

# Seshadri-Konstanten auf abelschen Flächen

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades  
der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

vorgelegt dem

Fachbereich Mathematik und Informatik  
der Philipps-Universität Marburg

von

Christoph Schulz  
aus Wolfhagen

Marburg/Lahn, März 2004

Vom Fachbereich Mathematik und Informatik  
der Philipps-Universität Marburg als Dissertation  
am 25.03.2004 angenommen.

Erstgutachter: Prof. Dr. Thomas Bauer  
Zweitgutachter: Prof. Dr. Georg Schumacher

Tag der mündlichen Prüfung: 10.05.2004

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>1 Grundlagen</b>	<b>7</b>
1.1 Globale und lokale Positivität . . . . .	7
1.2 Submaximalität . . . . .	12
1.3 Abelsche Varietäten . . . . .	17
1.4 Klassifikation abelscher Flächen . . . . .	18
<b>2 Seshadri-Konstanten auf abelschen Flächen</b>	<b>21</b>
2.1 Allgemeine Aussagen . . . . .	21
2.2 Submaximalität . . . . .	24
2.3 Seshadri-Konstanten und Isogenien . . . . .	26
2.4 Einfache abelsche Flächen mit Picard-Zahl 1 . . . . .	28
2.5 Einfache abelsche Flächen mit Picard-Zahl $>1$ . . . . .	30
<b>3 Nichteinfache abelsche Flächen</b>	<b>33</b>
3.1 Nichteinfache abelsche Flächen . . . . .	33
3.2 Picard-Zahl 3 . . . . .	34
3.3 Picard-Zahl 4 . . . . .	47
<b>Literatur</b>	<b>67</b>
<b>Anhang</b>	<b>71</b>
Bezeichnungen . . . . .	71
Danksagung . . . . .	72
Erklärung . . . . .	73
Lebenslauf . . . . .	74



# Einleitung

Gegenstand dieser Arbeit sind Seshadri-Konstanten von ample Geradenbündeln auf glatten projektiven komplexen Varietäten. Zu einem ample Geradenbündel  $L$  und einem Punkt  $x \in X$  definiert man die Seshadri-Konstante

$$\varepsilon(L, x) := \sup \{ \varepsilon > 0 \mid f^*L - \varepsilon E \text{ ist nef} \} ,$$

wobei  $f : \text{Blow}_x(X) \rightarrow X$  die Aufblasung von  $X$  in  $x$  ist, und  $E$  der exzeptionelle Divisor. Auf diese Weise wird ein Maß für die „lokale Positivität“ von  $L$  definiert. Eine explizite Berechnung von Seshadri-Konstanten ist im Allgemeinen recht schwierig und nur unter Zuhilfenahme spezieller geometrischer Eigenschaften der Varietät  $X$  möglich.

Ziel der Arbeit ist es, Methoden zusammenzutragen, die für die Berechnung von Seshadri-Konstanten auf abelschen Flächen von Bedeutung sind. Neben den Methoden für beliebige komplexe projektive Varietäten aus Kapitel 1 werden in Kapitel 2 und 3 spezielle Methoden für abelsche Flächen entwickelt. Wir werden einige bekannte Resultate darstellen und im Anschluss eigene Berechnungen präsentieren. Die zentralen neuen Ergebnisse werden hierbei in Kapitel 3 dargestellt. Hier betrachten wir Seshadri-Konstanten auf Produkten zweier elliptischer Kurven:

- $E_1 \times E_2$  mit zwei nicht isogenen elliptischen Kurven,
- $E \times E$  mit einer elliptischen Kurve ohne komplexe Multiplikation,
- $E_1 \times E_1$  für die elliptische Kurve  $E_1 = \mathbb{C} / (\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$  sowie
- $E_2 \times E_2$  für die elliptische Kurve  $E_2 = \mathbb{C} / (\mathbb{Z} + \exp(\frac{\pi i}{3})\mathbb{Z})$ .

Es gelingt uns, die Seshadri-Konstanten aller Geradenbündel explizit zu berechnen. Wir werden dabei die ersten Ergebnisse für abelsche Flächen mit Picard-Zahl 3 und 4 erzielen.

Um dies zu erreichen, werden wir eingehend das Schnittprodukt auf der Néron-Severi-Gruppe untersuchen und davon ausgehend geeignete zahlentheoretische Überlegungen anstellen. Es zeigt sich, dass die elliptischen Kurven auf den untersuchten Flächen eine besondere Rolle spielen. Daher werden wir eine Parametrisierung der numerischen Äquivalenzklassen der elliptischen Kurven angeben, die uns in die Lage versetzt, mit zahlentheoretischen Hilfsmitteln sogenannte „submaximale“ elliptische Kurven zu finden. Auf diese Weise lassen sich konkrete Formeln zur Berechnung der Seshadri-Konstanten anhand der numerischen Äquivalenzklasse eines Geradenbündels aufstellen.

In einfachsten nichttrivialen Fall gilt:

**Satz 0.0.1** *Es sei  $E$  eine elliptische Kurve ohne komplexe Multiplikation mit*

$$F_1 := \{0\} \times E \quad F_2 := E \times \{0\} \quad \text{und} \quad \Delta := \{(x, x) \mid x \in E\} .$$

*Sei weiterhin  $L = \mathcal{O}(a_1 F_1 + a_2 F_2 + a_3 \Delta)$  ein amples Geradenbündel auf  $E \times E$  mit  $a_1 \geq a_2 \geq a_3$ .*

*Dann ist  $\varepsilon(L)$  das Minimum aus den drei Werten*

1.  $a_2 + a_3$  ,
2.  $\frac{1}{\text{ggT}(a_1, a_2)^2} (a_2 a_1^2 + a_1 a_2^2 + a_3 (a_1 + a_2)^2)$  ,
3.  $\min \left\{ a_1 d^2 + a_2 c^2 + a_3 (c + d)^2 \mid c, d \in \mathbb{N}, c + d < \frac{a_1 + a_2}{\sqrt{2}} \right\}$  .

Ähnliche Formeln finden sich in den Sätzen 3.1.1, 3.3.19 beziehungsweise 3.3.33. Die anschließende Tabelle zeigt, in welchen Fällen es damit gelungen ist, die Seshadri-Konstanten auf abelschen Flächen explizit zu berechnen:

	Einfache abelsche Fläche	Nichteinfache abelsche Fläche
Picard-Zahl 1	Generischer Fall [Bauer99]	nicht existent
Picard-Zahl 2	?	$E_1 \times E_2$ mit $E_1 \not\cong E_2$
Picard-Zahl 3	?	$E \times E$ ohne komplexe Multiplikation
Picard-Zahl 4	nicht existent	$E_1 \times E_1, E_2 \times E_2$ mit komplexer Multiplikation

Wie man sieht, ist diese Tabelle noch nicht vollständig. Für einfache abelsche Flächen mit Picard-Zahl größer 1 können wir keine Aussage treffen. Außerdem ist nicht klar, wie sich Seshadri-Konstanten unter Isogenien verhalten. D.h. auch für abelsche Flächen, die isogen, aber nicht isomorph zu einem Produkt zweier elliptischer Kurven sind, ist die Berechnung der Seshadri-Konstante unklar. Desweiteren fehlt eine Aussage über  $E \times E$  für allgemeine elliptische Kurven mit komplexer Multiplikation. Lediglich  $E_1 = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$  und  $E_2 = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \exp(\frac{\pi i}{3})\mathbb{Z})$  haben wir hier behandelt.

Eine übersichtliche Form der Darstellung der erzielten Abschätzungen ergibt sich mittels

$$\mathcal{E}_{inf}(x) := \inf \left\{ \frac{\varepsilon(L, x)}{\sqrt{L^2}} \mid L \in \text{Amp}(X) \right\} , \quad \mathcal{E}_{sup}(x) := \sup \left\{ \frac{\varepsilon(L, x)}{\sqrt{L^2}} \mid L \in \text{Amp}(X) \right\} .$$

Auf abelschen Flächen  $S$  gilt für alle Punkte  $x$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{inf}(x) &= \mathcal{E}_{inf}(0) =: \mathcal{E}_{inf}(S) , \\ \mathcal{E}_{sup}(x) &= \mathcal{E}_{sup}(0) =: \mathcal{E}_{sup}(S) . \end{aligned}$$

Für einfache abelsche Flächen ergibt sich aus Lemma 2.2.3

$$\mathcal{E}_{inf}(S) \geq \sqrt{\frac{7}{8}} .$$

Falls es  $(1, 2)$ -Polarisierungen auf  $S$  gibt, ist nach Proposition 2.1.3  $\mathcal{E}_{sup}(S) = 1$ .

Im Produktfall ist

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{inf}(E_1 \times E_2) &= 0, & \mathcal{E}_{sup}(E_1 \times E_2) &= \sqrt{\frac{1}{2}}, \\ \mathcal{E}_{inf}(E \times E) &= 0, & \mathcal{E}_{sup}(E \times E) &= \sqrt{\frac{2}{3}}, \\ \mathcal{E}_{inf}(E_1 \times E_1) &= 0, & \mathcal{E}_{sup}(E_1 \times E_1) &= 1, \\ \mathcal{E}_{inf}(E_2 \times E_2) &= 0, & \mathcal{E}_{sup}(E_2 \times E_2) &= \sqrt{\frac{3}{4}}.\end{aligned}$$

Hierbei berechnet sich  $\mathcal{E}_{inf}$  aus den Formeln der Sätze 3.1.1, 3.2.13, 3.3.19 beziehungsweise 3.3.33 am Rand des Nef-Kegels.

$\mathcal{E}_{sup}$  ergibt sich durch die Sätze 3.1.1, 3.2.8, 3.3.12 beziehungsweise 3.3.29.

Nach dieser Einleitung werden wir im ersten Kapitel die grundlegenden Objekte dieser Arbeit erläutern. Wir führen Seshadri-Konstanten ein und stellen allgemeine Fakten zu Seshadri-Konstanten auf glatten projektiven komplexen Varietäten zusammen. Danach beschäftigen wir uns eingehend mit dem Begriff der Submaximalität von Kurven. Im dritten und vierten Teil des ersten Kapitels geben wir eine kurze Einführung in die Geometrie der abelschen Flächen.

Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit Seshadri-Konstanten auf abelschen Flächen. Hier werden wir allgemeine Tatsachen und Abschätzungen für die Seshadri-Konstante angeben und auf einfache abelsche Flächen eingehen. Wir geben insbesondere das Resultat von Th. Bauer für abelsche Flächen mit Picard-Zahl 1 wieder [Bauer99].

Das dritte Kapitel ist der expliziten Berechnung der Seshadri-Konstanten auf nichteinfachen abelschen Flächen gewidmet. Es gelingt hier die Berechnung der Seshadri-Konstanten auf Kreuzprodukten zweier elliptischer Kurven.

$X$  bezeichnet in dieser Arbeit durchgängig eine glatte projektive Varietät über den komplexen Zahlen. Genauso ist  $S$  immer eine abelsche Fläche.





# Kapitel 1

## Grundlagen

### 1.1 Globale und lokale Positivität

Fragen zur Positivität von Geradenbündeln bzw. Linearsystemen sind seit Mitte des zwanzigsten Jahrhunderts von großem Interesse in der algebraischen Geometrie. Besondere Bedeutung besitzen positive Linearsysteme bei der Konstruktion von projektiven Einbettungen. Sei  $\varphi_0, \dots, \varphi_N$  eine Basis des Linearsystems  $|L|$ , so ist

$$\begin{aligned}\varphi_{|L|}: X &\rightarrow \mathbb{P}^N \\ x &\mapsto (\varphi_0(x) : \dots : \varphi_N(x))\end{aligned}$$

eine meromorphe Abbildung von  $X$  (als holomorphe Mannigfaltigkeit) in den  $\mathbb{P}^N$ .  $L$  nennt man *frei*, wenn  $\varphi_{|L|}$  holomorph ist, d.h. wenn das Linearsystem  $|L|$  keine Fixpunkte besitzt, und *sehr ampel*, wenn  $\varphi_{|L|}$  eine Einbettung ist. Außerdem heißt  $L$  *ampel*, wenn ein Vielfaches von  $L$  sehr ampel ist.

Neben dieser „geometrischen“ Positivität steht die numerische Positivität. Ein Geradenbündel heißt *nef*, wenn für alle Kurven  $C$  auf  $X$  gilt:  $L \cdot C \geq 0$ . Zwei Geradenbündel  $L$  und  $L'$  nennt man *numerisch äquivalent*, wenn  $L \cdot C = L' \cdot C$  für alle Kurven  $C \subset X$  gilt. Die *Néron-Severi-Gruppe*  $\text{NS}(X)$  ist die Gruppe der numerischen Äquivalenzklassen. Sie ist eine freie abelsche Gruppe von endlichem Rang, und ihren Rang nennt man *Picard-Zahl*  $\rho(X)$  der Varietät  $X$ . Im Zusammenhang mit numerischen Aussagen macht es nun durchaus Sinn, von Geradenbündeln mit reellen Koeffizienten zu sprechen, man definiert daher den *Néron-Severi-Vektorraum*  $\text{NS}_{\mathbb{R}}(X) := \text{NS}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ . Numerische Äquivalenz und Nefness lassen sich analog auf  $\text{NS}_{\mathbb{R}}(X)$  übertragen. Ein  $\mathbb{R}$ -Geradenbündel nennt man *ampel*, wenn es von der Form  $\sum_i c_i A_i$  ist mit ampel Geradenbündeln  $A_i$  und positiven reellen Zahlen  $c_i$ .

Den zentralen Zusammenhang zwischen numerischer und geometrischer Positivität liefert das Nakai-Moishezon-Kriterium [Campana-Peternell90].

**Satz 1.1.1** *Ein Geradenbündel  $L \in \text{NS}_{\mathbb{R}}(X)$  ist genau dann ampel, wenn  $L^{\dim Y} \cdot Y > 0$  ist für alle Untervarietäten  $Y \subset X$ .*

Nun untersucht man die Mengen der ampel, bzw. nef Klassen von Geradenbündeln

$$\begin{aligned}\text{Amp}(X) &:= \{ L \in \text{NS}_{\mathbb{R}}(X) \mid L \text{ ampel} \} , \\ \text{Nef}(X) &:= \{ L \in \text{NS}_{\mathbb{R}}(X) \mid L \text{ nef} \} .\end{aligned}$$

Man stellt fest, dass  $\text{Amp}(X)$  und  $\text{Nef}(X)$  konvexe Kegel im Néron-Severi-Vektorraum sind, und dass  $\text{Amp}(X)$  offen in  $\text{NS}_{\mathbb{R}}(X)$  ist. Das Theorem von Kleiman [Kleiman66] besagt, dass der Nef-Kegel gerade der Abschluss des ampelnen Kegel ist.

Im Fall  $\dim X = 2$  wird der Nef-Kegel von der Quadrik  $\{L \in \text{NS}_{\mathbb{R}}(X) \mid L^2 = 0\}$  und ausgezeichneten Hyperebenen  $H_C = \{L \in \text{NS}_{\mathbb{R}}(X) \mid L \cdot C = 0\}$  begrenzt, welche durch sogenannte *extremale Kurven*  $C$  definiert werden.

Nehmen wir zum Beispiel die Aufblasung  $f : \text{Blow}_p \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  vom  $\mathbb{P}^2$  im einem Punkt  $p$  mit dem exzeptionellen Divisor  $E$  und dem Geradenbündel  $H := f^* \mathcal{O}(1)$ . Es ist  $\text{NS}_{\mathbb{R}}(\text{Blow}_p \mathbb{P}^2) = \{\mathcal{O}(a_1 H - a_2 E) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ , und der Nef-Kegel

$$\text{Nef}(\text{Blow}_p \mathbb{P}^2) = \{\mathcal{O}(a_1 H - a_2 E) \mid 0 \leq a_2 \leq a_1\}$$

wird begrenzt durch die Hyperebenen zu  $E$  und der eigentlich Transformierten  $G' \equiv_{\text{num}} H - E$  einer Geraden  $G \subset \mathbb{P}^2$  durch den Punkt  $p$ .

Die genannten Begriffe von Positivität sind globale Eigenschaften eines Geradenbündels. Als lokales Maß von Positivität definiert Demailly in [Demailly92] die Seshadri-Konstante:

**Definition 1.1.2** Sei  $L$  ein nef Geradenbündel,  $x$  ein Punkt aus  $X$ ,  $f : \text{Blow}_x X \rightarrow X$  die Aufblasung von  $X$  in  $x$  und  $E$  der exzeptionelle Divisor in  $\text{Blow}_x X$ . Die Seshadri-Konstante von  $L$  im Punkt  $x$  ist definiert durch

$$\varepsilon(L, x) := \sup \{ \varepsilon > 0 \mid f^* L - \varepsilon E \text{ ist nef} \} . \quad (1.1.1)$$

**Proposition 1.1.3** Die Seshadri-Konstante ist das Infimum der Seshadri-Quotienten

$$q_C(L, x) := \frac{L \cdot C}{\text{mult}_x C} \quad (1.1.2)$$

aller irreduziblen Kurven  $C \subset X$  durch den Punkt  $x$ :

$$\varepsilon(L, x) = \inf \left\{ \frac{L \cdot C}{\text{mult}_x C} \mid C \text{ irreduzible Kurve durch } x \right\} . \quad (1.1.3)$$

*Beweis:* Das Bündel  $B := f^* L - \varepsilon E$  ist genau dann nef, wenn die Schnittzahl mit allen irreduziblen Kurven in  $\text{Blow}_x X$  nichtnegativ ist. Da die Kurven auf  $E$  eine negative Schnittzahl mit  $E$  und somit positiven Schnitt mit  $B$  besitzen, ist es ausreichend, die Kurven  $\bar{C}$  zu betrachten, die als eigentlich Transformierte von irreduziblen Kurven  $C \subset X$  auftreten. Es ist

$$0 \leq (f^* L - \varepsilon E) \cdot \bar{C} = L \cdot C - \varepsilon \cdot \text{mult}_x C .$$

Das Supremum der  $\varepsilon$ , so dass  $f^* L - \varepsilon E$  nef ist, entspricht damit dem Infimum der Werte  $\frac{L \cdot C}{\text{mult}_x(C)}$  aller irreduziblen Kurven  $C \subset X$ .  $\square$

*Bemerkung:* Man sieht, dass die Seshadri-Konstante  $\varepsilon(L, x)$  nur von der numerischen Äquivalenzklasse von  $L$  abhängt.

Die Proposition 1.1.3 ist auch der Ursprung des Namens Seshadri-Konstante. Das bekannte Seshadri-Kriterium für Ampelness (Theorem 1.4.12 aus [Lazarsfeld]) besagt:

**Satz 1.1.4** Ein Divisor  $D$  ist genau dann ampel, wenn eine reelle Zahl  $\varepsilon > 0$  existiert, so dass gilt:

$$\frac{D \cdot C}{\text{mult}_x C} > \varepsilon$$

für alle Punkte  $x \in X$  und alle Kurven  $C$  durch  $x$ .

Die Seshadri-Konstante ist ein Maß für die Positivität von  $L$ , die „asymptotisch“ im Punkt  $x$  konzentriert ist. Es gilt nämlich [Demailly92]:

$$\varepsilon(L, x) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{s(kL, x)}{k} \right\} .$$

Hierbei ist  $s(kL, x)$  die maximale ganze Zahl, so dass die Abbildung

$$H^0(X, kL) \rightarrow H^0(X, kL \otimes \mathcal{O}_X / \mathfrak{m}_x^{s+1})$$

surjektiv ist, d.h. die maximale Höhe der Jets, die man für einen Schnitt aus  $H^0(X, kL)$  vorschreiben kann.

In den letzten Jahren wurden Verbindungen zu anderen geometrischen Invarianten gefunden (minimale Periodenlänge auf abelschen Varietäten, Gromov-Weite auf symplektischen Mannigfaltigkeiten). Auch Verallgemeinerungen (Seshadri-Konstanten in mehreren Punkten oder entlang Untervarietäten) wurden studiert. Auf diese Ergebnisse werden wir hier nicht weiter eingehen, einen Überblick findet man aber in Kapitel 5 von [Lazarsfeld] und in [Szemberg01].

Als nächstes wollen wir mögliche Schranken für die Seshadri-Konstante studieren. Für sehr ample Geradenbündel  $L$  betrachten wir die von  $L$  gegebene Einbettung in den projektiven Raum. Dann ist  $\text{mult}_x C \leq \deg C = C \cdot \mathcal{O}(1)$  für eine Kurve  $C \subset \mathbb{P}^n$  und damit  $\varepsilon(L, x) \geq 1$ . Entsprechendes gilt auch wenn  $L$  ample und frei ist. Bei amplen Geradenbündeln ist  $\varepsilon(L, x) \geq \frac{1}{m}$ , falls  $mL$  sehr ample ist. Nun ist es aber nicht so, dass wir eine generelle untere Schranke unabhängig von  $X$  und  $L$  erwarten dürfen. Beispiele von Miranda (Beispiel 5.2.1 aus [Lazarsfeld]) zeigen, dass es zu jedem  $\delta > 0$  eine Fläche  $X$ , ein amples Geradenbündel  $L$  auf  $X$  und einen Punkt  $x$  gibt mit  $\varepsilon(L, x) < \delta$ . Auch höherdimensionale Beispiele (Beispiel 5.2.2 aus [Lazarsfeld]) sind bekannt. Allerdings vermutet man, dass kleine Seshadri-Konstanten nicht im sehr allgemeinen Punkt auftreten:

**Vermutung 1.1.5 [E-K-L95]** *Für alle  $x$  außerhalb einer abzählbaren Vereinigung von echten Untervarietäten gilt*

$$\varepsilon(L, x) \geq 1 .$$

Für Flächen ist die Vermutung bewiesen [Ein-Lazarsfeld93] und in [E-K-L95] wurde für den sehr allgemeinen Punkt  $x$  nachgewiesen:  $\varepsilon(L, x) \geq \frac{1}{\dim X}$ .

So viel zu unteren Schranken für die Seshadri-Konstante. Als obere Schranke können wir angeben:

**Proposition 1.1.6** *Für jede irreduzible Untervarietät  $V$  von  $X$  mit  $x \in V$  gilt*

$$\varepsilon(L, x) \leq \sqrt[\dim V]{\frac{L^{\dim V} \cdot V}{\text{mult}_x V}} . \tag{1.1.4}$$

*Insbesondere gilt  $\varepsilon(L, x) \leq \sqrt[\dim X]{L^{\dim X}}$ .*

*Beweis:* Wenn ein Bündel  $f^*(L) - \varepsilon E$  nef ist, gilt insbesondere auch

$$\begin{aligned} 0 &\leq (f^*(L) - \varepsilon E)^{\dim V} \cdot f^*(V) = L^{\dim V} \cdot V + \varepsilon^{\dim V} (-E)^{\dim V} \cdot f^*(V) \\ &= L^{\dim V} \cdot V - \varepsilon^{\dim V} \text{mult}_x V . \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

Diese Ungleichung gilt dann auch für das Supremum der  $\varepsilon$ . □

Bei Flächen scheint die Seshadri-Funktion  $L \mapsto \varepsilon(L, x)$  in vielen Fällen ein ähnliches Verhalten wie die theoretische obere Schranke  $\sqrt{L^2}$  zu besitzen. Steffens [Steffens98] bewies für Flächen mit Picard-Zahl 1 im sehr allgemeinen Punkt  $x$ :

$$\lfloor \sqrt{L^2} \rfloor \leq \varepsilon(L, x) \leq \sqrt{L^2} . \quad (1.1.6)$$

Nakamaye konnte für Flächen, die ein Geradenbündel  $L$  mit „kleinen“ Seshadri-Konstanten besitzen (genauer:  $\varepsilon(L, x) \leq \sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{L^2}$  für den sehr allgemeinen Punkt  $x$ ), eine Faserung der Fläche, d.h. eine starke Einschränkung an die Geometrie der Fläche nachweisen [Nakamaye03].

Man könnte vermuten, dass im Flächenfall die Werte

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{inf}(x) &:= \inf \left\{ \frac{\varepsilon(L, x)}{\sqrt{L^2}} \mid L \in \text{Amp}(X) \right\} \quad \text{und} \\ \mathcal{E}_{sup}(x) &:= \sup \left\{ \frac{\varepsilon(L, x)}{\sqrt{L^2}} \mid L \in \text{Amp}(X) \right\} \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

eine Bedeutung für die Geometrie der Fläche im Punkt  $x$  besitzen.

Grundsätzlich ist es nicht einfach, Seshadri-Konstanten in konkreten Beispielen auszurechnen. Lediglich in einfachen Beispielen ist es unter Verwendung besonderer geometrischer Eigenschaften von  $X$  gelungen, die Seshadri-Konstanten für alle amplen Geradenbündel und alle Punkte auf  $X$  zu berechnen. Nehmen wir zum Beispiel  $X = \mathbb{P}^n$ ,  $L = \mathcal{O}(k)$  und  $x \in \mathbb{P}^n$ , dann ist  $\varepsilon(\mathcal{O}(k), x) = k \varepsilon(\mathcal{O}(1), x) = k$  (das Bündel  $\mathcal{O}(1)$  ist sehr ampel, d.h.  $\varepsilon(\mathcal{O}(1), x) \geq 1$ , und es gilt  $\mathcal{O}(1) \cdot G = 1$  für eine Gerade  $G$  durch  $x$ ).

Schon ein einfaches Beispiel mit Picard-Zahl 2 wie  $X = \text{Blow}_0\mathbb{P}^2$  erfordert einen höheren Aufwand. Szemberg zeigt in [Szemberg01]

$$\varepsilon(\mathcal{O}(a_1H - a_2E), x) = \begin{cases} a_1 - a_2 & , \text{ falls } x \in X \setminus E , \\ a_2 & , \text{ falls } a_2 \leq \frac{a_1}{2} \text{ und } x \in E , \\ a_1 - a_2 & , \text{ falls } \frac{a_1}{2} \leq a_2 \leq a_1 \text{ und } x \in E . \end{cases}$$

Betrachten wir nun für festes  $x$  das Verhalten der Seshadri-Quotienten  $q_C(L, x)$  und der Seshadri-Funktion  $\varepsilon(L, x)$  auf dem Nef-Kegel.

**Proposition 1.1.7 a.** *Die Seshadri-Quotienten-Funktion  $q_C : L \mapsto q_C(L, x)$  einer Kurve  $C$  ist eine Linearform auf  $\text{Nef}(X)$ .*

**b.** *Die Seshadri-Funktion  $\varepsilon : L \mapsto \varepsilon(L, x)$  ist ein konkaves Funktional auf  $\text{Nef}(X)$ .*

*Beweis:* **a.** Es gilt

$$\begin{aligned} q_C(mL, x) &= \frac{(mL) \cdot C}{\text{mult}_x C} = m \frac{L \cdot C}{\text{mult}_x C} = m q_C(L, x) \quad , \\ q_C(L + L', x) &= \frac{(L + L') \cdot C}{\text{mult}_x C} = \frac{L \cdot C}{\text{mult}_x C} + \frac{L' \cdot C}{\text{mult}_x C} = q_C(L, x) + q_C(L', x) . \end{aligned}$$

b. Außerdem ist

$$\begin{aligned}\varepsilon(mL, x) &= \inf_{\overline{C} \subset X} \left\{ \frac{(mL) \cdot \overline{C}}{\text{mult}_x \overline{C}} \right\} = \inf_{\overline{C} \subset X} \left\{ m \frac{L \cdot \overline{C}}{\text{mult}_x \overline{C}} \right\} = m \varepsilon(L, x) \quad , \\ \varepsilon(L + L', x) &= \inf_{\overline{C} \subset X} \left\{ \frac{(L + L') \cdot \overline{C}}{\text{mult}_x \overline{C}} \right\} \\ &\geq \inf_{\overline{C} \subset X} \left\{ \frac{L \cdot \overline{C}}{\text{mult}_x \overline{C}} \right\} + \inf_{\overline{C} \subset X} \left\{ \frac{L' \cdot \overline{C}}{\text{mult}_x \overline{C}} \right\} = \varepsilon(L, x) + \varepsilon(L', x) \quad . \quad \square\end{aligned}$$

**Satz 1.1.8** *Sei  $x$  ein fester Punkt. Die Seshadri-Funktion  $\varepsilon : \text{Nef}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $L \mapsto \varepsilon(L, x)$  ist stetig.*

*Beweis:* In einem endlich dimensionalen Vektorraum ist jede konkave Funktion stetig, damit auch die Funktion  $\varepsilon$  im Inneren des Nef-Kegels.

Der Rand des Nef-Kegels besteht nach Kleimans Theorem aus den Geradenbündeln, die noch nef aber nicht mehr ample sind. Für solche Geradenbündel  $L$  gibt es nach dem reellen Nakai-Moisheson-Kriterium eine Untervarietät  $V$  mit  $L^{\dim V} \cdot V = 0$ . Nach Proposition 1.1.6 ist  $0 \leq \varepsilon(L, x) \leq \sqrt[\dim V]{\frac{L^{\dim V} \cdot V}{\text{mult}_x V}} = 0$ . Sei  $L_n$  eine Folge von nef Geradenbündeln, die gegen  $L$  konvergiert (Konvergenz ist hier koordinatenweise im endlich dimensionalen Vektorraum  $\text{NS}_{\mathbb{R}}(X)$  zu verstehen). Da die Schnittzahlen  $L_n^{\dim V} \cdot V$  über die Koordinaten berechnet werden, gilt

$$0 \leq \varepsilon(L_n, x) \leq \sqrt[\dim V]{\frac{L_n^{\dim V} \cdot V}{\text{mult}_x V}} \rightsquigarrow \sqrt[\dim V]{\frac{L^{\dim V} \cdot V}{\text{mult}_x V}} = 0 = \varepsilon(L, x) \quad .$$

Damit ist  $\varepsilon$  auch in  $L$  stetig. □

Bisher hatten wir in der Regel irreduzible Kurven bei der Berechnung der Seshadri-Konstante betrachtet. In manchen Fällen treten aber auch reduzible Kurven  $C = C_1 \cup C_2$  auf.

Verläuft die Komponente  $C_1$  nicht durch den Punkt  $x$ , so ist

$$q_C(L, x) = \frac{L \cdot C}{\text{mult}_x C} \geq \frac{L \cdot C_2}{\text{mult}_x C_2} = q_{C_2}(L, x) \quad .$$

Verlaufen beide Komponenten durch den Punkt  $x$ , dann gilt

$$\begin{aligned}q_C(L, x) &= \frac{L \cdot C}{\text{mult}_x C} = \frac{L \cdot C_1 + L \cdot C_2}{\text{mult}_x C_1 + \text{mult}_x C_2} \\ &= \frac{\text{mult}_x C_1}{\text{mult}_x C} q_{C_1}(L, x) + \frac{\text{mult}_x C_2}{\text{mult}_x C} q_{C_2}(L, x) \quad ,\end{aligned}$$

d.h.  $q_C(L, x)$  ist eine Konvexkombination von  $q_{C_1}(L, x)$  und  $q_{C_2}(L, x)$ . Es folgt:

**Proposition 1.1.9** *Sei  $C = \bigcup_{i=1}^r C_i$  eine Kurve, so dass alle Komponenten  $C_i$  durch den Punkt  $x$  gehen. Dann ist der Seshadri-Quotient von  $C$  eine Konvexkombination der Seshadri-Quotienten der  $C_i$ , d.h.*

$$\min_{i=1, \dots, r} \{ q_{C_i}(L, x) \} \leq q_C(L, x) = \sum_{i=1}^r \left( \frac{\text{mult}_x C_i}{\text{mult}_x C} q_{C_i}(L, x) \right) \leq \max_{i=1, \dots, r} \{ q_{C_i}(L, x) \} \quad .$$

## 1.2 Submaximalität

Wie lassen sich Seshadri-Konstanten nun berechnen? Grundsätzlich geht es darum, die Gestalt des Nef-Kegels für die Aufblasung  $\text{Blow}_x X$  zu bestimmen. Diese wird unter anderem von den extremalen Kurven (falls existent) bestimmt, und es spielen hierbei nur Kurven eine Rolle, die eigentlich Transformierte von Kurven auf  $X$  sind (siehe Beweis von Proposition 1.1.3). Ein Weg Seshadri-Konstanten zu berechnen ist also, „gute“ Kurven auf  $X$  zu finden und dann im zweiten Schritt zu zeigen, dass sie die Seshadri-Konstante berechnen, d.h.  $\varepsilon(L, x) = \frac{L \cdot C}{\text{mult}_x C}$ .

Was sind nun „gute“ Kurven in diesem Zusammenhang?

**Definition 1.2.1** *Zu einem gegebenen amplem Geradenbündel  $L$  und einem Punkt  $x$  nennt man eine Kurve  $C$  submaximal, falls der Seshadri-Quotient von  $C$  kleiner ist als die theoretische obere Schranke für  $\varepsilon(L, x)$ :*

$$\frac{L \cdot C}{\text{mult}_x C} < \sqrt[\dim X]{L^{\dim X}}. \quad (1.2.1)$$

Im Fall  $\dim X = 2$  zeigte Szemberg:

**Satz 1.2.2 (Proposition 1.8 aus [Szemberg01])** *Sei  $X$  eine glatte algebraische Fläche,  $L$  ein ample Geradenbündel auf  $X$  und  $x \in X$ . Die Anzahl bzgl.  $L$  und  $x$  submaximaler irreduzibler Kurven ist nicht größer als der Rang der Néron-Severi-Gruppe. Außerdem kann es keine zwei submaximalen irreduziblen Kurven geben, die im selben Strahl  $\{\mathcal{O}(mC) \mid m \in \mathbb{R}\} \subset \text{NS}_{\mathbb{R}}(X)$  liegen.*

*Bemerkung:* Im Flächenfall ist  $\varepsilon(L, x)$  also entweder gleich  $\sqrt{L^2}$  oder das Minimum der endlich vielen submaximalen Seshadri-Quotienten und damit eine rationale Zahl kleiner als  $\sqrt{L^2}$ . Es ist bisher noch kein Beispiel einer irrationalen Seshadri-Konstante bekannt; man vermutet aber (Bemerkung 5.1.13 aus [Lazarsfeld]), dass solche Beispiele existieren und dass rationale Seshadri-Konstanten vielleicht sogar eher die Ausnahme sind. Wie man mit dem Nakai-Moishezon-Kriterium analog zu Gleichung (1.1.5) feststellt, ist die Seshadri-Konstante aber in jedem Fall eine algebraische Zahl vom Grad  $\leq \dim X$ .

Welches Verhalten erwarten wir bei festem  $x \in X$  für die Seshadri-Funktion  $\varepsilon : \text{Nef}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $L \mapsto \varepsilon(L, x)$ ? Zum einen wird es Gebiete geben, in denen submaximale Kurven (bzw. Untervarietäten) existieren, zum anderen können Bereiche vorliegen, an denen die Seshadri-Konstante maximal ist, d.h.  $\varepsilon(L, x) = \sqrt[\dim X]{L^{\dim X}}$ .

**Satz 1.2.3 a.** *Die Teilmenge von  $\text{Nef}(X)$ , in der eine Kurve  $C$  bzgl. eines festen Punktes  $x$  die Seshadri-Konstante ausrechnet, d.h.  $\varepsilon(L, x) = \frac{L \cdot C}{\text{mult}_x C}$ , ist ein konvexer Teilkegel von  $\text{Nef}(X)$  („Berechnungskegel von  $C$ “).*

**b.** *Sei  $\dim X = 2$ . Die Teilmenge von  $\text{Nef}(X)$ , bzgl. derer eine Kurve  $C$  bei festem Punkt  $x$  submaximal ist, ist ein konvexer Teilkegel von  $\text{Nef}(X)$  („Submaximalitätskegel von  $C$ “).*

*Beweis:* **a.** Nehmen wir an, dass  $C$  die Seshadri-Konstante für  $L$  und  $L'$  berechnet, d.h.  $\varepsilon(L, x) = q_C(L, x)$  und  $\varepsilon(L', x) = q_C(L', x)$ . Klar ist, dass für alle positiven Zahlen  $m$  gilt  $\varepsilon(mL, x) = m \varepsilon(L, x) = m q_C(L, x) = q_C(mL, x)$ . Nach Proposition 1.1.7 gilt für  $\lambda \in [0, 1]$

$$\varepsilon(\lambda L + (1 - \lambda)L', x) \geq \lambda \varepsilon(L, x) + (1 - \lambda) \varepsilon(L', x).$$

Auf der anderen Seite ist

$$\begin{aligned}\varepsilon(\lambda L + (1 - \lambda)L', x) &= \inf_{\overline{C}_X} \{q_C(\lambda L + (1 - \lambda)L', x)\} \leq q_C(\lambda L + (1 - \lambda)L', x) \\ &= \lambda q_C(L, x) + (1 - \lambda)q_C(L', x) = \lambda \varepsilon(L, x) + (1 - \lambda) \varepsilon(L', x) .\end{aligned}$$

Also wird die Seshadri-Konstante auch auf der Verbindungslinie von  $L$  und  $L'$  in  $\text{Nef}(X)$  von  $C$  berechnet.

**b.** Sei  $q_C(L, x) < \sqrt{L^2}$  und  $q_C(L', x) < \sqrt{L'^2}$ . Für alle  $\mu > 0$  und  $\lambda \in [0, 1]$  gilt

$$\begin{aligned}q_C(\mu L, x) &= \mu q_C(L, x) < \mu \sqrt{L^2} = \sqrt{(\mu L)^2} \quad \text{und} \\ (q_C(\lambda L + (1 - \lambda)L', x))^2 &= (\lambda q_C(L, x) + (1 - \lambda)q_C(L', x))^2 \\ &< (\lambda \sqrt{L^2} + (1 - \lambda)\sqrt{L'^2})^2 \\ &= \lambda^2 L^2 + (1 - \lambda)^2 L'^2 + 2\lambda(1 - \lambda)\sqrt{L^2 L'^2} .\end{aligned}$$

Letzteres ist nach dem Hodge-Index-Satz kleiner oder gleich

$$\lambda^2 L^2 + (1 - \lambda)^2 L'^2 + 2\lambda(1 - \lambda)L \cdot L' = (\lambda L + (1 - \lambda)L')^2 . \quad \square$$

Die Berechnungskegel zweier Kurven  $C$  und  $C'$  berühren sich entlang der Hyperebene

$$\{L \in \text{Nef}(X) \mid L \cdot (\text{mult}_x C' \cdot C - \text{mult}_x C \cdot C') = 0\} .$$

Ein Bereich, in dem die Seshadri-Konstante maximal ist, d.h.  $\varepsilon(L, x) = \sqrt{L^2}$ , berührt im Fall  $\dim X = 2$  den Berechnungskegel einer Kurve  $C$  nicht entlang einer Geraden (mit Ausnahme der Ursprungsgeraden):

Berühren sich die Bereiche entlang der Strecke  $\{\lambda L + (1 - \lambda)L' \mid \lambda \in [0, 1]\}$ , so ist

$$\begin{aligned}q_C(\lambda L + (1 - \lambda)L')^2 &= \lambda^2 q_C(L, x)^2 + 2\lambda(1 - \lambda)q_C(L, x)q_C(L', x) + (1 - \lambda)^2 q_C(L', x)^2 \\ &= (\lambda L + (1 - \lambda)L')^2 = \lambda^2 L^2 + 2\lambda(1 - \lambda)L \cdot L' + (1 - \lambda)^2 L'^2 .\end{aligned}$$

Vergleicht man die gemischten Terme, so folgt  $\sqrt{L^2}\sqrt{L'^2} = L \cdot L'$ . Damit müssen  $L$  und  $L'$  numerisch proportional gewesen sein.

Im Fall  $\dim X = 2$  ergibt sich nun eine Aufteilung des Nef-Kegels wie in Abbildung 1.

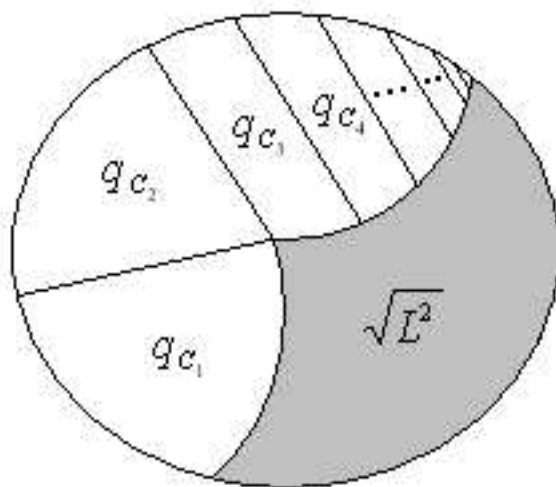


Abbildung 1: Schnitt in den Nef-Kegel einer glatten algebraischen Fläche mit Berechnungsfunktionen für die Seshadri-Konstante.

In vielen Beispielen sind es Kurven von kleinem Grad und niedriger Multiplizität, die die Seshadri-Konstante berechnen. Es gilt:

**Proposition 1.2.4 (Theorem 4.1 aus [Bauer99])** *Sei  $X$  eine glatte algebraische Fläche,  $L$  ein amples Geradenbündel,  $x \in X$  ein sehr allgemeiner Punkt und  $C$  eine irreduzible Kurve auf  $X$  mit  $q_C(L, x) \leq \sqrt{L^2}$ . Dann ist der Grad von  $C$  bzgl.  $L$  beschränkt durch*

$$L \cdot C < \frac{L^2}{\sqrt{L^2} - q_C(L, x)} .$$

*Beweis:* Sei  $C$  eine Kurve mit  $\text{mult}_x C = m > 1$ . Die grundlegende Idee aus [Ein-Lazarsfeld93] ist, dass Kurven mit kleinem Selbstschnitt ( $C^2 < m(m-1)$ ) nicht mit hoher Multiplizität ( $\text{mult}_x C \geq m$ ) durch den sehr allgemeinen Punkt laufen.

**Proposition 1.2.5 [Ein-Lazarsfeld93]** *Sei  $X$  eine glatte projektive Fläche und sei  $(C_t)_{t \in T}$  eine nichttriviale 1-Parameter-Familie von irreduziblen Kurven  $C_t \subset X$ . Weiterhin sei  $(x_t)_{t \in T}$  eine Familie von Punkten  $x_t \in X$  und  $m > 1$  eine ganze Zahl mit  $\text{mult}_{x_t} C_t \geq m$  für alle  $t \in T$ . Dann gilt bis auf endlich viele Ausnahmen*

$$C_t^2 \geq m(m-1) .$$

Wir können für unsere Kurve  $C$  durch den sehr allgemeinen Punkt folgern

$$C^2 \geq m(m-1) .$$

Nehmen wir nun an, dass gilt

$$\sqrt{L^2} - \frac{L \cdot C}{\text{mult}_x C} \geq \frac{L^2}{L \cdot C} . \quad (1.2.2)$$

Dann liegt ein ganzzahliges Vielfaches von  $\frac{L^2}{L \cdot C}$  zwischen  $\sqrt{L^2}$  und  $\frac{L \cdot C}{m}$ , d.h.  $\sqrt{L^2} \geq k \frac{L^2}{L \cdot C} > \frac{L \cdot C}{m}$ . Hieraus folgt nun  $k < m$ , d.h.  $k \leq m-1$ . Zusammen mit dem Hodge-Index-Theorem ergibt sich

$$\begin{aligned} m(m-1) &\leq C^2 \leq \frac{L \cdot C}{\sqrt{L^2}} \sqrt{C^2} \\ &< mk \frac{L^2}{L \cdot C} \sqrt{\frac{C^2}{L^2}} \leq mk \leq m(m-1) , \end{aligned}$$

d.h. ein Widerspruch zur Annahme (1.2.2). □

Eine ähnliche Argumentation liefert:

**Proposition 1.2.6** *Sei  $X$  eine glatte algebraische Fläche,  $L$  ein amples Geradenbündel auf  $X$ ,  $x \in X$  ein sehr allgemeiner Punkt,  $n \in \mathbb{N}$  und  $a > 0$  mit  $L^2 \geq \frac{n}{n-1} a^2$ . Weiterhin gelte  $\frac{L \cdot C}{\text{mult}_x C} \geq a$  für alle irreduziblen Kurven mit  $\text{mult}_x C \leq n$ . Dann folgt  $\varepsilon(L, x) \geq a$ .*

Das bedeutet, dass für Seshadri-Quotienten kleiner als  $\sqrt{\frac{n-1}{n}} \sqrt{L^2}$  nur solche Kurven mit  $\text{mult}_x C \leq n$  in Frage kommen.

Nehmen wir nun an, wir hätten eine submaximale Kurve gefunden. Dann müssen wir als



zweiten Schritt prüfen, ob diese Kurve die Seshadri-Konstante berechnet. Eine Möglichkeit dazu ergibt sich aus Satz 1.2.2, indem wir so viele submaximale irreduzible Kurven angeben wie die Picard-Zahl der Fläche ist. Die Seshadri-Konstante ist dann das Minimum der zugehörigen Seshadri-Quotienten.

Nun können wir aber nicht immer mit einer solchen Anzahl von submaximalen irreduziblen Kurven rechnen (vergleiche Bemerkung zu Satz 3.2.13). Ein anderes Hilfsmittel ist:

**Proposition 1.2.7 Lemma 5.2 aus [Bauer99]** *Sei  $X$  eine glatte algebraische Fläche,  $L$  ein amples Geradenbündel auf  $X$ ,  $x \in X$  und  $\zeta > 0$ . Nehmen wir an, wir haben ein  $k \in \mathbb{N}$  und einen Divisor  $D \in |\mathcal{O}(kL)|$ , so dass gilt*

$$\frac{L \cdot D}{\text{mult}_x D} \leq \zeta \sqrt{L^2} .$$

*Dann ist jede irreduzible Kurve  $C \subset X$  mit*

$$\frac{L \cdot C}{\text{mult}_x C} < \frac{1}{\zeta} \sqrt{L^2} .$$

*eine Komponente von  $D$ .*

Haben wir zu unserem Geradenbündel  $L$  einen submaximalen Divisor  $D \in |\mathcal{O}(kL)|$  gefunden, so müssen alle submaximalen irreduziblen Kurven Komponenten von  $D$  sein ( $\zeta = 1$  in Proposition 1.2.7). Ist der submaximale Divisor in  $|\mathcal{O}(kL)|$  sogar irreduzibel, dann berechnet er folglich die Seshadri-Konstante.

**Proposition 1.2.8 [Bauer01]** *Sei  $X$  eine glatte algebraische Fläche und  $C$  eine ample irreduzible Kurve, die submaximal bezüglich eines amples Geradenbündels  $L$  und eines Punktes  $x \in X$  ist. Dann berechnet  $C$  die Seshadri-Konstante  $\varepsilon(\mathcal{O}(C), x)$ .*

*Beweis:* Es ist

$$\frac{\sqrt{L^2} \sqrt{C^2}}{\text{mult}_x C} \leq \frac{L \cdot C}{\text{mult}_x C} < \sqrt{L^2}$$

und damit  $\frac{\mathcal{O}(C) \cdot C}{\text{mult}_x C} < \sqrt{\mathcal{O}(C)^2}$ . Da  $C$  irreduzibel ist, kann es nach Proposition 1.2.7 keine weiteren submaximalen irreduziblen Kurven für  $\mathcal{O}(C)$  geben.  $\square$

Ein weiteres Hilfsmittel bei der Berechnung der Seshadri-Konstante kann das folgende Lemma sein:

**Lemma 1.2.9** *Sei  $X$  eine algebraische Fläche und  $D = \sum_{i=1}^r C_i$  ein effektiver Divisor durch den Punkt  $x \in X$  mit den irreduziblen Komponenten  $C_i$ . Dann gilt für den Seshadri-Quotienten einer irreduziblen Kurve  $C \notin \{C_1, \dots, C_r\}$  mit  $x \in C$ :*

$$q_C(\mathcal{O}(D), x) \geq \text{mult}_x D .$$

*D.h. die Seshadri-Konstante von  $\mathcal{O}(D)$  wird durch eine der Komponenten von  $D$  berechnet, oder es gilt  $\min_{i=1, \dots, r} \{q_{C_i}(\mathcal{O}(D), x) \mid x \in C_i\} \geq \varepsilon(\mathcal{O}(D)) \geq \text{mult}_x D$ .*

*Beweis:* Sei  $C$  eine irreduzible Kurve durch den Punkt  $x$ , aber keine der Komponenten von  $D$ . Es gilt  $D \cdot C \geq \text{mult}_x D \cdot \text{mult}_x C$ , d.h.

$$q_C(\mathcal{O}(D), x) = \frac{D \cdot C}{\text{mult}_x C} \geq \text{mult}_x D .$$

Falls nun keine der Komponenten von  $D$  einen niedrigeren Seshadri-Quotienten als  $\text{mult}_x D$  besitzt, ist  $\varepsilon(\mathcal{O}(D)) \geq \text{mult}_x D$ .  $\square$

Ein Beispiel soll die Anwendung dieses Lemmas verdeutlichen: Seien  $E_1$  und  $E_2$  zwei elliptische Kurven auf einer abelschen Fläche mit  $E_1 \cdot E_2 = 2$  (siehe auch Kapitel 3.3). Wir betrachten das Geradenbündel  $L = \mathcal{O}(E_1 + E_2)$ , d.h.  $L^2 = 4$ . Nun ist  $\text{mult}_0(E_1 + E_2) = 2 = q_{E_1}(L, 0) = q_{E_2}(L, 0)$ . Wegen Lemma 1.2.9 können wir nun  $\varepsilon(\mathcal{O}(E_1 + E_2)) = 2$  folgern, d.h. die Seshadri-Konstante nimmt den maximal möglichen Wert an.

Neben diesen Argumenten, können wir auch die Konvexität des Berechnungskegels ausnutzen, um zu zeigen, dass eine bestimmte Kurve die Seshadri-Konstante berechnet. Können wir nämlich zeigen, dass eine Kurve  $C$  die Seshadri-Konstanten  $\varepsilon(L, x)$  und  $\varepsilon(L', x)$  berechnet, dann berechnet sie auch die Seshadri-Konstanten  $\varepsilon(\mu(\lambda L + (1 - \lambda)L'))$  für alle  $\mu > 0$  und  $\lambda \in [0, 1]$ .

### 1.3 Abelsche Varietäten

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der Geometrie abelscher Flächen. Wir möchten daher an dieser Stelle kurz die grundlegenden Begriffe aus der Theorie der abelschen Varietäten skizzieren und danach eine Klassifikation der abelschen Flächen anhand deren Endomorphismenalgebren angeben. Dies lässt sich zum Beispiel in [Lange-Birkenhake] nachlesen.

Sei  $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$  ein Gitter. Die komplexe Mannigfaltigkeit  $X := \mathbb{C}^n/\Lambda$  nennen wir einen *komplexen Torus*. Ist dieser projektiv, d.h. nach dem Theorem von Chow eine projektive Varietät, so nennen wir  $X$  eine *n-dimensionale abelsche Varietät*.

Eine *Thetafunktion* auf  $X$  zum Exponenten  $(\lambda, \mu)$  ist eine holomorphe Abbildung  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  mit der Eigenschaft  $f(x+u) = f(x) \exp(2\pi i(\lambda(x, u) + \mu(u)))$  für alle  $x \in \mathbb{C}^n$  und  $u \in \Lambda$ . Hierbei ist  $\lambda$  eine in der ersten Komponente  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung  $\mathbb{C}^n \times \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$  und  $\mu$  eine Abbildung  $\Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ . Eine *triviale* Thetafunktion ist eine Thetafunktion ohne Nullstellen, und zwei Thetafunktionen heißen *assoziiert*, wenn sie durch Multiplikation mit einer trivialen Thetafunktion auseinander hervorgehen. Es lässt sich zeigen, dass jede Thetafunktion assoziiert ist zu einer ausgezeichneten Thetafunktion, für die sich  $2i\lambda$  als eine Hermitesche Form  $H : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\text{Im}(H)(\Lambda \times \Lambda) \subset \mathbb{Z}$  realisieren lässt, und die sogenannte *k-Funktion*  $k : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $u \mapsto \mu(u) - \frac{1}{2}\lambda(u, u)$  reellwertig ist. Jeder Divisor auf einer abelschen Varietät lässt sich darstellen als Divisor einer meromorphen Thetafunktion  $\frac{f_1}{f_2}$ . Lineare Äquivalenz zeigt sich dann im Übereinstimmen der zugehörigen Hermiteschen Formen und *k-Funktionen*. Die Picard-Gruppe von  $X$  lässt sich daher beschreiben als

$$\text{Pic}(X) = \left\{ (H, k) \mid \begin{array}{l} H \text{ Hermitesche Form mit } \text{Im}(H)(\Lambda \times \Lambda) \subset \mathbb{Z} , \\ k : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \text{ mit } k(u+v) = k(u) + k(v) + \frac{1}{2}\text{Im}(H)(u, v) \end{array} \right\} .$$

Die ampeln Geradenbündel besitzen hierbei positiv definite Hermitesche Formen (auch *Polarisierungen* genannt). Der Selbstschnitt eines Geradenbündels berechnet sich aus dem Typ der Polarisierung  $(d_1, \dots, d_n)$  durch  $L^n = 2d_1 \cdots d_n$ . Ein amples Geradenbündel mit Selbstschnitt 2 bezeichnet man als *Prinzipalpolarisierung*.

Algebraisch äquivalent sind zwei Divisoren, wenn die zugehörigen Hermiteschen Formen gleich sind. Da man weiterhin zeigen kann, dass algebraische Äquivalenz auf abelschen Varietäten gleichbedeutend ist mit numerischer Äquivalenz, folgt für die Néron-Severi-Gruppe

$$\text{NS}(X) = \{ \text{Hermitesche Formen } H \text{ mit } \text{Im}(H)(\Lambda \times \Lambda) \subset \mathbb{Z} \} .$$

Man zeigt, dass sich jede holomorphe Abbildung zwischen abelschen Varietäten aus einer Translation und einem Homomorphismus zusammensetzt. Es gibt zu jedem Homomorphismus  $\alpha : \mathbb{C}^n/\Lambda \rightarrow \mathbb{C}^m/\Lambda'$  eine lineare Abbildung  $\varrho_a(\alpha) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$  mit  $\varrho_a(\alpha)(\Lambda) \subset \Lambda'$ , die sogenannte *analytische Darstellung*, für die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\varrho_a(\alpha)} & \mathbb{C}^m \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}^n/\Lambda & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{C}^m/\Lambda' \end{array}$$

kommutiert. Die Einschränkung  $\varrho_a(\alpha)|_\Lambda$  nennt man *rationale Darstellung*  $\varrho_r(\alpha) \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \Lambda')$ . Auf jeder abelschen Varietät gibt es zu ganzen Zahlen  $m$  die Endomorphismen  $m_X : [x] \mapsto [mx]$ ; für die generische abelsche Varietät sind dies sogar alle möglichen

Endomorphismen von  $X$ . Als *Endomorphismenalgebra* von  $X$  definieren wir

$$\text{End}_{\mathbb{Q}}(X) := \text{End}(X) \otimes \mathbb{Q}.$$

Eine *Isogenie* ist ein endlicher und surjektiver Morphismus zwischen abelschen Varietäten  $\alpha : X \rightarrow Y$ . Isogenien besitzen eine invertierbare analytische Darstellung und daher ein rationales Inverses  $\beta$  mit  $\beta \circ \alpha = m_X$  und  $\alpha \circ \beta = m_Y$ , sie sind also die Einheiten in  $\text{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ .

Der Poincarésche Reduzibilitätssatz besagt, dass jede abelsche Varietät isogen ist zu einem bis auf Reihenfolge eindeutigen Produkt  $\prod_i X_i^{n_i}$  von untereinander nicht isogenen einfachen abelschen Varietäten. Eine abelsche Varietät heißt in diesem Zusammenhang *einfach*, wenn sie keine abelschen Untervarietäten enthält, was gleichbedeutend damit ist, dass sie nicht isogen ist zu einem Produkt zweier abelscher Varietäten. Auf einfachen abelschen Varietäten ist jeder Endomorphismus, der nicht die Nullabbildung ist, eine Isogenie (das Bild eines Morphismus ist abelsche Untervarietät), d.h.  $D := \text{End}_{\mathbb{Q}}(X)$  ist ein Schiefkörper. Außerdem ist  $\dim_{\mathbb{Q}} D$  ein Teiler von  $2 \dim X$  ( $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  ist ein  $D$ -Vektorraum via  $\alpha \cdot \lambda := \varrho_r(\alpha)(u)$ ).

Die *duale abelsche Varietät*  $\hat{X} := \text{Pic}^0(X)$  definiert man als Kern der Abbildung  $\text{Pic}(X) \rightarrow \text{NS}(X)$ ,  $(H, k) \mapsto H$ . Die *duale Abbildung*  $\hat{\alpha}$  zu einem Morphismus  $\alpha : X \rightarrow Y$  ist dann gegeben durch den Pullback  $[D] \mapsto [\alpha^* D]$ . Insgesamt bekommen wir einen kontravarianten Funktor auf der Kategorie der abelschen Varietäten. Zu jedem Divisor  $D$  auf  $X$  gibt es die Abbildung  $\Phi_D : X \rightarrow \hat{X}$ ,  $a \mapsto [D_a - D]$ . Hierbei ist  $D_a$  der um  $-a$  verschobene Divisor  $D$ . Zu einer festen Polarisierung  $H = \mathcal{O}(D)$  lässt sich so die sogenannte *Rosati-Involution*  $\alpha \mapsto \alpha' := \Phi_D^{-1} \hat{\alpha} \Phi_D$  auf  $\text{End}_{\mathbb{Q}}(X)$  definieren. Es gilt  $\alpha'' = \alpha$  und  $\varrho_a(\alpha') = (H^t)^{-1} \overline{\varrho_a(\alpha)}^t H^t$ . Einen Endomorphismus mit  $\alpha' = \alpha$  nennt man *symmetrisch*. Nun stellt sich heraus, dass durch die Abbildung  $\varphi : \text{NS}(X) \rightarrow \text{End}(X)$ ,  $L \mapsto \Phi_H^{-1} \circ \Phi_L$  ein injektiver Gruppenhomomorphismus definiert wird mit  $\varphi(\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X)) = \{ \alpha \in \text{End}_{\mathbb{Q}}(X) \mid \alpha = \alpha' \} =: \text{End}_{\mathbb{Q}}^{\text{sym}}(X)$ . Geht man von einer Prinzipalpolarisierung  $H$  aus, so bekommt man sogar einen Isomorphismus  $\varphi(\text{NS}(X)) \cong \text{End}^{\text{sym}}(X)$ . Durch die Kenntnis der Endomorphismenalgebra einer abelschen Varietät lassen sich dann auch Aussagen über die Néron-Severi-Gruppe folgern.

## 1.4 Klassifikation abelscher Flächen

An dieser Stelle wollen wir einen Überblick über die Klassifikation der abelschen Flächen anhand deren Endomorphismenringen angeben (einen elementaren Beweis hierzu findet man in [Rupert99]). Wir gehen zunächst auf die elliptischen Kurven ein und schließen damit auf die nichteinfachen abelschen Flächen.

Sei  $E$  eine elliptische Kurve. Nun ist  $\text{NS}(E) \cong \mathbb{Z}$  und  $D := \text{End}_{\mathbb{Q}}(E)$  ein Schiefkörper der Dimension 1 oder 2 über  $\mathbb{Q}$ . Durch die analytische Darstellung lässt sich  $D$  in die komplexen Zahlen einbetten, d.h. entweder ist  $D \cong \mathbb{Q}$  oder  $D \cong \mathbb{Q}(\alpha)$  mit einer komplexen Zahl  $\alpha$  vom Grad 2. Im Fall  $D \cong \mathbb{Q}(\alpha)$  spricht man von einer elliptischen Kurve mit komplexer Multiplikation. Da die Rosati-Involution im Fall elliptischer Kurven als komplexe Konjugation wirkt, lässt sich  $\alpha$  sogar als rein komplexer Endomorphismus  $\alpha = \sqrt{-d}$  mit einer quadratfreien natürlichen Zahl  $d$  wählen.

Sei  $S$  eine abelsche Fläche und  $D := \text{End}_{\mathbb{Q}}(S)$ . Das erste charakterisierende Merkmal

wird sein, ob  $S$  elliptische Kurven enthält oder nicht, d.h. ob  $S$  eine nichteinfache oder einfache abelsche Varietät ist. Falls  $S$  eine elliptische Kurve  $E_1$  enthält, läßt sich nach dem Reduzibilitätssatz von Poincaré eine dazu komplementäre elliptische Kurve  $E_2$  finden, so dass  $S$  zu dem Produkt  $E_1 \times E_2$  isogen ist. Also ist

$$D \cong \text{End}_{\mathbb{Q}}(E_1 \times E_2) = \begin{pmatrix} \text{End}_{\mathbb{Q}}(E_1) & \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(E_2, E_1) \\ \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(E_1, E_2) & \text{End}_{\mathbb{Q}}(E_2) \end{pmatrix}.$$

Sind die elliptischen Kurven  $E_1$  und  $E_2$  nicht isogen, so ist  $D \cong \text{End}_{\mathbb{Q}}(E_1) \times \text{End}_{\mathbb{Q}}(E_2)$  und  $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(S) \cong \text{NS}_{\mathbb{Q}}(E_1) \times \text{NS}_{\mathbb{Q}}(E_2) \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ .

Sind  $E_1$  und  $E_2$  isogen, ist  $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(S) \cong \text{End}_{\mathbb{Q}}^{\text{sym}}(S) = M_2^{\text{herm}}(\text{End}_{\mathbb{Q}}(E_1))$  (die Rosati-Involution wirkt auf die analytische Darstellung durch Transponieren und komplexes Konjugieren). Also ist

$$\text{NS}_{\mathbb{Q}}(S) \cong \begin{cases} \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{Q} \right\} & , \text{ falls } \text{End}_{\mathbb{Q}}(E_1) \cong \mathbb{Q} \\ \left\{ \begin{pmatrix} a & b + \alpha c \\ b - \alpha c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q} \right\} & , \text{ falls } \text{End}_{\mathbb{Q}}(E_1) \cong \mathbb{Q}(\alpha) . \end{cases}$$

Damit existieren die folgenden Fälle:

$$\text{End}_{\mathbb{Q}}(E_1 \times E_2) \cong \begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix} & , \text{ falls } E_1 \not\cong E_2 \\ M_2^{\text{herm}}(\text{End}_{\mathbb{Q}}(E_1)) & , \text{ falls } E_1 \cong E_2 \end{cases}$$

$$\text{NS}_{\mathbb{Q}}(E_1 \times E_2) \cong \begin{cases} \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in \mathbb{Q} \right\} & , \text{ falls } E_1 \not\cong E_2 \\ \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{Q} \right\} & , \text{ falls } E_1 \cong E_2 \text{ ohne kompl. Mult.} \\ \left\{ \begin{pmatrix} a & b + \alpha c \\ b - \alpha c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q} \right\} & , \text{ falls } E_1 \cong E_2 \text{ mit kompl. Mult.} \end{cases}$$

Für den letzten Fall ist anzumerken, dass jede abelsche Fläche, die isogen zu einem Produkt zweier elliptischer Kurven mit komplexer Multiplikation ist, sogar isomorph zu einem Produkt zweier solcher Kurven ist (Korollar 10.6.3 aus [Lange-Birkenhake]).

Im Fall einer einfachen abelschen Fläche ist  $D$  ein Schiefkörper der Dimension eins, zwei oder vier über  $\mathbb{Q}$ . Man unterscheidet hier die vier Fälle

1.  $\dim_{\mathbb{Q}} D = 1$  (Generischer Fall) ,
2.  $\dim_{\mathbb{Q}} D = 2$  (Reelle Multiplikation) ,
3.  $\dim_{\mathbb{Q}} D = 4$  und  $D$  ist kommutativ (Komplexe Multiplikation) ,
4.  $\dim_{\mathbb{Q}} D = 4$  und  $D$  ist nicht kommutativ (Quaternionenmultiplikation) .

Im generischen Fall einer abelschen Fläche lässt das Gitter außer den Multiplikationen mit ganzen Zahlen keine weiteren linearen Abbildungen mit  $\varrho_a(\alpha)(\Lambda) \subset \Lambda$  zu. Damit ist  $D \cong \mathbb{Q}$  und  $\text{NS}(S) \cong \mathbb{Z}$ . Wie wir im Folgenden sehen werden, ist dies der einzige Fall einer abelschen Fläche mit Picard-Zahl 1.

Im Fall einer abelschen Fläche mit  $\dim_{\mathbb{Q}} D = 2$  ist  $D$  eine normale Körpererweiterung von

$\mathbb{Q}$ . Hier lässt sich zeigen, dass  $D \cong \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  für eine ganze Zahl  $d > 0$  gilt (der Fall  $d < 0$  kommt auf abelschen Flächen nicht vor). Die Rosati-Involution ist hier die Identität, und damit ist  $\text{NS}(S) \cong \text{End}(S) \cong \mathbb{Z}^2$ .

Sei nun  $\dim_{\mathbb{Q}} D = 4$  und  $D$  kommutativ. Es lässt sich zeigen, dass die symmetrischen Endomorphismen  $D^{sym} := \text{End}_{\mathbb{Q}}^{sym}(S)$  einen Zwischenkörper vom Grad 2 bilden mit  $D^{sym} = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  und  $d \in \mathbb{N}$ . Damit ist  $\text{NS}(S) \cong \mathbb{Z}^2$ . Weiterhin ist die Körpererweiterung  $D \supset D^{sym}$  realisierbar als imaginärquadratische Erweiterung  $D = D^{sym}(\sqrt{\delta})$  mit  $\delta < 0$ , d.h.  $D = \mathbb{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{\delta})$ . Die Rosati-Involution ist dann die komplexe Konjugation.

Im Fall  $\dim_{\mathbb{Q}} D = 4$  mit einem nichtkommutativen Endomorphismenring ist  $D$  eine indefinite Quaternionenalgebra  $D \cong Q_{a,b}$  ( $a, b \in \mathbb{Q}$  nicht beide negativ). Die Rosati-Involution wirkt durch Vorzeichenwechsel von  $\sqrt{a}$  und  $\sqrt{b}$ , und es ist  $\text{NS}(S) \cong \mathbb{Z}^3$ .

Zusammengefasst gilt also:

$$\text{End}_{\mathbb{Q}}(S) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{Generischer Fall} \\ \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \text{ mit } d \in \mathbb{Q}, d > 0 & \text{Reelle Multiplikation} \\ \mathbb{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{\delta}) \text{ mit } d \in \mathbb{Q}, d > 0, \delta < 0 & \text{Komplexe Multiplikation} \\ Q_{a,b} \text{ mit } a, b \in \mathbb{Q} \text{ nicht beide negativ} & \text{Quaternionenmultiplikation} \end{cases}$$

$$\text{NS}(S) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{Generischer Fall} \\ \mathbb{Z}^2 & \text{Reelle Multiplikation} \\ \mathbb{Z}^2 & \text{Komplexe Multiplikation} \\ \mathbb{Z}^3 & \text{Quaternionenmultiplikation} \end{cases}$$

# Kapitel 2

## Seshadri-Konstanten auf abelschen Flächen

### 2.1 Allgemeine Aussagen

In diesem Kapitel wollen wir nun Seshadri-Konstanten auf abelschen Flächen untersuchen. Da abelsche Varietäten homogen sind, können wir eine Kurve, die durch einen beliebigen Punkt verläuft, so verschieben, dass sie mit der gleichen Multiplizität durch den Nullpunkt läuft. Die numerische Äquivalenzklasse bleibt dabei erhalten. Es gilt daher für jedes ample Geradenbündel  $L$  und jeden Punkt  $x \in X$

$$\varepsilon(L, x) = \varepsilon(L, 0) =: \varepsilon(L) . \quad (2.1.1)$$

Zu jeder irreduziblen Kurve  $C$  können wir einen Divisor  $D \in H^0(\mathcal{O}_X(L))$  so verschieben, dass  $C$  und  $D + a$  sich eigentlich schneiden, d.h.  $C \cdot (D + a) \geq \text{mult}_0 C \cdot \text{mult}_0(D + a)$ . Damit folgt

$$\varepsilon(L) \geq 1 . \quad (2.1.2)$$

Nakamaye zeigt, dass  $\varepsilon(L) = 1$  nur dann auftritt, wenn die abelsche Varietät isogen ist zu einem Produkt einer elliptischen Kurve und einer Untervarietät der Kodimension 1 [Nakamaye96].

Für Prinzipalpolarisierungen auf abelschen Flächen lassen sich die Seshadri-Konstanten berechnen.

**Proposition 2.1.1 (Proposition 2 aus [Steffens98])** *Sei  $(S, L)$  eine prinzipalpolarierte abelsche Fläche. Es gilt*

$$\varepsilon(L) = \begin{cases} \frac{4}{3} & , \text{ falls } S \text{ einfach} , \\ 1 & , \text{ falls } S \text{ nichteinfach} . \end{cases}$$

Grundlage für den Beweis ist ein Satz von A. Weil:

**Satz 2.1.2 (Satz 2 aus [Weil57])** *Sei  $(S, L)$  eine prinzipalpolarierte abelsche Fläche und  $D \in |L|$ . Ist  $D$  eine irreduzible Kurve, so ist  $D$  vom Geschlecht zwei und  $S$  ist die Jacobi-Varietät von  $D$ . Andernfalls existieren elliptische Kurven  $E$  und  $E'$  auf  $S$  mit  $D = E + E'$ .*

*Beweis von Proposition 2.1.1:* Im ersten Fall ist  $D$  also ein Thetadivisor von  $S$ , und dieser läuft durch 6 Halbperioden von  $S$  (Weierstrass-Punkte der hyperelliptischen Kurve  $D$ ). Es lässt sich nun zeigen, dass die Abbildung  $2_S : D \rightarrow 2_S(D)$ ,  $s \mapsto 2s$  birational ist. Damit ist  $2_S(D)$  eine irreduzible Kurve mit einer sechsfachen Singularität im Nullpunkt. Sie ist numerisch äquivalent zu  $4L$  (Folgerung 2.3.6 aus [Lange-Birkenhake]). Also gilt

$$\frac{2_S(D) \cdot L}{\text{mult}_0 2_S(D)} = \frac{4L^2}{6} = \frac{4}{3} .$$

Da wir so eine irreduzible submaximale Kurve in  $|4L|$  gefunden haben, berechnet diese nach Proposition 1.2.7 die Seshadri-Konstante.

Im zweiten Fall ist  $2 = L^2 = 2E \cdot E'$ , d.h.  $E \cdot E' = 1$  (wegen Proposition 2.1.6 gilt  $E^2 = E'^2 = 0$ ). Damit ist

$$\frac{L \cdot E}{\text{mult}_0 E} = (E + E') \cdot E = 1 ,$$

also  $\varepsilon(L) \leq 1$ . Wegen (2.1.2) ist dann  $\varepsilon(L) = 1$ . □

**Proposition 2.1.3** *Sei  $S$  eine abelsche Fläche und  $L$  eine Polarisierung auf  $S$  vom Typ  $(1, 2)$ . Dann gilt  $\varepsilon(L) \in \{1, 2\}$ .*

*Beweis:* Zunächst suchen wir uns ein zu  $L$  numerisch äquivalentes symmetrisches Geradenbündel  $L'$ , so dass  $h^0(\mathcal{O}(L'))^+ = h^0(\mathcal{O}_S(L)) = \frac{L^2}{2} = 2$  gilt (vergleiche Kapitel 3 von [Bauer94]).

Falls alle Divisoren in  $|L'|$  irreduzibel sind, so gibt es einen geraden irreduziblen Divisor  $C \in H^0(\mathcal{O}(L))^+$ , der durch den Nullpunkt geht. Da gerade Divisoren in den Halbperioden auch gerade Multiplizitäten besitzen (Proposition 1.2 aus [Bauer94]), ist  $\text{mult}_0 C \geq 2$ . Falls  $\text{mult}_0 C \geq 4$  wäre, so wäre  $C$  submaximal. Für submaximale irreduzible Kurven gilt nach (2.4.7) aber  $C^2 - (\text{mult}_0 C)^2 \geq -4$ , was hier nicht erfüllt ist. Damit ist  $\text{mult}_0 C = 2$  und  $\frac{L \cdot C}{\text{mult}_0 C} = 2 = \sqrt{L^2}$ . Nach Proposition 1.2.7 kann es nun keine submaximalen Kurven geben, d.h.  $\varepsilon(L) = 2$ .

Falls nun ein reduzibler Divisor  $D \in |L'|$  existiert, so gibt es wegen  $D^2 = 4$  und unter Ausnutzung von Proposition 2.1.6 nur die Fälle

$$D = \begin{cases} E_1 + E_2 & , \text{ für zwei elliptische Kurven } E_1, E_2 \text{ mit } E_1 \cdot E_2 = 2 \quad , \\ 2E_1 + E_2 & , \text{ für zwei elliptische Kurven } E_1, E_2 \text{ mit } E_1 \cdot E_2 = 1 \quad , \\ C + E & , \text{ für eine elliptische Kurve } E \text{ und eine irreduzible} \\ & \text{Kurve } C \text{ mit } C^2 = 2 \text{ und } E \cdot C = 1 \quad . \end{cases}$$

Im ersten Fall ist  $L \cdot E_1 = 2 = \sqrt{L^2}$ . Wegen Lemma 1.2.9 gibt es auch hier keine submaximalen Kurven, und es gilt  $\varepsilon(L) = 2$ . Im zweiten Fall ist  $\varepsilon(L) = L \cdot E_1 = 1$ . Genauso gilt im dritten Fall  $\varepsilon(L) = L \cdot E = 1$ . □

*Bemerkung:* Für Polarisierungen vom Typ  $(1, d)$  und einige kleine Werte von  $d$  lassen sich mit den Argumenten aus 2.1.1 und 2.1.3 ähnliche Aussagen erzielen.

Auch für abelsche Varietäten mit höherer Dimension kann man ähnliche Berechnungen wie in 2.1.1 durchführen (siehe [Nakamaye96], [Steffens98], [Szemberg01]), auf diese wollen wir hier aber nicht näher eingehen.



Da wir daran interessiert sind, Seshadri-Konstanten für ample, bzw. nef Geradenbündel zu berechnen, stellt sich die Frage nach der Form des amplen, bzw. Nef-Kegels einer abelschen Fläche. Bauer bewies [Bauer98], dass im Fall  $\rho(S) > 1$  der Nef-Kegel in der Regel nicht rational polyedrisch ist, nämlich nur falls  $S$  isogen ist zu einem Produkt zweier nicht isogener elliptischer Kurven. In Kapitel 7 von [Bauer99] untersucht er  $\text{Nef}(S)$  genauer.

**Proposition 2.1.4** *Sei  $S$  eine abelsche Fläche und  $A$  ein amplex Geradenbündel auf  $S$ . Der Nef-Kegel von  $S$  wird gegeben durch*

$$\text{Nef}(S) = \{ L \in \text{NS}_{\mathbb{R}}(S) \mid L^2 \geq 0, L \cdot A \geq 0 \} .$$

*Beweis:* Sei zuerst  $L \in \text{NS}(S)$  mit  $L^2 > 0$  und  $L \cdot A > 0$ . Da  $L^2$  positiv ist, hat  $L$  oder  $-L$  nach Riemann-Roch einen globalen Schnitt

$$h^0(\mathcal{O}_S(L)) + h^0(\mathcal{O}_S(-L)) = \frac{1}{2}L^2 + h^1(\mathcal{O}_S(L)) ,$$

und wegen  $L \cdot A > 0$  ist es  $L$ . Da  $S$  homogen ist, ist daher  $L$  in jedem Falle nef (Verschieben eines Divisors ändert nicht die numerische Äquivalenzklasse). Dasselbe gilt nun für beliebige Konvexkombinationen, d.h.  $\{ L \in \text{NS}_{\mathbb{R}}(S) \mid L^2 > 0, L \cdot A > 0 \} \subset \text{Nef}(S)$ . Wegen  $\text{Nef}(S) \subset \{ L \in \text{NS}_{\mathbb{R}}(S) \mid L^2 \geq 0, L \cdot A \geq 0 \}$  und da  $\text{Nef}(S)$  ein abgeschlossener Kegel ist, folgt die Gleichheit.  $\square$

**Proposition 2.1.5** *Ein Geradenbündel  $L \in \text{Pic}(S)$  auf einer abelschen Fläche ist genau dann ample, wenn  $L^2 > 0$  und  $L \cdot C > 0$  ist für eine Kurve  $C$  auf  $S$ .*

*Beweis:* Analog zu 2.1.4 ist  $L$  nef. Falls nun  $L \cdot C = 0$  ist für eine effektive, zu  $L$  numerisch inäquivalente Kurve  $C$ , so ist nach dem Hodge-Index-Satz  $C^2 < 0$  – ein Widerspruch. Daher können wir das Nakai-Moisheson-Kriterium anwenden und  $L$  ist ample.  $\square$

Was ist mit dem Rand von  $\text{Nef}(S)$ ?

**Proposition 2.1.6** *Der ganzzahlige Rand des Nef-Kegels einer abelschen Fläche  $S$  besteht aus den Vielfachen der elliptischen Kurven auf  $S$ . Weiterhin ist eine irreduzible Kurve  $C$  genau dann elliptisch, wenn  $C^2 = 0$  gilt.*

*Beweis:* Sei  $L$  ein ganzzahliges Geradenbündel ( $L \in \text{NS}(S)$ ) aus dem Rand von  $\text{Nef}(S)$ . Falls  $L^2 > 0$  gilt, ist wie im Beweis zu 2.1.5  $L \cdot C > 0$  für jede zu  $L$  numerisch inäquivalente Kurve. Daher können wir das Nakai-Moisheson-Kriterium anwenden und  $L$  wäre ample, d.h. läge nicht auf dem Rand von  $\text{Nef}(S)$ . Es gilt also  $L^2 = 0$ , und aus dem Hodge-Index-Satz folgt  $L \cdot A > 0$  für jede Polarisierung  $A$  auf  $S$ . Nun benötigen wir folgendes Lemma:

**Lemma 2.1.7 (Lemma 2.4 aus [Bauer95])** *Sei  $L$  ein Geradenbündel auf einer abelschen Fläche mit  $L^2 = 0$  und  $L \cdot A > 0$  für ein amplex Geradenbündel  $A$ . Dann ist  $L$  effektiv.*

Für einen Divisor  $D = \sum_{i=1}^r D_i \in |L|$  ( $D_i$  irreduzibel) muss wegen  $D^2 = 0$  gelten:  $D_i \cdot D_j = 0$  für alle  $i, j$  (auf einer abelschen Fläche sind Schnittzahlen niemals negativ). Dies kann nur erfüllt werden, wenn die  $D_i$  numerisch äquivalent sind, d.h.  $L$  ist numerisch äquivalent zu einem Vielfachen einer irreduziblen Kurve  $D_1$ . Nach der Adjunktionsformel ( $p_a(D_1) = \frac{1}{2}D_1^2 + 1 = 1$ ) sind irreduzible Kurven mit  $D_1^2 = 0$  elliptisch.  $\square$

**Lemma 2.1.8** *Für eine irreduzible elliptische Kurve  $N$  auf einer abelschen Fläche  $S$  gilt*

$$h^0(\mathcal{O}_S(N)) = 1 .$$

*Beweis:* Wir betrachten die Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_S(N) \rightarrow \mathcal{O}_N(N) \rightarrow 0 .$$

Nach dem Satz von Riemann-Roch ist  $h^0(\mathcal{O}_N(N)) = 0$  und damit

$$h^0(\mathcal{O}_S(N)) = h^0(\mathcal{O}_S) = 1 .$$

□

## 2.2 Submaximalität

Es zeigt sich, dass auf abelschen Flächen zu jedem amplen Geradenbündel, dessen Selbstschnitt keine Quadratzahl ist, immer ein submaximaler Divisor existiert.

**Satz 2.2.1 (Theorem A1.a aus [BauerSzemberg98])** *Sei  $S$  eine abelsche Fläche und  $L$  ein amples Geradenbündel auf  $S$  mit  $\sqrt{L^2} \notin \mathbb{Q}$ . Sei weiterhin  $(l, k)$  eine nichttriviale positive ganzzahlige Lösung der Pellischen Gleichung*

$$l^2 - L^2 k^2 = 1 . \tag{2.2.1}$$

*Dann gibt es einen Divisor  $D_{Pell} \in H^0(\mathcal{O}_S(2kL))^+$  mit  $\text{mult}_0 D_{Pell} \geq 2l$ . Es gilt*

$$\varepsilon(L) \leq \frac{D_{Pell} \cdot L}{\text{mult}_0 D_{Pell}} \leq \frac{k}{l} L^2 = \sqrt{1 - \frac{1}{l^2}} \sqrt{L^2} . \tag{2.2.2}$$

*Beweis:* Durch einfaches Abzählen, wie viele Bedingungen es benötigt, dass ein Divisor in  $|nL|$  zur Ordnung  $m$  verschwindet, werden wir nicht zum gewünschten Ergebnis gelangen. Die Idee ist, zu einem zum Ausgangsbündel numerisch äquivalenten symmetrischen Geradenbündel überzugehen und die geraden Schnitte in  $|nL|$  zu betrachten. Theorem 3.1 aus [Bauer94] berechnet die Dimension des Raumes der geraden Schnitte in ein symmetrisches amples Geradenbündel

$$h^0(\mathcal{O}_S(nL))^+ = 2 + \frac{n^2 L^2}{4} - \frac{n^-(\mathcal{O}_S(nL))}{4} ,$$

wobei  $n^-(\mathcal{O}_S(nL))$  die Anzahl der ungeraden Halbperioden von  $nL$  bezeichnet (Näheres zu symmetrischen Geradenbündeln siehe [Lange-Birkenhake] Kapitel 4.6). Für gerade Vielfache  $2kL$  ist damit  $h^0(\mathcal{O}_S(2kL))^+ = 2 + k^2 L^2$ . Nun verschwindet ein gerader Divisor in einer Halbperiode zu einer geraden Ordnung, d.h. die Anzahl der Bedingungen, dass er zur Ordnung  $m = 2l$  verschwindet, ist

$$1 + 3 + \dots + (m - 1) = \left(\frac{m}{2}\right)^2 = l^2 .$$

An dieser Stelle nutzen wir, dass  $(k, l)$  eine Lösung der Pellischen Gleichung ist, d.h.  $l^2 = 1 + k^2 L^2$ . Damit ist sichergestellt, dass es einen Divisor  $D_{Pell} \in H^0(\mathcal{O}_S(2kL))^+$  gibt mit  $\text{mult}_0 D_{Pell} \geq 2l$ . Es gilt Gleichung (2.2.2). □

**Satz 2.2.2** *Die Pell'sche Gleichung*

$$x^2 - dy^2 = 1 \tag{2.2.3}$$

besitzt für alle positiven ganzen Zahlen  $d$  mit  $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$  unendlich viele ganzzahlige Lösungen. Die kleinste nichttriviale positive Lösung („primitive Lösung“) lässt sich mit Hilfe von Kettenbrüchen effektiv bestimmen. Alle anderen Lösungen  $(x_n, y_n)$  lassen sich dann aus der primitiven Lösung  $(x_0, y_0)$  berechnen, indem man

$$x_n \pm y_n \sqrt{d} = (x_0 \pm y_0 \sqrt{d})^n \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \sqrt{d} \tag{2.2.4}$$

für natürliche Zahlen  $n$  bildet.

Ein Beweis hierfür findet sich z.B. in Kapitel 10.9 von [Hua].

*Bemerkung:* Die primitive Lösung der Pell'schen Gleichung liefert nach (2.2.2) auch den Divisor mit dem niedrigsten Seshadri-Quotienten. Diesen Divisor wollen wir „Pell-Divisor“ nennen.

Wir haben nun also zu den amplen Geradenbündeln  $L$  mit  $L^2 \notin \mathbb{Q}$  einen submaximalen Divisor  $D_{Pell}$  gefunden. Da dieser sogar aus  $|2kL|$  stammt, berechnet nach Proposition 1.2.7 eine Komponente von  $D_{Pell}$  die Seshadri-Konstante von  $L$ . Im generischen Fall, d.h.  $S$  hat Picard-Zahl 1, konnte Bauer sogar nachweisen, dass  $D_{Pell}$  selbst die Seshadri-Konstante berechnet (siehe 2.4.1). In den anderen Fällen ist leider nicht bekannt, ob und wie  $D_{Pell}$  zerfällt.

Wie schon in Satz 1.2.4 festgestellt, zeigt es sich auch hier wieder, dass besonders die Kurven mit kleinem Selbstschnitt, bzw. Geschlecht  $(p_a(C) = \frac{1}{2}C^2 + 1)$  für die Berechnung der Seshadri-Konstante von großer Bedeutung sind.

**Lemma 2.2.3 (Theorem A1.b aus [BauerSzemberg98])** *Auf einer abelschen Fläche gilt für jede irreduzible Kurve  $C$  vom Geschlecht  $p_a(C) > 1$*

$$q_C(L) = \frac{L \cdot C}{\text{mult}_0 C} \geq \sqrt{\frac{7}{8}} \sqrt{L^2}. \tag{2.2.5}$$

Für Kurven mit  $p_a \geq 8$  ( $C^2 \geq 14$ ) gilt weiterhin

$$q_C(L) = \frac{L \cdot C}{\text{mult}_0 C} \geq \frac{\sqrt{C^2}}{\sqrt{C^2 - \frac{7}{4} + \frac{1}{2}}} \sqrt{L^2}. \tag{2.2.6}$$

*Beweis:* Die Idee ist, die Ungleichung zwischen dem geometrischen Geschlecht  $p_g(C)$  und dem arithmetischen Geschlecht  $p_a(C)$  auszunutzen:

$$p_a(C) - p_g(C) \geq \binom{\text{mult}_0 C}{2}. \tag{2.2.7}$$

Es zeigt sich, dass  $p_g(C) \geq 2$  ist: Zum einen enthalten abelsche Varietäten keine rationalen Kurven ( $p_g(C) = 0$ ), andererseits kann die Normalisierung  $N$  von  $C$  auch keine elliptische

Kurve sein ( $p_g(C) = 1$ ), da ansonsten  $N \rightarrow C \hookrightarrow S$  nach Translation ein Homomorphismus von abelschen Varietäten wäre. Das hieße,  $C$  wäre in einer irreduziblen elliptischen Kurve enthalten, was natürlich nicht möglich ist. Aus (2.2.7) folgt nun

$$\text{mult}_0 C \leq \sqrt{C^2 - \frac{7}{4} + \frac{1}{2}} \leq \sqrt{\frac{(L \cdot C)^2}{L^2} - \frac{7}{4} + \frac{1}{2}}.$$

Für den Seshadri-Quotienten von  $C$  gilt damit

$$q_C(L) = \frac{L \cdot C}{\text{mult}_0 C} \geq \frac{L \cdot C}{\sqrt{\frac{(L \cdot C)^2}{L^2} - \frac{7}{4} + \frac{1}{2}}}. \quad (2.2.8)$$

Wenn wir die reelle Funktion  $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{\frac{x^2}{L^2} - \frac{7}{4} + \frac{1}{2}}}$  untersuchen, stellen wir fest, dass diese ihr Minimum im Punkt  $x = \sqrt{14L^2}$  annimmt. Bis zum Minimum ist die Funktion monoton fallend und danach monoton steigend, wobei sie sich asymptotisch  $\sqrt{L^2}$  annähert. Durch den Funktionswert am Minimum erhalten wir Ungleichung (2.2.5) und durch die Monotonie der Funktion bekommen wir für  $L \cdot C \geq \sqrt{L^2 C^2} \geq \sqrt{14L^2}$  auch Ungleichung (2.2.6).  $\square$

## 2.3 Seshadri-Konstanten und Isogenien

In diesem Abschnitt wollen wir kurz andeuten, wie sich Seshadri-Konstanten unter Isogenien verhalten. Sei  $\varphi : X' \rightarrow X$  eine Isogenie abelscher Varietäten und  $L$  ein nef Geradenbündel auf  $X$ . Da Isogenien endliche unverzweigte Überlagerungen sind, könnte man vermuten, dass man in der Lage ist, aus Informationen über  $\varepsilon(L)$  auf  $\varepsilon(\varphi^*(L))$  zu schließen. Leider verhalten sich die numerischen Äquivalenzklassen unter Isogenien in einer nicht leicht vorhersagbaren Weise.

Aus Proposition 4.1.2 aus [Lange-Birkenhake] wissen wir, dass zu jeder polarisierten abelschen Varietät  $(X, L)$  eine prinzipalpolarierte abelsche Varietät  $(X', P)$  und eine Isogenie  $\varphi : X \rightarrow X'$  existiert mit  $\varphi^*(P) = L$ . Die Seshadri-Konstante einer Prinzipalpolarisierung können wir nach Proposition 2.1.1 berechnen. Es ist aber nicht ohne Weiteres ersichtlich, wie sich aus diesen zwei Werten die Vielfalt der möglichen Werte für die Seshadri-Konstante erschließen lässt (vergleiche Kapitel 6). Wir können an dieser Stelle lediglich einfache Abschätzungen angeben.

**Proposition 2.3.1** *Es sei  $\varphi : X' \rightarrow X$  eine Isogenie abelscher Varietäten mit dem Exponent  $e \in \mathbb{N}$  und der rationalen Inversen  $\psi : X \rightarrow X'$ , d.h.  $\varphi \circ \psi = e_X$ ,  $\psi \circ \varphi = e_{X'}$ . Sei weiterhin  $L$  ein nef Geradenbündel auf  $X$ . Dann gilt*

$$\frac{e^2}{\deg \psi} \varepsilon(L) \leq \varepsilon(\varphi^*(L)) \leq \deg \varphi \varepsilon(L).$$

*Beweis:* Für jede Kurve durch den Nullpunkt gilt

$$\frac{\varphi^*(L) \cdot \varphi^*(C)}{\text{mult}_0 \varphi^*(C)} = \deg \varphi \frac{L \cdot C}{\text{mult}_0 C},$$

d.h.  $\varepsilon(\varphi^*(L)) \leq \deg \varphi \varepsilon(L)$ . Nun folgt

$$\varepsilon(e_X^*(L)) = \varepsilon(\psi^* \varphi^*(L)) \leq \deg \psi \varepsilon(\varphi^*(L)).$$

Das folgende Lemma schließt den Beweis ab.  $\square$

**Lemma 2.3.2** Sei  $X$  eine abelsche Varietät,  $L$  ein nef Geradenbündel auf  $X$ ,  $m$  eine ganze Zahl und  $m_X : X \rightarrow X$ ,  $z \mapsto mz$  der zugehörige Endomorphismus. Es gilt

$$\varepsilon(m_X^*(L)) = m^2 \varepsilon(L) .$$

*Beweis:* Sei  $L_s$  ein zu  $L$  numerisch äquivalentes symmetrisches Geradenbündel (ein solches existiert nach Lemma 4.1.2 aus [Lange-Birkenhake]). Nach Folgerung 2.3.6 aus [Lange-Birkenhake] ist  $m_X^*(L_s)$  numerisch äquivalent zu  $m^2 L_s$ , d.h.

$$\varepsilon(m_X^*(L)) = \varepsilon(m_X^*(L_s)) = \varepsilon(m^2 L_s) = m^2 \varepsilon(L) .$$

□

*Bemerkung:* Bei den Endomorphismen  $m_X$  mit  $m \in \mathbb{Z}$  zeigt sich, dass die Kurve  $C$ , die  $\varepsilon(L)$  berechnet, dieses auch für  $\varepsilon(m_X^*(L))$  tut, wohingegen die zurückgezogene Kurve  $m_X^*(C)$  nicht von Bedeutung ist.

$$\frac{m_X^*(L) \cdot C}{\text{mult}_0 C} = \frac{m^2 L \cdot C}{\text{mult}_0 C} = m^2 \varepsilon(L) ,$$

$$\frac{m_X^*(L) \cdot m_X^*(C)}{\text{mult}_0 m_X^*(C)} = \deg m_X \frac{L \cdot C}{\text{mult}_0 C} = m^{2 \dim X} \varepsilon(L) .$$

## 2.4 Einfache abelsche Flächen mit Picard-Zahl 1

Als nächstes beschäftigen wir uns mit einfachen abelschen Flächen. Hier gilt im generischen Fall  $\text{NS}(S) \cong \mathbb{Z}$ . Sei also  $S$  eine abelsche Fläche mit Picard-Zahl 1 und  $L$  ein ample Erzeuger von  $\text{NS}(S)$ . Da die Seshadri-Funktion homogen ist und alle anderen amplen Geradenbündel Vielfache von  $L$  sind, genügt es, die Seshadri-Konstante von  $L$  zu berechnen.

Falls  $L^2$  eine Quadratzahl ist, so bekommen wir aus Gleichung (1.1.6)

$$\varepsilon(L) = \sqrt{L^2} .$$

Falls  $L^2$  keine Quadratzahl ist, konnte Bauer die Seshadri-Konstante berechnen.

**Satz 2.4.1 (Theorem 6.1 aus [Bauer99])** *Sei  $S$  eine abelsche Fläche mit Picard-Zahl 1 und  $L$  der ample Erzeuger von  $\text{NS}(S)$ . Es sei  $\sqrt{L^2} \notin \mathbb{Q}$  und  $(l_0, k_0)$  die kleinste positive ganzzahlige Lösung der Pellischen Gleichung*

$$l_0^2 - L^2 k_0^2 = 1 . \tag{2.4.1}$$

*Dann gibt es eine eindeutige irreduzible Kurve  $C$  mit*

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_S(C) &\equiv 2k_0 L & \text{und} & & \text{mult}_0 C &= 2l_0 & \text{oder} \\ \mathcal{O}_S(C) &\equiv k_0 L & \text{und} & & \text{mult}_0 C &= l_0 , \end{aligned}$$

*welche die Seshadri-Konstante von  $L$  berechnet:*

$$\varepsilon(L) = \frac{C \cdot L}{\text{mult}_0 C} = \frac{k_0}{l_0} L^2 = \sqrt{1 - \frac{1}{l_0^2}} \sqrt{L^2} . \tag{2.4.2}$$

*Beweis:* Aus Satz 2.2.1 wissen wir, dass zu  $L$  ein submaximaler Divisor  $D_{\text{Pell}} \in |2k_0 L|$  mit  $\text{mult}_0 D \geq 2l_0$  existiert, d.h.

$$\frac{D_{\text{Pell}} \cdot L}{\text{mult}_0 D_{\text{Pell}}} \leq \frac{k_0}{l_0} L^2 < \sqrt{L^2} .$$

Satz 1.2.2 besagt, dass es genau eine irreduzible submaximale Kurve  $C$  gibt, welche die Seshadri-Konstante berechnet, und aus Proposition 1.2.7 schließen wir, dass diese eine Komponente von  $D_{\text{Pell}}$  ist. Es sei  $\mathcal{O}_S(C) \equiv k_1 L$  und  $m_1 = \text{mult}_0 C$ . Dann gilt

$$k_1 \leq 2k_0 \quad \text{und} \quad m_1 \leq \text{mult}_0 D_{\text{Pell}} . \tag{2.4.3}$$

Da die Kurve  $(-1)^*(C)$  numerisch äquivalent zu  $C$  ist und mit der gleichen Multiplizität wie  $C$  durch den Nullpunkt läuft, muss nach Satz 1.2.2  $C = (-1)^*(C)$  gelten, d.h.  $C$  ist symmetrisch. Betrachten wir die Aufblasung  $f: \tilde{S} \rightarrow S$  von  $S$  in den 16 Halbperioden  $e_1 = 0, e_2, \dots, e_{16}$  und die Projektion  $\pi: \tilde{S} \rightarrow K$  auf die glatte Kummer-Fläche von  $S$ . Da  $C$  symmetrisch ist, wird die eigentlich Transformierte  $f^*(C) - \sum_{i=1}^{16} (\text{mult}_{e_i} C) E_i$  abgebildet auf eine irreduzible Kurve  $\overline{C} \subset K$ . Das Linearsystem  $|\mathcal{O}_K(\overline{C})|$  kann nun nicht mehr als die Kurve  $\overline{C}$  enthalten, da wir sonst unendlich viele irreduzible Kurven in  $|\mathcal{O}_S(C)|$  mit der gleichen Multiplizität im Nullpunkt erhalten würden. Diese wären dann submaximal. Wegen Satz 1.2.2 kann es nicht unendlich viele irreduzible submaximale Kurven geben. Es

gilt also  $h_0(\mathcal{O}_K(\overline{C})) = 1$  und daher auch  $(\overline{C})^2 = -2$ . Zu K3-Flächen siehe [Saint-Donat74]. Also gilt

$$\begin{aligned}
-4 &= 2(\overline{C})^2 = (\pi^*(\overline{C}))^2 \\
&= \left( f^*(C) - \sum_{i=1}^{16} (\text{mult}_{e_i} C) E_i \right)^2 = C^2 - \sum_{i=1}^{16} (\text{mult}_{e_i} C)^2 \\
&= k_1^2 L^2 - \sum_{i=1}^{16} (\text{mult}_{e_i} C)^2 .
\end{aligned} \tag{2.4.4}$$

Damit folgt  $k_1^2 L^2 - m_1^2 \geq -4$ .

Aus der Submaximalität von  $C$  ergibt sich außerdem  $k_1^2 L^2 - m_1^2 < 0$ , d.h.

$$-4 \leq k_1^2 L^2 - m_1^2 < 0 . \tag{2.4.5}$$

Nun werden wir die Fälle  $k_1^2 L^2 - m_1^2 \in \{-4, -3, -2, -1\}$  getrennt untersuchen. Sei zunächst

$$k_1^2 L^2 - m_1^2 = -4 . \tag{2.4.6}$$

Hieraus folgt, dass  $m_1$  gerade ist, und wegen (2.4.4) ist  $\text{mult}_{e_i} C = 0$  für  $i = 2, \dots, 16$ . D.h.  $\mathcal{O}_S(C)$  ist total symmetrisch und daher ein geradzahliges Vielfaches von  $L$ . Nun ist das Paar  $(\frac{k_1}{2}, \frac{m_1}{2})$  wegen (2.4.6) eine Lösung der Pellischen Gleichung. Aus der Minimalität von  $(k_0, l_0)$  folgt  $k_1 \geq 2k_0$  und  $m_1 \geq 2l_0$ . Wegen (2.4.3) ist  $k_1 = 2k_0$  und damit  $C = D_{Pell}$ . Aus (2.4.6) folgt nun  $m_1 = 2l_0$ . Dies ist der erste Fall aus der Aussage des Satzes.

Sei nun  $k_1^2 L^2 - m_1^2 = -3$  oder  $k_1^2 L^2 - m_1^2 = -2$ . Da 2 und 3 keine quadratischen Reste modulo 4 sind, muss  $k_1$  ungerade sein. Das symmetrische Geradenbündel  $\mathcal{O}_S(C)$  hat nun mindestens vier ungerade Halbperioden (Kapitel 5 von [Birkenhake-Lange90]), d.h.  $C$  geht durch mindestens vier der  $e_i$ . Wegen (2.4.4) geht  $C$  neben  $e_1 = 0$  aber nur noch durch maximal 2 weitere Halbperioden, d.h. die Fälle  $k_1^2 L^2 - m_1^2 = -3$  und  $k_1^2 L^2 - m_1^2 = -2$  treten nicht ein.

Zuletzt sei

$$k_1^2 L^2 - m_1^2 = -1 ,$$

d.h.  $(m_1, k_1)$  löst die Pellische Gleichung. Aus der Theorie der Pellischen Gleichung wissen wir, dass für die zweitkleinste positive Lösung der Pellischen Gleichung  $(l_2, k_2)$  gilt:  $k_2 = 2l_0 k_0 > 2k_0$ . Daher muss  $k_1 = k_0$  und  $m_1 = l_0$  gelten. Nun ist  $D_{Pell} - C$  ein effektiver Divisor mit  $\frac{(D_{Pell}-C) \cdot L}{\text{mult}_0(D_{Pell}-C)} \leq \frac{k_0}{l_0} L^2 < \sqrt{L^2}$ . Nach 1.2.7 ist  $C$  auch Komponente von  $D_{Pell} - C$ . Damit folgt  $D_{Pell} = 2C$  und  $m_0 = 2m_1 = 2l_0$ . Dies ist der zweite Fall aus der Aussage des Satzes.  $\square$

*Bemerkung:* Die Fälle  $\mathcal{O}_S(C) \equiv k_0 L$  und  $\mathcal{O}_S(C) \equiv 2k_0 L$  treten beide auf.

Für Prinzipalpolarisierungen (Proposition 2.1.1) hatten wir die Kurve, die die Seshadri-Konstante berechnet, auf andere Weise gefunden. Hier gilt  $\mathcal{O}_S(C) \equiv 2k_0 L$ .

Auf der anderen Seite konnten Bauer und Szemberg zeigen: Falls  $L^2 + 1$  eine Quadratzahl ist, so ist  $\mathcal{O}_S(C) \equiv k_0 L$  (Theorem A1.c aus [Bauer-Szemberg98]).

*Bemerkung:* Man kann aus dem Beweis von Satz 2.4.1 ersehen, dass die Kurve  $C$  im Nullpunkt ihre einzige Singularität besitzt. Es ist  $g(\overline{C}) = \frac{(\overline{C})^2}{2} + 1 = 0$ , d.h.  $\overline{C}$  ist glatt und damit auch  $C$  außerhalb der Halbperioden von  $S$ . Für die Multiplizität in den Halbperioden gilt  $\sum_{i=2}^{16} (\text{mult}_{e_i} C)^2 \in \{0, 3\}$ , d.h. außer in 0 besitzt  $C$  keine weitere Singularität.

Aus dem Beweis von Satz 2.4.1 ist auch ersichtlich:

**Proposition 2.4.2** *Sei  $S$  eine abelsche Fläche und  $L$  ein amples Geradenbündel. Für eine bzgl.  $L$  submaximale irreduzible Kurve  $C$  durch den Nullpunkt gilt:*

$$-4 = C^2 - \sum_{i=1}^{16} (\text{mult}_{e_i} C)^2, \quad (2.4.7)$$

wobei  $e_1 = 0, e_1, \dots, e_{16}$  die Halbperioden von  $S$  sind. Außerdem ist der Nullpunkt die einzige Singularität von  $C$ .

## 2.5 Einfache abelsche Flächen mit Picard-Zahl $> 1$

In diesem Abschnitt werden wir kurz andeuten, was wir im Fall einer abelschen Fläche mit Picard-Zahl größer 1 sagen können. Eine Berechnung der Seshadri-Konstanten anhand eines expliziten Algorithmus ist bisher nicht gelungen.

Da auf einfachen abelschen Flächen keine elliptischen Kurven existieren, gilt nach Lemma 2.2.3

$$\sqrt{\frac{7}{8}}\sqrt{L^2} \leq \varepsilon(L) \leq \sqrt{L^2}. \quad (2.5.1)$$

Wie auf jeder abelschen Fläche existiert zu einem amplen Geradenbündel  $L$  mit  $\sqrt{L^2} \notin \mathbb{Q}$  der submaximale Pell-Divisor  $D_{Pell} \in H^0(\mathcal{O}_S(2k_0L))^+$  mit

$$\frac{D_{Pell} \cdot L}{\text{mult}_0 D_{Pell}} \leq \frac{k_0}{l_0} L^2 < \sqrt{L^2}, \quad l_0^2 - L^2 k_0^2 = 1.$$

Dieser enthält nach Proposition 1.2.7 alle submaximalen irreduziblen Kurven als Komponenten. Es kann nach Satz 1.2.2 aber maximal zwei (reelle und komplexe Multiplikation) bzw. drei (Quaternionenmultiplikation) submaximale irreduzible Kurven  $C$  geben. Für diese gilt nach Proposition 2.4.2:

$$-4 = C^2 - \sum_{i=1}^{16} (\text{mult}_{e_i} C)^2 \leq C^2 - (\text{mult}_0 C)^2.$$

Wie nun der Pellsche Divisor zerfallen kann, oder welche Kurven die Seshadri-Konstante berechnen ist bis dato nicht bekannt.

Zumindest im Fall reeller Multiplikation können wir einige Zwischenergebnisse angeben. Sei  $d$  eine quadratfreie natürliche Zahl und  $(S, L_0)$  eine prinzipalpolarierte abelsche Fläche mit Endomorphismenring  $\mathbb{Z} + \sqrt{d}\mathbb{Z}$ . Zur Existenz solcher abelscher Flächen siehe [Birkenhake94]. Die Rosati-Involution ist in diesem Fall die Identität, d.h. es gilt

$$\text{NS}(S) \cong \text{End}(S) \cong \mathbb{Z} + \sqrt{d}\mathbb{Z}.$$

Sei nun  $L_{\sqrt{d}}$  das zu  $\sqrt{d}$  gehörige Element in  $\text{NS}(S)$ . Da  $\sqrt{d}$  das Minimalpolynom  $t^2 - d$  besitzt, lassen sich der Selbstschnitt von  $L_{\sqrt{d}}$  und das Schnittprodukt  $L_{\sqrt{d}} \cdot L_0$  nach Proposition 5.2.3 aus [Lange-Birkenhake] berechnen:

$$L_{\sqrt{d}}^2 = -2d, \quad L_{\sqrt{d}} \cdot L_0 = 0, \quad L_0^2 = 2.$$



Damit bekommen wir eine bezüglich des Schnittprodukts orthogonale Basis der Néron-Severi-Gruppe.

$$\text{NS}(S) = \{ aL_0 + bL_{\sqrt{d}} \mid a, b \in \mathbb{Z} \} .$$

Nach Proposition 2.1.4 ist dann

$$\text{Nef}(S) = \left\{ xL_0 + yL_{\sqrt{d}} \mid x \geq \sqrt{d}|y| \right\} .$$

Bei der Berechnung der Seshadri-Konstanten auf  $\text{Nef}(S)$  ist es wegen der Homogenität der Seshadri-Funktion ausreichend,  $\varepsilon(L_0 + yL_{\sqrt{d}})$  für alle  $y \in [-\frac{1}{\sqrt{d}}, \frac{1}{\sqrt{d}}]$  zu berechnen.

An einer Stelle kennen wir bereits den Wert der Seshadri-Konstante: Nach Proposition 2.1.1 gibt es eine irreduzible Kurve  $C_0 \in |\mathcal{O}(4L_0)|$  mit

$$q_{C_0}(L_0) = \frac{L_0 \cdot C_0}{\text{mult}_0 C_0} = \frac{4}{3} .$$

Da diese Kurve zu einem Vielfachen von  $L_0$  numerisch äquivalent ist, gibt es nach Proposition 1.2.7 keine weiteren bezüglich  $L_0$  submaximalen irreduziblen Kurven. D.h. die Werte der Linearformen  $q_C$  liegen an der Stelle  $L_0$  für alle irreduzible Kurven  $C$  oberhalb von  $\sqrt{L_0^2} = \sqrt{2}$ . Da  $q_C(L_0 + yL_{\sqrt{d}})$  auch oberhalb  $\sqrt{\frac{7}{8}}\sqrt{L^2}$  bleibt, kann in einer Umgebung von  $y = 0$  keine Linearform  $q_C$  niedrigere Werte als  $q_{C_0}$  besitzen. Damit berechnet  $C_0$  auch die Seshadri-Konstanten von  $L_0 + yL_{\sqrt{d}}$  für  $y \in [-\frac{6\sqrt{2}-8}{3\sqrt{d}}, \frac{6\sqrt{2}-8}{3\sqrt{d}}]$ . Die gleiche Argumentation lässt sich auch für andere Prinzipalpolarisierungen auf  $S$  anwenden.

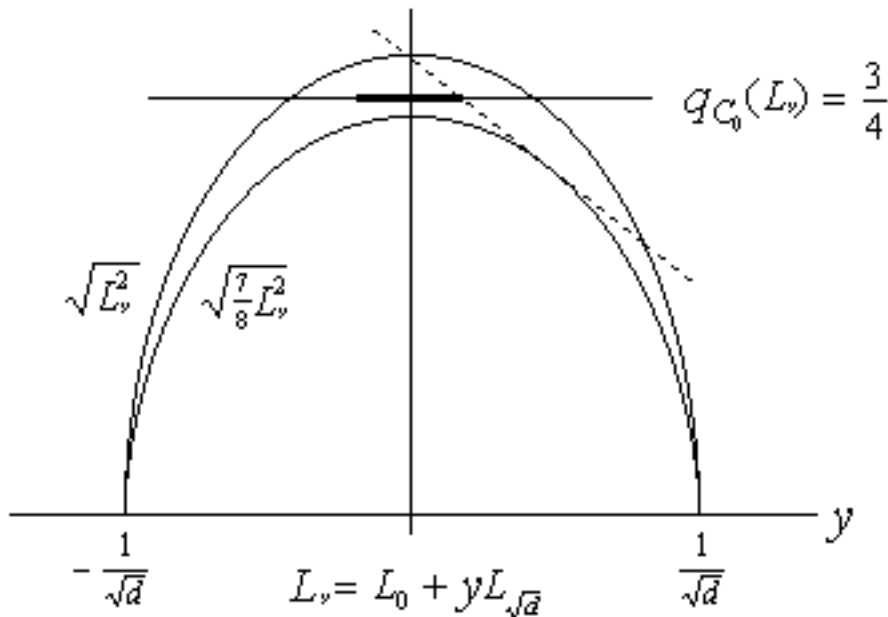


Abbildung 2: Funktionsverlauf über einem Schnitt in den Nef-Kegel einer prinzipalpolarisierten abelschen Fläche mit reeller Multiplikation.

*Bemerkung:* Aus dem Beweis von Proposition 2.1.3 ergibt sich auf einfachen abelschen Flächen für Polarisierungen  $L$  vom Typ  $(1, 2)$ :

$$\varepsilon(L) = 2 .$$

Welche anderen Polarisierungen gibt es nun auf  $S$ ? Es gilt

$$(aL_0 + bL_{\sqrt{d}})^2 = 2a^2 - 2db^2 .$$

Um eine Polarisierung  $L$  vom Typ  $(1, e)$  zu finden ( $L^2 = 2e$ ), müssen wir die Gleichung

$$x^2 - dy^2 = e \tag{2.5.2}$$

in teilerfremden ganzen Zahlen  $x > 0$  und  $y$  lösen.

**Satz 2.5.1** *Es gibt eine endliche, effektiv berechenbare Menge  $T = \{ (x_1, y_1), \dots, (x_l, y_l) \}$  von Lösungen der Gleichung (2.5.2), so dass jede andere Lösung  $(x, y)$  von der Form*

$$(x \pm y\sqrt{d}) = (x_i \pm y_i\sqrt{d})(u \pm v\sqrt{d}) \in \mathbb{Z} + \sqrt{d}\mathbb{Z} \tag{2.5.3}$$

für ein  $i \in \{ 1, \dots, l \}$  und eine ganzzahlige Lösung  $(u, v)$  der Gleichung  $u^2 - dv^2 = 1$  ist.

Eine umfassende Abhandlung zur Pellischen Gleichung findet man in [Barbeau], einen kurzen Überblick und ein effektives Lösungsverfahren in Kapitel 10.9 und 11.5 von [Hua].

*Bemerkung:* Eine notwendige Bedingung, dass (2.5.2) überhaupt eine Lösung besitzt, ist, dass  $d$  ein quadratischer Rest modulo  $e$  ist. Falls (2.5.2) aber eine Lösung besitzt, dann gleich unendlich viele. Diese Serien von Lösungen findet man, indem man in (2.5.3) die unendlich vielen Lösungen der Gleichung  $u^2 - dv^2 = 1$  benutzt.

Durch Bestimmen der teilerfremden Lösungen von (2.5.2) kann man nun die  $(1, e)$ -Polarisierungen auf  $S$  finden. Diese Serien von  $(1, e)$ -Polarisierungen konvergieren im von uns betrachteten Schnitt in den Nef-Kegel ( $x = 1$ ) gegen den Rand

$$x_n - y_n\sqrt{d} \rightsquigarrow 0, \quad \text{d.h.} \quad \frac{y_n}{x_n} \rightsquigarrow \frac{1}{\sqrt{d}} .$$

Im Beispiel  $d = 2$  gibt es für  $e \leq 20$  nur die folgenden Serien von Polarisierungen:

$e = 1$	$u_0 = 3, v_0 = 2$
$e = 2$	$x_1 = 2, y_1 = 1$
$e = 7$	$x_1 = 3, y_1 = 1$
$e = 14$	$x_1 = 4, y_1 = 1$
$e = 17$	$x_1 = 5, y_1 = 2$

Alle weiteren Polarisierungen vom Typ  $(1, e)$  entstehen aus diesen nach Gleichung (2.5.3).

# Kapitel 3

## Seshadri-Konstanten auf nichteinfachen abelschen Flächen

### 3.1 Nichteinfache abelsche Flächen

Eine nichteinfache abelsche Fläche, d.h. eine abelsche Fläche mit einer echten abelschen Untervarietät, ist nach dem Poincaréschen Reduzibilitätssatz isogen zu einem Produkt von zwei elliptischen Kurven  $E_1 \times E_2$ . Nun unterscheidet man, wie wir aus Kapitel 1.4 wissen, drei Fälle:

- $E_1$  und  $E_2$  nicht isogen,
- $E_1$  und  $E_2$  sind isogen und besitzen keine komplexe Multiplikation,
- $E_1$  und  $E_2$  sind isogen und besitzen komplexe Multiplikation.

In diesem Kapitel werden wir die Flächen  $S = E_1 \times E_2$ , bzw.  $S = E \times E$  mit und ohne komplexe Multiplikation genauer betrachten. Es gelingt, die Seshadri-Konstanten  $\varepsilon(L)$  für alle Geradenbündel auf  $S$  auszurechnen (siehe 3.1.1, 3.2.13, 3.3.19 und 3.3.33).

Grundsätzlich gibt es drei Möglichkeiten, die Néron-Severi-Gruppe einer abelschen Varietät  $X = \mathbb{C}^n/\Lambda$  zu beschreiben:

- durch die numerischen Äquivalenzklassen von Divisoren,
- durch Hermitesche Formen auf  $\mathbb{C}^n$ , deren Imaginärteil nur ganzzahlige Werte auf  $\Lambda$  annimmt,
- durch symmetrische Endomorphismen via dem Isomorphismus

$$\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \rightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{sym}}(X), \quad L \mapsto \Phi_{L_0}^{-1} \circ \Phi_L.$$

In [Diem03] wird der Ansatz über symmetrische Endomorphismen benutzt, um die Néron-Severi-Gruppe für das Kreuzprodukt zweier elliptischer Kurven ohne komplexe Multiplikation zu beschreiben. In [Hayashida-Nishi65] und [Yoshihara97] nutzen die Autoren numerische Äquivalenzklassen bestimmter Divisoren bei der Untersuchung der Néron-Severi-Gruppe für das Kreuzprodukt zweier beliebiger elliptischer Kurven. Die Beschreibung der Néron-Severi-Gruppe durch numerische Äquivalenzklassen von Divisoren hat bei der Berechnung der Seshadri-Konstanten den Vorteil, dass wir auch die Multiplizität

eines Divisors, bzw. einer Kurve bestimmen können. Dieser Ansatz erscheint für unsere Zwecke daher geeignet.

Im ersten Fall betrachten wir  $S = E_1 \times E_2$  für zwei nicht isogene elliptische Kurven  $E_1$  und  $E_2$ . Auf  $S$  gibt es die beiden elliptischen Kurven  $F_1 = \{0\} \times E_2$  und  $F_2 = E_1 \times \{0\}$ . Diese schneiden sich einfach im Nullpunkt, d.h. es gilt

$$F_1^2 = F_2^2 = 0, \quad F_1 \cdot F_2 = 1 .$$

Aus Kapitel 1.4 wissen wir, dass der Néron-Severi-Vektorraum von  $S$  die Dimension 2 hat. Für ein Geradenbündel  $L = \mathcal{O}(a_1 F_1 + a_2 F_2)$  mit  $a_1, a_2 \in \mathbb{Q}$  gilt  $L \cdot F_1 = a_2 \in \mathbb{Z}$  und  $L \cdot F_2 = a_1 \in \mathbb{Z}$ , d.h.  $F_1$  und  $F_2$  erzeugen  $\text{NS}(S)$  über  $\mathbb{Z}$ . Ein Geradenbündel  $\mathcal{O}(a_1 F_1 + a_2 F_2)$  ist nach 2.1.5 genau dann ampel, wenn der Selbstschnitt  $L^2 = 2a_1 a_2$  und die Schnittzahl mit einer Kurve – sagen wir  $L \cdot F_1 = a_2$  – positiv sind. Also ist

$$\text{Nef}(S) = \{ \mathcal{O}(a_1 F_1 + a_2 F_2) \in \text{NS}_{\mathbb{R}}(S) \mid a_1 \geq 0, a_2 \geq 0 \} .$$

Sei nun  $L = \mathcal{O}(a_1 F_1 + a_2 F_2)$  ein nef Geradenbündel. Für eine irreduzible Kurve  $C \notin \{F_1, F_2\}$  gilt nach Lemma 1.2.9

$$\frac{L \cdot C}{\text{mult}_0(C)} \geq \text{mult}_0(a_1 F_1 + a_2 F_2) = a_1 + a_2 .$$

Außerdem gilt  $\frac{L \cdot F_1}{\text{mult}_0 F_1} = a_2$  und  $\frac{L \cdot F_2}{\text{mult}_0 F_2} = a_1$ . Es folgt:

**Proposition 3.1.1** *Die Seshadri-Konstante für ein nef Geradenbündel  $\mathcal{O}(a_1 F_1 + a_2 F_2)$  auf  $E_1 \times E_2$  berechnet sich durch*

$$\varepsilon(\mathcal{O}(a_1 F_1 + a_2 F_2)) = \min \{ a_1, a_2 \} . \quad (3.1.1)$$

*Bemerkung:* Es sind hier die elliptischen Kurven  $F_1$  und  $F_2$ , welche die Seshadri-Konstante berechnen. Andere elliptische Kurven außer den Translaten von  $F_1$  und  $F_2$  kommen auf  $S$  nicht vor. Es wird sich zeigen, dass in den von uns in diesem Kapitel untersuchten Fällen die Seshadri-Konstante immer von elliptischen Kurven berechnet wird. Es stellt sich in den Fällen mit höherer Picard-Zahl aber die Aufgabe, die Menge der elliptischen Kurven geeignet zu parametrisieren.

## 3.2 Picard-Zahl 3

### $E \times E$ ohne komplexe Multiplikation

Im Folgenden befassen wir uns mit der abelschen Fläche  $S = E \times E$ , wobei  $E$  eine elliptische Kurve ohne komplexe Multiplikation ( $\text{End}(E) \cong \mathbb{Z}$ ) ist. Aus der Klassifizierung der abelschen Flächen wissen wir, dass  $S$  eine nichteinfache abelsche Fläche mit Picard-Zahl 3 ist.

Wir betrachten die drei Kurven

$$F_1 := \{0\} \times E, \quad F_2 := E \times \{0\} \quad \text{und} \quad \Delta := \{ (x, x) \mid x \in E \} . \quad (3.2.1)$$

Diese Kurven – alle isomorph zu  $E$  – schneiden sich einfach im Nullpunkt, also ist

$$F_1^2 = F_2^2 = \Delta^2 = 0 \quad \text{und} \quad F_1 \cdot F_2 = F_1 \cdot \Delta = F_2 \cdot \Delta = 1 . \quad (3.2.2)$$

**Proposition 3.2.1** Die Äquivalenzklassen von  $F_1, F_2$  und  $\Delta$  – im Folgenden „kanonische Erzeuger von  $\text{NS}(S)$ “ genannt – erzeugen die Néron-Severi-Gruppe über  $\mathbb{Z}$ .

*Beweis:* Nach Voraussetzung ist  $\dim_{\mathbb{Q}}(\text{NS}_{\mathbb{Q}}(S)) = 3$ . Da die drei genannten Kurven numerisch unabhängig sind, erzeugen ihre Äquivalenzklassen den  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum  $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(S)$ . Sei nun  $L := [\frac{p_1}{q}F_1 + \frac{p_2}{q}F_2 + \frac{p_3}{q}\Delta]$  mit  $p_1, p_2, p_3, q \in \mathbb{Z}$  eine beliebige numerische Äquivalenzklasse. Durch Schneiden mit den Ausgangskurven erhalten wir, dass

$$\frac{p_1}{q} + \frac{p_2}{q}, \quad \frac{p_1}{q} + \frac{p_3}{q} \quad \text{und} \quad \frac{p_2}{q} + \frac{p_3}{q}$$

ganzzahlig sind, d.h.  $p_i + p_j \equiv 0 \pmod{q}$  für  $i \neq j$ . Eine Primzahl, die gleichzeitig  $p_1$  und  $q$  teilt, würde dann auch  $p_2$  und  $p_3$  teilen und dann könnten wir alle Brüche kürzen. Wir dürfen daher annehmen, dass  $p_1$  und  $q$  teilerfremd sind. Desweiteren wissen wir, dass  $L^2 = 2(\frac{p_1 p_2}{q^2} + \frac{p_1 p_3}{q^2} + \frac{p_2 p_3}{q^2})$  geradzahlig ist. Daraus folgt  $(-p_1^2 - p_2^2 + p_3^2) \equiv 0 \pmod{q}$ , d.h.  $q$  teilt  $p_1^2$ . Da aber  $p_1$  und  $q$  teilerfremd sind, muss  $q = 1$  sein. Also sind  $\frac{p_i}{q}$  ganze Zahlen.  $\square$

Ziel dieses Kapitels ist, einen Algorithmus zur Berechnung der Seshadri-Konstante eines beliebigen amplen Geradenbündels auf  $S$  anhand dessen numerischer Äquivalenzklasse anzugeben.

### Ample Geradenbündel

Sei  $L = \mathcal{O}(a_1 F_1 + a_2 F_2 + a_3 \Delta)$  ein Geradenbündel auf  $S$ . Falls  $L$  ample ist, so gilt

$$\begin{aligned} L \cdot F_1 = a_2 + a_3 > 0, \quad L \cdot F_2 = a_1 + a_3 > 0, \quad L \cdot \Delta = a_1 + a_2 > 0 \\ \text{und} \quad L^2 = 2(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) > 0. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

**Proposition 3.2.2** Die Bedingungen (3.2.3) sind hinreichend für die Ampleness des Geradenbündels  $L = \mathcal{O}(a_1 F_1 + a_2 F_2 + a_3 \Delta)$ .

*Beweis:* Folgt aus Proposition 2.1.5. Wir sehen sogar, dass schon eine der Bedingungen  $a_i + a_j > 0$  für  $i \neq j$  zusammen mit  $L^2 > 0$  hinreichend ist.  $\square$

*Bemerkung:* Um ein amplies Geradenbündel zu konstruieren, können wir also beliebige Koeffizienten  $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}$  vorgeben mit  $a_2 > -a_1$  und  $a_3 > \max\{-a_1, -a_2, -\frac{a_1 \cdot a_2}{a_1 + a_2}\}$ . Wir stellen fest, dass höchstens einer der Koeffizienten kleiner oder gleich null sein darf und dass in diesem Fall die anderen Koeffizienten relativ groß sein müssen, z.B. ist  $\mathcal{O}(30F_1 + 6F_2 - 5\Delta)$  noch nicht ample, sondern erst  $\mathcal{O}(31F_1 + 6F_2 - 5\Delta)$ .

### Eine erste Berechnung

**Proposition 3.2.3** Für ein amplies Geradenbündel  $L = \mathcal{O}(a_1 F_1 + a_2 F_2 + a_3 \Delta)$  mit nicht-negativen Koeffizienten  $a_i \geq 0$  berechnet sich die Seshadri-Konstante durch

$$\varepsilon(L) = \min\{a_1 + a_2, a_1 + a_3, a_2 + a_3\}. \quad (3.2.4)$$

*Beweis:* Da die Koeffizienten nicht negativ sind, ist  $D := a_1 F_1 + a_2 F_2 + a_3 \Delta$  ein effektiver Divisor durch den Nullpunkt. Für eine irreduzible Kurve  $C \notin \{F_1, F_2, \Delta\}$  durch 0 gilt nach Lemma 1.2.9

$$\frac{D \cdot C}{\text{mult}_0(C)} \geq \text{mult}_0(a_1 F_1 + a_2 F_2 + a_3 \Delta) = a_1 + a_2 + a_3.$$

Da außerdem  $D \cdot F_1 = a_2 + a_3$ ,  $D \cdot F_2 = a_1 + a_3$  und  $D \cdot \Delta = a_1 + a_2$  gilt, ist

$$\varepsilon(L) = \inf_{\overline{C} \subset S} \left\{ \frac{L \cdot \overline{C}}{\text{mult}_0(\overline{C})} \right\} = \min \{ a_1 + a_2, a_1 + a_3, a_2 + a_3 \} .$$

Hier berechnet einer der kanonischen Erzeuger von  $\text{NS}(S)$  die Seshadri-Konstante.

### Eine zweite Berechnung

Die Berechnung der Seshadri-Konstante eines Geradenbündels mit einem negativen Koeffizienten stellt sich – wie wir in Beispiel 3.2.5 erkennen werden – als nicht so einfach heraus wie im Fall positiver Koeffizienten.

**Lemma 3.2.4** *Das Linearsystem  $|\mathcal{O}(2F_1 + 2F_2 - \Delta)|$  besteht aus genau einer irreduziblen elliptischen Kurve.*

*Beweis:* Es sei  $L := \mathcal{O}(2F_1 + 2F_2 - \Delta)$ , dann gilt  $L^2 = 2(4 - 2 - 2) = 0$  und  $L \cdot (F_1 + F_2) = 2 > 0$  ( $\mathcal{O}(F_1 + F_2)$  ist nach (3.2.3) ample). Nach Lemma 2.1.7 muß  $|L|$  daher effektiv sein. Alle Kurven  $N \in |L|$  sind wegen  $N \cdot F_1 = N \cdot F_2 = 1$  irreduzibel und nach der Adjunktionsformel ( $p_a(N) = \frac{1}{2}N^2 + 1 = 1$ ) auch elliptisch. Außerdem ist nach Lemma 2.1.8  $h^0(\mathcal{O}_S(N)) = 1$ , d.h.  $|L|$  besteht genau aus einer irreduziblen elliptischen Kurve.  $\square$

**Beispiel 3.2.5** *Das Bündel  $L := \mathcal{O}(5F_1 + 4F_2 - 2\Delta)$  ist nach (3.2.3) ample und es gilt  $\varepsilon(L) = 1$ .*

Wir schneiden  $L$  mit der elliptischen Kurve  $N \in |2F_1 + 2F_2 - \Delta|$  aus Lemma 3.2.4:

$$L \cdot N = 2(4 - 2) + 2(5 - 2) - 1(5 + 4) = 1 .$$

Also ist  $\varepsilon(L) \leq 1$ . Wegen der allgemeinen Schranke (2.1.2)  $\varepsilon(L) \geq 1$  ist  $\varepsilon(L) = 1$ .

*Bemerkung:* Es gilt nicht  $\varepsilon(L) = 2$ , wie man nach 3.2.4 erwarten könnte, aber auch hier berechnet eine elliptische Kurve die Seshadri-Konstante.

### Elliptische Kurven auf $\mathbf{E} \times \mathbf{E}$

In den bereits berechneten Beispielen ist es immer eine elliptische Kurve, die die Seshadri-Konstante berechnet. Das Ziel dieses Abschnitts wird sein, zu zeigen, dass dies auch im allgemeinen Fall richtig ist. Wir müssen dazu zuerst eine Klassifikation der numerischen Äquivalenzklassen aller elliptischen Kurven auf  $S$  erstellen.

Sei  $N$  eine irreduzible elliptische Kurve auf  $S$ . Es ist bekannt, dass die numerische Äquivalenzklasse  $[N]$  auf einer abelschen Fläche nur aus den Translaten linear äquivalenter Kurven besteht. Da aber nach Lemma 2.1.8  $h^0(\mathcal{O}_S(N)) = 1$  gilt, besteht  $[N]$  nur aus den Translaten von  $N$  selbst. Wenn wir uns z.B. auf die Normierung  $0_N = 0_S$  festlegen, so lässt sich von „der elliptischen Kurve“ in der numerischen Äquivalenzklasse  $[N] = [a_1F_1 + a_2F_2 + a_3\Delta]$  sprechen.

Sei nun  $N$  nicht einer der kanonischen Erzeuger (was der Fall ist, wenn keiner der Koeffizienten  $a_i$  Null ist). Es folgt  $N \cdot F_1 = a_2 + a_3 > 0$ ,  $N \cdot F_2 = a_1 + a_3 > 0$ ,  $N \cdot \Delta = a_1 + a_2 > 0$  und  $N^2 = 2(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3) = 0$ , also

$$a_3 = -\frac{a_1a_2}{a_1 + a_2} \in \mathbb{Z} , \quad \text{d.h.} \quad (a_1 + a_2) \mid a_1a_2 . \quad (3.2.5)$$

Diese letzte Eigenschaft besitzen allerdings nur spezielle ganze Zahlen:

**Lemma 3.2.6** *Seien zwei ganze Zahlen  $a$  und  $b$  gegeben, so dass  $(a + b)$  ein Teiler von  $ab$  ist. Dann gibt es ganze Zahlen  $c$ ,  $d$  und  $m$  mit den Eigenschaften:*

- $c$  und  $d$  sind teilerfremd,
- $a = c(c + d)m$  und  $b = d(c + d)m$ .

*Beweis:* Wir setzen  $l := \text{ggT}(a, b)$  sowie  $c := \frac{a}{l}$ ,  $d := \frac{b}{l}$ . Dadurch sind  $c$  und  $d$  teilerfremd, und es gilt  $a + b = l(c + d)$  sowie  $ab = l^2cd$ . Wegen  $(a + b) | ab$  teilt nun  $(c + d)$  auch  $lcd$ . Sei  $p$  ein Primteiler von  $(c + d)$  mit  $p^\alpha || (c + d)$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}$ . Es folgt, dass  $p^\alpha$  dann auch  $lcd$  teilt. Falls nun  $p$  eine der Zahlen  $c$  oder  $d$  teilen würde, so als Teiler von  $(c + d)$  auch gleich beide Zahlen. Das kann nicht sein, da diese teilerfremd sind. Also geht die volle Potenz  $p^\alpha$  in  $l$  auf und zwar für alle Primteiler von  $(c + d)$ . Das bedeutet, dass  $(c + d)$  die Zahl  $l$  teilt.

Setzen wir nun  $m := \frac{l}{(c+d)} \in \mathbb{Z}$ , so folgt  $a = lc = c(c + d)m$  und  $b = ld = d(c + d)m$ .  $\square$

*Bemerkung:* Wegen der endlich vielen Möglichkeiten, eine Zahl  $b$  als Produkt dreier ganzer Zahlen  $d$ ,  $(c + d)$  und  $m$  zu schreiben, gibt es für eine vorgegebene ganze Zahl  $b$  nur endlich viele ganze Zahlen  $a$ , so dass  $ab$  von  $(a + b)$  geteilt wird.

Zurück zu den elliptischen Kurven: Mit Gleichung (3.2.5) und Lemma 3.2.6 bekommen wir nun zu unserer elliptischen Kurve  $N$  teilerfremde ganze Zahlen  $c$  und  $d$  sowie eine ganze Zahl  $m$  mit  $a_1 = c(c + d)m$  und  $a_2 = d(c + d)m$ . Damit folgt  $a_3 = -\frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} = -cdm$  und  $[N] = [m(c(c + d)F_1 + d(c + d)F_2 - cd\Delta)]$ . Da aber  $N$  irreduzibel,  $h^0(\mathcal{O}_S(N)) = 1$  und  $\mathcal{O}(c(c + d)F_1 + d(c + d)F_2 - cd\Delta)$  nach Lemma 2.1.7 effektiv ist, muss  $m = 1$  sein. Das bedeutet, dass zu allen irreduziblen elliptischen Kurven auf  $S$  teilerfremde ganze Zahlen  $c$  und  $d$  existieren mit

$$[N] = [c(c + d)F_1 + d(c + d)F_2 - cd\Delta]. \quad (3.2.6)$$

Auf der anderen Seite gibt es für jedes Paar teilerfremder ganzer Zahlen  $c, d$  – nicht beide null – eine irreduzible elliptische Kurve

$$N_{c,d} \in |\mathcal{O}(c(c + d)F_1 + d(c + d)F_2 - cd\Delta)|. \quad (3.2.7)$$

Es ist nämlich  $N_{c,d}^2 = 2(-c^2d(c + d) - cd^2(c + d) + cd(c + d)^2) = 0$  und  $N_{c,d} \cdot F_1 = d^2 > 0$ . Damit folgt wie in Lemma 3.2.4:  $[N_{c,d}] = [m\overline{N}]$  für eine elliptische Kurve  $\overline{N}$ . Da aber  $N_{c,d} \cdot F_1 = d^2$  und  $N_{c,d} \cdot F_2 = c^2$  ist, folgt wegen der Teilerfremdheit von  $c$  und  $d$  nun  $m = 1$ . Also ist  $N_{c,d}$  eine irreduzible elliptische Kurve. Auch die kanonischen Erzeuger  $F_1 = N_{1,0}$ ,  $F_2 = N_{0,1}$  und  $\Delta = N_{1,-1}$  werden so erfasst.

Die obigen Feststellungen lassen sich zu folgendem Satz zusammenfassen:

**Satz 3.2.7** *Die Menge der irreduziblen elliptischen Kurven auf  $E \times E$  besteht aus allen Translaten der elliptischen Kurven*

$$N_{c,d} \equiv_{\text{num}} \mathcal{O}(c(c + d)F_1 + d(c + d)F_2 - cd\Delta)$$

für teilerfremde ganze Zahlen  $c$  und  $d$ .

*Bemerkung:* Da durch Ersetzen des Paares  $(c, d)$  durch  $(-c, -d)$  die Kurve  $N_{c,d}$  nicht verändert wird, können wir immer von einem positiven  $c$  ausgehen.

*Bemerkung:* Für zwei elliptische Kurven  $N_{a,b}$  und  $N_{c,d}$  ist das Schnittprodukt  $N_{a,b} \cdot N_{c,d} = (ad - bc)^2$  eine Quadratzahl.

Mit den nun gefundenen elliptischen Kurven können wir eine gute obere Schranke für die Seshadri-Konstante eines amplen Geradenbündels angeben.

**Satz 3.2.8** *Zu jedem amplen Geradenbündel  $L$  auf  $S$  gibt es eine submaximale elliptische Kurve  $N$  und es gilt*

$$\varepsilon(L) \leq L \cdot N \leq \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{L^2} .$$

Für den Beweis benötigen wir ein Theorem von Hermite aus der Geometrie der Zahlen, nachzulesen z.B. in Kapitel 9 von [Scharlau-Opolka].

**Satz 3.2.9 (Hermite, Lagrange)** *Sei  $Q$  eine positiv definite quadratische Form in 2 Variablen ( $Q = a_{1,1}x_1^2 + a_{1,2}x_1x_2 + a_{2,1}x_2x_1 + a_{2,2}x_2^2$ ,  $a_{1,2} = a_{2,1}$ ) mit Determinante  $D := \det(a_{i,j}) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$ . Dann gibt es einen ganzzahligen Punkt  $q \in \mathbb{Z}^2$ ,  $q \neq 0$  mit*

$$Q(q) \leq \sqrt{\frac{4}{3}} \sqrt{D} .$$

*Bemerkung:* Die Konstante  $\sqrt{\frac{4}{3}}$  („Hermitesche Konstante  $\gamma_2$ “) ist bestmöglich (vergleiche Kapitel 6 von [Gruber-Lekkerkerker]).

*Beweis von Satz 3.2.8:* Sei  $L = \mathcal{O}(a_1F_1 + a_2F_2 + a_3\Delta)$  ein amples Geradenbündel. Wir betrachten die Schnitzzahl von  $L$  mit den elliptischen Kurven  $N_{c,d}$ :

$$\begin{aligned} Q(c, d) &:= L \cdot N_{c,d} = (a_2 + a_3)c^2 + 2a_3cd + (a_1 + a_3)d^2 \\ &= (c, d) \begin{pmatrix} (a_2 + a_3) & a_3 \\ a_3 & (a_1 + a_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Dieses ist eine positiv definite ( $a_2 + a_3 > 0$ ,  $a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 > 0$ ) quadratische Form mit Determinante  $D = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3$ . Nach Satz 3.2.9 gibt es ganze Zahlen  $c, d$ , nicht beide Null und ohne Einschränkung teilerfremd mit  $Q(c, d) \leq \sqrt{\frac{4}{3}}D$ . Es folgt

$$\varepsilon(L) \leq L \cdot N_{c,d} = Q(c, d) \leq \sqrt{\frac{4}{3}}D = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{2(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{L^2} . \quad \square$$

*Bemerkung:* Die hier gezeigte Abschätzung ist optimal, d.h. es gibt Geradenbündel  $L$  mit  $\varepsilon(L) = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{L^2}$ . Zum Beispiel ergibt Satz 3.2.13  $\varepsilon(\mathcal{O}(3F_1 + 3F_2 - \Delta)) = 2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\mathcal{O}(3F_1 + 3F_2 - \Delta)^2}$ .

**Folgerung 3.2.10** *Die Seshadri-Konstante eines amplen Geradenbündels  $L$  auf  $S$  wird durch eine elliptische Kurve berechnet. Insbesondere ist  $\varepsilon(L)$  immer ganzzahlig.*

*Beweis:* Lemma 2.2.3 besagt, dass für „besonders submaximale“ Kurven ( $q_C(L) < \sqrt{\frac{7}{3}} \sqrt{L^2}$ ) überhaupt nur elliptische Kurven in Frage kommen. Satz 3.2.8 sichert uns nun die Existenz einer elliptischen Kurve  $E$  mit  $q_E(L) \leq \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{L^2}$  zu. Damit berechnet eine elliptische Kurve die Seshadri-Konstante. Da elliptische Kurven glatt sind, ist außerdem  $\varepsilon(L)$  ganzzahlig.  $\square$



**Folgerung 3.2.11** *Es gibt keine amplen, bezüglich eines beliebigen amplen Geradenbündels submaximalen irreduziblen Kurven auf  $S$ .*

*Beweis:* Falls wir eine ample submaximale irreduzible Kurve  $C$  auf  $S$  hätten, so würde Sie nach Proposition 1.2.8 auch  $\varepsilon(\mathcal{O}(C))$  berechnen. Nach Satz 3.2.8 gilt aber  $\varepsilon(\mathcal{O}(C)) \leq \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{L^2}$ . Wegen Lemma 2.2.3 kann  $\varepsilon(\mathcal{O}(C))$  aber nicht von der nicht-elliptischen Kurve  $C$  berechnet werden.  $\square$

Mit den eben beschriebenen Hilfsmitteln lässt sich auch der folgende Satz beweisen.

**Satz 3.2.12** *Auf der abelschen Fläche  $E \times E$  zerfällt jedes ample Geradenbündel  $L$  in eine Summe von elliptischen Kurven*

$$L = \mathcal{O}(N_1 + N_2 + \cdots + N_l) .$$

*Diese Kurven sind nicht eindeutig bestimmt.*

*Beweis:* Aus Satz 3.2.8 wissen wir, dass es zu jedem amplen Geradenbündel eine submaximale elliptische Kurve gibt. Die Idee ist, diese submaximalen elliptischen Kurven sukzessive abzuziehen. Sei zunächst  $L^2 > 2$ . Wir zeigen, dass es eine elliptische Kurve  $N_1$  gibt mit

$$(L - N_1)^2 = L^2 - 2N_1 \cdot L \geq 0 \quad \text{und} \quad (3.2.8)$$

$$(L - N_1) \cdot L = L^2 - N_1 \cdot L > 0 . \quad (3.2.9)$$

Die zweite dieser beiden Gleichungen ist schwächer, daher genügt es, (3.2.8) nachzuweisen. Analog zu Proposition 2.1.5 und Lemma 2.1.7 folgt, dass  $L - N_1$  entweder ample ( $(L - N_1)^2 > 0$ ) oder gleich  $\mathcal{O}(N_2)$  für eine elliptische Kurve  $N_2$  ist ( $(L - N_1)^2 = 0$ ). Wie wir schon festgestellt hatten, gibt es zu dem amplen Geradenbündel  $L$  eine elliptische Kurve  $N_1$  mit  $L \cdot N_1 \leq \sqrt{L^2}$ . Da  $L^2 > 2$  ist, folgt  $L \cdot N_1 \leq \sqrt{L^2} \leq \frac{L^2}{2}$  und so die gewünschte Gleichung. Nun ist  $(L - N_1)^2 < L^2$ . Das heißt, wir können so lange elliptische Kurven abziehen, bis  $L^2 \leq 2$  ist.

Prinzipalpolarisierungen ( $L^2 = 2$ ) zerfallen nach dem bekannten Satz von Weil (siehe Satz 2.1.2) in eine Summe von zwei elliptischen Kurven  $L = \mathcal{O}(N_{l-1} + N_l)$  genau dann, wenn es eine elliptische Kurve  $N_l$  gibt mit  $L \cdot N_l = 1$ . Da aber auch hier eine submaximale elliptische Kurve  $N_l$  existiert mit  $L \cdot N_l \leq \sqrt{L^2} = \sqrt{2}$  und  $L \cdot N_l$  ganzzahlig ist, muss  $L \cdot N_l = 1$  sein.  $\square$

## Berechnung der Seshadri-Konstante

In diesem Abschnitt soll es darum gehen, die Seshadri-Konstante eines amplen Geradenbündels  $L = \mathcal{O}(a_1F_1 + a_2F_2 + a_3\Delta)$  anhand der numerischen Daten  $a_1, a_2, a_3$  zu berechnen und das Verhalten der Seshadri-Funktion  $\varepsilon(L) = \varepsilon(a_1, a_2, a_3)$  auf dem Nef-Kegel näher zu untersuchen.

Aus dem vorherigen Abschnitt wissen wir, dass die Seshadri-Konstante immer von einer elliptischen Kurve  $N \in |\mathcal{O}(n_1(a_1, a_2, a_3)F_1 + n_2(a_1, a_2, a_3)F_2 + n_3(a_1, a_2, a_3)\Delta)|$  berechnet wird. Hierbei sind alle Argumente symmetrisch bezüglich der kanonischen Erzeuger, d.h.  $\varepsilon(\mathcal{O}(a_1F_1 + a_2F_2 + a_3\Delta)) = \varepsilon(\mathcal{O}(a_{\pi(1)}F_1 + a_{\pi(2)}F_2 + a_{\pi(3)}\Delta))$  für alle Permutationen  $\pi \in S_3$  (wegen  $(n_1F_1 + n_2F_2 + n_3\Delta) \cdot (a_1F_1 + a_2F_2 + a_3\Delta) = (n_{\pi(1)}F_1 + n_{\pi(2)}F_2 + n_{\pi(3)}\Delta) \cdot (a_{\pi(1)}F_1 + a_{\pi(2)}F_2 + a_{\pi(3)}\Delta)$ ). Als Vereinfachung können wir daher annehmen, dass

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 . \quad (3.2.10)$$

Das bedeutet wegen der Ampelness von  $L$ , dass  $a_1$  und  $a_2$  positiv sind und nur  $a_3$  negativ sein kann. Der interessante, nicht von 3.2.4 abgedeckte Fall ist dann der, wenn  $a_3$  negativ ist.

Als weitere Vereinfachung erinnern wir uns an die Homogenität der Seshadri-Funktion ( $\varepsilon(kL) = k\varepsilon(L)$ ) und gehen zu dem rationalen Geradenbündel  $\frac{1}{a_1}L = \mathcal{O}(F_1 + \frac{a_2}{a_1}F_2 + \frac{a_3}{a_1}\Delta)$  über.

Das heißt, wir sind ab jetzt daran interessiert die Seshadri-Konstante aller amplen  $\mathbb{Q}$ -Geradenbündel

$$L_{\lambda,x} := \mathcal{O}(F_1 + \lambda F_2 - x\Delta) \quad (3.2.11)$$

für alle geeigneten rationalen Zahlen  $\lambda$  und  $x$  zu berechnen. Geeignet heißt in diesem Zusammenhang wegen der Ampelness von  $L$  und den getroffenen Vereinfachungen:

$$1 \geq \lambda > 0 \quad \text{und} \quad \frac{\lambda}{1+\lambda} > x > 0. \quad (3.2.12)$$

Die Menge der Geradenbündel  $\{L_{\lambda,x} \mid 0 < \lambda \leq 1, x \leq \frac{\lambda}{1+\lambda}\}$  stellt einen Schnitt in einen Teilkegel von  $\text{Nef}(S)$  dar. Die Seshadri-Quotienten-Funktion einer Kurve  $C$

$$q_C(L_{\lambda,x}) = \frac{1}{\text{mult}_0 C} (F_1 \cdot C + \lambda F_2 \cdot C - x\Delta \cdot C)$$

ist dann für festes  $\lambda$  eine affine Gerade in Abhängigkeit von  $x$ . (Ebenso könnten wir  $x$  fixieren und  $\lambda$  laufen lassen.)

Kommen wir nun zu den submaximalen elliptischen Kurven auf  $S$ . Nach Satz 3.2.7 ist eine beliebige irreduzible elliptische Kurve, die keine der kanonischen Erzeuger ist, von der Form  $N_{c,d} \equiv_{\text{num}} c(c+d)F_1 + d(c+d)F_2 - cd\Delta$  für teilerfremde ganze Zahlen  $c$  und  $d$  ungleich Null (und  $c+d \neq 0$ ). Diese Kurve ist bezüglich eines Geradenbündels  $L_{\lambda,x}$  genau dann submaximal, wenn

$$\begin{aligned} N_{c,d} \cdot L_{\lambda,x} &< \sqrt{L_{\lambda,x}^2}, \text{ d.h.} \\ d^2 + \lambda c^2 - x(c+d)^2 &< \sqrt{2(\lambda - x - \lambda x)}. \end{aligned}$$

Das trifft zu, falls

$$\begin{aligned} \left( x(c+d)^2 - \frac{(d^2 + \lambda c^2)(c+d)^2 - (1+\lambda)}{(c+d)^2} \right)^2 &< 2\lambda - (d^2 + \lambda c^2)^2 + \left( \frac{(d^2 + \lambda c^2)(c+d)^2 - (1+\lambda)}{(c+d)^2} \right)^2 \\ &= \frac{(1+\lambda)^2 - 2(d-\lambda c)^2(c+d)^2}{(c+d)^4}. \end{aligned}$$

Damit für festes rationales  $\lambda = \frac{a_2}{a_1}$  überhaupt ein  $x$  existiert, so dass  $N_{c,d}$  submaximal bzgl.  $L_{\lambda,x}$  ist, muss gelten

$$(1+\lambda)^2 - 2(d-\lambda c)^2(c+d)^2 \geq 0, \quad (3.2.13)$$

beziehungsweise

$$(a_1 + a_2)^2 \geq 2(a_1 d - a_2 c)^2 (c+d)^2. \quad (3.2.14)$$

Wir erkennen, dass  $c$  und  $d$  das gleiche Vorzeichen haben müssen, da ansonsten gilt  $2(d-\lambda c)^2(c+d)^2 \geq 2(|d| + \lambda|c|)^2 > (1+\lambda)^2$  (für  $c+d=0$  ist  $N_{c,d}$  ein Vielfaches von

$\Delta$ ). Außerdem ist entweder  $\frac{a_2}{a_1} = \frac{d}{c}$  oder  $(c+d)^2 \leq \frac{(a_1+a_2)^2}{2}$ . Der erste Fall ergibt wegen der Teilerfremdheit von  $c$  und  $d$  genau eine elliptische Kurve, nämlich  $N_{\frac{a_1}{\text{ggT}(a_1, a_2)}, \frac{a_2}{\text{ggT}(a_1, a_2)}}$ . Im zweiten Fall lassen sich die möglichen submaximalen Kurven bestimmen, indem wir die Gleichung (3.2.13) für die endlich vielen teilerfremden Paare  $(c, d)$  positiver ganzer Zahlen mit  $c+d \leq \frac{a_1+a_2}{\sqrt{2}}$  testen.

Wir können auf diese Weise für ein festes  $\lambda$  alle elliptischen Kurven (abgesehen von den kanonischen Erzeugern) ermitteln, die für mindestens ein  $x$  bezüglich des Geradenbündels  $L_{\lambda, x}$  submaximal sind.

**Satz 3.2.13** *Sei  $L = \mathcal{O}(a_1F_1 + a_2F_2 + a_3\Delta)$  ein amples Geradenbündel und  $\pi$  eine Permutation mit  $a_{\pi(1)} \geq a_{\pi(2)} \geq a_{\pi(3)}$ .*

*Dann ist  $\varepsilon(L)$  das Minimum aus den drei Werten*

1.  $a_{\pi(2)} + a_{\pi(3)}$ ,
2.  $\frac{1}{\text{ggT}(a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)})^2} (a_{\pi(2)}a_{\pi(1)}^2 + a_{\pi(1)}a_{\pi(2)}^2 + a_{\pi(3)}(a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)})^2)$ ,
3.  $\min \left\{ a_{\pi(1)}d^2 + a_{\pi(2)}c^2 + a_{\pi(3)}(c+d)^2 \mid c, d \in \mathbb{N}, c+d < \frac{a_{\pi(1)}+a_{\pi(2)}}{\sqrt{2}} \right\}$ .

*Beweis:* Da nach Proposition 3.2.10 immer eine elliptische Kurve die Seshadri-Konstante berechnet, ist es ausreichend, die submaximalen elliptischen Kurven  $N_{c,d}$  wie obenstehend zu finden. Der niedrigste Wert  $N_{c,d} \cdot L = a_1d^2 + a_2c^2 + a_3(c+d)^2$  ist dann der Wert der Seshadri-Konstante. In der obenstehenden Formel zur Berechnung von  $\varepsilon(L)$  berücksichtigt der erste Term die kanonischen Erzeuger, der zweite Term die Kurve  $N_{\frac{a_1}{\text{ggT}(a_1, a_2)}, \frac{a_2}{\text{ggT}(a_1, a_2)}}$  und der dritte Term die weiteren möglichen submaximalen elliptischen Kurven.  $\square$

*Bemerkung:* Unter den Werten aus Satz 3.2.13 befinden sich wegen Folgerung 3.2.11 alle submaximalen Werte für die Seshadri-Quotienten von Kurven auf  $S$ .

*Bemerkung:* Über die Anzahl der submaximalen Kurven lässt sich keine Aussage treffen. Es gibt Geradenbündel mit nur einer submaximalen Kurve. So ist zum Beispiel für das Geradenbündel  $\mathcal{O}(7F_1 + 6F_2 - 3\Delta)$  nur die elliptische Kurve  $N_{1,1}$  submaximal. Aber es existieren auch Geradenbündel der maximalen Anzahl von drei submaximalen Kurven, z.B.  $\mathcal{O}(33F_1 + 9F_2 - 7\Delta)$ . Hier sind  $F_1$ ,  $N_{3,1}$  und  $N_{4,1}$  submaximal und haben sogar den gleichen Seshadri-Quotienten, d.h. alle drei Kurven berechnen die Seshadri-Konstante.

Als Nächstes wollen wir den Verlauf der Seshadri-Funktion  $\varepsilon(\lambda, x) := \varepsilon(L_{\lambda, x})$  diskutieren. Die grundlegende Idee hierbei ist, die Konvexität der Berechnungskegel (siehe 1.2.3) der in Frage kommenden Kurven auszunutzen. In anderen Worten: Wissen wir, dass die Kurve  $N$  die Seshadri-Konstante von  $L_{\lambda, x_1}$  und  $L_{\lambda, x_2}$  berechnet, so berechnet sie auch  $\varepsilon(L_{\lambda, x})$  für alle  $x$  zwischen  $x_1$  und  $x_2$ . Natürlich gilt dieses Argument auch, falls wir ein  $x$  festhalten und  $\lambda$  variieren oder falls wir uns in anderen Richtungen im Nef-Kegel bewegen. Zunächst diskutieren wir dazu die kanonischen Erzeuger: Für  $F_1$ ,  $F_2$  und  $\Delta$  sowie ein beliebiges Geradenbündel  $L_{\lambda, x}$  gilt

$$F_1 \cdot L_{\lambda, x} = \lambda - x, \quad F_2 \cdot L_{\lambda, x} = 1 - x, \quad \Delta \cdot L_{\lambda, x} = 1 + \lambda.$$

Wir stellen fest, dass immer  $F_1 \cdot L_{\lambda, x} \leq F_2 \cdot L_{\lambda, x}$  gilt und höchstens dann Gleichheit herrscht, falls  $\lambda = 1$  ist. Damit scheidet  $F_2$  als Berechnungskurve für  $\varepsilon(L_{\lambda, x})$  aus. Weiterhin ist  $\Delta \cdot L_{\lambda, x}$  genau dann kleiner als  $F_1 \cdot L_{\lambda, x}$ , wenn  $x < -1$  ist. Dann sind alle Koeffizienten

von  $L_{\lambda,x}$  positiv und  $\varepsilon(L_{\lambda,x})$  berechnet sich nach (3.2.3) gerade durch  $\Delta$ . Genauso wissen wir, dass für  $x \in [-1, 0]$  die Seshadri-Konstante von  $F_1$  berechnet wird. Im interessanten Fall  $x \in (0, \frac{\lambda}{1+\lambda}]$  haben wir noch keine Aussage, welche Kurve  $\varepsilon(L_{\lambda,x})$  ausrechnet; von den kanonischen Erzeugern kann aber nur  $F_1$  von Bedeutung sein.

Sei  $\lambda = \frac{a_2}{a_1} = \frac{m}{n}$  mit positiven teilerfremden ganzen Zahlen  $m$  und  $n$ . Für einen weiteren Punkt kennen wir die Berechnungskurve, nämlich für  $x_\infty := \frac{\lambda}{1+\lambda}$ . Dann ist

$$L_{\lambda,x_\infty} = \frac{1}{n(m+n)} \mathcal{O}(n(m+n)F_1 + m(m+n)F_2 - mn\Delta)$$

numerisch äquivalent zu einem Vielfachen der irreduziblen elliptischen Kurve  $N_{n,m}$ . Also ist das Geradenbündel nef und es gilt  $\varepsilon(L_{\lambda,x_\infty}) = 0$ , d.h.  $N_{n,m}$  berechnet  $\varepsilon(L_{\lambda,x_\infty}) = 0$ . Für alle  $x$ , die nur wenig kleiner sind als  $x_\infty$ , berechnet die Kurve  $N_{n,m}$  immer noch die Seshadri-Konstante, wie man aus dem Beweis der folgenden Proposition erkennt:

**Proposition 3.2.14** *Jede der irreduziblen elliptischen Kurven auf  $S$  ist an der Berechnung der Seshadri-Konstante auf  $\text{Nef}(S)$  beteiligt, d.h. für jede irreduzible elliptische Kurve  $N$  auf  $S$  gibt es ein amples Geradenbündel  $L$  mit  $\varepsilon(L) = L \cdot N$ .*

*Beweis:* Die kanonischen Erzeuger sind nach Proposition 3.2.4 auf jeden Fall beteiligt. Sei also nun ein  $N_{c,d}$  gegeben, und gehen wir zunächst einmal davon aus, dass  $0 < d < c$  gilt. Nun betrachten wir die amples Geradenbündel  $L_{\frac{d}{c},x}$  mit  $x < \frac{d}{c+d}$ . Wie wir aus Gleichung (3.2.13) wissen, gibt es nur endlich viele irreduzible elliptische Kurven  $N_1, \dots, N_k$  zusätzlich zu  $N_{c,d}$ , die bezüglich den Geradenbündeln  $L_{\frac{d}{c},x}$  submaximal werden können, und eine davon berechnet jeweils die Seshadri-Konstante. Für die Seshadri-Quotienten von  $N_i \neq N_{c,d}$  gilt

$$q_{N_i}(L_{\frac{d}{c},\frac{d}{c+d}}) = \frac{1}{c(c+d)} N_i \cdot N_{c,d} > 0 = \sqrt{L_{\frac{d}{c},\frac{d}{c+d}}^2}.$$

Damit gibt es ein nichtleeres offenes Intervall  $M \subset [0, \frac{d}{c+d}]$ , so dass für alle  $x \in M$  die Seshadri-Quotienten  $q_{N_i}(L_{\frac{d}{c},x})$  noch nicht submaximal sind. Für diese  $x \in M$  berechnet dann die Kurve  $N_{c,d}$  den Wert  $\varepsilon(L_{\frac{d}{c},x})$ . Falls nun  $0 < c < d$  gilt, so betrachten wir  $N_{d,c} = d(c+d)F_1 + c(c+d)F_2 - cd\Delta$ , finden wie eben ein passendes Geradenbündel und vertauschen danach die Rollen von  $F_1$  und  $F_2$ .

Als nächstes behandeln wir den Fall, wenn  $c$  und  $d$  unterschiedliche Vorzeichen besitzen. Da  $N_{c,d} = N_{-c,-d}$  gilt, können wir von  $c > 0$  ausgehen. Falls nun  $|d| < |c|$  ist, betrachten wir die Kurve  $N_{(c+d),-d} = c(c+d)F_1 - cdF_2 + d(c+d)\Delta$ . Diese entspricht  $N_{c,d}$ , wenn wir die Rollen von  $\Delta$  und  $F_2$  in der Beweisführung vertauschen ( $c+d > 0, -d > 0$ ). Im Fall  $|d| > |c|$  betrachten wir  $N_{-(c+d),c} = d(c+d)F_1 - cdF_2 + c(c+d)\Delta$  und vertauschen die kanonischen Erzeuger entsprechend.  $\square$

**Proposition 3.2.15** *Für ein festes rationales  $\lambda \in [0, 1]$  verläuft die Seshadri-Funktion  $x \mapsto \varepsilon(L_{\lambda,x})$  stückweise linear.*

*Beweis:* Wie wir in Proposition 3.2.10 festgestellt haben, berechnet immer eine elliptische Kurve die Seshadri-Konstante. Für festes  $\lambda = \frac{m}{n}$  ( $m, n$  teilerfremd) gibt es nur endlich viele submaximale Kurven  $N_1, \dots, N_k$ , die bei der Berechnung von  $\varepsilon(L_{\lambda,x})$  eine Rolle spielen. Die Seshadri-Funktion ist damit das Minimum aus den endlich vielen affin-linearen Funktionen

$$x \mapsto q_{N_i}(L_{\lambda,x}) = N_i \cdot L_{\lambda,x} = N_i \cdot F_1 + \lambda N_i \cdot F_1 - x N_i \cdot \Delta.$$

Wir wissen außerdem, dass für  $x \in ]-\infty, -1]$  gilt  $\varepsilon(L_{\lambda,x}) = L_{\lambda,x} \cdot \Delta = 1 + \lambda$ , und für  $x \in [-1, 0]$  gilt  $\varepsilon(L_{\lambda,x}) = L_{\lambda,x} \cdot F_1 = \lambda - x$ . Weiterhin berechnet  $N_{n,m}$  die Seshadri-Konstante in der Nähe von  $x_\infty = \frac{\lambda}{1+\lambda}$ .  $\square$

Es ergibt sich ein Funktionsverlauf wie in Abbildung 3.

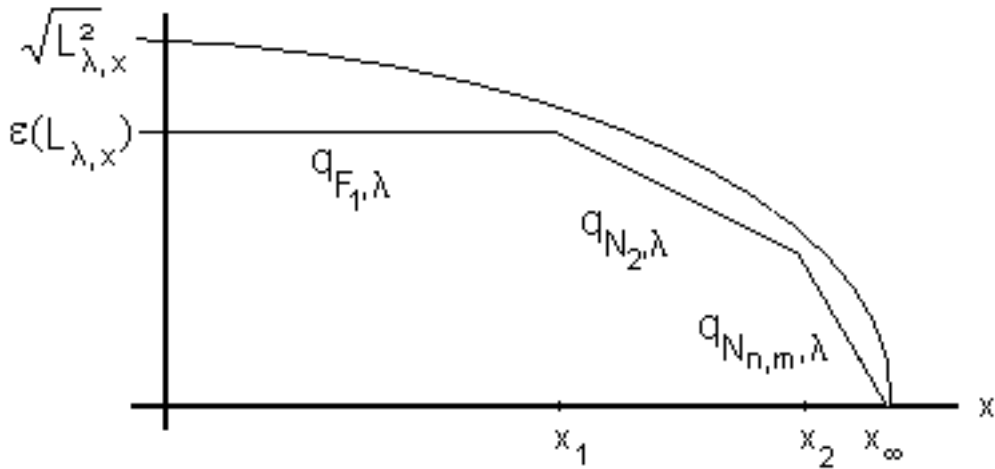


Abbildung 3: Funktionsverlauf der Seshadri-Funktion über einem Schnitt in den Nef-Kegel von  $E \times E$  ohne komplexe Multiplikation.

*Bemerkung:* Es lässt sich leider nicht übersichtlich entscheiden, welche der elliptischen Kurven  $N_{c,d}$  zu vorgegebenen  $\lambda = \frac{m}{n}$  submaximal werden kann. Allerdings kommen nur Tupel  $(c, d)$  in Frage, so dass  $\frac{d}{c}$  eine relativ gute Näherung an  $\lambda$  bei möglichst kleinen Werten für  $c$  und  $d$  darstellt. Dadurch berechnen sich die Werte der Seshadri-Quotienten der submaximalen elliptischen Kurven nicht einheitlich und ebenso nicht die Schnittpunkte der zugehörigen Seshadri-Quotienten-Geraden.

## Beispielrechnungen

Als erste Beispielrechnung wollen wir die Seshadri-Konstanten von Geradenbündeln der Form  $L = \mathcal{O}(nF_1 + F_2 - y\Delta)$  für natürliche Zahlen  $n$  und rationale Zahlen  $y < \frac{n}{n+1}$  berechnen. In unserer Notation bedeutet das,  $\varepsilon(L_{\frac{1}{n}, \frac{y}{n}})$  für zugelassene Werte von  $y$  auszurechnen. Wir wissen bereits, dass  $\Delta$  die Seshadri-Konstante  $\varepsilon(L_{\frac{1}{n}, \frac{y}{n}}) = 1 + \frac{1}{n}$  berechnet, falls  $y \leq -n$  ist, und dass  $F_1$  den Wert  $\varepsilon(L_{\frac{1}{n}, \frac{y}{n}}) = \frac{1}{n} - \frac{y}{n}$  berechnet, wenn  $y \in [-n, 0]$  ist. Der interessante Fall ist  $x := \frac{y}{n} > 0$ .

Zuerst haben wir nachzuprüfen, welche elliptischen Kurven submaximal sein können. Die Kurve  $N_{c,d}$  ist nach (3.2.14) submaximal für eines der Bündel  $L_{\frac{1}{n}, x}$  nur falls

$$(n+1)^2 \geq 2(nd-c)^2(c+d)^2$$

gilt. Es folgt, dass  $c$  und  $d$  das gleiche Vorzeichen haben. Entweder ist nun  $(nd-c) = 0$ , d.h.  $\frac{1}{n} = \frac{d}{c}$ , oder es gilt  $(n+1)^2 \geq 2(c+d)^2$ , woraus folgt  $0 < c \leq \frac{n}{\sqrt{2}}$ . Im ersten Fall bekommen wir die submaximale Kurve  $N_{n,1}$ . Im zweiten Fall können wir auf  $d = 1$

schließen: Falls  $d \geq 2$  wäre, würde  $2(nd - c)^2 > (n + 1)^2$  gelten und  $N_{c,d}$  könnte nicht submaximal sein. Daher muss  $c$  die Ungleichung

$$(n + 1)^2 \geq 2(n - c)^2(c + 1)^2 \quad (3.2.15)$$

erfüllen, d.h.

$$n \leq \frac{\sqrt{2}c^2 + \sqrt{2}c + 1}{c + \sqrt{2} - 1} < \sqrt{2}c + \sqrt{2} + \frac{1}{c} \leq \sqrt{2}c + \sqrt{2} + 1.$$

Also gilt

$$\frac{n - 1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \leq c \leq \frac{n}{\sqrt{2}}, \quad (3.2.16)$$

was nur von den ganzen Zahlen  $c = \lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \rfloor$  oder  $c = \lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \rfloor - 1$  erfüllt werden kann. Setzen wir dieses wieder in die Ungleichung (3.2.15) ein, so bekommen wir

$$n + 1 \geq \sqrt{2}(nc + n - c^2 - c)$$

und mit (3.2.16)

$$0 \geq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)n^2 - 3n + \sqrt{2}.$$

Dieses kann nur von Zahlen  $n \leq 10$  erfüllt werden, welche einzeln nachgeprüft werden müssen. Es stellt sich heraus, dass Ungleichung (3.2.15) nur für das ganzzahlige Tupel  $n = 2$  und  $c = 1$  erfüllt wird. Also ist die einzige weitere submaximale elliptische Kurve – außer im Fall  $n = 2$  – die Kurve  $N_{n,1}$ .

Als nächstes überprüfen wir den Schnittpunkt  $x_2 = \frac{n^2+n-1}{n^2(n+2)}$  der Seshadri-Quotientengeraden zu  $F_1$  und  $N_{n,1}$ . An diesem Punkt sind beide Kurven submaximal. Da es keine weiteren submaximalen elliptischen Kurven gibt (im Fall  $n = 2$  besitzt die submaximale Kurve  $N_{1,1}$  an der Stelle  $x_2$  einen größeren Seshadri-Quotienten), wird  $\varepsilon(L_{\frac{1}{n},x_2})$  von  $F_1$  und  $N_{n,1}$  berechnet.

Da wir schon auf die Kurve  $N_{n,1}$  gestoßen sind, bekommen wir das Ergebnis

$$\varepsilon(L_{\frac{1}{n},x}) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & , \text{ falls } x \leq -1 & (\Delta \text{ berechnet}) \\ \frac{1}{n} - x & , \text{ falls } x \in [-1, \frac{n^2+n-1}{n^2(n+2)}] & (F_1 \text{ berechnet}) \\ 1 + n - (n+1)^2x & , \text{ falls } x \in [\frac{n^2+n-1}{n^2(n+2)}, \frac{1}{n+1}] & (N_{n,1} \text{ berechnet}) . \end{cases}$$

Daraus ergibt sich:

**Beispiel 3.2.16** Für natürliche Zahlen  $n$  und rationale Zahlen  $y < \frac{n}{n+1}$  ist

$$\varepsilon(\mathcal{O}(nF_1 + F_2 - y\Delta)) = \begin{cases} n + 1 & , \text{ falls } y \leq -n & (\Delta \text{ berechnet}) \\ 1 - y & , \text{ falls } y \in [-n, \frac{n^2+n-1}{n(n+2)}] & (F_1 \text{ berechnet}) \\ n + n^2 - (n+1)^2y & , \text{ falls } y \in [\frac{n^2+n-1}{n(n+2)}, \frac{n}{n+1}] & (N_{n,1} \text{ berechnet}) . \end{cases}$$

Das nächste Beispiel soll demonstrieren, dass die Situation recht unübersichtlich werden kann: Wir führen die Berechnungen am Beispiel  $\lambda = \frac{8}{11}$  durch. Dabei bekommen wir als mögliche submaximale Kurven  $N_{1,1}$ ,  $N_{2,1}$ ,  $N_{3,2}$ ,  $N_{4,3}$ ,  $N_{7,5}$  und  $N_{11,8}$  und es ergibt sich

$$\varepsilon(L_{\frac{8}{11},x}) = \begin{cases} \frac{19}{11} & , \text{ falls } x \leq -1 & (\Delta \text{ berechnet}) \\ \frac{8}{11} - x & , \text{ falls } x \in [-1, \frac{1}{3}] & (F_1 \text{ berechnet}) \\ \frac{19}{11} - 4x & , \text{ falls } x \in [\frac{1}{3}, \frac{97}{231}] & (N_{1,1} \text{ berechnet}) \\ \frac{116}{11} - 25x & , \text{ falls } x \in [\frac{97}{231}, \frac{37}{88}] & (N_{3,2} \text{ berechnet}) \\ \frac{227}{11} - 49x & , \text{ falls } x \in [\frac{37}{88}, \frac{1445}{3432}] & (N_{4,3} \text{ berechnet}) \\ 152 - 361x & , \text{ falls } x \in [\frac{1445}{3432}, \frac{8}{19}] & (N_{11,8} \text{ berechnet}) . \end{cases}$$

**Beispiel 3.2.17** Für rationale Zahlen  $y < \frac{88}{19}$  ist

$$\varepsilon(\mathcal{O}(11F_1 + 8F_2 - y\Delta)) = \begin{cases} 19 & , \text{ falls } y \leq -11 & (\Delta \text{ berechnet}) \\ 8 - y & , \text{ falls } y \in [-11, \frac{11}{3}] & (F_1 \text{ berechnet}) \\ 19 - 4y & , \text{ falls } y \in [\frac{11}{3}, \frac{97}{21}] & (N_{1,1} \text{ berechnet}) \\ 116 - 25y & , \text{ falls } y \in [\frac{97}{21}, \frac{37}{8}] & (N_{3,2} \text{ berechnet}) \\ 227 - 49y & , \text{ falls } y \in [\frac{37}{8}, \frac{1445}{312}] & (N_{4,3} \text{ berechnet}) \\ 1672 - 361y & , \text{ falls } y \in [\frac{1445}{312}, \frac{88}{19}] & (N_{11,8} \text{ berechnet}) . \end{cases}$$

c	d	$N_{c,d} = c(c+d)F_1 + d(c+d)F_2 - cd\Delta$
0	1	$F_2$
1	0	$F_1$
1	-1	$\Delta$
1	-2	$-F_1 + 2F_2 + 2\Delta$
1	-3	$-2F_1 + 6F_2 + 3\Delta$
1	1	$2F_1 + 2F_2 - \Delta$
1	2	$F_1 + 6F_2 - 2\Delta$
1	3	$4F_1 + 12F_2 - 3\Delta$
2	-1	$2F_1 - F_2 + 2\Delta$
2	-3	$-2F_1 + 3F_2 + 6\Delta$
2	1	$6F_1 + 3F_2 - 2\Delta$
2	3	$10F_1 + 15F_2 - 6\Delta$
3	-1	$6F_1 - 2F_2 + 3\Delta$
3	-2	$3F_1 - 2F_2 + 6\Delta$
3	1	$12F_1 + 4F_2 - 3\Delta$
3	2	$15F_1 + 10F_2 - 6\Delta$

Tabelle 1: Beispiele für elliptische Kurven auf  $E \times E$  ohne komplexe Multiplikation

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$L^2$	$\sqrt{\frac{2}{3}L^2}$	$\varepsilon(L)$	Berechnungskurve	Submaximal ( $L \cdot C \leq \sqrt{L^2}$ )
3	2	-1	2	$\approx 1,15$	1	$F_1, N_{1,1}$	$F_1, N_{1,1}$
3	3	-1	6	2	2	$F_1, F_2, N_{1,1}$	$F_1, F_2, N_{1,1}$
4	3	-1	10	$\approx 2,58$	2	$F_1$	$F_1, N_{1,1}$
5	3	-1	14	$\approx 3,06$	2	$F_1$	$F_1$
5	4	-2	4	$\approx 1,63$	1	$N_{1,1}$	$F_1, N_{1,1}$
7	4	-2	12	$\approx 2,83$	2	$F_1$	$F_1, N_{1,1}$
7	6	-3	6	2	1	$N_{1,1}$	$N_{1,1}$
10	7	-4	4	$\approx 1,63$	1	$N_{1,1}$	$N_{1,1}, N_{2,1}$
12	9	-5	6	2	1	$N_{1,1}$	$N_{1,1}$
17	10	-6	16	$\approx 3,27$	3	$N_{1,1}, N_{2,1}$	$F_1, N_{1,1}, N_{2,1}$
20	11	-7	6	2	1	$N_{2,1}$	$N_{2,1}$
32	9	-7	2	$\approx 1,15$	1	$N_{3,1}, N_{4,1}$	$N_{3,1}, N_{4,1}$
33	9	-7	6	2	2	$F_1, N_{3,1}, N_{4,1}$	$F_1, N_{3,1}, N_{4,1}$
34	9	-7	10	$\approx 2,58$	2	$F_1$	$F_1, N_{3,1}, N_{4,1}$
26	14	-9	8	$\approx 2,31$	1	$N_{2,1}$	$N_{2,1}$
73	13	-11	6	2	2	$F_1, N_{5,1}, N_{6,1}$	$F_1, N_{5,1}, N_{6,1}$
54	14	-11	16	$\approx 3,27$	3	$F_1, N_{4,1}$	$F_1, N_{3,1}, N_{4,1}$
45	15	-11	30	$\approx 4,47$	4	$F_1, N_{3,1}$	$F_1, N_{3,1}$
36	16	-11	8	$\approx 2,31$	1	$N_{2,1}$	$N_{2,1}$
32	17	-11	10	$\approx 2,58$	1	$N_{2,1}$	$N_{2,1}$
52	30	-19	4	$\approx 1,63$	1	$N_{2,1}$	$N_{2,1}, N_{5,3}$

Tabelle 2: Beispiele für die Berechnung der Seshadri-Konstante von  $L = a_1F_1 + a_2F_2 + a_3\Delta$  auf  $E \times E$  ohne komplexe Multiplikation



### 3.3 Picard-Zahl 4

#### $E \times E$ mit komplexer Multiplikation

Als letztes wollen wir uns mit der abelschen Fläche  $E \times E$  beschäftigen, wenn  $E$  eine irreduzible elliptische Kurve mit komplexer Multiplikation ist.

Sei  $E = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$ ,  $\text{Im}(\tau) > 0$  und  $\sigma \notin \mathbb{Z}$  ein Endomorphismus von  $E$ . Für die analytische Darstellung gilt  $\sigma(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ . Es folgt  $\sigma = \sigma(1) = \alpha + \beta\tau$  und  $\sigma(\tau) = \alpha\tau + \beta\tau^2 \in \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ , d.h.  $\beta\tau^2 - \gamma\tau + \delta = 0$  für geeignete  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$ . Damit ist  $\tau$  algebraisch vom Grad 2 über  $\mathbb{Q}$ . Auf der anderen Seite ist  $\beta\tau$  ein Endomorphismus von  $E$ , falls  $\tau$  die ganzzahlige Gleichung  $\beta\tau^2 - \gamma\tau + \delta = 0$  erfüllt.

Damit besitzt  $E$  genau dann komplexe Multiplikation, wenn  $\tau$  algebraisch vom Grad 2 über  $\mathbb{Q}$  ist. Für die numerischen Eigenschaften des Schnittprodukts auf  $E \times E$  ist besonders das ganzzahlige Minimalpolynom vom  $\tau$  von Bedeutung

$$\beta\tau^2 - \gamma\tau + \delta = 0, \quad \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}, \quad \text{ggT}(\beta, \gamma, \delta) = 1. \quad (3.3.1)$$

In einer Isomorphieklasse von elliptischen Kurven lässt sich  $E = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$  so wählen, dass  $\tau$  aus dem Modulbereich  $\{\tau \in \mathbb{C} \mid |\text{Re}(\tau)| \leq \frac{1}{2}, |\tau| \geq 1, \text{Im}(\tau) > 0\}$  stammt. Damit folgt

$$\text{Re}(\tau) = \frac{\gamma}{2\beta}, \quad |\tau|^2 = \frac{\delta}{\beta}, \quad \text{Im}(\tau) = \sqrt{\frac{4\beta\delta - \gamma^2}{4\beta^2}}$$

und somit  $|\gamma| \leq |\beta| \leq |\delta|$ . Außerdem können wir  $\beta, \delta > 0$  wählen. Es gilt

$$\text{End}(E) = \mathbb{Z} + \beta\tau\mathbb{Z},$$

wobei hier ein Endomorphismus mit der analytischen Darstellung identifiziert wird. Zu elliptischen Kurven siehe [Silverman] oder Kapitel 4 und 5 aus [Shimura].

#### **Lemma 3.3.1** *Der Endomorphismus*

$$\begin{aligned} \beta\tau : \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}) &\rightarrow \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}) \\ z &\mapsto \beta\tau z \end{aligned}$$

*besitzt genau  $\beta\delta - \gamma + 1$  Fixpunkte und hat den Abbildungsgrad  $\beta\delta$ .*

*Beweis:* Es gilt

$$\beta\tau([x] + [y]\tau) = [-\delta y] + [\beta x + \gamma y]\tau,$$

d.h.  $[x] + [y]\tau$  ist genau dann ein Fixpunkt, wenn  $x + \delta y$  und  $\beta x + (\gamma - 1)y$  ganzzahlig sind. Daraus folgt  $(\beta\delta - \gamma + 1)y \in \mathbb{Z}$ , d.h.  $y$  ist von der Form  $\frac{u}{\beta\delta - \gamma + 1}$  mit  $u \in \mathbb{Z}$ . Nun erfüllt genau  $x = \left[\frac{-\delta u}{\beta\delta - \gamma + 1}\right]$  zu jedem vorgegebenen  $y = \left[\frac{u}{\beta\delta - \gamma + 1}\right]$  die geforderte Bedingungen, d.h. es gibt genau  $\beta\delta - \gamma + 1$  Fixpunkte von  $\beta\tau$ .

Es gilt genau dann  $\beta\tau([x] + [y]\tau) = 0$ , wenn  $\delta y$  und  $\beta x + \gamma y$  ganzzahlig sind. Zu jedem vorgegebenen  $y = \left[\frac{v}{\delta}\right]$  gibt es genau  $\beta$  verschiedene Lösungen von  $\beta x + \gamma y \in \mathbb{Z}$ , nämlich  $x = \left[\frac{-\gamma v}{\beta\delta}\right], \left[\frac{-\gamma v + \delta}{\beta\delta}\right], \dots, \left[\frac{-\gamma v + (\beta - 1)\delta}{\beta\delta}\right]$ . Insgesamt hat damit der Homomorphismus  $\beta\tau$  den Abbildungsgrad  $\beta\delta$ .  $\square$

Betrachten wir nun die abelsche Fläche  $E \times E$  für  $E = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$ . Eine Behandlung von  $E \times E$  für die allgemeine elliptische Kurve mit komplexer Multiplikation ist wegen den damit Verbundenen zahlentheoretischen Problemen schwierig. Wir beschränken uns auf diejenigen elliptischen Kurven, die einen Automorphismus  $\alpha \neq \pm 1$  besitzen. Da  $\alpha$  ein Automorphismus ist, gilt  $\alpha(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ . Für die analytische Darstellung von  $\alpha \in \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$  muss daher  $|\alpha| = 1$  gelten, d.h.  $|\alpha| = |\tau| = 1$ . Da  $\tau$  algebraisch vom Grad 2 über  $\mathbb{Q}$  ist, kommen für  $\tau$  nur die Einheitswurzeln  $i$ ,  $\exp \frac{\pi i}{3}$  und  $\exp \frac{2\pi i}{3}$  in Frage (die letzten beiden erzeugen das gleiche Gitter). Für die elliptische Kurve  $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$  ist  $z \mapsto iz$  ein Automorphismus, genauso für  $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \exp \frac{\pi i}{3}\mathbb{Z})$  die Abbildung  $z \mapsto \exp \frac{\pi i}{3}z$ . D.h. es existieren überhaupt nur zwei Isomorphieklassen von elliptischen Kurven über  $\mathbb{C}$ , die einen nichttrivialen Automorphismus besitzen, nämlich die von

$$E_1 := \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}) \quad \text{und} \quad E_2 := \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \exp(\frac{\pi i}{3})\mathbb{Z}) .$$

In Bezug auf Gleichung (3.3.1) sind das die Fälle  $\beta = \delta = 1$  und  $\gamma = 0$ , bzw.  $\beta = \gamma = \delta = 1$ , d.h. die numerisch einfachsten Fälle. Eine Übertragung der Ergebnisse auf andere Beispiele mag unter erhöhtem zahlentheoretischen Aufwand möglich sein, ist aber nicht Gegenstand dieser Arbeit.

Wir wollen uns zuerst mit  $S = E_1 \times E_1$  beschäftigen und im Anschluss die Ergebnisse auf  $E_2 \times E_2$  mit verkürzten Beweisen übertragen. Die Ergebnisse sind ähnlich wie im Fall  $E \times E$  ohne komplexe Multiplikation, allerdings lassen sich die dort verwendeten Methoden nicht direkt übernehmen.

Auf  $E_1$  gibt es den Automorphismus  $\iota : E_1 \rightarrow E_1$ ,  $[x] \mapsto [ix]$ , welcher die beiden Fixpunkte  $[0]$  und  $[\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}]$  besitzt und die Gleichung  $\iota^2 = -1$  erfüllt.

Zunächst betrachten wir die vier Kurven:

$$F_1 := \{0\} \times E_1, \quad F_2 := E_1 \times \{0\}, \quad \Delta := \{(x, x) \mid x \in E_1\} \quad \text{und} \quad \Sigma := \{(x, \iota(x)) \mid x \in E_1\} .$$

Diese elliptischen Kurven schneiden sich jeweils transversal, daher ergeben sich ihre Schnittzahlen durch

$$F_1^2 = F_2^2 = \Delta^2 = \Sigma^2 = 0 \quad \text{sowie} \\ F_1 \cdot F_2 = F_1 \cdot \Delta = F_2 \cdot \Delta = F_1 \cdot \Sigma = F_2 \cdot \Sigma = 1 \quad \text{und} \quad \Delta \cdot \Sigma = 2 .$$

Die Zahl  $\Delta \cdot \Sigma = 2$  errechnet sich anhand der Anzahl der Fixpunkte von  $\iota$ .

**Proposition 3.3.2** *Die numerischen Äquivalenzklassen von  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $\Delta$  und  $\Sigma$  - im Folgenden „kanonische Erzeuger von  $\text{NS}(S)$ “ genannt - erzeugen die Néron-Severi-Gruppe über  $\mathbb{Z}$ .*

*Beweis:* Da die vier Kurven numerisch unabhängig sind, erzeugen ihre Äquivalenzklassen den 4-dimensionalen  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum  $\text{NS}(S) \otimes \mathbb{Q}$ .

Sei  $L := [a_1F_1 + a_2F_2 + a_3\Delta + a_4\Sigma]$  mit  $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{Q}$  eine beliebige numerische Äquivalenzklasse. Durch Schneiden mit den kanonischen Erzeugern erhalten wir, dass

$$L \cdot F_1 = a_2 + a_3 + a_4, \quad L \cdot F_2 = a_1 + a_3 + a_4, \quad L \cdot \Delta = a_1 + a_2 + 2a_4 \quad \text{und} \quad L \cdot \Sigma = a_1 + a_2 + 2a_3$$

ganzzahlig sind. Daraus lässt sich  $2a_1, 2a_2, 2a_3, 2a_4 \in \mathbb{Z}$  und  $a_1 + a_2 \in \mathbb{Z}$  ableiten. Nun schreiben wir  $a_i = \frac{p_i}{2}$  mit  $p_i \in \mathbb{Z}$ . Da wir ferner wissen, dass

$$L^2 = 2(a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + 2a_3a_4) \tag{3.3.2}$$

geradzahlig ist, erhalten wir  $p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_3 + p_2p_4 + 2p_3p_4 \equiv 0 \pmod{4}$ . Durch Betrachten unserer Gleichungen modulo 2 lassen sich alle Möglichkeiten für  $p_i$  modulo 2 ausschließen außer  $p_1 \equiv p_2 \equiv p_3 \equiv p_4 \equiv 0$  bzw.  $p_1 \equiv p_2 \equiv 0, p_3 \equiv p_4 \equiv 1$ . Der erste Fall liefert das gewünschte Ergebnis  $a_i \in \mathbb{Z}$ . Im zweiten Fall betrachten wir Gleichung (3.3.2) modulo 4 und testen alle Möglichkeiten für  $p_i$  modulo 4. Dabei erhalten wir immer  $p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_3 + p_2p_4 + 2p_3p_4 \equiv 2 \pmod{4}$ , ein Widerspruch.  $\square$

Im Folgenden werden wir auch in diesem Fall einen Weg angeben, wie wir anhand vorgegebener Koeffizienten  $a_i \in \mathbb{Z}$  die Seshadri-Konstante des Geradenbündels  $\mathcal{O}(a_1F_1 + a_2F_2 + a_3\Delta + a_4\Sigma)$  berechnen können.

### Ample Geradenbündel

Sei  $L = \mathcal{O}(a_1F_1 + a_2F_2 + a_3\Delta + a_4\Sigma)$  ein amplex Geradenbündel auf  $E_1 \times E_1$ , dann gilt

$$\begin{aligned} L \cdot F_1 &= a_2 + a_3 + a_4 > 0, & L \cdot F_2 &= a_1 + a_3 + a_4 > 0, \\ L \cdot \Delta &= a_1 + a_2 + 2a_4 > 0, & L \cdot \Sigma &= a_1 + a_2 + 2a_3 > 0 \\ \text{und } L^2 &= 2(a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + 2a_3a_4) > 0. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Analog zu Proposition 3.2.2 gilt:

**Proposition 3.3.3** *Die Bedingungen (3.3.3) sind hinreichend für die Amplexität des Geradenbündels  $L = \mathcal{O}(a_1F_1 + a_2F_2 + a_3\Delta + a_4\Sigma)$ .*

Auch hier ist schon eine der Bedingungen  $L \cdot E > 0$ ,  $E \in \{F_1, F_2, \Delta, \Sigma\}$  zusammen mit  $L^2 > 0$  hinreichend.

*Bemerkung:* Wir stellen fest, dass nun sogar zwei Koeffizienten negativ sein können. Wie im vorherigen Kapitel sind dies die interessantesten Geradenbündel bei der Berechnung der Seshadri-Konstante.

**Proposition 3.3.4** *Für ein amplex Geradenbündel  $L = \mathcal{O}(a_1F_1 + a_2F_2 + a_3\Delta + a_4\Sigma)$  mit nichtnegativen Koeffizienten  $a_i \geq 0$  berechnet sich die Seshadri-Konstante durch*

$$\varepsilon(L) = \min\{a_2 + a_3 + a_4, a_1 + a_3 + a_4, a_1 + a_2 + 2a_4, a_1 + a_2 + 2a_3\}. \quad (3.3.4)$$

*Beweis:* Nach Lemma 1.2.9 gilt für Kurven  $C \notin \{F_1, F_2, \Delta, \Sigma\}$

$$\frac{L \cdot C}{\text{mult}_0 C} \geq a_1 + a_2 + a_3 + a_4.$$

Dieser Wert ist allerdings immer grösser oder gleich dem Minimum der Schnittzahlen mit den kanonischen Erzeugern  $a_2 + a_3 + a_4$ ,  $a_1 + a_3 + a_4$ ,  $a_1 + a_2 + 2a_4$  und  $a_1 + a_2 + 2a_3$ .  $\square$

Auch in diesem Fall berechnet eine elliptische Kurve die Seshadri-Konstante. Außerdem können wir für Geradenbündel der Form  $\mathcal{O}(a_1F_1 + a_2F_2 + a_3\Delta + 0 \cdot \Sigma)$  analog Satz 3.2.8 submaximale elliptische Kurven finden. D.h. auch hier liegt daher die Vermutung nahe, dass alle Seshadri-Konstanten durch elliptische Kurven berechnet werden.

## Elliptische Kurven auf $E_1 \times E_1$

In diesem Abschnitt werden wir eine Klassifikation der numerischen Äquivalenzklassen aller elliptischen Kurven auf  $E_1 \times E_1$  erstellen und dann zeigen, dass für ein beliebiges Geradenbündel eine der elliptischen Kurven die Seshadri-Konstante berechnet. Wir werden hierbei anders vorgehen als im Fall  $E \times E$  ohne komplexe Multiplikation, da hier eine Parametrisierung der elliptischen Kurven ähnlich Satz 3.2.7 nicht so offensichtlich ist. Unser Ausgangspunkt ist folgendes Lemma:

**Proposition 3.3.5 (Lemma 1 aus [Hayashida-Nishi65])** *Es sei  $E$  eine elliptische Kurve. Für jede elliptische Kurve  $E'$  auf dem  $n$ -fachen Kreuzprodukt  $E \times \cdots \times E$  gibt es Endomorphismen  $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \text{End}(E)$ , so dass  $E'$  eine Translation des Bildes der Abbildung*

$$\begin{aligned} \sigma : E &\rightarrow E \times \cdots \times E \\ x &\mapsto (\sigma_1(x), \dots, \sigma_n(x)) \end{aligned}$$

ist.

*Beweis:* Nach Translation ist  $E'$  ein Untertorus von  $E \times \cdots \times E$ . Eine der Projektionen  $\text{pr}_i|_{E'} : E' \rightarrow E$  ist nun eine Isogenie, und anhand der rationalen Inversen  $s : E \rightarrow E'$  können wir die Endomorphismen  $\sigma_i := \text{pr}_i \circ s$  definieren.  $\square$

Gehen wir nun also von einer elliptischen Kurve  $N$  auf  $E_1 \times E_1$  aus. Es ist  $\text{End}(E_1) = \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ , wobei eine ganze Zahl  $a$  für die Abbildung  $a : [x] \mapsto [ax]$  steht.

Nach Lemma 3.3.5 finden wir Endomorphismen  $a + b\iota$  und  $c + d\iota \in \text{End}(E_1)$  mit  $N \equiv_{\text{num}} \{(ax + b\iota(x), cx + d\iota(x)) \mid x \in E_1\}$ . Hier können wir  $a, b, c, d$  als teilerfremd voraussetzen, da ein gemeinsamer Teiler nur ein mehrfaches Durchlaufen des Bildes bedeuten würde. Es ist also unsere Aufgabe, die numerische Äquivalenzklasse der elliptischen Kurve

$$N_{a,b,c,d} := \{(ax + b\iota(x), cx + d\iota(x)) \mid x \in E_1\} \quad (3.3.5)$$

zu bestimmen. Hierzu werden wir die Schnittzahlen von  $N_{a,b,c,d}$  mit den kanonischen Erzeugern berechnen.

Nehmen wir also zuerst  $F_1 = \{(0, y) \mid y \in E_1\}$  und gehen davon aus, dass  $N_{a,b,c,d}$  nicht gleich  $F_1$  ist - was genau dann der Fall ist, wenn  $a$  und  $b$  nicht beide Null sind. Wenn wir die Pullbacks der beiden Kurven bezüglich der Projektion  $\pi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow E_1 \times E_1$  betrachten, so erkennen wir, dass es sich um zwei Geradenscharen handelt ( $x = 0$  bzw.  $y = \frac{c+id}{a+ib}x$  sowie die um Gitterpunkte verschobenen Geraden). Diese schneiden sich transversal, und damit schneiden sich auch die Bilder unter dem lokalen Diffeomorphismus  $\pi$  transversal. D.h. um die Schnittzahl von  $F_1$  und  $N_{a,b,c,d}$  zu bestimmen, brauchen wir nur die Anzahl der Schnittpunkte

$$F_1 \cdot N_{a,b,c,d} = \#(N_{a,b,c,d} \cap F_1) = \frac{\#(\{x \in E_1 \mid ax + b\iota(x) = 0\})}{D}$$

zu bestimmen.  $D$  steht hier für den Grad der Abbildung  $x \mapsto (ax + b\iota(x), cx + d\iota(x))$ .

**Lemma 3.3.6** *Es seien ganze Zahlen  $a$  und  $b$  gegeben. Dann besitzt die Gleichung*

$$ax + b\iota(x) = 0 \quad (3.3.6)$$

genau  $l := a^2 + b^2$  Lösungen  $x \in E_1$ .

*Beweis:* Falls eine der Zahlen  $a$  oder  $b$  - sagen wir  $b$  - gleich Null ist, so ist  $a^2$  gerade der Grad der Abbildung  $a$ . Wir können also davon ausgehen, dass  $a$  und  $b$  von null verschieden sind.

Seien  $a$  und  $b$  zunächst teilerfremd, dann ist auch  $l$  teilerfremd zu  $a$  und  $b$ . Es sei nun  $x$  eine Lösung von (3.3.6). Durch Anwenden von  $\iota$  und Multiplikation mit  $b$  ergibt sich  $abu(x) - b^2x = 0$ . Zusammen mit der Ausgangsgleichung bedeutet das  $(-a^2 - b^2)x = 0$ , d.h.  $x$  ist eine  $l$ -Periode ( $l$ -Torsionspunkt). Die  $l$ -Perioden auf  $E_1$  sind von der Form  $x = [\frac{m}{l} + i\frac{n}{l}]$  mit  $0 \leq m, n < l$ . Nun ist  $ax + b\iota(x) = [\frac{am-bn}{l} + i\frac{an+bm}{l}]$  genau dann gleich Null, wenn  $l$  die beiden ganzen Zahlen  $am - bn$  und  $an + bm$  teilt. Zu beliebigem  $m \in \mathbb{Z}_l$  erfüllt  $n \equiv b^{-1}am$  die geforderten Gleichungen  $am - bn \equiv an + bm \equiv 0$  (in  $\mathbb{Z}_l$  sind  $a$  und  $b$  invertierbar), d.h. es gibt genau  $a^2 + b^2$  verschiedene Lösungen von (3.3.6).

Sei nun  $d = \text{ggT}(a, b)$ ,  $a = da'$  und  $b = db'$ . Dann besitzt

$$a'(dx) + b'\iota(dx) = 0$$

wie eben gezeigt genau  $a'^2 + b'^2$  Lösungen für  $dx$ . Multipliziert mit dem Grad der Abbildung  $d$  ergeben sich  $d^2(a'^2 + b'^2) = a^2 + b^2$  Möglichkeiten für  $x$ .  $\square$

**Lemma 3.3.7** *Es seien  $a, b, c, d$  teilerfremde ganze Zahlen. Dann besitzt die Abbildung*

$$\begin{aligned} \varphi : E_1 &\rightarrow N_{a,b,c,d} \\ x &\mapsto (ax + b\iota(x), cx + d\iota(x)) \end{aligned}$$

den Abbildungsgrad  $D := \text{ggT}(a^2 + b^2, c^2 + d^2, ac + bd, ad - bc)$ .

*Beweis:* Die Abbildung ist ein Homomorphismus, daher genügt es die Anzahl der Elemente im Kern von  $\varphi$  zu bestimmen. Sei  $x \in E_1$  mit

$$ax + b\iota(x) = cx + d\iota(x) = 0. \quad (3.3.7)$$

Wie in Lemma 3.3.6 folgt  $(a^2 + b^2)x = (c^2 + d^2)x = 0$ , d.h.  $x$  ist  $(a^2 + b^2)$ - und  $(c^2 + d^2)$ -Periode. Außerdem folgt  $0 = d\iota(ax + b\iota(x)) = ad\iota(x) - bdx = (-ac - bd)x$  und  $0 = a\iota(cx + d\iota(x)) = ac\iota(x) - adx = (bc - ad)x$ . Also ist  $x$  auch  $(ac + bd)$ - sowie  $(ad - bc)$ -Periode und somit eine  $D$ -Periode. Eine  $D$ -Periode  $x = [\frac{m}{D} + i\frac{n}{D}]$  erfüllt (3.3.7) genau dann, wenn die Gleichungen

$$\begin{aligned} am - bn &\equiv 0 \pmod{D}, \\ bm + an &\equiv 0 \pmod{D}, \\ cm - dn &\equiv 0 \pmod{D}, \\ dm + cn &\equiv 0 \pmod{D} \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

simultan erfüllt werden. Der Abbildungsgrad ist somit die Anzahl der Lösungen des Gleichungssystems in  $\mathbb{Z}_D$ . Das nun folgende Lemma schließt daher den Beweis ab.  $\square$

**Lemma 3.3.8** *Zu gegebenen teilerfremden ganzen Zahlen  $a, b, c, d$  mit  $D = \text{ggT}(a^2 + b^2, c^2 + d^2, ac + bd, ad - bc)$  besitzt das Gleichungssystem (3.3.8) genau  $D$  verschiedene Lösungen  $(m, n) \in \mathbb{Z}_D^2$ .*

*Beweis:* Zuerst zeigen wir, dass es zu vorgegebenem  $n \in \mathbb{Z}_D$  höchstens ein  $m \in \mathbb{Z}_D$  mit (3.3.8) gibt. Da  $a, b, c, d$  teilerfremd sind, gibt es ganze Zahlen  $l_1, l_2, l_3, l_4$  mit  $l_1a + l_2b + l_3c + l_4d = 1$ . Für ein Paar  $(m, n)$  mit (3.3.8) gilt dann

$$\begin{aligned} m &= (l_1a + l_2b + l_3c + l_4d)m = l_1am + l_2bm + l_3cm + l_4dm \\ &\equiv l_1bn - l_2an - l_3dn + l_4cn = (l_1b - l_2a - l_3d + l_4c)n . \end{aligned}$$

*Behauptung 1:* Ein Paar  $(m, n) \in \mathbb{Z}_D$  erfüllt (3.3.8) schon dann, wenn es nur die beiden Gleichungen erfüllt:

$$\begin{aligned} am - bn &\equiv 0 \pmod{D} , \\ cm - dn &\equiv 0 \pmod{D} . \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} a(an + bm) &= a^2n + abm \equiv (a^2 + b^2)n \equiv 0 , \\ b(an + bm) &= abn + b^2m \equiv (a^2 + b^2)m \equiv 0 , \\ c(an + bm) &= acn + bcm \equiv (ac + bd)n \equiv 0 \quad \text{und} \\ d(an + bm) &= adn + bdm \equiv (ac + bd)m \equiv 0 . \end{aligned}$$

Da  $a, b, c, d$  teilerfremd sind, folgt  $an + bm \equiv 0$ . Analog lässt sich  $cn + dm \equiv 0$  zeigen.

*Behauptung 2:* Es gilt  $\text{ggT}(a, D) = \text{ggT}(b, D)$  und  $\text{ggT}(c, D) = \text{ggT}(d, D)$ .

$A := \text{ggT}(a, D)$  teilt die Zahlen  $a, a^2 + b^2, ac + bd$  und  $ad - bc$ . Somit teilt  $A$  auch  $ab, bb, cb$  und  $db$ . Da aber  $a, b, c, d$  teilerfremd sind, teilt  $A$  dann auch  $b$ . Also gilt  $\text{ggT}(a, D) = \text{ggT}(a, b, D)$ . Analoges gilt für  $\text{ggT}(b, D), \text{ggT}(c, D)$  und  $\text{ggT}(d, D)$ .

Zuletzt zeigen wir, dass zu jedem  $n \in \mathbb{Z}_D$  ein  $m \in \mathbb{Z}_D$  mit (3.3.9) existiert. In  $\mathbb{Z}_D$  gilt  $\langle a \rangle = \langle \text{ggT}(a, D) \rangle = \langle \text{ggT}(b, D) \rangle = \langle b \rangle$ , d.h. die erste Gleichung von (3.3.9) besitzt genau  $A$  Lösungen für  $m$ :

$$m_A, m_A + \frac{D}{A}, \dots, m_A + (A-1)\frac{D}{A} .$$

Für zwei Werte  $m_A + l\frac{D}{A}$  und  $m_A + k\frac{D}{A}$  gilt  $c(m_A + l\frac{D}{A}) - dn \equiv c(m_A + k\frac{D}{A}) - dn$  modulo  $D$  genau dann, wenn  $c(k-l)\frac{D}{A} \equiv 0 \pmod{D}$ . Also ist  $(k-l)\frac{D}{A} \equiv 0 \pmod{\frac{D}{\text{ggT}(c,D)}}$ . Wir setzen  $C = \text{ggT}(c, D)$  und  $B := \frac{D}{AC}$  ( $A$  und  $C$  sind teilerfremd, damit ist  $B$  ganzzahlig). Nun ist  $(k-l)BC$  ein Vielfaches von  $AB$ , d.h. wegen der Teilerfremdheit von  $A$  und  $C$  müsste  $A$  damit  $k-l$  teilen. Damit sind für unsere  $A$  verschiedenen Lösungen der ersten Gleichung von (3.3.9) die Werte  $cm - dn$  jeweils inäquivalent untereinander. Für diese Werte folgt aber auch  $a(cm - dn) \equiv c(am - bn) \equiv 0$ , d.h.  $cm - dn \equiv 0 \pmod{\frac{D}{A}}$ . Das bedeutet, dass für  $cm - dn$  nur die  $A$  Vielfachen von  $\frac{D}{A}$  in Frage kommen und jedes - insbesondere auch 0 - genau einmal angenommen werden muss. Damit erfüllt eine der Lösungen der ersten Gleichung von (3.3.9) auch die zweite Gleichung.

Insgesamt hat unser Gleichungssystem (3.3.8) damit genau  $D$  verschiedene Lösungen - genau eine zu jedem vorgegebenen  $n \in \mathbb{Z}_D$ .  $\square$

Zurück zu der Schnitzzahl  $N_{a,b,c,d} \cdot F_1$ : Wir erkennen nun:

$$N_{a,b,c,d} \cdot F_1 = \frac{a^2 + b^2}{D} .$$

Die analoge Argumentation liefert:

$$\begin{aligned}
N_{a,b,c,d} \cdot F_2 &= \#(N_{a,b,c,d} \cap F_2) = \frac{\#\{x \in E_1 \mid cx + d\iota(x) = 0\}}{D} \\
&= \frac{c^2 + d^2}{D} \\
N_{a,b,c,d} \cdot \Delta &= \#(N_{a,b,c,d} \cap \Delta) = \frac{\#\{x \in E_1 \mid ax + b\iota(x) = cx + d\iota(x)\}}{D} \\
&= \frac{(a-c)^2 + (b-d)^2}{D} \\
N_{a,b,c,d} \cdot \Sigma &= \#(N_{a,b,c,d} \cap \Sigma) = \frac{\#\{x \in E_1 \mid cx + d\iota(x) = a\iota(x) - bx\}}{D} \\
&= \frac{(a-d)^2 + (b+c)^2}{D}
\end{aligned}$$

Durch die Inverse der Schnittmatrix der Erzeuger lässt sich die numerische Äquivalenzklasse von  $N_{a,b,c,d}$  berechnen:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a^2+b^2}{D} \\ \frac{c^2+d^2}{D} \\ \frac{(a-c)^2+(b-d)^2}{D} \\ \frac{(a-d)^2+(b+c)^2}{D} \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} c^2 + d^2 - ac - ad - bd + bc \\ a^2 + b^2 - ac - ad - bd + bc \\ ac + bd \\ ad - bc \end{pmatrix}.$$

**Lemma 3.3.9** *Es seien  $a, b, c, d$  teilerfremde ganze Zahlen und  $D := \text{ggT}(a^2 + b^2, c^2 + d^2, ac + bd, ad - bc)$ . Dann gibt es teilerfremde ganze Zahlen  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$  mit  $\text{ggT}(\bar{a}^2 + \bar{b}^2, \bar{c}^2 + \bar{d}^2, \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{d}, \bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c}) = 1$  und*

$$\begin{aligned}
\bar{a}^2 + \bar{b}^2 &= \frac{a^2 + b^2}{D}, & \bar{c}^2 + \bar{d}^2 &= \frac{c^2 + d^2}{D} \\
\bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{d} &= \frac{ac + bd}{D}, & \bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c} &= \frac{ad - bc}{D}.
\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

*Beweis:* Zuerst wollen wir das Problem umformulieren: Für die ganzzahligen Vektoren  $v := (a, b)$  und  $w := (c, d)$  ist  $a^2 + b^2$  das Quadrat des Betrags von  $v$ ,  $c^2 + d^2$  das Quadrat des Betrags von  $w$  und  $ac + bd$  das Skalarprodukt von  $v$  und  $w$ . Wir suchen nun ganzzahlige Vektoren  $\bar{v} = (\bar{a}, \bar{b})$  und  $\bar{w} = (\bar{c}, \bar{d})$  mit  $|\bar{v}| = \frac{|v|}{\sqrt{D}}$  und  $|\bar{w}| = \frac{|w|}{\sqrt{D}}$ , die im gleichen Winkel  $\gamma$  zueinander stehen wie  $v$  und  $w$ . Damit ist  $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = |\bar{v}||\bar{w}| \cos(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{1}{\sqrt{D}} |v||w| \cos(\gamma) = \frac{1}{D} \langle v, w \rangle$ , d.h.  $\bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{d} = \frac{ac+bd}{D}$ . Wegen  $(\bar{a}^2 + \bar{b}^2)(\bar{c}^2 + \bar{d}^2) = (\bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{d})^2 + (\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c})^2$  ist mit geeigneter Wahl der Vorzeichen auch die letzte Gleichung erfüllt. Also suchen wir eine Drehstreckungsmatrix der Form  $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$  mit

$$M \cdot v = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta b \\ -\beta a + \alpha b \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2, \quad M \cdot w = \begin{pmatrix} \alpha c + \beta d \\ -\beta c + \alpha d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$$

und Streckungsfaktor  $\frac{|M \cdot x|}{|x|} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{1}{\sqrt{D}}$ . Falls wir solche  $\alpha, \beta$  finden können, gilt  $(a^2 + b^2)\alpha = a(\alpha a + \beta b) + b(-\beta a + \alpha b) \in \mathbb{Z}$ ,  $(c^2 + d^2)\alpha = c(\alpha c + \beta d) + d(-\beta c + \alpha d) \in \mathbb{Z}$ ,

$(ac + bd)\alpha = c(\alpha a + \beta b) + b(-\beta c + \alpha d) \in \mathbb{Z}$ ,  $(ad - bc)\alpha = d(\alpha a + \beta b) - b(\alpha c + \beta d) \in \mathbb{Z}$ .  
D.h. ein hypothetisches  $\alpha$  ist von der Form  $\alpha = \frac{x}{D}$ ,  $x \in \mathbb{Z}$ . Analog ist  $\beta = \frac{y}{D}$ ,  $y \in \mathbb{Z}$ . Wir suchen also Werte  $x, y \in \{0, \dots, D-1\}$  mit

$$\begin{aligned} ax + by &\equiv 0 \pmod{D}, \\ bx - ay &\equiv 0 \pmod{D}, \\ cx + dy &\equiv 0 \pmod{D}, \\ dx - cy &\equiv 0 \pmod{D}. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist nach Lemma 3.3.8 sogar mit vorgegebenem  $x$ -Wert lösbar. Sei  $(1, y)$  die Lösung zu  $x = 1$ , dann gilt bei  $D > 1$  für den Streckungsfaktor

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{D^2}} \leq \sqrt{\frac{1 + (D-1)^2}{D^2}} \leq \sqrt{\frac{D^2 - 2D + 2}{D^2}} < 1.$$

Die so gefundene Drehstreckung überführt  $v$  und  $w$  in ganzzahlige Vektoren  $\tilde{v} = (\tilde{a}, \tilde{b})$  und  $\tilde{w} = (\tilde{c}, \tilde{d})$  mit kleinerer Norm ( $|\tilde{v}| = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{D^2}}|v|$ ,  $|\tilde{w}| = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{D^2}}|w|$ ) aber gleichem Winkel zueinander. Außerdem gilt  $0 \equiv x(ax + by) - y(bx - ay) = a(x^2 + y^2)$ ,  $0 \equiv y(ax + by) + x(bx - ay) = b(x^2 + y^2)$ ,  $0 \equiv x(cx + dy) - y(dx - cy) = c(x^2 + y^2)$  und  $0 \equiv y(cx + dy) + x(dx - cy) = d(x^2 + y^2)$ . Wegen der Teilerfremdheit von  $a, b, c, d$  ist damit  $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{D}$ , d.h.  $\frac{x^2+y^2}{D}$  ganzzahlig. Es gilt

$$\begin{aligned} \tilde{a}^2 + \tilde{b}^2 &= \frac{x^2 + y^2}{D^2}(a^2 + b^2), & \tilde{c}^2 + \tilde{d}^2 &= \frac{x^2 + y^2}{D^2}(c^2 + d^2) \\ \tilde{a}\tilde{c} + \tilde{b}\tilde{d} &= \frac{x^2 + y^2}{D^2}(ac + bd), & \tilde{a}\tilde{d} - \tilde{b}\tilde{c} &= \pm \frac{x^2 + y^2}{D^2}(ad - bc). \end{aligned}$$

Für den Wert  $\tilde{D} = \text{ggT}(\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2, \tilde{c}^2 + \tilde{d}^2, \tilde{a}\tilde{c} + \tilde{b}\tilde{d}, \tilde{a}\tilde{d} - \tilde{b}\tilde{c})$  ergibt sich  $\tilde{D} = \frac{x^2+y^2}{D}D = \frac{x^2+y^2}{D} < D$ . Dieses Verfahren können wir so lange wiederholen bis nach endlich vielen Schritten  $\tilde{D} = 1$  gilt. Da sich die auftretenden Faktoren multiplikativ vererben, finden wir durch Hintereinanderausführung der gefundenen Drehstreckungen die gesuchten Werte  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$  - notwendigerweise teilerfremd - mit  $\bar{D} = 1$ .  $\square$

**Satz 3.3.10** Für alle teilerfremden ganzen Zahlen  $a, b, c, d$  mit  $D := \text{ggT}(a^2 + b^2, c^2 + d^2, ac + bd, ad - bc)$  gilt:

$$N_{a,b,c,d} \equiv_{\text{num}} \frac{c^2+d^2-ac-ad-bd+bc}{D} F_1 + \frac{a^2+b^2-ac-ad-bd+bc}{D} F_2 + \frac{ac+bd}{D} \Delta + \frac{ad-bc}{D} \Sigma. \quad (3.3.11)$$

Die Menge aller irreduziblen elliptischen Kurven auf  $S$  besteht aus den Translaten der elliptischen Kurven  $N_{a,b,c,d}$  für ganze Zahlen  $a, b, c$  und  $d$  mit

$$D = \text{ggT}(a^2 + b^2, c^2 + d^2, ac + bd, ad - bc) = 1.$$

*Beweis:* Oben haben wir gezeigt, dass zu einer vorgegebenen elliptischen Kurve  $N$ , ganze Zahlen  $a, b, c, d$  existieren, so dass  $N$  numerisch äquivalent ist zu  $N_{a,b,c,d} \equiv_{\text{num}} \frac{c^2+d^2-ac-ad-bd+bc}{D} F_1 + \frac{a^2+b^2-ac-ad-bd+bc}{D} F_2 + \frac{ac+bd}{D} \Delta + \frac{ad-bc}{D} \Sigma$ . In Lemma 3.3.9 haben wir dann gezeigt, dass diese sogar so gewählt werden können, dass  $\text{ggT}(a^2 + b^2, c^2 + d^2, ac + bd, ad - bc) = 1$  ist. Wie in Lemma 3.2.7 können wir auf der anderen Seite zeigen, dass



$h^0(\mathcal{O}(\frac{c^2+d^2-ac-ad-bd+bc}{D}F_1 + \frac{a^2+b^2-ac-ad-bd+bc}{D}F_2 + \frac{ac+bd}{D}\Delta + \frac{ad-bc}{D}\Sigma)) = 1$  ist. D.h. das Liniensystem enthält nur die elliptische Kurve  $N_{a,b,c,d}$  und die numerische Äquivalenzklasse nur die Translate davon.  $\square$

*Bemerkung:* Da ein gemeinsamer Faktor die Kurve  $N_{a,b,c,d}$  nicht verändert, aber auch quadratisch in  $D$  vorkommen wird, gilt (3.3.11) auch für nicht teilerfreie Zahlen  $a, b, c, d$ . Durch Multiplikation der Zahlen  $a, b, c, d$  mit  $-1$  können wir z.B. auch immer  $a \geq 0$  erreichen, ohne die Kurve zu verändern.

**Folgerung 3.3.11** *Jede irreduzible elliptische Kurve auf  $E_1 \times E_1$  ist isomorph zu  $E_1$ .*

*Beweis:* Wir haben gezeigt, dass jede elliptische Kurve eine Translation des Bildes einer Abbildung  $\varphi : x \mapsto (ax + bu(x), cx + du(x))$  für geeignete Zahlen  $a, b, c, d$  ist. Nun können diese nach Lemma 3.3.9 sogar so gewählt werden, dass der Grad der Abbildung  $D = \text{ggT}(a^2 + b^2, c^2 + d^2, ac + bd, ad - bc)$  gleich 1 ist. (Numerisch äquivalente irreduzible elliptische Kurven sind notwendigerweise Translate voneinander.) Also ist  $\varphi$  ein Isomorphismus.  $\square$

Die Kenntnis der numerischen Äquivalenzklassen der elliptischen Kurven auf  $S$  lässt uns nun folgern:

**Satz 3.3.12** *Zu jedem amplen Geradenbündel  $L = \mathcal{O}(a_1F_1 + a_2F_2 + a_3\Delta + a_4\Gamma)$  auf  $E_1 \times E_1$  gibt es eine elliptische Kurve  $N$  mit*

$$\varepsilon(L) \leq L \cdot N \leq \sqrt{L^2}.$$

Für den Beweis benötigen wir einen Satz über quadratische Formen aus der Geometrie der Zahlen, nachzulesen z.B. in Kapitel 6 von [Gruber-Lekkerkerker].

**Satz 3.3.13 (Mahler)** *Sei  $Q$  eine positiv definite quadratische Form in 4 Variablen ( $Q = \sum_{i,j} a_{i,j}x_i x_j$ ,  $a_{i,j} = a_{j,i}$ ) mit Determinante  $D := \det(a_{i,j})$ . Dann gibt es einen ganzzahligen Punkt  $q \in \mathbb{Z}^4$ ,  $q \neq 0$  mit*

$$Q(q) \leq \sqrt{2} \sqrt[4]{D}.$$

*Bemerkung:* Die Konstante  $\sqrt{2}$  („Hermitesche Konstante  $\gamma_4$ “) ist bestmöglich.

*Beweis von Satz 3.3.12:* Wie im Beweis zu 3.2.8 betrachten wir die Schnitzzahl von  $L$  mit den elliptischen Kurven  $N_{a,b,c,d}$  als quadratische Form:

$$\begin{aligned} Q(a, b, c, d) &:= L \cdot N_{a,b,c,d} \\ &= (a \ b \ c \ d) \cdot \begin{pmatrix} a_1 + a_3 + a_4 & 0 & -a_3 & -a_4 \\ 0 & a_1 + a_3 + a_4 & a_4 & -a_3 \\ -a_3 & a_4 & a_2 + a_3 + a_4 & 0 \\ -a_4 & -a_3 & 0 & a_2 + a_3 + a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es lässt sich leicht nachrechnen, dass diese Form positiv definit ist und die Determinante  $D = \left(\frac{L^2}{2}\right)^2$  besitzt. Nach Satz 3.3.13 gibt es ganze Zahlen  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ , nicht alle Null mit  $Q(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}) \leq \sqrt{2} \sqrt[4]{D}$ . Es folgt

$$\varepsilon(L) \leq L \cdot N_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}} = Q(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}) \leq \sqrt{2} \sqrt[4]{\left(\frac{L^2}{2}\right)^2} = \sqrt{L^2}.$$

□

*Bemerkung:* Die Abschätzung aus Satz 3.3.12 ist bestmöglich. Für das Geradenbündel  $L = \mathcal{O}(2F_1 + 2F_2 - \Delta + \Sigma) \equiv_{num} F_2 + N_{0,-1,1,1}$  ist  $L^2 = 4$  und  $L \cdot F_2 = L \cdot N_{0,-1,1,1} = 2$ . Wegen Lemma 1.2.9 ist daher  $\varepsilon(L) = 2 = \sqrt{L^2}$ , d.h. eine elliptische Kurve mit kleinerer Schnittzahl kann nicht existieren.

*Bemerkung:* Auf  $E_1 \times E_1$  gibt es sowohl Geradenbündel mit  $E(L) < \sqrt{L^2}$  (alle Geradenbündel, für die  $L^2$  keine Quadratzahl ist), als auch Geradenbündel mit  $E(L) = \sqrt{L^2}$  (z.B. für  $L = \mathcal{O}(4F_1 + 2F_2 + 3\Delta - 2\Sigma)$  ist  $L^2 = 4$  und  $\varepsilon(L) = L \cdot N_{0,1,1,1} = 1$ ).

**Lemma 3.3.14** *Sei  $S$  eine abelsche Fläche mit der Eigenschaft, dass es zu jedem amplen Geradenbündel  $L$  eine elliptische Kurve  $E$  gibt mit*

$$L \cdot E \leq \sqrt{L^2} . \quad (3.3.12)$$

Dann gilt

$$\varepsilon(L) = \min \{ L \cdot N \mid N \text{ elliptische Kurve auf } S \} .$$

*Beweis:* Wegen (3.3.12) ist  $\varepsilon(L) \leq \sqrt{L^2}$ . Nehmen wir an wir hätten eine bzgl.  $L$  submaximale irreduzible ample Kurve  $C$ . Nach Proposition 1.2.8 ist  $C$  auch submaximal für das ample Geradenbündel  $\mathcal{O}(C)$ . Aber auch für  $\mathcal{O}(C)$  existiert nach Voraussetzung eine elliptische Kurve  $E$  mit  $L \cdot E \leq \sqrt{L^2}$ . Nach Proposition 1.2.7 müsste diese eine Komponente der irreduziblen amplen Kurve  $C$  sein – ein Widerspruch. Das bedeutet, dass die Seshadri-Konstante nur von den elliptischen Kurven auf  $S$  berechnet werden kann. □

**Folgerung 3.3.15** *Die Seshadri-Konstante eines amplen Geradenbündels  $L$  auf  $E_1 \times E_1$  wird durch eine elliptische Kurve berechnet. Insbesondere ist  $\varepsilon(L)$  immer ganzzahlig.*

Analog zu 3.2.11 und 3.2.12 folgt:

**Folgerung 3.3.16** *Es gibt keine amplen, bezüglich eines beliebigen amplen Geradenbündels submaximalen irreduziblen Kurven auf  $E_1 \times E_1$ .*

**Satz 3.3.17** *Auf der abelschen Fläche  $E_1 \times E_1$  zerfällt jedes ample Geradenbündel  $L$  in eine Summe von elliptischen Kurven*

$$L = \mathcal{O}(N_1 + N_2 + \cdots + N_l) .$$

*Diese Kurven sind nicht eindeutig bestimmt.*

## Berechnung der Seshadri-Konstante

In diesem Abschnitt werden wir nun die Seshadri-Konstante eines amplen Geradenbündels  $L = \mathcal{O}(a_1F_1 + a_2F_2 + a_3\Delta + a_4\Sigma)$  anhand der numerischen Daten  $a_1, a_2, a_3, a_4$  explizit berechnen. Eine direkte Abschätzung analog zu (3.2.14), welche der elliptischen Kurven  $N_{a,b,c,d}$  submaximal zu einem vorgegebenen Geradenbündel sind, erweist sich als schwierig. Auch ist die Reihenfolge der Koeffizienten nicht beliebig vertauschbar ( $\Delta \cdot \Sigma \neq \Delta \cdot F_1$ ), was eine analoge Argumentation zusätzlich erschwert.

Im Gegensatz zu Kapitel 6 untersuchen wir hier die Funktion

$$\begin{aligned} Q &: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b, c, d) &\mapsto N_{a,b,c,d} \cdot L \end{aligned}$$

analytisch auf Minima in den ganzzahligen Punkten. Dazu zunächst folgendes Lemma:

**Lemma 3.3.18** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine partiell differenzierbare Funktion. Dann liegen die Minima der eingeschränkten Funktion  $f|_{\mathbb{Z}^4}$  in der Menge

$$\bigcap_{i=1}^n U_{i,1} \left( \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0 \right\} \right). \quad (3.3.13)$$

$U_{i,1}(M) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \exists m \in M : |pr_i(x - m)| \leq 1 \}$  bezeichnet hier die Menge aller Vektoren  $x \in \mathbb{R}^n$ , deren Abstand in der  $i$ -ten Komponente höchstens 1 zur Menge  $M$  ist.

*Beweis:* Sei  $m = (m_1, \dots, m_n)$  ein ganzzahliges Minimum von  $f$ . Sicher ist

$$f(m_1 - 1, m_2, \dots, m_n) \geq f(m_1, m_2, \dots, m_n) \leq f(m_1 + 1, m_2, \dots, m_n).$$

Also besitzt die differenzierbare Funktion  $x \mapsto f(x, m_2, \dots, m_n)$  ein lokales Minimum  $\bar{x}$  zwischen  $m_1 - 1$  und  $m_1 + 1$ , d.h.  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}, m_2, \dots, m_n) = 0$ . Damit ist der Abstand von  $m$  zu der Menge  $\left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 0 \right\}$  in der ersten Komponente höchstens 1. Analoges gilt für die anderen Komponenten.  $\square$

Es ist also unsere Aufgabe für die oben definierte Funktion

$$Q(a, b, c, d) = (a \ b \ c \ d) \cdot \begin{pmatrix} a_1 + a_3 + a_4 & 0 & -a_3 & -a_4 \\ 0 & a_1 + a_3 + a_4 & a_4 & -a_3 \\ -a_3 & a_4 & a_2 + a_3 + a_4 & 0 \\ -a_4 & -a_3 & 0 & a_2 + a_3 + a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

die Menge  $\bigcap_{i=1}^4 U_{i,1} \left( \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{\partial Q}{\partial x_i}(x) = 0 \right\} \right)$  zu bestimmen. Es gilt

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1}(a, b, c, d) = 2(a_1 + a_3 + a_4, 0, -a_3, -a_4) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

Die Menge der Punkte, die einen Abstand von 1 in der ersten Komponente zu

$$\{ x \in \mathbb{R}^n \mid 2(a_1 + a_3 + a_4, 0, -a_3, -a_4) \cdot x = 0 \}$$

haben, ist die Vereinigung der beiden Hyperebenen

$$\{ x \in \mathbb{R}^4 \mid (a_1 + a_3 + a_4, 0, -a_3, -a_4) \cdot x = \pm |a_1 + a_3 + a_4| \}.$$

Die Menge  $U_{1,1} \left( \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{\partial Q}{\partial x_1}(x) = 0 \right\} \right)$  ist die Menge der Punkte zwischen diesen Hyperebenen.

Um den Durchschnitt dieser Mengen zu bekommen, berechnen wir die Eckpunkte des entstehenden Paralleloteps. Die Linearformen  $\frac{\partial Q}{\partial x_i}$  entsprechen den Zeilen der definierenden Matrix

$$M := \begin{pmatrix} a_1 + a_3 + a_4 & 0 & -a_3 & -a_4 \\ 0 & a_1 + a_3 + a_4 & a_4 & -a_3 \\ -a_3 & a_4 & a_2 + a_3 + a_4 & 0 \\ -a_4 & -a_3 & 0 & a_2 + a_3 + a_4 \end{pmatrix}$$

und sind daher linear unabhängig. Die Eckpunkte sind die Lösungen der Gleichungssysteme

$$M \cdot x = \begin{pmatrix} \pm|a_1 + a_3 + a_4| \\ \pm|a_1 + a_3 + a_4| \\ \pm|a_2 + a_3 + a_4| \\ \pm|a_2 + a_3 + a_4| \end{pmatrix}$$

mit wechselnden Vorzeichen. Es gilt

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\| M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \pm|a_1 + a_3 + a_4| \\ \pm|a_1 + a_3 + a_4| \\ \pm|a_2 + a_3 + a_4| \\ \pm|a_2 + a_3 + a_4| \end{pmatrix} \right\| \leq \|M^{-1}\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} \pm|a_1 + a_3 + a_4| \\ \pm|a_1 + a_3 + a_4| \\ \pm|a_2 + a_3 + a_4| \\ \pm|a_2 + a_3 + a_4| \end{pmatrix} \right\| \\ &= \left\| \frac{2}{L^2} \begin{pmatrix} a_2 + a_3 + a_4 & 0 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_2 + a_3 + a_4 & -a_4 & a_3 \\ a_3 & -a_4 & a_1 + a_3 + a_4 & 0 \\ a_4 & a_3 & 0 & a_1 + a_3 + a_4 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} \pm|a_1 + a_3 + a_4| \\ \pm|a_1 + a_3 + a_4| \\ \pm|a_2 + a_3 + a_4| \\ \pm|a_2 + a_3 + a_4| \end{pmatrix} \right\| \\ &\leq \sqrt{16} \frac{2}{L^2} \max\{|a_1 + a_3 + a_4|, |a_3|, |a_4|, |a_2 + a_3 + a_4|\} \sqrt{4} \max\{|a_1 + a_3 + a_4|, |a_2 + a_3 + a_4|\} \\ &\leq \frac{8 \max\{|a_1 + a_3 + a_4|^2, |a_3|^2, |a_4|^2, |a_2 + a_3 + a_4|^2\}}{a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 + a_2 a_3 + a_2 a_4 + 2 a_3 a_4} . \end{aligned}$$

**Satz 3.3.19** Die Seshadri-Konstante eines amplen Geradenbündels  $L = \mathcal{O}(a_1 F_1 + a_2 F_2 + a_3 \Delta + a_4 \Sigma)$  auf  $E_1 \times E_1$  berechnet sich durch

$$\varepsilon(L) = \min_{\substack{a,b,c,d \in \mathbb{Z} \\ |a|,|b|,|c|,|d| \leq B}} \{ a_1(a^2 + b^2) + a_2(c^2 + d^2) + a_3((a - c)^2 + (b - d)^2) + a_4((a - d)^2 + (b + c)^2) \}$$

mit

$$B := \frac{8 \max\{|a_1 + a_3 + a_4|^2, |a_3|^2, |a_4|^2, |a_2 + a_3 + a_4|^2\}}{a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 + a_2 a_3 + a_2 a_4 + 2 a_3 a_4} .$$

*Beweis:* Aus Folgerung 3.3.15 wissen wir, dass eine elliptische Kurve die Seshadri-Konstante berechnet, also muss der minimale Wert  $L \cdot N_{a,b,c,d}$  gefunden werden. Da die quadratische Form positiv definit ist, muss das absolute Minimum auch ein lokales Minimum sein. Die Norm dieser lokalen Minima hatten wir aber oben abgeschätzt.  $\square$

*Bemerkung:* Dieser analytische Zugang hat den Nachteil, dass wir keine Aussage über alle möglichen submaximalen Kurven bekommen.

*Bemerkung:* Die grundlegende Beweisidee zu 3.3.6 - 3.3.19 lässt sich natürlich auch für  $E \times E$  ohne komplexe Multiplikation anwenden. Es ergibt sich für teilerfremde ganze Zahlen  $c$  und  $d$ :

$$N_{c,d} \equiv_{\text{num}} \{ (dx, -cx) \mid x \in E \} .$$

**Folgerung 3.3.20** Sei  $E$  eine elliptische Kurve ohne komplexe Multiplikation. Jede irreduzible elliptische Kurve auf  $E \times E$  ist isomorph zu  $E$ .

*Beweis:* In Satz 3.2.7 hatten wir gezeigt, dass jede irreduzible elliptische Kurve ein Translat von  $N_{c,d}$  für geeignete teilerfremde  $c, d$  ist und somit wiederum ein Translat des Bildes der Abbildung  $x \mapsto (dx, -cx)$ . Der Abbildungsgrad dieser Abbildung ist  $(\text{ggT}(c, d))^2$  und somit gleich 1, d.h. auch hier haben wir einen Isomorphismus.  $\square$

*Bemerkung:* Auch der analytische Zugang zur Abschätzung der minimalen Schnitzzahl des Geradenbündels mit einer elliptischen Kurve ist im Fall ohne komplexe Multiplikation anwendbar. Man bekommt als obere Schranke für die zu untersuchenden Punkte

$$|c|, |d| \leq \frac{\sqrt{2} \max \{ |a_1 + a_3|^2, |a_3|^2, |a_2 + a_3|^2 \}}{a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3} .$$

Diese Schranke ist für große Werte von  $L^2$  besser als die vorher gefundene Schranke  $\frac{a_1 + a_2}{\sqrt{2}}$ .

a	b	c	d	$N_{a,b,c,d}$
0	0	0	1	$F_1$
0	1	0	0	$F_2$
1	0	1	0	$\Delta$
1	0	0	1	$\Sigma$
0	1	1	0	$2F_1 + 2F_2 - \Sigma$
1	1	1	0	$F_1 + 2F_2 + \Delta - \Sigma$
1	1	0	1	$-F_1 + \Delta + \Sigma$
1	0	1	1	$-F_2 + \Delta + \Sigma$
0	1	1	1	$2F_1 + F_2 + \Delta - \Sigma$
1	-1	0	1	$F_1 + 2F_2 - \Delta + \Sigma$
0	-1	1	1	$2F_1 + F_2 - \Delta + \Sigma$
0	1	1	-1	$4F_1 + 3F_2 - \Delta - \Sigma$
1	1	0	-1	$3F_1 + 4F_2 - \Delta - \Sigma$
0	1	0	-1	$2F_1 + 2F_2 - \Delta$
2	0	0	1	$-F_1 + 2F_2 + 2\Sigma$
2	0	1	0	$-F_1 + 2F_2 + 2\Delta$
0	2	1	0	$3F_1 + 6F_2 - 2\Sigma$
1	0	2	0	$2F_1 - F_2 + 2\Delta$
1	0	0	2	$2F_1 - F_2 + 2\Sigma$
0	1	2	0	$6F_1 + 3F_2 - 2\Sigma$

Tabelle 3: Beispiele für elliptische Kurven auf  $E_1 \times E_1$

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$L^2$	$\sqrt{L^2}$	$\varepsilon(L)$	Berechnungskurve
1	1	1	1	14	$\approx 3,74$	3	$F_1, F_2$
1	1	0	0	2	$\approx 1,41$	1	$F_1, F_2$
2	1	0	0	4	2	1	$F_1$
0	0	1	1	4	2	2	$F_1, F_2, \Delta, \Sigma, N_{1,1,0,1}, N_{1,0,1,1}$
1	0	1	1	8	$\approx 2,83$	2	$F_1$
1	1	1	0	6	$\approx 2,45$	2	$F_1, F_2, \Delta$
2	2	1	-1	4	2	2	$F_1, F_2, \Delta, N_{1,1,1,0}, N_{1,0,1,-1}, N_{1,0,0,-1}$
-1	1	2	2	14	$\approx 3,74$	3	$F_2, N_{1,1,0,1}$
-1	2	1	2	10	$\approx 3,16$	2	$F_2$
4	4	-1	-1	4	2	2	$F_1, F_2, N_{1,1,0,-1}, N_{1,0,0,-1}, N_{1,0,-1,0}, N_{-1,0,1,1}$
4	2	3	-2	4	2	1	$N_{0,1,1,1}$
8	5	-1	-2	10	$\approx 3,16$	2	$F_1$

Tabelle 4: Beispiele für die Berechnung der Seshadri-Konstante von  
 $L = a_1F_1 + a_2F_2 + a_3\Delta + a_4\Delta$  auf  $E_1 \times E_1$

## Ergebnisse für $E_2 \times E_2$

Nun wollen wir die für  $E_1 \times E_1$  gefundenen Ergebnisse auf  $E_2 \times E_2$  übertragen. Beweise werden wir hierbei nur angeben, wenn sie nicht direkt analog zu den Beweisen auf  $E_1 \times E_1$  durchgeführt werden können.

$E_2$  hat den Automorphismus  $\sigma : [x] \mapsto [\exp(\frac{\pi i}{3})x]$  mit dem einzigen Fixpunkt  $[0]$  und der Eigenschaft  $\sigma^2 = \sigma - 1$ . Auch hier haben wir die vier Kurven

$$F_1 := \{0\} \times E_2, \quad F_2 := E_2 \times \{0\}, \quad \Delta := \{(x, x) \mid x \in E_2\} \quad \text{und} \quad \Sigma := \{(x, \sigma(x)) \mid x \in E_2\}.$$

Diese elliptischen Kurven schneiden sich wie folgt:

$$F_1^2 = F_2^2 = \Delta^2 = \Sigma^2 = 0 \quad \text{sowie}$$

$$F_1 \cdot F_2 = F_1 \cdot \Delta = F_2 \cdot \Delta = F_1 \cdot \Sigma = F_2 \cdot \Sigma = \Delta \cdot \Sigma = 1.$$

**Proposition 3.3.21** *Die numerischen Äquivalenzklassen von  $F_1, F_2, \Delta$  und  $\Sigma$  erzeugen die Néron-Severi-Gruppe von  $E_2 \times E_2$  über  $\mathbb{Z}$ .*

*Beweis:* Sei  $L := [a_1 F_1 + a_2 F_2 + a_3 \Delta + a_4 \Sigma]$  mit  $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{Q}$  eine beliebige numerische Äquivalenzklasse. Durch Schneiden mit den Ausgangskurven erhalten wir, dass  $a_i - a_j$  ganze Zahlen sind ( $i, j = 1, \dots, 4$ ). In einer Darstellung durch den Hauptnenner  $a_i = \frac{p_i}{q}$  mit ganzen Zahlen  $p_1, \dots, p_4, q$  lässt sich  $\text{ggT}(p_i, q) = 1$  für alle  $i = 1, \dots, 4$  folgern. Außerdem ist  $L^2 = 2(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 + a_2 a_3 + a_2 a_4 + a_3 a_4)$  geradzahlig, d.h.  $q^2$  teilt  $p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_1 p_4 + p_2 p_3 + p_2 p_4 + p_3 p_4$ . Nun ist  $3p_1 p_2 = (p_1 + p_2 + p_3)(p_1 + p_3 + p_4) - (p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_1 p_4 + p_2 p_3 + p_2 p_4 + p_3 p_4) - (p_1 - p_3)^2$  durch  $q^2$  teilbar. Da aber  $p_i$  und  $q$  teilerfremd sind, muss  $q = 1$  sein.  $\square$

**Proposition 3.3.22** *Ein Geradenbündel  $L = \mathcal{O}(a_1 F_1 + a_2 F_2 + a_3 \Delta + a_4 \Sigma)$  auf  $E_2 \times E_2$  ist ampel genau dann, wenn*

$$\begin{aligned} L \cdot F_1 &= a_2 + a_3 + a_4 > 0, & L \cdot F_2 &= a_1 + a_3 + a_4 > 0, \\ L \cdot \Delta &= a_1 + a_2 + a_4 > 0, & L \cdot \Sigma &= a_1 + a_2 + a_3 > 0 \\ \text{und} \quad L^2 &= 2(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 + a_2 a_3 + a_2 a_4 + 2a_3 a_4) > 0. \end{aligned} \tag{3.3.14}$$

Für die elliptischen Kurven auf  $E_2 \times E_2$  gilt:

**Satz 3.3.23** *Für alle teilerfremden ganzen Zahlen  $a, b, c, d$  mit  $D := \text{ggT}(a^2 + ab + b^2, c^2 + cd + d^2, ac + bc + bd, ad - bc)$  gilt*

$$N_{a,b,c,d} \equiv_{\text{num}} \frac{c^2 + cd + d^2 - ac - ad - bd}{D} F_1 + \frac{a^2 + ab + b^2 - ac - ad - bd}{D} F_2 + \frac{ac + bc + bd}{D} \Delta + \frac{ad - bc}{D} \Sigma.$$

*Die Menge aller elliptischen Kurven auf  $E_2 \times E_2$  besteht aus den Translaten der elliptischen Kurven  $N_{a,b,c,d}$  für ganze Zahlen  $a, b, c$  und  $d$  mit*

$$D = \text{ggT}(a^2 + ab + b^2, c^2 + cd + d^2, ac + bc + bd, ad - bc) = 1.$$

Der Beweis läuft analog zu  $E_1 \times E_1$ , wobei hier gilt:

$$\begin{aligned}
N_{a,b,c,d} \cdot F_1 &= \#(N_{a,b,c,d} \cap F_1) = \frac{\#(\{x \in E_1 \mid ax + b\sigma(x) = 0\})}{D} \\
&= \frac{a^2 + ab + b^2}{D} \\
N_{a,b,c,d} \cdot F_2 &= \#(N_{a,b,c,d} \cap F_2) = \frac{\#(\{x \in E_1 \mid cx + d\sigma(x) = 0\})}{D} \\
&= \frac{c^2 + cd + d^2}{D} \\
N_{a,b,c,d} \cdot \Delta &= \#(N_{a,b,c,d} \cap \Delta) = \frac{\#(\{x \in E_1 \mid ax + b\sigma(x) = cx + d\sigma(x)\})}{D} \\
&= \frac{(a-c)^2 + (a-c)(b-d) + (b-d)^2}{D} \\
N_{a,b,c,d} \cdot \Sigma &= \#(N_{a,b,c,d} \cap \Sigma) = \frac{\#(\{x \in E_1 \mid cx + d\sigma(x) = (a+b)\sigma(x) - bx\})}{D} \\
&= \frac{(-a-b+d)^2 + (-a-b+d)(b+c) + (b+c)^2}{D} .
\end{aligned}$$

Hierbei werden die folgenden Lemmata benötigt:

**Lemma 3.3.24** *Es seien ganze Zahlen  $a$  und  $b$  gegeben. Dann besitzt die Gleichung*

$$ax + b\sigma(x) = 0 \tag{3.3.15}$$

*genau  $l := a^2 + ab + b^2$  Lösungen  $x \in E_2$ .*

**Lemma 3.3.25** *Es seien  $a, b, c, d$  teilerfremde ganze Zahlen. Dann besitzt die Abbildung*

$$\begin{aligned}
\varphi : E_2 &\rightarrow E_2 \times E_2 \\
x &\mapsto (ax + b\sigma(x), cx + d\sigma(x))
\end{aligned}$$

*den Abbildungsgrad  $D := \text{ggT}(a^2 + ab + b^2, c^2 + cd + d^2, ac + bc + bd, ad - bc)$ .*

**Lemma 3.3.26** *Zu gegebenen teilerfremden ganzen Zahlen  $a, b, c, d$  mit  $D = \text{ggT}(a^2 + ab + b^2, c^2 + cd + d^2, ac + bc + bd, ad - bc)$  besitzt das Gleichungssystem*

$$\begin{aligned}
am - bn &\equiv 0 \pmod{D} , \\
bm + (a+b)n &\equiv 0 \pmod{D} , \\
cm - dn &\equiv 0 \pmod{D} , \\
dm + (c+d)n &\equiv 0 \pmod{D}
\end{aligned} \tag{3.3.16}$$

*genau  $D$  verschiedene Lösungen  $(m, n) \in \mathbb{Z}_D^2$ .*

**Lemma 3.3.27** *Es seien  $a, b, c, d$  teilerfremde ganze Zahlen mit  $D := \text{ggT}(a^2 + ab + b^2, c^2 + cd + d^2, ac + bc + bd, ad - bc)$ . Dann gibt es teilerfremde ganze Zahlen  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$  mit  $\text{ggT}(\bar{a}^2 + \bar{a}\bar{b} + \bar{b}^2, \bar{c}^2 + \bar{c}\bar{d} + \bar{d}^2, \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c} + \bar{b}\bar{d}, \bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c}) = 1$  und*

$$\begin{aligned}
\bar{a}^2 + \bar{a}\bar{b} + \bar{b}^2 &= \frac{a^2 + ab + b^2}{D} , & \bar{c}^2 + \bar{c}\bar{d} + \bar{d}^2 &= \frac{c^2 + cd + d^2}{D} \\
\bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c} + \bar{b}\bar{d} &= \frac{ac + bc + bd}{D} , & \bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c} &= \frac{ad - bc}{D} .
\end{aligned} \tag{3.3.17}$$



*Beweis:* Der Beweis verläuft ähnlich, aber nicht analog zu 3.3.9. Hier betrachten wir zunächst das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax + (a + 2b)y &\equiv 0 \pmod{D}, \\ bx + (-2a - b)y &\equiv 0 \pmod{D}, \\ cx + (c + 2d)y &\equiv 0 \pmod{D}, \\ dx + (-2c - d)y &\equiv 0 \pmod{D}. \end{aligned} \tag{3.3.18}$$

Ähnlich Lemma 3.3.8 lässt sich zeigen, dass dieses Gleichungssystem zu jedem  $y \in \mathbb{Z}_D$  genau eine Lösung  $(x, y) \in \mathbb{Z}_D^2$  besitzt. Zusätzlich wird hier benutzt, dass  $D$  ungerade ist. Wäre  $D$  nämlich gerade, so wäre auch  $a^2 + ab + b^2$  gerade. Damit sind notwendigerweise  $a$  und  $b$  gerade. Gleiches gilt für  $c$  und  $d$  und das wäre ein Widerspruch zur Teilerfremdheit von  $a, b, c, d$ . Zusätzlich gilt für jede Lösung von 3.3.18

$$\begin{aligned} a(x^2 + 3y^2) &= ax^2 - ay^2 - 2by^2 + 4ay^2 + 2by^2 \equiv x(ax + ay + 2by) \equiv 0, \\ b(x^2 + 3y^2) &= bx^2 + 2ay^2 + 4by^2 - 2ay^2 - by^2 \equiv x(bx - 2ay - by) \equiv 0, \\ c(x^2 + 3y^2) &= cx^2 - cy^2 - 2dy^2 + 4cy^2 + 2dy^2 \equiv x(cx + cy + 2dy) \equiv 0, \\ d(x^2 + 3y^2) &= dx^2 + 2cy^2 + 4dy^2 - 2cy^2 - dy^2 \equiv x(dx - 2cy - dy) \equiv 0. \end{aligned}$$

Da  $a, b, c, d$  teilerfremd sind, folgt  $x^2 + 3y^2 \equiv 0 \pmod{D}$ . Nun nehmen wir die Lösung zu  $y = 1$  und betrachten die Drehstreckungsmatrix

$$M := \begin{pmatrix} \frac{x}{D} & \sqrt{\frac{3}{D}} \frac{y}{D} \\ -\sqrt{\frac{3}{D}} \frac{y}{D} & \frac{x}{D} \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$$

mit Streckungsfaktor  $\sqrt{\frac{x^2+3y^2}{D^2}} \leq \sqrt{\frac{(D-1)^2+3}{D^2}} = \sqrt{1 - \frac{2}{D} + \frac{4}{D^2}}$ . Dieser ist für  $D \neq 1$  echt kleiner als 1 ( $D \neq 2$ , da ungerade).

Sei nun  $\sigma := \exp(\frac{\pi i}{3}) = \frac{1}{2} + i\sqrt{\frac{3}{4}}$ . Für die Gittervektoren  $v := a + \sigma b$  und  $w := c + \sigma d$  aus  $\mathbb{Z} + \sigma\mathbb{Z}$  gilt

$$\begin{aligned} \tilde{v} := M \cdot v &= M \cdot \begin{pmatrix} a + \frac{b}{2} \\ \sqrt{\frac{3}{4}}b \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} x(a + \frac{b}{2}) + y\frac{3}{2}b \\ -\sqrt{3}y(a + \frac{b}{2}) + \sqrt{\frac{3}{4}}xb \end{pmatrix} \\ &= \frac{ax + (a + 2b)y}{D} + \sigma \frac{bx + (-2a - b)y}{D}, \\ \tilde{w} := M \cdot w &= M \cdot \begin{pmatrix} c + \frac{d}{2} \\ \sqrt{\frac{3}{4}}d \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} x(c + \frac{d}{2}) + y\frac{3}{2}d \\ -\sqrt{3}y(c + \frac{d}{2}) + \sqrt{\frac{3}{4}}xd \end{pmatrix} \\ &= \frac{cx + (c + 2d)y}{D} + \sigma \frac{dx + (-2c - d)y}{D}. \end{aligned}$$

D.h.  $\tilde{v} = \tilde{a} + \sigma\tilde{b}$  und  $\tilde{w} = \tilde{c} + \sigma\tilde{d}$  liegen wieder im Gitter  $\mathbb{Z} + \sigma\mathbb{Z}$ . Es gilt  $\tilde{a}^2 + \tilde{a}\tilde{b} + \tilde{b}^2 = |\tilde{v}|^2 = \frac{x^2+3y^2}{D^2}|v|^2 = \frac{x^2+3y^2}{D^2}(a^2 + ab + b^2)$  und  $\tilde{c}^2 + \tilde{c}\tilde{d} + \tilde{d}^2 = |\tilde{w}|^2 = \frac{x^2+3y^2}{D^2}|w|^2 = \frac{x^2+3y^2}{D^2}(c^2 + cd + d^2)$ .

Als nächstes betrachten wir die komplexe Zahl

$$\begin{aligned}
& (\tilde{a}\tilde{d} - \tilde{b}\tilde{c}) + \sigma(\tilde{a}\tilde{c} + \tilde{b}\tilde{c} + \tilde{b}\tilde{d}) \\
&= (\tilde{a} + \sigma\tilde{b}) \cdot (\tilde{c} + \sigma\tilde{d}) \\
&= \sqrt{\tilde{a}^2 + \tilde{a}\tilde{b} + \tilde{b}^2} \sqrt{\tilde{c}^2 + \tilde{c}\tilde{d} + \tilde{d}^2} \exp(i(\tilde{\alpha} + \frac{\pi}{3} - \tilde{\beta})) \\
&= \sqrt{\frac{x^2 + 3y^2}{D^2}} \sqrt{a^2 + ab + b^2} \sqrt{\frac{x^2 + 3y^2}{D^2}} \sqrt{c^2 + cd + d^2} \exp(i(\frac{\pi}{3} + \alpha - \beta)) \\
&= \frac{x^2 + 3y^2}{D^2} (a + \sigma b) \cdot (d + \sigma c) \\
&= \frac{x^2 + 3y^2}{D^2} (ad - bc) + \sigma \left( \frac{x^2 + 3y^2}{D^2} (ac + bc + bd) \right) .
\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnen  $\alpha, \tilde{\alpha}, \beta$ , bzw.  $\tilde{\beta}$  den Winkel von  $v, \tilde{v}, w$ , bzw.  $\tilde{\beta}$  zur  $x$ -Achse. Da  $M$  eine Drehstreckung ist, gilt  $\alpha - \beta = \tilde{\alpha} - \tilde{\beta}$ .

Insgesamt finden wir so ganze Zahlen  $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d}$  mit  $\tilde{D} = \text{ggT}(\tilde{a}^2 + \tilde{a}\tilde{b} + \tilde{b}^2, \tilde{c}^2 + \tilde{c}\tilde{d} + \tilde{d}^2, \tilde{a}\tilde{c} + \tilde{b}\tilde{c} + \tilde{b}\tilde{d}, \tilde{a}\tilde{d} - \tilde{b}\tilde{c}) = \frac{x^2 + 3y^2}{D}$  und

$$\begin{aligned}
\tilde{a}^2 + \tilde{a}\tilde{b} + \tilde{b}^2 &= \frac{x^2 + 3y^2}{D} \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{D} , & \tilde{c}^2 + \tilde{c}\tilde{d} + \tilde{d}^2 &= \frac{x^2 + 3y^2}{D} \cdot \frac{c^2 + cd + d^2}{D} \\
\tilde{a}\tilde{c} + \tilde{b}\tilde{c} + \tilde{b}\tilde{d} &= \frac{x^2 + 3y^2}{D} \cdot \frac{ac + bc + bd}{D} , & \tilde{a}\tilde{d} - \tilde{b}\tilde{c} &= \frac{x^2 + 3y^2}{D} \cdot \frac{ad - bc}{D} .
\end{aligned}$$

Dieses Verfahren können wir wiederholen, bis  $\frac{\tilde{x}^2 + 3\tilde{y}^2}{\tilde{D}} = 1$  gilt. Für die so gefundenen  $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d}$  gilt  $\tilde{a}^2 + \tilde{a}\tilde{b} + \tilde{b}^2 = \frac{\tilde{x}^2 + 3\tilde{y}^2}{\tilde{D}^2} (\tilde{a}^2 + \tilde{a}\tilde{b} + \tilde{b}^2) = \frac{\tilde{a}^2 + \tilde{a}\tilde{b} + \tilde{b}^2}{\tilde{D}} = \frac{a^2 + ab + b^2}{D}$ . Gleiches gilt auch für die Ausdrücke  $\tilde{c}^2 + \tilde{c}\tilde{d} + \tilde{d}^2, \tilde{a}\tilde{c} + \tilde{b}\tilde{c} + \tilde{b}\tilde{d}, \tilde{a}\tilde{d} - \tilde{b}\tilde{c}$ , d.h. wir haben die gesuchten  $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d}$  mit (3.3.17) gefunden.  $\square$

**Folgerung 3.3.28** Jede irreduzible elliptische Kurve auf  $E_2 \times E_2$  ist isomorph zu  $E_2$ .

Das führt nun zu den Ergebnissen:

**Satz 3.3.29** Zu jedem amplen Geradenbündel  $L = \mathcal{O}(a_1F_1 + a_2F_2 + a_3\Delta + a_4\Gamma)$  auf  $E_2 \times E_2$  gibt es eine elliptische Kurve  $N$  mit

$$\varepsilon(L) \leq L \cdot N \sqrt{\frac{3}{4}} \sqrt{L^2} .$$

Hierbei betrachten wir die positiv definite quadratische Form

$$Q(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 + a_3 + a_4 & \frac{a_1 + a_3 + a_4}{2} & \frac{-2a_3 - a_4}{2} & \frac{-a_3 - 2a_4}{2} \\ \frac{a_1 + a_3 + a_4}{2} & a_1 + a_3 + a_4 & \frac{-a_3 + a_4}{2} & \frac{-2a_3 - a_4}{2} \\ \frac{-2a_3 - a_4}{2} & \frac{-a_3 + a_4}{2} & a_2 + a_3 + a_4 & \frac{a_2 + a_3 + a_4}{2} \\ \frac{-a_3 - 2a_4}{2} & \frac{-2a_3 - a_4}{2} & \frac{a_2 + a_3 + a_4}{2} & a_2 + a_3 + a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

mit Determinante  $D = \left(\frac{3L^2}{8}\right)^2$ .

Auch hier ist die Abschätzung bestmöglich ( $\varepsilon(F_1 + F_2 + \Delta + \Sigma) = 3 = \sqrt{\frac{3}{4}12}$ ).

**Folgerung 3.3.30** Die Seshadri-Konstante eines amplen Geradenbündels  $L$  auf  $E_2 \times E_2$  wird durch eine elliptische Kurve berechnet. Insbesondere ist  $\varepsilon(L)$  immer ganzzahlig.

**Folgerung 3.3.31** Es gibt keine amplen, bezüglich eines beliebigen amplen Geradenbündels submaximalen irreduziblen Kurven auf  $E_2 \times E_2$ .

**Satz 3.3.32** Auf der abelschen Fläche  $E_2 \times E_2$  zerfällt jedes ample Geradenbündel  $L$  in eine Summe von elliptischen Kurven

$$L = \mathcal{O}(N_1 + N_2 + \cdots + N_l) .$$

Diese Kurven sind nicht eindeutig bestimmt.

**Satz 3.3.33** Die Seshadri-Konstante eines amplen Geradenbündels  $L = \mathcal{O}(a_1 F_1 + a_2 F_2 + a_3 \Delta + a_4 \Sigma)$  auf  $E_2 \times E_2$  berechnet sich durch

$$\varepsilon(L) = \min_{\substack{a,b,c,d \in \mathbb{Z} \\ |a|,|b|,|c|,|d| \leq B}} \left\{ a_1(a^2 + ab + b^2) + a_2(c^2 + cd + d^2) + a_3((a-c)^2 + (a-c)(b-d) + (b-d)^2) \right. \\ \left. + a_4((-a-b+d)^2 + (-a-b+d)(b+c) + (b+c)^2) \right\}$$

mit

$$B := \frac{8 \max \{ |2a_1 + 2a_3 + 2a_4|^2, |2a_3 + a_4|^2, |a_3 + 2a_4|^2, |a_3 - a_4|^2, |2a_2 + 2a_3 + 2a_4|^2 \}}{3(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 + a_2 a_3 + a_2 a_4 + a_3 a_4)} .$$

a	b	c	d	$N_{a,b,c,d}$
0	0	0	1	$F_1$
0	1	0	0	$F_2$
1	0	1	0	$\Delta$
1	0	0	1	$\Sigma$
0	1	1	0	$F_1 + F_2 + \Delta - \Sigma$
1	1	1	0	$2F_2 + 2\Delta - \Sigma$
1	1	0	1	$-F_1 + F_2 + \Delta + \Sigma$
1	0	1	1	$F_1 - F_2 + \Delta + \Sigma$
0	1	1	1	$2F_1 + 2\Delta - \Sigma$
1	0	-1	0	$2F_1 + 2F_2 - \Delta$
1	0	0	-1	$2F_1 + 2F_2 - \Sigma$
1	1	0	-1	$3F_1 + 5F_2 - \Delta - \Sigma$
1	1	-1	0	$2F_1 + 4F_2 - 2\Delta + \Sigma$
1	0	-1	1	$F_1 + F_2 - \Delta + \Sigma$
1	0	1	-1	$F_1 + F_2 + \Delta - \Sigma$
0	-1	1	1	$4F_1 + 2F_2 - 2\Delta + \Sigma$
-1	0	1	1	$5F_1 + 3F_2 - \Delta - \Sigma$
1	1	1	-1	$2F_1 + 4F_2 + \Delta - 2\Sigma$
1	1	-1	1	$2F_2 - \Delta + 2\Sigma$
1	-1	1	1	$2F_1 - \Delta + 2\Sigma$
-1	1	1	1	$4F_1 + 2F_2 + \Delta - 2\Sigma$

Tabelle 5: Beispiele für elliptische Kurven auf  $E_2 \times E_2$

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$L^2$	$\sqrt{\frac{3}{4}L^2}$	$\varepsilon(L)$	Berechnungskurve
1	1	1	1	12	3	3	$F_1, F_2, \Delta, \Sigma$
1	1	0	0	2	$\approx 1,22$	1	$F_1, F_2$
0	0	1	1	2	$\approx 1,22$	1	$\Delta, \Sigma$
3	1	1	-1	4	$\approx 1,73$	1	$F_1$
2	2	1	-1	6	$\approx 2,12$	2	$F_1, F_2, N_{1,0,1,-1}$
4	3	0	-1	10	$\approx 2,74$	2	$F_1$
4	3	1	-2	6	$\approx 2,12$	2	$F_1, N_{0,1,1,0}, N_{1,0,0,-1}$
4	4	-1	-1	2	$\approx 1,22$	1	$N_{1,0,-1,0}, N_{1,1,1,0}$
8	5	-1	-2	6	$\approx 2,12$	2	$F_1, N_{1,0,0,-1}, N_{-1,0,1,1}$

Tabelle 6: Beispiele für die Berechnung der Seshadri-Konstante von  $L = a_1F_1 + a_2F_2 + a_3\Delta + a_4\Delta$  auf  $E_2 \times E_2$

# Literaturverzeichnis

- [Barbeau] E. Barbeau: *Pell's equation*. New York, Springer, 2003.
- [Bauer94] T. Bauer: *Projective images of Kummer surfaces*. Math. Ann. 299, 155-170 (1994).
- [Bauer95] T. Bauer: *Quartic surfaces with 16 skew conics*. J. reine angew. Math. 464, 207-217 (1995).
- [Bauer98] T. Bauer: *On the cone of curves of an abelian variety*. Am. J. Math. 120, 997-1006 (1998).
- [Bauer98b] T. Bauer: *Seshadri constants and periods of polarized abelian varieties*. Math. Ann. 312, 607-623 (1998).
- [Bauer99] T. Bauer: *Seshadri constants on algebraic surfaces*. Math. Ann. 313, 547-583 (1999).
- [Bauer01] T. Bauer: *Submaximal curves on abelian surfaces*. Unveröffentlichtes Manuskript.
- [Bauer-Szemberg98] T. Bauer, T. Szemberg: *Seshadri constants of abelian surfaces*. Appendix to T. Bauer: *Seshadri constants and periods of abelian varieties*. Math. Ann. 312, 607-623 (1998).
- [Bauer-Szemberg01] T. Bauer, T. Szemberg: *Local positivity of principally polarized abelian threefolds*. J. reine angew. Math. 531, 191-200 (2001).
- [Birkenhake94] C. Birkenhake: *Tensor products of ample line bundles on abelian varieties*. Manuscripta Math. 84, 21-28 (1994).
- [Birkenhake-Lange90] C. Birkenhake, H. Lange: *Symmetric theta-structures*. Manuscripta Math. 70, 67-91 (1990).
- [Campana-Peternell90] F. Campana, T. Peternell: *Algebraicity of the ample cone of projective varieties*. J. reine angew. Math. 407, 160-166 (1990).
- [Demailly92] J.-P. Demailly: *Singular Hermitian metrics on positive line bundles*. Complex Algebraic Varieties, Lect. Notes in Math. 1507, New York, Springer-Verlag, 1992.
- [Ein-Lazarsfeld93] L. Ein, R. Lazarsfeld: *Seshadri constants on smooth surfaces*. Asterisque 218, 177-186 (1993).

- [E-K-L95] L. Ein, O. Küchle, R. Lazarsfeld: *Local positivity of ample line bundles*. J. Diff. Geo. 42, 193-219 (1995).
- [Gruber-Lekkerkerker] P. Gruber, C. Lekkerkerker: *Geometry of numbers*. Amsterdam, Elsevier Science Publishers, 1987.
- [Hayashida-Nishi65] T. Hayashida, M. Nishi: *Existence of curves of genus two on a product of two elliptic curves*. J. Math. Soc. Japan 17, No. 1, 1-16 (1965).
- [Hua] L. Hua: *Introduction to number theory*. New York, Springer-Verlag, 1982.
- [Kleiman66] S. Kleiman: *Towards a numerical theory of ampleness*. Ann. Math. 84, 293-344 (1966).
- [Lange-Birkenhake] H. Lange, C. Birkenhake: *Complex Abelian Varieties*. New York, Springer-Verlag, 1992.
- [Lazarsfeld] R. Lazarsfeld: *Positivity in Algebraic Geometry*. In Vorbereitung.
- [Nakamaye96] M. Nakamaye: *Seshadri constants on abelian varieties*. Am. J. Math. 118, 621-635 (1996).
- [Nakamaye00] M. Nakamaye: *Zero estimates on abelian varieties*. Recent progress in intersection theory, Trends in Mathematics, Boston, Birkhäuser, 2000.
- [Nakamaye03] M. Nakamaye: *Seshadri constants and the geometry of surfaces*. J. reine angew. Math. 564, 205-214 (2003).
- [Rupert90] W. Rupert: *When is an abelian surface isomorphic or isogeneous to a product of elliptic curves*. Math. Z. 203, 293-299 (1990).
- [Rupert99] W. Rupert: *Two-dimensional complex tori with multiplication by  $\sqrt{d}$* . Arch. Math. 72, 278-281 (1999).
- [Saint-Donat74] B. Saint-Donat: *Projective models of K3 surfaces*. Am. J. Math. 96, 602-639 (1974).
- [Scharlau-Opolka] W. Scharlau, H. Opolka: *Von Fermat bis Minkowski. Eine Vorlesung über Zahlentheorie und ihre Entwicklung*. New York, Springer-Verlag, 1980.
- [Shimura] G. Shimura: *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*. Princeton, Princeton University Press, 1994.
- [Silverman] J. Silverman: *The arithmetic of elliptic curves*. New York, Springer-Verlag, 1985.
- [Steffens98] A. Steffens: *Remarks on Seshadri constants*. Math. Z. 227, 505-510 (1998).

- [Szemberg01] T. Szemberg: *Global and local positivity of line bundles*. Essen, Habilitationsschrift, 2001.
- [Weil57] A. Weil: *Zum Beweis des Torellischen Satzes*. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, 1957.
- [Yoshihara97] H. Yoshihara: *Existence of curves of genus three on a product of two elliptic curves*. J. Math. Soc. Japan 49, No. 3, 531-537 (1997).





# Anhang

## Bezeichnungen

Aus Gründen der Übersichtlichkeit sollen an dieser Stelle einige Bezeichnungen aufgelistet werden, die für die gesamte Arbeit gültig sind.

$\mathbb{N}$	: Monoid der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z}$	: Gruppe der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	: Körper der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	: Körper der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	: Körper der komplexen Zahlen
$\mathbb{Z}_m$	: Ring der Restklassen modulo der ganzen Zahl $m$
$[a]$	: Restklasse des Elements $a$ modulo einer gegebenen Äquivalenzrelation
$\langle M \rangle$	: Von einer Teilmenge $M$ erzeugte Untergruppe einer gegebenen Gruppe
$p^n    a$	: Die Primzahl $p$ kommt genau in der $n$ -ten Potenz in der Primzahlzerlegung der Zahl $a$ vor.
$\text{Div}(X)$	: Divisoren-Gruppe der Varietät $X$
$\text{Pic}(X)$	: Picard-Gruppe der Varietät $X$
$\equiv_{\text{num}}$	: Numerisch äquivalent
$\cong$	: Isomorph
$\simeq$	: Isogen
$\text{Num}(X)$	: Gruppe der numerischen Äquivalenzklassen aller Geradenbündel auf $X$
$\text{Amp}(X)$	: Ampler Kegel in $\text{Num}(X)$
$\text{NS}(X)$	: Néron-Severi-Gruppe der Varietät $X$
$\mathcal{O}(D)$	: Das zum Divisor $D$ gehörige Geradenbündel, bzw. dessen Klasse in $\text{NS}(X)$
$ L $	: Das Linearsystem des Geradenbündels $L$
$\varepsilon(L, x)$	: Seshadri-Konstante des Geradenbündels $L$ im Punkt $x$

# Danksagung

Ich möchte an dieser Stelle allen jenen danken, die zu meiner Ausbildung beigetragen und mir so die Fähigkeiten zur Erstellung dieser Arbeit bereitgestellt haben: meinen Eltern, meinen Lehrern und Professoren sowie meinen Freunden und Kommilitonen.

Besonderer Dank gebührt vor allem meinem Doktorvater Prof. Dr. Thomas Bauer. Durch seine intensive Betreuung und kreative Mitarbeit wurde diese Arbeit überhaupt erst möglich.

Danken möchte ich auch Thomas Eckert und Dr. Bert Koehler für ihre Anregungen und Korrekturen. Vielen Dank, Thomas, für Deine Begeisterung für die Mathematik, die unser gemeinsames Studium so fruchtbar werden ließ!

Zuletzt möchte ich mich bei Barbara, der Liebe meines Lebens bedanken für ihre Energie und ihren Glauben an mich. Mögen all Deine Träume Wirklichkeit werden!

Ich schließe mit einem Zitat von Erich Kästner:

*„Es gibt nichts Gutes, außer man tut es.“*

# **Erklärung**

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Dissertationsschrift selbständig verfasst und keine anderen Hilfsmittel als die angegebenen verwendet habe.

Die Dissertation wurde in der jetzigen oder einer ähnlichen Form noch bei keiner anderen Hochschule eingereicht und hat noch keinen sonstigen Prüfungszwecken gedient.

# Lebenslauf

Name Christoph Schulz

Geburtsdatum 03.04.73

Geburtsort Wolfhagen

Familienstand verheiratet

Schulbildung 1979-1983 Ludwig Uhland Grundschule Gießen  
1983-1992 Landgraf Ludwig Gymnasium Gießen  
Abitur im Juni 1992 (Gesamturteil: 1,2)

Ersatzdienst 1992 - 1999 Katastrophenschutz im THW Gießen

Studium WS 92/93 bis SS 94 Chemie (Diplom) an der Philipps-Universität Marburg  
Vordiplom im Juli 1994 (Gesamturteil: sehr gut)  
WS 94/95 bis SS 2000 Mathematik und Chemie für das Lehramt an Gymnasien an der Philipps-Universität Marburg  
Zwischenprüfung im Oktober 1996 (Gesamturteil: sehr gut)  
Erstes Staatsexamen im Mai 2000 (Gesamturteil: mit Auszeichnung bestanden)

Berufstätigkeit Seit Oktober 2000 wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachbereich Mathematik und Informatik an der Philipps-Universität Marburg