Springer, 1973.
- [29] K. Kodaira, *Complex Manifolds and Deformation of Complex Structures, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* **283**, Springer, 1986.
- [30] J. Kollar, S. Mori, *Birational Geometry of Algebraic Varieties*, Cambridge University Press, 1998.
- [31] J. Kollar, N. Shepherd-Barron, Threefolds and deformations of surface singularities, *Inv. math.* **91** (1988), 299-338.
- [32] J. Kollar, Toward moduli of singular varieties, *Comp. Math.* **56** (1985), 369-398.
- [33] J. Kollar, et al. , Flips and abundance for algebraic threefolds, *Astérisque* **211**.
- [34] D. Knutson, *Algebraic Spaces, Lecture Notes in Mathematics* **203**, Springer, 1970.
- [35] V. Kulikov, Degenerations of K surfaces and Enriques surfaces, *Math USSR Izvestija* **11** (1977), 957-989.
- [36] A. Landmann, On the Picard-Lefschetz transformations, *Trans. A.M.S.* **181** (1973), 89-126.
- [37] K. Matsuki, *Introduction to the Mori Program*, Springer, 2002.
- [38] T. Matsusaka, Polarized Varieties with given Hilbert polynomial, *Am. J. of Math.* **94** (1972), 1027-1077.
- [39] D. Morrison, The Clemens-Schmid exact sequence and applications, in: [15], 101-119.
- [40] Y. Namikawa, *Toroidal Compactification of Siegel Spaces, Lecture Notes in Mathematics* **812**, Springer, 1980.
- [41] U. Persson, On degenerations of algebraic surfaces, *Memoirs of the American Mathematical Society* **189**, Vol. 11, 1977.
- [42] H. Popp, *Moduli theory and classification theory for algebraic varieties , Lecture Notes in Mathematics* **620**, Springer, 1977.

-
- [43] H. Popp, On Moduli of Algebraic Varieties II, *Compos. Math.* **28** (1974) , 51-81.
- [44] M. Reid, Elliptic Gorenstein Singularities of surfaces, preprint,
www.maths.warwick.ac.uk/~miles/surf/eG.ps.
- [45] M. Reid, Canonical threefolds, *Journées de Géométrie algébrique d'Angers*, Sijthoff and Nordhoff (1980), 273-310.
- [46] I. Reider, On the Infinitesimal Torelli Theorem for Certain Irregular Surfaces of General Type, *Math. Ann.* **280**(1988), 285-302.
- [47] W. Schmid, Variation of Hodge Structure: The Singularities of the Period Mapping, *Inv. Math.* **22** (1973), 211-319.
- [48] D. van Straten, Weakly normal surface singularities and their improvements, Thesis, Leiden, 1987.

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Prof. Dr. Georg Schumacher für die Betreuung der Arbeit.

Des Weiteren möchte ich mich bei Herrn Dr. Bert Koehler für die zahlreichen aufmunternden Worte und bei Anke Raufuß für das Korrekturlesen bedanken.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Dissertationsschrift selbständig verfasst und keine anderen Hilfsmittel als die angegebenen verwendet habe. Die Dissertation wurde in der jetzigen oder einer ähnlichen Form noch bei keiner anderen Hochschule eingereicht und hat noch keinen sonstigen Prüfungszwecken gedient.

Marburg, den 27.04.2005

Michael Koch