

**Der Aharonov-Bohm-Effekt  
im Mischzustand  
von Typ-I-Supraleitern**

**Dissertation**

zur Erlangung des  
Doktorgrades der Naturwissenschaften  
(Dr. rer. nat.)  
dem Fachbereich Physik  
der Philipps-Universität Marburg

vorgelegt von  
Catrin Ellenberger  
aus Bad Hersfeld

Marburg an der Lahn, 2001

Vom Fachbereich Physik der Philipps-Universität Marburg  
als Dissertation angenommen am 12. September 2001.

Erstgutachter: Prof. Dr. W. Bestgen  
Zweitgutachter: Prof. Dr. F. Gebhard  
Tag der mündlichen Prüfung: 20. September 2001

*Warum ist das Meer der König aller Flüsse und Ströme? –  
Weil es niedriger liegt als sie.*

Lao-Tse

Gesetzt aus der Adobe Garamond Expert  
(entworfen von ROBERT SLIMBACH)  
mit  $\text{\LaTeX}$  2 $\epsilon$  und  $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ -Makros.

Mathematikschrift: Euler  
(gestaltet von HERMANN ZAPF)

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	7
<b>2</b>	<b>Der Mischzustand in Supraleitern erster Art</b>	9
2.1	Mischzustand und zweiter kritischer Strom . . . . .	9
2.2	Der Mischzustand im Magnetfeld . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Modell und allgemeine Ergebnisse</b>	13
3.1	Grundgleichungen . . . . .	13
3.2	Spektrum und zweiter kritischer Strom . . . . .	19
3.2.1	Parametrisierung des Spektrums . . . . .	21
3.2.2	Suprastrom in axialer Richtung und magnetischer Fluß . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Der eindimensionale Mischzustand</b>	24
4.1	Eigenwertspektrum und zweite kritische Kurve . . . . .	24
4.1.1	Grenzfälle . . . . .	27
4.1.2	Allgemeiner Fall . . . . .	29
4.2	Strom und magnetischer Fluß . . . . .	32
4.2.1	Der magnetische Fluß . . . . .	34
4.2.2	Der Suprastrom in axialer Richtung . . . . .	35
4.3	Interpretation der Ergebnisse . . . . .	36
<b>5</b>	<b>Der zweidimensionale Mischzustand</b>	38
5.1	Eigenwertspektrum und zweite kritische Kurve . . . . .	38
5.2	Strom und magnetischer Fluß . . . . .	41
<b>6</b>	<b>Der Übergangsmischzustand</b>	46
6.1	Magnetische Oszillationen . . . . .	46
6.1.1	Eigenwertgleichung . . . . .	46
6.1.2	Oszillierender Anteil des magnetischen Flusses . . . . .	48
6.1.3	Interpolationsverfahren . . . . .	50
6.2	Strom und Fluß im Übergangsmischzustand . . . . .	53
6.3	Übergangsmischzustand ohne Magnetfeld . . . . .	55
<b>7</b>	<b>Gültigkeitsbereich und Größenordnungen</b>	57
7.1	Abschätzung des Gültigkeitsbereichs . . . . .	57
7.2	Größenordnung des zweiten kritischen Stroms . . . . .	59
7.3	Größenordnung des magnetischen Flusses . . . . .	61
<b>8</b>	<b>Schlußfolgerungen und Bewertung der Ergebnisse</b>	62
	<b>Literaturnachweis</b>	64

## Abbildungsverzeichnis

1.1	Supraleitender Hohlzylinder mit Innenradius $\rho_1$ und äußerem Radius $\rho_2$ . . . . .	7
3.1	Supraleitender Hohlzylinder mit innerem Radius $\rho_1$ und äußerem Radius $\rho_2$ . Der Mischzustand befindet sich an der inneren Zylinderwand und ein Fluß $\Phi$ auf der Achse. . . . .	14
3.2	Gültigkeitsbereich der Theorie, eingezeichnet in der normierten kritischen Kurve für $\delta = 0$ . . . . .	20
4.1	Supraleitender Hohlzylinder mit Innenradius $\rho_1 \ll \xi$ und äußerem Radius $\rho_2$ . Der Mischzustand befindet sich an der inneren Zylinderwand und ein Fluß $\Phi$ auf der Achse. . . . .	24
4.2	Endlich ausgedehntes und $\delta$ -förmiges magnetisches Feld im Zylinderinneren.	26
4.3	Normierte kritische Kurve $\beta_{c_2}(\gamma)$ für $\delta = 0$ . . . . .	28
4.4	Darstellung mehrerer möglicher kritischen Kurven $\beta_{c_2}(\gamma, \delta, \rho_1 = 0)$ für verschiedene Werte von $m$ bei gegebenem $\delta = 0$ . . . . .	30
4.5	Darstellung der kritischen Kurve $\beta(\gamma, \delta, \rho_1 = 0)$ für verschiedene Werte von $\delta$ .	30
4.6	Dreidimensionale Darstellung der kritischen Kurve $\beta(\gamma, \delta, \rho_1 = 0)$ . . . . .	31
4.7	Kritischer Strom und Variationsparameter für $\rho_1 = 0$ in Abhängigkeit vom angelegten Fluß für $\gamma = 0$ . . . . .	32
4.8	Koeffizient $a_1$ in Abhängigkeit vom angelegten Fluß. . . . .	33
4.9	Koeffizient $a_2$ in Abhängigkeit vom angelegten Fluß. . . . .	33
4.10	Koeffizient $b$ in Abhängigkeit vom angelegten Fluß. . . . .	34
5.1	Supraleitender Hohlzylinder mit großem Innenradius $\rho_1 \gg \xi$ . . . . .	38
6.1	Skizze der kritischen Kurve $\beta_{c_2}(\gamma)$ im Übergangsmischzustand. . . . .	49
6.2	$(\bar{m} - \delta) \frac{\alpha}{\gamma}$ aufgetragen gegen $\rho_0$ . . . . .	50
6.3	$\alpha(0, 0, \rho_1)$ bzw. $\alpha(0, \frac{1}{2}, \rho_1)$ und $\beta(0, 0, \rho_1)$ bzw. $\beta(0, \frac{1}{2}, \rho_1)$ gegen $\rho_1$ . . . . .	55

## I Einleitung

Aufgrund der Gesetzmäßigkeiten der Quantenmechanik können geladene Teilchen auch in denjenigen Raumbereichen physikalisch beeinflusst werden, in denen die elektromagnetischen Felder verschwinden, aber ein von null verschiedenes Vektorpotential vorhanden ist [1, 2]. Dieser nach AHARONOV und BOHM benannte Effekt kann beispielsweise in einem dünnwandigen Hohlzylinder realisiert werden. Auf der Zylinderachse befindet sich eine Spule mit dem Fluß  $\Phi$  im Inneren, deren Magnetfeld aber außerhalb der Spule und insbesondere am Ort der Hohlzylinderwand verschwindet. Es zeigt sich dann, daß das Energiespektrum von geladenen Teilchen, die sich im Bereich der Hohlzylinderwand befinden, vom magnetischen Fluß in der Spule abhängt.

In der vorliegenden Arbeit wird ein stromdurchflossener *supraleitender* Hohlzylinder betrachtet. Legen wir an dieses System einen hinreichend großen Strom in Richtung der Achse an, so bildet sich an der inneren Oberfläche des Hohlzylinders ein sogenannter Mischzustand [3], der aus supraleitenden Fluktuationen besteht [4]. Die Dünnwandigkeit des Hohlzylinders wird realisiert, indem der angelegte Strom so groß gewählt wird, daß die Schichtdicke des Mischzustands von der Größenordnung der supraleitenden Kohärenzlänge ist, vgl. Abbildung 1.1. Für noch größere Ströme verschwindet die Supraleitung dann vollständig, und das System geht in den normalleitenden Zustand über. Der Strom, bei dem dieser Übergang stattfindet, wird als *zweiter kritischer Strom* bezeichnet [5].

Wir studieren die Wirkung eines von null verschiedenen Flusses im Zylinderinneren auf den Charakter des Mischzustands und zeigen, daß der zweite kritische Strom auch vom Vektorpotential des zentralen Flusses abhängt. Dies ergibt die interessante Möglichkeit, den Aharonov-Bohm-Effekt durch Widerstandsmessungen zu verifizieren. Die Rechnungen werden ergeben, daß das Vektorpotential dem zweiten kritischen Strom eine Periodizität aufzwingt, die durch das Flußquantum bestimmt ist. Der Effekt ist umso stärker, je kleiner der innere Radius des Hohlzylinders ist. Befindet sich der Hohlzylinder in einem zusätzlichen axialen Magnetfeld, so wirkt der Fluß dieses Magnetfelds im Inneren des Hohlzylinders ebenfalls über sein Vektorpotential und trägt so zum Aharonov-Bohm-Effekt bei.

Die Rechnungen werden im Rahmen der Theorie des Fluktationsmischzustands durchgeführt, die für Supraleiter erster Art von ANDREEV und BESTGEN [4] entwickelt wurde und in

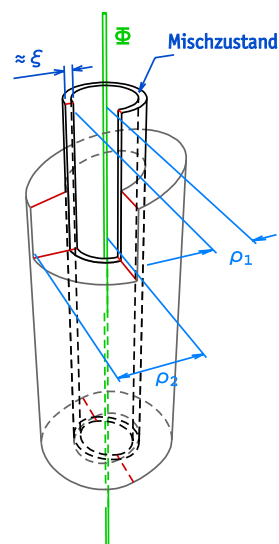


Abbildung 1.1: Supraleitender Hohlzylinder mit Innenradius  $\rho_1$  und äußerem Radius  $\rho_2$ . Der Mischzustand befindet sich an der inneren Zylinderwand und ein zentraler Fluß  $\Phi$  auf der Achse.

weiteren Arbeiten auf Systeme mit zusätzlichem axialem Magnetfeld im Bereich des Supraleiters erweitert wurde [6, 7]. Der zweite kritische Strom wurde von ANDREEV eingeführt und von BESTGEN auf den Fall eines zusätzlichen axialen Magnetfelds erweitert [7].

Das **2. Kapitel** enthält die Beschreibung des *Mischzustands in Supraleitern erster Art* (Typ-I-Supraleiter) und sein Verhalten im Magnetfeld. Es werden die Effekte heuristisch diskutiert, die durch die Wirkung des zentralen Flusses auf den Mischzustand zu erwarten sind.

Im **3. Kapitel** wird die Theorie des Fluktuationmischzustandes, die auf den *Ginzburg-Landau-Gleichungen* der Supraleitung basiert, für die beschriebene Situation eines zusätzlichen Flussfadens erweitert. Die allgemeinen Gleichungen für den kritischen Strom, für die Supraströme und den durch diese Ströme erzeugten magnetischen Fluss werden hergeleitet.

Im **4. Kapitel** wird der Grenzfall des Vollzylinders betrachtet, bei dem sich ein Flussfaden auf der zentralen Achse befindet, vgl. Abbildung 1.1. Dies ist der Fall des sogenannten *eindimensionalen Mischzustands* [8], der auf ein äußeres magnetisches Feld eine diamagnetische Antwort gibt [9]. Wir zeigen, daß der Einfluß des Aharonov-Bohm-Effekts auf den zweiten kritischen Strom in diesem Fall groß ist. Durch das Anlegen eines Flusses im Inneren kann der Wert dieses Stroms bis auf die Hälfte reduziert werden.

Ein anderer Grenzfall, der sogenannte *zweidimensionale Mischzustand*, der auf ein äußeres Magnetfeld paramagnetisch reagiert [6, 7], wird im **5. Kapitel** studiert. In dieser Anordnung ist der innere Radius des Hohlzylinders groß im Vergleich zur Kohärenzlänge und wir zeigen, daß der Einfluß des Aharonov-Bohm-Effekts asymptotisch verschwindet.

Im **6. Kapitel** wird der Übergang vom eindimensionalen zum zweidimensionalen Mischzustand, der sogenannte *Übergangsmischzustand* [10], betrachtet, für den der innere Radius von der Größenordnung der Kohärenzlänge ist. Wir werden eine Gleichung angeben, mit deren Hilfe sich der zweite kritische Strom für Zylinder mit beliebigem Innenradius berechnen läßt. Interessant ist in diesem Fall, daß zusätzlich zu den dia- und paramagnetischen Antworttermen noch ein oszillierender Term abhängig vom angelegten Fluss auftritt.

Im **7. Kapitel** werden der Anwendungsbereich der Theorie und die Größenordnungen der vorhergesagten Effekte diskutiert.

Das abschließende **8. Kapitel** enthält eine Diskussion der Ergebnisse.



## 2 Der Mischzustand in Supraleitern erster Art

Der Mischzustand in Supraleitern erster Art, der Zusammenhang mit dem Zwischenzustand und der Begriff des zweiten kritischen Stroms werden im ersten Teil dieses Kapitel dargestellt. Im zweiten Teil geben wir eine heuristische Erklärung für die Effekte, die durch den Flußfaden im Zylinderinneren verursacht werden.

### 2.1 Mischzustand und zweiter kritischer Strom

Die Idee der Existenz eines Mischzustands in mehrfach zusammenhängenden stromdurchflossenen Supraleitern erster Art stammt von L. D. LANDAU [3], der bei der Untersuchung eines stromtragenden supraleitenden Hohlzylinders darauf stieß, daß die bereits bekannten Zustände, nämlich der supraleitende, der normalleitende und der sogenannte Zwischenzustand [I1, I2, I3] nicht ausreichen, um ein solches System unter allen physikalisch möglichen Bedingungen vollständig zu beschreiben.

Wird nämlich ein supraleitender Hohlzylinder mit dem inneren Radius  $\rho_1$  und dem äußeren Radius  $\rho_2$  in Achsenrichtung von einem Strom  $J$  durchflossen, der größer ist als der sogenannte *Silsbee-Strom*  $J_{c1} = \frac{c_0 \rho_2 H_c}{2}$ , so ist der rein supraleitende Zustand nicht mehr stabil, da der Strom an der äußeren Oberfläche der Probe ein Magnetfeld erzeugt, das größer als das zur Zerstörung der Supraleitung erforderliche kritische Magnetfeld  $H_c$  ist. Für  $J > J_{c1}$  geht dann ein äußerer Bereich ( $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$ ) in den normalleitenden Zustand über, während sich im inneren Bereich ( $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_i$ ) ein Zwischenzustand aufbaut. Der äußere Radius des Zwischenzustands  $\rho_i$  ergibt sich aus der Theorie zu:

$$\rho_i = \rho_2 \left( \frac{J}{J_{c1}} - \sqrt{\left( \frac{J}{J_{c1}} \right)^2 - 1} \right). \quad (2.1)$$

Im Rahmen dieser Theorie gilt  $|H| = H_c$  überall im Zwischenzustand, also insbesondere auch an der inneren Oberfläche des Hohlzylinders. Um den Sprung von  $|H| = H_c$  auf  $H = 0$  bei  $\rho = \rho_1$  zu begründen, forderte LANDAU die Existenz eines Oberflächenstroms:

$$J_s = \frac{cH_c \rho_1}{2}. \quad (2.2)$$

Die Oberflächenschicht, die diesen Strom trägt und offenbar einen größeren Anteil an Supraleitung besitzt als der Zwischenzustand, wurde von Landau *Mischzustand* genannt. Wählen wir nun  $J$  so groß, daß  $\rho_i \leq \rho_1$  gilt, so verschwindet der Zwischenzustand vollständig. Allerdings ist dann auch der rein normalleitende Zustand instabil, da an der inneren Oberfläche ein Bereich existiert, in dem das Magnetfeld kleiner als das kritische Feld ist. In diesem Bereich kann aber keine kompakte Supraleitungsschicht existieren, da aufgrund der Randbedingungen für das elektrische Feld dieses auch in der supraleitenden Schicht vorhanden

sein müßte. ANDREEV und BESTGEN [4] beschreiben daher den Mischzustand durch supraleitende Fluktuationen, die wegen  $H < H_c$  entstehen und durch das elektrische Feld wieder vernichtet werden. Wird allerdings die Dicke der Schicht, in der  $H < H_c$  gilt, kleiner als die supraleitende Kohärenzlänge  $\xi$ , so wird die Entstehung von supraleitenden Fluktuationen aus energetischen Gründen extrem unwahrscheinlich, und das System geht in den normalleitenden Zustand über. Der Strom, bei dem dieser Übergang stattfindet, wird *zweiter kritischer Strom*  $J_{c_2}$  genannt. Wir können ihn abschätzen, indem wir das Magnetfeld des Stroms im Abstand  $\xi$  von der inneren Oberfläche gleich dem für die Oberflächensupraleitung charakteristischen kritischen Feld [14]

$$H_{c_3} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}}} \cdot \frac{c_0 \hbar}{2e\xi^2} \quad (2.3)$$

setzen. Dem entspricht dann der zweite kritische Strom  $J_{c_2} \simeq \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2}{\pi}}} \cdot \frac{c_0^2 \hbar}{8e\xi^3} (\rho_2^2 - \rho_1^2)$ , der gut mit dem exakt berechneten zweiten kritischen Strom übereinstimmt:

$$\text{Zweidim. Mischzustand: } J_{c_2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{c_0^2 \hbar}{2e\xi^3} (\rho_2^2 - \rho_1^2). \quad (2.4)$$

Der Mischzustand wurde zunächst bei mehrfach zusammenhängenden Systemen untersucht, tritt aber auch bei einfach zusammenhängenden Proben auf [8]. Wird etwa ein Vollzylinder von einem so starken Strom durchflossen, daß dessen Magnetfeld bereits im Abstand  $\xi$  vom Zentrum von der Größenordnung des kritischen Feldes ist, so können sich keine Zwischenzustandsstrukturen mehr ausbilden, da deren lineare Dimensionen groß im Vergleich zur Kohärenzlänge sind. Es werden daher im Kernbereich des Zylinders supraleitende Fluktuationen entstehen, die dann vom elektrischen Feld wieder zerstört werden. Den zweiten kritischen Strom können wir abschätzen, indem wir das vom Strom  $J$  im Abstand  $\xi$  vom Zentrum erzeugte Feld gleich dem zweiten kritischen Feld setzen:

$$H_{c_2} = \frac{c_0 \hbar}{2e\xi^2}. \quad (2.5)$$

Das so gefundene  $J_{c_2} \simeq \frac{c_0^2 R^2 \hbar}{4e\xi^3}$  unterscheidet sich vom exakt bestimmten  $J_{c_2}$  nur wenig:

$$\text{Eindim. Mischzustand: } J_{c_2} = \frac{c_0^2 R^2 \hbar}{3^{\frac{3}{2}} e \xi^3}. \quad (2.6)$$

## 2.2 Der Mischzustand im Magnetfeld

Interessante Eigenschaften zeigt der stromdurchflossene Supraleiter im äußeren Magnetfeld. Bereits 1943 beobachteten STEINER und SCHÖNECK [15] das paramagnetische Verhalten eines stromführenden supraleitenden Zylinders im longitudinalen Magnetfeld, dessen Feldlinien also parallel zur Zylinderachse verlaufen. Dieser sogenannte *paramagnetische Effekt* tritt

auf, wenn die Supraleitung durch den angelegten Strom und das äußere Magnetfeld partiell zerstört wird. Der Effekt ist insofern überraschend, als Supraleiter im allgemeinen ein diamagnetisches Verhalten zeigen. Für den stromdurchflossenen supraleitenden Hohlzylinder wurde der paramagnetische Effekt 1956 von MEISSNER beobachtet [16]. MEISSNER schlug ein Modell des Zwischenzustands bei Anwesenheit eines longitudinalen Feldes vor [17], das den paramagnetischen Effekt auf azimuthale Ströme zurückführt. ROTHEN zeigte dann 1972 [18], daß im Rahmen der London-Andreev-Theorie [19] diese azimuthalen Ströme nicht erklärt werden können, eine stationäre paramagnetische Lösung der London-Andreev-Gleichungen nicht existiert und eine allgemeine periodische Lösung nicht stabil ist. Für diesen zweidimensionalen Mischzustand wurde der paramagnetische Effekt 1973 von LANDAU untersucht [22, 23, 24, 25] und konnte im Rahmen der Fluktuationstheorie [4] für supraleitende Legierungen 1973 [6] und für reine Supraleiter 1979 [7] berechnet werden. Die Anwendung der Fluktuationstheorie auf den eindimensionalen Mischzustand auf der Achse eines Vollzylinders im longitudinalen Magnetfeld ergab hingegen eine *diamagnetische Antwort* [9].

Diese Ergebnisse legen es nahe, den Übergang vom eindimensionalen zum zweidimensionalen Mischzustand zu studieren, um den Charakter des Übergangs vom dia- zum paramagnetischen Verhalten zu verstehen. Wir untersuchen hierzu stromführende supraleitende Hohlzylinder, deren innere Öffnung von der Größenordnung der supraleitenden Kohärenzlänge ist. In diesem Fall besitzt die magnetische Antwort aufgrund der Quantisierungsbedingungen der supraleitenden Wellenfunktion um die innere Öffnung des Hohlzylinders ein oszillatorisches Verhalten des induzierten magnetischen Flusses in Abhängigkeit vom inneren Radius und vom äußeren Magnetfeld [10]. Im Grenzfall des verschwindenden inneren Radius finden wir die diamagnetische Antwort des eindimensionalen Mischzustands und im Fall des unendlichen inneren Radius die paramagnetische Antwort des zweidimensionalen Mischzustands.

In den bisherigen Arbeiten wurde aus Gründen der besseren Berechenbarkeit eine Eichung gewählt, bei der das Vektorpotential auf der inneren Oberfläche des Hohlzylinders verschwindet. Dies entspricht der Situation, daß der Fluß in der inneren Öffnung gleich null gesetzt wird. Diese Situation könnte experimentell realisiert werden, indem der durch das äußere Feld im Inneren der Öffnung erzeugte Fluß durch Einführung eines Flußfadens gleicher Stärke und entgegengesetzter Richtung kompensiert wird, so daß der Gesamtfluß im Inneren der Öffnung verschwindet. Der Aharonov-Bohm-Effekt, der durch den Gesamtfluß in der inneren Öffnung verursacht wird, kann unter diesen Voraussetzungen nicht auftreten.

In der vorliegenden Arbeit wird insbesondere die Wirkung eines von null verschiedenen Gesamtflusses im Inneren der Öffnung auf den Charakter des Mischzustands studiert. Dabei wird nicht nur die Antwort auf den Fluß des äußeren Feldes  $H_a$ , sondern auch die Auswirkung eines zusätzlichen Flußfadens  $\Phi$  untersucht, der auch dann vorhanden ist, wenn das äußere Feld abgeschaltet ist. Das äußere Feld sowie der Flußfaden tragen zusätzlich zum Magnetfeld des angelegten Stromes zur Zerstörung der Supraleitung bei, so daß der zweite kritische Strom auch von diesen Größen abhängen muß. Den Beitrag des äußeren Feldes können wir abschätzen, indem wir das Magnetfeld des angelegten Stromes und das äußere

Feld, die aufeinander senkrecht stehen, vektoriell addieren und die Summe mit dem entsprechenden kritischen Feld  $H_c(\rho_1)$  gleichsetzen ( $H_c(\rho_1 = 0) = H_{c_2}$ ,  $H_c(\rho_1 = \infty) = H_{c_3}$ ). Als kritische Kurve ergibt sich dann:

$$J_{c_2}(H_a) \simeq J_{c_2}(0) \sqrt{1 - \left( \frac{H_a}{H_c(\rho_1)} \right)^2}. \quad (2.7)$$

Diese Kurve stimmt gut mit der exakt berechneten in Kapitel 4 und 5 überein.

Um die Auswirkung des zusätzlichen Flußfadens abzuschätzen, gehen wir davon aus, daß ein maximaler Abschirmstrom durch supraleitende Fluktuationen auftritt, wenn der Fluß gerade ein halbes Flußquant  $\frac{\Phi_0}{2} = \frac{c_0 \hbar}{4e}$  beträgt, wobei die Abschirmströme im Inneren des Hohlzylinders ein Feld erzeugen, das von der Größenordnung

$$H_{\frac{\Phi_0}{2}} \simeq \frac{c_0}{2\pi\rho_1^2 e} \quad (2.8)$$

ist. Falls der innere Radius von der Größenordnung der Kohärenzlänge ist, so wird  $H_{\frac{\Phi_0}{2}}$  von der Größenordnung des kritischen Feldes  $H_{c_3} \simeq \frac{c_0}{2\pi\xi^2 e} \cdot 1.66$ . Für  $\rho_1 \rightarrow \infty$  verschwindet der Effekt. Unsere Rechnungen werden in Übereinstimmung mit diesen Betrachtungen ergeben, daß für den eindimensionalen Mischzustand der zweite kritische Strom bis auf etwa die Hälfte zurückgeht, während er sich für den zweidimensionalen Mischzustand nicht ändert. Die Zerstörung von Supraleitung durch ein reines Vektorpotential erlaubt es, den Aharonov-Bohm-Effekt mit Hilfe einer Widerstandsmessung zu realisieren.

### 3 Modell und allgemeine Ergebnisse

Die Theorie des Fluktationsmischzustandes wird in diesem Kapitel vorgestellt und so modifiziert, daß ein zentraler Fluß berücksichtigt werden kann. Es werden allgemeine Ausdrücke für den Suprastrom in axialer Richtung und den magnetischen Fluß angegeben, der durch azimutale Suprastrome verursacht wird.

#### 3.1 Grundgleichungen

Zur Beschreibung der Dynamik der supraleitenden Fluktationen in der Nähe der kritischen Kurve wird die linearisierte zeitabhängige Ginzburg-Landau-Gleichung verwendet. Für die statistische Behandlung führen wir Langevin-Kräfte  $f(\vec{r}, t)$  in die Gleichung ein [27, 28]. Die Bewegungsgleichung für den Ordnungsparameter  $\Psi(\vec{r}, t)$  der Supraleitung und die Dichte des Suprastroms  $\vec{j}$  haben die folgende Form:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} - \nu \left\{ \Psi + \xi^2 \left( \nabla - \frac{2ie}{c_0} \vec{A} \right)^2 \Psi \right\} = f(\vec{r}, t) \quad (3.1)$$

$$\vec{j} = \frac{2e}{m} \mathcal{J} \left\langle \Psi^* \left( \nabla - \frac{2ie}{c_0} \vec{A} \right) \Psi \right\rangle \quad (3.2)$$

mit: $\xi$	Kohärenzlänge,
$e$	Elektronenladung,
$m$	Elektronenmasse,
$c_0$	Lichtgeschwindigkeit,
$\nu = \frac{\delta(T_c - T)}{\pi}$	Relaxationsfrequenz,
$\vec{A}$	Vektorpotential,
$f(\vec{r}, t)$	fluktuierende Kräfte mit $\langle f(\vec{r}, t) \rangle = 0$ und $\langle f(\vec{r}, t) f^*(\vec{r}', t') \rangle = 4mT\nu\xi^2\delta(\vec{r} - \vec{r}')\delta(t - t')$ .

In unseren Einheiten sind die Boltzmann-Konstante  $k$  und die Planck-Konstante  $\hbar$  gleich eins gesetzt. Im Vektorpotential  $\vec{A}$  werden das elektrische Feld  $\vec{E}$  des angelegten Stromes in z-Richtung, dessen Magnetfeld, ein von außen angelegtes magnetisches Feld in z-Richtung und der magnetische Flußfaden im Inneren des Zylinders berücksichtigt.

Betrachtet wird ein Hohlzylinder aus Typ-I-supraleitendem Material mit innerem Radius  $\rho_1$  und äußerem Radius  $\rho_2$ , vgl. Abbildung 3.1. Da angenommen wird, daß der Fluktationsstrom klein im Vergleich zum Normalstrom ist, wird das magnetische Feld senkrecht zur z-Achse im wesentlichen durch den Normalstrom  $\vec{J}$  bestimmt. Es gilt also:

$$H_\varphi(\rho) = \begin{cases} \frac{2J}{c(\rho_2^2 - \rho_1^2)} \frac{(\rho^2 - \rho_1^2)}{\rho}, & \rho \geq \rho_1 \\ 0, & \rho < \rho_1. \end{cases} \quad (3.3)$$

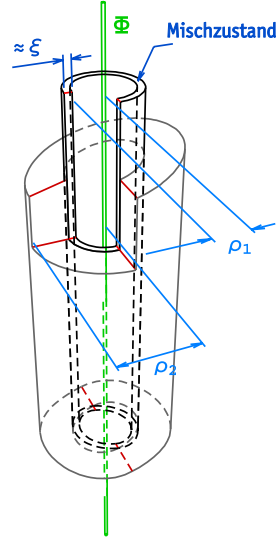


Abbildung 3.1: Supraleitender Hohlzylinder mit innerem Radius  $\rho_1$  und äußerem Radius  $\rho_2$ . Der Mischzustand befindet sich an der inneren Zylinderwand und ein Fluß  $\Phi$  auf der Achse.

Es ist  $\vec{H} = \nabla \times \vec{A}$  und daher  $H_\varphi = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}$ . Wir wählen  $A_\rho \equiv 0$  und es ergibt sich:

$$A_z(\rho) = \begin{cases} \frac{-I}{c(\rho_2^2 - \rho_1^2)} \left( \rho^2 - \rho_1^2 - 2\rho_1^2 \ln \frac{\rho}{\rho_1} \right), & \rho \geq \rho_1 \\ 0, & \rho < \rho_1. \end{cases} \quad (3.4)$$

Weiter berücksichtigen wir ein von außen angelegtes konstantes axiales Feld  $H_a$ , das in der inneren Öffnung des Supraleiters einen magnetischen Fluß  $\Phi_{H_a}$  erzeugt:

$$\Phi_{H_a} = \int \vec{H} \, d\vec{f} = \pi \rho_1^2 H_a. \quad (3.5)$$

Der zusätzlich angelegte Flussfaden  $\Phi$  und der Fluß  $\Phi_{H_a}$  wirken beide nur durch ihr Vektorpotential auf den Supraleiter, was zu dem bereits beschriebenen Aharonov-Bohm-Effekt führt. Wir spalten vom Vektorpotential in  $\varphi$ -Richtung jenen Anteil ab, der von dem gesamten magnetischen Fluß  $\Phi_{\text{ges}} = \Phi + \Phi_{H_a}$  in der inneren Öffnung herrührt:

$$A_\varphi^{\text{in}}(\rho) = \frac{H_a \rho_1^2}{2} \frac{1}{\rho} + \frac{\Phi}{2\pi\rho} = \frac{\Phi_{\text{ges}}}{2\pi\rho}. \quad (3.6)$$

Andererseits wirkt das Feld  $H_a$  direkt auf die supraleitende Schicht. Der Anteil des Vektorpotentials, das vom Feld  $H_a$  außerhalb der Öffnung herrührt, ist dann:

$$A_\varphi^{\text{ex}}(\rho) = \begin{cases} \frac{H_a}{2} \rho - \frac{H_a \rho_1^2}{2} \frac{1}{\rho}, & \rho \geq \rho_1 \\ 0, & \rho < \rho_1. \end{cases} \quad (3.7)$$

Insgesamt ergibt sich damit für die  $\varphi$ -Richtung das Vektorpotential:

$$\mathbf{A}_\varphi(\rho) = \mathbf{A}_\varphi^{\text{in}}(\rho) + \mathbf{A}_\varphi^{\text{ex}}(\rho) . \quad (3.8)$$

Durch diese Wahl des Vektorpotentials haben wir den Anteil des Feldes  $H_a(\rho > \rho_1)$ , das nur im Supraleiter vorhanden ist, vom Anteil des Feldes  $H_a(\rho < \rho_1)$  und einem magnetischen Fluß  $\Phi$  im Inneren getrennt. Der Vorteil dieser Aufteilung liegt darin, daß der zum Aharonov-Bohm-Effekt beitragende Anteil des Vektorpotentials  $\mathbf{A}_\varphi^{\text{in}}$  explizit in den Gleichungen auftritt. Der Anteil  $\mathbf{A}_\varphi^{\text{ex}}$  entspricht dem Vektorpotential eines magnetischen Feldes, das erst in der supraleitenden Schicht beginnt. In den früheren Arbeiten ist das magnetische Feld bewußt auf diese Weise gewählt, so daß kein Aharonov-Bohm-Effekt auftreten kann.

Für das angelegte elektrische Feld  $\vec{E}$  gilt:

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c_0} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

und man erhält mit  $\phi \equiv 0$ :

$$\mathbf{A}_z = -c_0 t \mathbf{E} . \quad (3.10)$$

Zusammengefaßt ergibt sich das folgende Vektorpotential für  $\rho \geq \rho_1$ :

$$\vec{A} \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{H_a}{2} \left( \rho - \frac{\rho_1^2}{\rho} \right) + \frac{\Phi_{\text{ges}}}{2\pi\rho} \\ \frac{-J}{c_0(\rho_2^2 - \rho_1^2)} \left( \rho^2 - \rho_1^2 - 2\rho_1^2 \ln \frac{\rho}{\rho_1} \right) - c_0 t E \end{pmatrix} . \quad (3.11)$$

Der Operator  $\mathcal{L} := -\xi^2 \left( \vec{\nabla} - \frac{2ie}{c_0} \vec{A} \right)^2$  der Ginzburg-Landau-Gleichung hat in Zylinderkoordinaten die Gestalt:

$$\mathcal{L} \Psi = \xi^2 \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{2ie}{c_0} \left( \frac{H_a}{2} \left( \rho - \frac{\rho_1^2}{\rho} \right) + \frac{\Phi_{\text{ges}}}{2\pi\rho} \right) \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{2ie}{c_0} \left( \frac{-J}{c_0(\rho_2^2 - \rho_1^2)} \left( \rho^2 - \rho_1^2 - 2\rho_1^2 \ln \frac{\rho}{\rho_1} \right) - c_0 t E \right) \right)^2 \right] \Psi .$$

Mit den folgenden dimensionsfreien Variablen

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\xi}, \quad \bar{z} = \frac{z}{\xi}, \quad \bar{t} = \nu \cdot t \quad (3.12)$$

ist dann:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial \bar{\rho}} \left( \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial \bar{\rho}} \right) - \left( \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{i\gamma}{2} \left( \bar{\rho} - \frac{\bar{\rho}_1^2}{\bar{\rho}} \right) - \frac{i\delta}{\bar{\rho}} \right)^2 - \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{i\beta}{2} \left( \bar{\rho}^2 - \bar{\rho}_1^2 - 2\bar{\rho}_1^2 \ln \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_1} \right) + i\varepsilon \bar{t} \right)^2. \quad (3.13)$$

$\mathcal{L}$  hängt von den folgenden dimensionsfreien Parametern ab:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{2e\xi}{\nu} E, & \gamma &= \frac{2eH_a \xi^2}{c_0} = \frac{H_a}{H_{c2}}, \\ \beta &= \frac{4e\xi^3 J}{c_0^2 (\rho_2^2 - \rho_1^2)}, & \delta &= \frac{e\Phi_{\text{ges}}}{c_0 \pi} = \frac{\Phi_{\text{ges}}}{\Phi_0}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Diese geben die Abhängigkeit des Operators  $\mathcal{L}$  vom elektrischen Feld, magnetischen Feld, Strom und magnetischen Fluß an. Im Folgenden wird  $\varepsilon \ll 1$  vorausgesetzt, was der Einschränkung auf Supraleiter der ersten Art entspricht (s. Kap. 7). Mit  $\tilde{\Psi}$  definiert als  $\tilde{\Psi} := \frac{\Psi}{2} \sqrt{\frac{\xi}{m\Gamma}}$  ergibt sich als dimensionsfreie Ginzburg-Landau-Gleichung:

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \bar{t}} - \tilde{\Psi} + \mathcal{L} \tilde{\Psi} = \tilde{f}(\bar{\rho}, \varphi, \bar{z}, \bar{t}). \quad (3.15)$$

Die fluktuierenden Kräfte  $\tilde{f}(\vec{r}, t)$  besitzen die Korrelationsfunktion

$$\langle \tilde{f}(\bar{\rho}, \varphi, \bar{z}, \bar{t}) \tilde{f}^*(\bar{\rho}', \varphi', \bar{z}', \bar{t}') \rangle = \frac{1}{\bar{\rho}} \delta(\bar{\rho} - \bar{\rho}') \delta(\varphi - \varphi') \delta(\bar{z} - \bar{z}') \delta(\bar{t} - \bar{t}'). \quad (3.16)$$

Die Stromdichten sind in dimensionsfreien Variablen gegeben durch

$$j_{\bar{\rho}} = 0, \quad (3.17)$$

$$j_{\varphi} = \frac{8e\Gamma}{\xi^2} \mathcal{J} \left\langle \tilde{\Psi}^* \left( \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial \varphi} - i \left( \frac{\gamma}{2} \left( \bar{\rho} - \frac{\bar{\rho}_1^2}{\bar{\rho}} \right) + \frac{\delta}{\bar{\rho}} \right) \right) \tilde{\Psi} \right\rangle, \quad (3.18)$$

$$j_{\bar{z}} = \frac{8e\Gamma}{\xi^2} \mathcal{J} \left\langle \tilde{\Psi}^* \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + i \left( \frac{\beta}{2} \left( \bar{\rho}^2 - \bar{\rho}_1^2 - 2\bar{\rho}_1^2 \ln \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_1} \right) + \varepsilon \bar{t} \right) \right) \tilde{\Psi} \right\rangle. \quad (3.19)$$

Im Folgenden werden die Tilden in den Gleichungen (3.13) bis (3.19) weggelassen.

Zur Berechnung des Fluktuationsstroms in  $z$ -Richtung sowie des magnetischen Flusses, verursacht durch den Fluktuationsstrom im  $\varphi$ -Richtung, benötigen wir Lösungen der zeitabhängigen Ginzburg-Landau-Gleichung mit fluktuierenden Kräften. Dazu entwickeln wir die Lösung  $\Psi$  der Gleichung nach Eigenfunktionen des Operators  $\mathcal{L}$ :

$$\Psi = \sum_{nmk_z} a_{nmk_z}(t) \Psi_{nmk_z}(\rho, \varphi, z, \varepsilon t),$$

wobei  $\mathcal{L} \Psi_{nmk_z} = \lambda_{nmk_z} \Psi_{nmk_z}$ . (3.20)



$\Psi_{nmk_z}$  soll dann nur noch die schwache Zeitabhängigkeit über  $\varepsilon t$  enthalten. Für die Lösungen der Eigenwertgleichung  $\Psi_{nmk_z}$  wird der folgende Ansatz gemacht:

$$\Psi_{nmk_z} = \left( \frac{1}{2\pi L} \right)^{\frac{1}{2}} R_{nmk_z}(\rho, \varepsilon t) \exp[i m \varphi + i k_z z] . \quad (3.21)$$

Der Vorfaktor enthält die Normierung für  $\varphi$  und  $z$ ,  $L$  ist dabei eine Normierungslänge. Setzen wir den Ansatz (3.21) in die Eigenwertgleichung ein, so ergibt sich eine Gleichung für den Radialteil  $R_{nmk_z}$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} R_{nmk_z}(\rho, \varepsilon t) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} R_{nmk_z}(\rho, \varepsilon t) + \left[ \lambda_{nmk_z} - \left( \frac{m}{\rho} - \frac{\gamma}{2} \left( \rho - \frac{\rho_1^2}{\rho} \right) - \frac{\delta}{\rho} \right)^2 - \left( \underbrace{k_z - \varepsilon t}_k + \frac{\beta}{2} \left( \rho^2 - \rho_1^2 - 2\rho_1^2 \ln \frac{\rho}{\rho_1} \right) \right)^2 \right] R_{nmk_z}(\rho, \varepsilon t) = 0 . \quad (3.22)$$

Es wird folgende Umbenennung durchgeführt:  $k_z + \varepsilon t =: k$ . Es ist dann  $\lambda_{nmk} = \lambda_{nmk_z}$  sowie  $R_{nmk}(\rho) = R_{nmk_z}(\rho, \varepsilon t)$ . Die Normierungsbedingung lautet hier:

$$\int_0^{\infty} d\rho \rho R_{nmk}^2 = 1 . \quad (3.23)$$

Führen wir den Ansatz für  $\Psi$  aus Gleichung (3.20) in die Ginzburg-Landau-Gleichung (3.15) ein, so treten die folgenden Ausdrücke auf:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \sum_{nmk_z} \left( \frac{d a_{nmk_z}(t)}{dt} \Psi_{nmk_z}(\rho, \varphi, z, \varepsilon t) + a_{nmk_z}(t) \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \Psi_{nmk_z}(\rho, \varphi, z, \varepsilon t)}_{\approx 0} \right) . \quad (3.24)$$

Da  $\varepsilon \ll 1$  vorausgesetzt wird, ist die Zeitabhängigkeit der Eigenfunktion zu  $\mathcal{L}$  schwach und wird gegenüber der Zeitabhängigkeit des Parameters  $a_{nmk_z}(t)$  vernachlässigt.

$$\mathcal{L} \Psi = \sum_{nmk_z} a_{nmk_z}(t) \mathcal{L} \Psi_{nmk_z}(\rho, \varphi, z) = \sum_{nmk_z} a_{nmk_z}(t) \lambda_{nmk} \Psi_{nmk_z}(\rho, \varphi, z) \quad (3.25)$$

Wird die Ginzburg-Landau-Gleichung mit  $\Psi_{nmk_z}^*(\rho, \varphi, z)$  multipliziert und integriert über  $\rho d\rho d\varphi dz$ , so erhalten wir wegen  $\langle \Psi_{nmk_z} | \Psi_{n', m', k'_z} \rangle = \delta_{nn'} \delta_{mm'} \delta_{k_z k'_z}$

$$\dot{a}_{nmk_z}(t) = (1 - \lambda_{nmk}) a_{nmk_z}(t) + f_{nmk_z}(t) . \quad (3.26)$$

Dabei ist:

$$f_{nmk_z}(t) := \left( \frac{1}{2\pi L} \right)^{\frac{1}{2}} \int d\rho d\varphi dz \rho R_{nmk}(\rho) \exp[-im\varphi - ik_z z] f(\rho, \varphi, z, t). \quad (3.27)$$

Diese Gleichung wird gelöst durch die Funktion:

$$a_{nmk_z}(t) = e^{-p_{nmk_z}(t)} \int_{-\infty}^t e^{p_{nmk_z}(t')} f_{nmk_z}(t') dt', \quad (3.28)$$

dabei ist mit  $\lambda_{nm}(k) = \lambda_{nmk}$

$$p_{nmk_z}(t) = - \int_0^t (1 - \lambda_{nm}(k')) dt', \text{ wobei } k' = k_z + \varepsilon t'.$$

Und daher gilt mit  $h(\rho) = \rho^2 - \rho_1^2 - 2\rho_1^2 \ln \frac{\rho}{\rho_1}$ :

$$\begin{aligned} & \left\langle \Psi^* \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{i\beta}{2} h(\rho) + i\varepsilon t \right) \Psi \right\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi L} \sum_{nmk_z} \sum_{n'm'k'_z} R_{nmk}(\rho) R_{n'm'k'}(\rho) \exp[i(m - m')\varphi + i(k_z - k'_z)z] \\ & \quad \cdot \left( ik + \frac{i\beta}{2} h(\rho) \right) \left\langle a_{nmk_z}(t) a_{n'm'k'_z}^*(t) \right\rangle \\ &= \frac{i}{2\pi L} \sum_{nmk_z} R_{nmk}^2(\rho) \left( k + \frac{\beta}{2} h(\rho) \right) e^{-2p_{nmk_z}(t)} \int_{-\infty}^t dt' e^{2p_{nmk_z}(t')}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Dabei wurde für die Koeffizienten verwendet:

$$\left\langle a_{nmk_z}(t) a_{n'm'k'_z}(t) \right\rangle = \delta_{nn'} \delta_{mm'} \delta_{k_z k'_z} e^{-2p_{nmk_z}(t)} \int_{-\infty}^t dt' e^{2p_{nmk_z}(t')}.$$

Gehen wir über zu einer Integration  $dk_z$ , das heißt  $\sum_{k_z} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int dk_z$ , so ergibt sich schließlich nach einigen Umformungen, mit  $\tau = \varepsilon(t - t')$  und

$$F_{nm}(k) = \int_0^\infty d\tau \exp \left[ \frac{2}{\varepsilon} \left( \tau - \int_{k-\tau}^k \lambda_{nm}(k') dk' \right) \right] : \quad (3.30)$$

$$\langle j_z \rangle = \frac{2eT}{\varepsilon \xi^2 \pi^2} \sum_{nm} \int_{-\infty}^\infty dk R_{nmk}^2(\rho) \left( k + \frac{\beta}{2} \left( \rho^2 - \rho_1^2 - 2\rho_1^2 \ln \frac{\rho}{\rho_1} \right) \right) F_{nm}(k). \quad (3.31)$$

Analog ergibt sich:

$$\langle j_\varphi \rangle = \frac{2eT}{\varepsilon \xi^2 \pi^2} \sum_{nm} \int_{-\infty}^{\infty} dk R_{nmk}^2(\rho) \left( \frac{m}{\rho} - \frac{\gamma}{2} \left( \rho - \frac{\rho_1^2}{\rho} \right) - \frac{\delta}{\rho} \right) F_{nm}(k). \quad (3.32)$$

Mit Hilfe der folgenden Beziehungen aufgrund des Hellmann-Feynman-Theorems

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k} \right\rangle_{nmk_z} &= \int_0^{\infty} \rho \, d\rho R_{nmk}^2(\rho) \left( k + \frac{\beta}{2} \left( \rho^2 - \rho_1^2 - 2\rho_1^2 \ln \frac{\rho}{\rho_1} \right) \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda_{nmk}}{\partial k}, \\ \left\langle -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma} \right\rangle_{nmk_z} &= \int_0^{\infty} \rho \, d\rho R_{nmk}^2(\rho) \left( \frac{m}{\rho} - \frac{\gamma}{2} \left( \rho - \frac{\rho_1^2}{\rho} \right) - \frac{\delta}{\rho} \right) \left( \rho - \frac{\rho_1^2}{\rho} \right) = -\frac{\partial \lambda_{nmk}}{\partial \gamma}, \\ \left\langle \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m} \right\rangle_{nmk_z} &= \int_0^{\infty} d\rho R_{nmk}^2(\rho) \left( \frac{m}{\rho} - \frac{\gamma}{2} \left( \rho - \frac{\rho_1^2}{\rho} \right) - \frac{\delta}{\rho} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda_{nmk}}{\partial m} \end{aligned}$$

ergibt der Gesamtstrom in z-Richtung nach Integration über  $\varphi$  und  $\rho$ :

$$\langle J_z \rangle = \frac{2eT}{\pi \varepsilon} \sum_{nm} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\partial \lambda_{nmk}}{\partial k} F_{nm}(k). \quad (3.33)$$

Der magnetische Fluß im Zylinder, der durch den Kreisstrom  $j_\varphi$  hervorgerufen wird, ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{4\pi^2 \xi^3}{c_0} \int_0^{\infty} d\rho \rho^2 j_\varphi(\rho) \\ &= \frac{8eT\xi}{c_0 \varepsilon} \sum_{nm} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_0^{\infty} d\rho \rho^2 R_{nmk}^2(\rho) \left( \frac{m}{\rho} - \frac{\gamma}{2} \left( \rho - \frac{\rho_1^2}{\rho} \right) - \frac{\delta}{\rho} \right) F_{nm}(k) \\ &= \frac{8eT\xi}{c_0 \varepsilon} \sum_{nm} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left( -\frac{\partial \lambda_{nmk}}{\partial \gamma} + \frac{\rho_1^2}{2} \frac{\partial \lambda_{nmk}}{\partial m} \right) F_{nm}(k). \end{aligned} \quad (3.34)$$

### 3.2 Spektrum und zweiter kritischer Strom

Zur Auswertung von Strom und Fluß benötigen wir das Spektrum der Eigenwerte  $\lambda_{nmk} = \lambda_{nmk}(\gamma, \beta, \delta, \rho_1)$  aus (3.20). Es wird sich zeigen, daß nur bestimmte Summanden für  $n$  und  $m$  überhaupt einen merklichen Beitrag zum Strom bzw. Fluß liefern. Ferner müssen die  $\lambda$

nur in der Nähe ihrer Minima bekannt sein, wenn  $\gamma, \beta, \delta$  so gewählt sind, daß diese Minima ungefähr eins sind.

Diese Vereinfachung ist möglich aufgrund des Faktors  $F_{nm}(k)$  in den Ausdrücken für Strom und Fluß. Für  $\lambda$ , deren Minimum größer als eins ist, liefert die  $k'$ -Integration einen großen negativen Beitrag im Exponenten. Die  $\tau$ -Integration führt infolgedessen zu einem exponentiell kleinen  $F_{nm}(k)$ . Im umgekehrten Fall, wenn das Minimum kleiner als eins ist, werden Strom und Fluß so groß, daß die lineare Theorie nicht mehr gültig ist. Das Minimum von  $\lambda = 1$  charakterisiert gerade den Übergangsbereich von sehr kleinen zu sehr großen Strömen. Dieser Bereich ist nur schmal, eine Abschätzung wird in Kapitel 7 geliefert. Berechnen wir das Minimum von  $\lambda_{nmk}$  für festes  $\gamma, \delta$  und  $\rho_1$ , so wird dieses für große  $\beta$  größer als eins sein und für kleine  $\beta$  kleiner als eins. Dazwischen wird es ein  $\lambda_{n_0 m_0 k_{m_0}}$  geben, das zuerst den Wert eins erreicht. Dieser Übergangspunkt definiert den zweiten kritischen Strom  $\beta = \beta_{c_2}(\gamma, \delta, \rho_1)$

$$\begin{aligned} \text{Min}_{nmk_z} [\lambda_{nmk_z}(\beta, \gamma, \delta, \rho_1)] = 1 &\iff \beta = \beta_{c_2}(\gamma, \delta, \rho_1) \\ &\iff J = J_{c_2}(H_a, \Phi, \rho_1). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Die linearisierte Ginzburg-Landau-Theorie gilt somit nur in der Nähe des zweiten kritischen Stroms. In der Abbildung 3.2 ist der Gültigkeitsbereich unter Verwendung von Ergebnissen aus der Arbeit von BESTGEN und ROTHEN [10] veranschaulicht. In dieser Arbeit ist ein magnetischer Fluß im Inneren des Hohlzylinders noch nicht berücksichtigt ( $\delta = 0$ ).

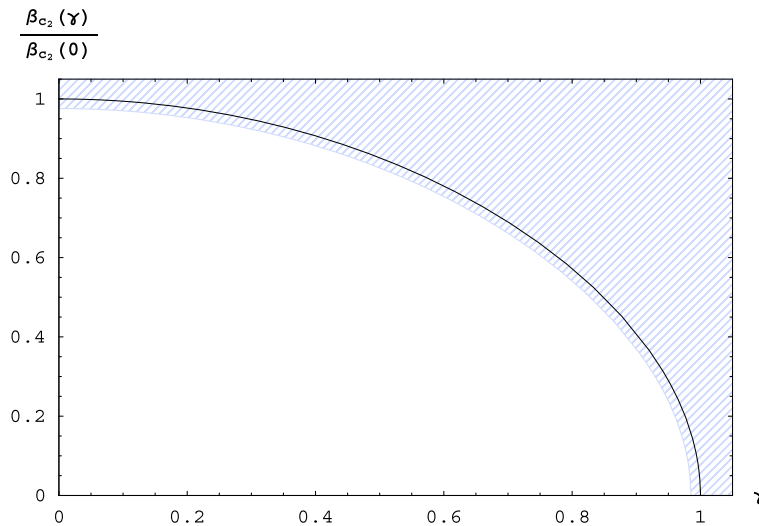


Abbildung 3.2: Gültigkeitsbereich der Theorie, eingezeichnet in der normierten kritischen Kurve für  $\delta = 0$ .

### 3.2.1 Parametrisierung des Spektrums

In den Arbeiten [4, 6, 8] wird gezeigt, daß der Abstand der Eigenwerte  $\lambda_{nmk}$  für  $n \geq 1$  zu  $n = 0$  mindestens von der gleichen Größenordnung ist wie der Eigenwert für  $n = 0$  selbst, daher liefern diese keine Beiträge mehr zum Suprastrom. Wir setzen  $n = 0$  und lassen die Indizierung im folgenden fort.

Für das Minimum von  $\lambda_{mk}(\gamma, \beta, \delta, \rho_1)$ , aufgefaßt als kontinuierliche Funktion von  $k$  und  $m' = m - \delta$ , gilt:

$$\left. \frac{\partial \lambda}{\partial k} \right|_{\bar{k}\bar{m}'} = 0 \quad \text{und} \quad \left. \frac{\partial \lambda}{\partial m'} \right|_{\bar{k}\bar{m}'} = 0. \quad (3.36)$$

Dabei sind  $\bar{k}$  und  $\bar{m}'$  die Minimalstellen. In der Nähe der kritischen Kurve für  $\beta \approx \beta_{c_2}$ ,  $\gamma \approx \gamma_c$  sowie  $k \approx \bar{k}$ ,  $m' \approx \bar{m}'$ , also in der Umgebung dieses Minimums, entwickeln wir  $\lambda$  bis zur 2. Ordnung:

$$\lambda_{m'k} = \lambda_{\bar{m}'\bar{k}} + \frac{b}{2} (k - \bar{k})^2 + c (k - \bar{k}) \left( \frac{m'}{\rho_1} - \frac{\bar{m}'}{\rho_1} \right) + \frac{d}{2} \left( \frac{m'}{\rho_1} - \frac{\bar{m}'}{\rho_1} \right)^2; \quad (3.37)$$

dabei gilt für die Koeffizienten:

$$b = \left. \frac{\partial^2 \lambda}{\partial k^2} \right|_{\bar{k}\bar{m}'}, \quad c = \rho_1 \left. \frac{\partial^2 \lambda}{\partial k \partial m'} \right|_{\bar{k}\bar{m}'}, \quad d = \rho_1^2 \left. \frac{\partial^2 \lambda}{\partial m'^2} \right|_{\bar{k}\bar{m}'}.$$

Die Quantenzahl  $k$  haben wir generell als kontinuierlich behandelt, dagegen ist  $m$  eine ganze Zahl, was für den Minimalwert  $\bar{m}$  im allgemeinen nicht erfüllt ist.  $\lambda_{m'_0 k_0}$  soll das kleinste Minimum sein, das einen ganzzahligen Wert für  $m$  hat, d. h.  $m_0$  soll die ganze Zahl sein, für die  $m'_0$  den kleinsten Abstand von  $\bar{m}'$  hat. Das zugehörige  $k$  bestimmt sich über

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \lambda_{m'k}}{\partial k} \right|_{m'_0 k_{m'_0}} &= 0 \\ \iff k_{m'_0} &= \bar{k} + \frac{c}{b} \left( \frac{\bar{m}'}{\rho_1} - \frac{m'_0}{\rho_1} \right). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Mit der Definition des zweiten kritischen Stroms ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} \lambda_{m'_0 k_{m'_0}}(\beta_{c_2}(\gamma, \delta, \rho_1), \gamma, \delta, \rho_1) &= 1 \\ \iff \lambda_{\bar{m}'\bar{k}} + \frac{db - c^2}{2b} \left( \frac{m'_0 - \bar{m}'}{\rho_1} \right)^2 &= 1. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Setzen wir die Bedingung (3.39) wieder in die Entwicklung (3.37) ein, so erhalten wir den folgenden Entwicklungsansatz für den Eigenwert  $\lambda_{m'k}$  in der Nähe des zweiten kritischen

Stromes.

$$\begin{aligned} \lambda_{m'k}(\beta, \gamma, \delta, \rho_1) &= 1 + \alpha_1 \left( \frac{\beta - \beta_{c_2}}{\beta_{c_2}} \right) + \alpha_2 \left( \frac{\gamma - \gamma_c}{\gamma_c} \right) + c \left( \frac{m' - \bar{m}'}{\rho_1} \right) (k - \bar{k}) \\ &\quad + \frac{b}{2} (k - \bar{k})^2 + \frac{d}{2} \left( \frac{m' - \bar{m}'}{\rho_1} \right)^2 + \frac{c^2 - db}{2b} \left( \frac{m'_0 - \bar{m}'}{\rho_1} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.40)$$

Dabei ist  $(\beta_{c_2}, \gamma_c, \delta_c)$  ein Punkt der kritischen Kurve. Der Ansatz hat die folgenden Eigenschaften:

1.  $\lambda_{m'_0 k_{m'_0}} = 1$ ,
2.  $\left. \frac{\partial \lambda_{m'k}}{\partial k} \right|_{m'_0 k_0} = 0$ ,
3.  $\lambda_{m'_0 k_{m'_0}}(\beta_{c_2}, \gamma_c, \delta_c, \rho_1)$  ist das Minimum von allen  $\lambda_{m'k}(\beta_{c_2}, \gamma_c, \delta_c, \rho_1)$ , wobei  $m$  eine ganze Zahl ist.

### 3.2.2 Suprastrom in axialer Richtung und magnetischer Fluß

Dieser Ansatz läßt sich insbesondere nutzen, um die Integrale für Strom und Fluß weiter zu vereinfachen. Durch Auswertung der Integration  $dk'$  und  $dk$  in (3.33) und (3.34) erhalten wir die folgenden Ausdrücke:

$$\langle J_z \rangle = \frac{eT}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \sum_m \int_0^\infty d\tau \sqrt{\tau b} \exp \left[ \frac{2\tau}{\varepsilon} \left( \Delta - \frac{\tau^2 b}{24} \right) \right] \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{-8eT\xi}{c_0} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \sum_m \int_0^\infty d\tau \frac{1}{\sqrt{\tau}} \left( \frac{\alpha_2}{\gamma_c \sqrt{b}} + \frac{c^2 - db}{2b\sqrt{b}} (m' - \bar{m}') - \frac{c\rho_1}{4\sqrt{b}} \right) \\ &\quad \cdot \exp \left[ \frac{2\tau}{\varepsilon} \left( \Delta - \frac{\tau^2 b}{24} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$= \Phi_{\text{dia}} + \Phi_{\text{osz}} + \Phi_{\text{para}} . \quad (3.43)$$

Dabei ist:

$$\Delta = \frac{c^2 - db}{2b\rho_1^2} (m' - m'_0) (m' + m'_0 - 2\bar{m}') - \alpha_1 \left( \frac{\beta - \beta_{c_2}}{\beta_{c_2}} \right) - \alpha_2 \left( \frac{\gamma - \gamma_c}{\gamma_c} \right) . \quad (3.44)$$

Den magnetischen Fluß  $\Phi$  können wir aufteilen in einen diamagnetischen Anteil  $\Phi_{\text{dia}}$ , einen oszillierenden Anteil  $\Phi_{\text{osz}}$  und einen paramagnetischen Anteil  $\Phi_{\text{para}}$ .

$$\Phi_{\text{dia}} = -f \Phi_0 \sum_m \int_0^\infty d\tau \frac{1}{\sqrt{\tau}} \frac{a_2}{\gamma_c \sqrt{b}} \exp \left[ \frac{2\tau}{\varepsilon} \left( \Delta - \frac{\tau^2 b}{24} \right) \right] \quad (3.45)$$

$$\Phi_{\text{osz}} = -f \Phi_0 \sum_m \int_0^\infty d\tau \frac{1}{\sqrt{\tau}} \frac{c^2 - db}{2b\sqrt{b}} (m' - \bar{m}') \exp \left[ \frac{2\tau}{\varepsilon} \left( \Delta - \frac{\tau^2 b}{24} \right) \right] \quad (3.46)$$

$$\Phi_{\text{para}} = f \Phi_0 \sum_m \int_0^\infty d\tau \frac{1}{\sqrt{\tau}} \frac{c\rho_1}{4\sqrt{b}} \exp \left[ \frac{2\tau}{\varepsilon} \left( \Delta - \frac{\tau^2 b}{24} \right) \right] \quad (3.47)$$

Dabei ist  $\Phi_0 = \frac{c_0 \pi}{e}$  das Flußquantum und  $f = \frac{8eT\xi}{c_0 \Phi_0} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \simeq \mathcal{O}(1)$ , vgl. Kapitel 7.3. Diese drei Anteile des magnetischen Flusses werden für verschiedene Bereiche von  $\rho_1$  unterschiedlich starke Beiträge liefern. Für den eindimensionalen Mischzustand ( $\rho_1 = 0$ ) sind  $\Phi_{\text{osz}}$  und  $\Phi_{\text{para}}$  gleich null, da sie wegen  $c \sim \rho_1$  und  $d \sim \rho_1^2$  proportional zu  $\rho_1^2$  sind. Für den zweidimensionalen Mischzustand ( $\rho_1 \gg 1$ ) überwiegt der paramagnetische Term, da nach Umwandlung der Summation über  $m$  in eine Integration über  $k_y = \frac{m}{\rho_1}$  der Fluß  $\Phi_{\text{osz}} = 0$  ist. Für den Übergangsmischzustand ( $\rho_1 \sim 1$ ) sind  $\Phi_{\text{dia}}$  und  $\Phi_{\text{para}}$  von der gleichen Größenordnung aber entgegengesetzt gerichtet. Der entscheidende Anteil ist in diesem Fall  $\Phi_{\text{osz}}$ .

Die beiden Ausdrücke für den Suprastrom und den magnetischen Fluß sind soweit vereinfacht, daß nur noch die Entwicklungskoeffizienten aus (3.40) dort auftreten. Diese zu bestimmen, ist das nächste Ziel. Da wir das Spektrum  $\lambda_{mk}$  für beliebiges  $\rho_1$  nicht auswerten können, werden in den folgenden beiden Kapiteln zwei Grenzfälle  $\rho_1 = 0$  und  $\rho_1 \rightarrow \infty$  betrachtet, für die eine Auswertung möglich ist. In beiden Fällen läßt sich der kritische Strom bei entsprechender Skalierung durch eine universelle Kurve darstellen, deren Gültigkeit dann auch für beliebiges  $\rho_1$  bei entsprechender Skalierung des kritischen Magnetfeldes postuliert wird. Dies ermöglicht die Auswertung von Strom und magnetischem Fluß im allgemeinen Fall.

## 4 Der eindimensionale Mischzustand

In diesem Kapitel wird gezeigt, daß ein Flußfaden auf der Achse eines Vollzylinders den zweiten kritischen Strom bis auf die Hälfte seines Wertes absenken kann, so daß man den elektrischen Widerstand des Zylinders allein durch den angelegten Fluß verändern kann. Ferner regt der Flußfaden Ringströme an, die ihrerseits einen Fluß erzeugen. Dieser ändert bei ungeradzahligem Vielfachen des halben Flußquanten sein Vorzeichen.

### 4.1 Eigenwertspektrum und zweite kritische Kurve

Wir betrachten einen stromdurchflossenen zylinderförmigen Supraleiter im longitudinalen äußeren Magnetfeld  $H_a$  und zusätzlich einen axialen Fluß  $\Phi$  im Inneren des Supraleiters. Eine Realisation wäre denkbar durch einen Supraleiter mit einer Bohrung, deren Radius klein gegenüber der Kohärenzlänge ist, vgl. Abbildung 4.1. Für das Vektorpotential aus Gleichung (3.11) lassen wir  $\rho_1 \rightarrow 0$  gehen. Somit ist:

$$A_\varphi(\rho) = \frac{H_a \rho}{2} + \frac{\Phi}{2\pi\rho}, \quad (4.1)$$

$$A_z(\rho) = \frac{-J}{c_0 \rho_2^2} \rho^2 - c_0 t E. \quad (4.2)$$

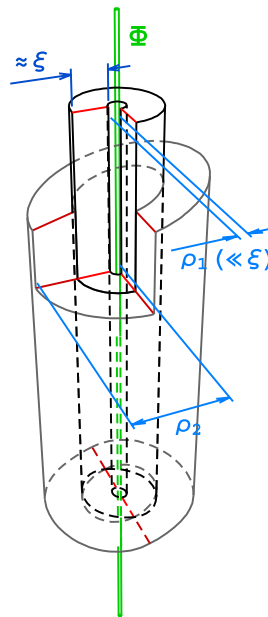


Abbildung 4.1: Supraleitender Hohlzylinder mit Innenradius  $\rho_1 \ll \xi$  und äußerem Radius  $\rho_2$ . Der Mischzustand befindet sich an der inneren Zylinderwand und ein Fluß  $\Phi$  auf der Achse.



Entsprechend ergibt sich für den Operator  $\mathcal{L}$  (vgl. (3.13)):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{i\gamma}{2} \rho - \frac{i\delta}{\rho} \right)^2 - \left( \frac{\partial}{\partial z} + i \frac{\beta}{2} \rho^2 + i\epsilon t \right)^2. \quad (4.3)$$

Und es ergibt sich als Eigenwertgleichung für den Anteil  $R_{nmk}$  die Gleichung:

$$\frac{d^2 R_{nmk}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR_{nmk}}{d\rho} + \left[ \lambda_{nmk} - \left( \frac{m}{\rho} - \frac{\gamma}{2} \rho - \frac{\delta}{\rho} \right)^2 - \left( k + \frac{\beta}{2} \rho^2 \right)^2 \right] R_{nmk} = 0. \quad (4.4)$$

Wir suchen einen geeigneten Variationsansatz für  $R_{nmk}$ . Es gibt eine Singularität für  $\rho = 0$ , daher der Ansatz  $R \sim \rho^\nu$ . Aus Gleichung (4.4) ergibt sich:

$$\nu = \pm |m - \delta|.$$

Als Variationsansatz für  $n = 0$  benutzen wir

$$R_{0mk}(\rho) \simeq R_{0mk}^{\text{var}}(\rho) = c_m \rho^\nu e^{-\alpha \rho^2} \quad (4.5)$$

mit folgender Normierungsbedingung, die  $c_m$  fixiert:

$$1 = \int_0^\infty d\rho \rho (R_{mk}^{\text{var}})^2 = \frac{c_m^2}{2} (2\alpha)^{-(|m-\delta|+1)} \Gamma(|m-\delta|+1), \quad (4.6)$$

wobei  $\Gamma$  die Gammafunktion bezeichnet. Dieses Integral konvergiert für den Fall  $\nu > -1$ . Wie am Ende dieses Abschnitts gezeigt wird, spielen nur solche Exponenten in dieser physikalischen Situation eine Rolle. Um zu verstehen, daß in dem Lösungsansatz  $\nu = +|m - \delta|$  zu wählen ist, wird ein  $\delta$ -förmiges Magnetfeld im Ursprung des Zylinders angenommen, welches für einen konstanten Fluß  $\Phi$  sorgt. Dies denken wir uns als Grenzfall von kleiner werdenden Zylindern mit Radius  $\rho_\Phi$  realisiert, die ein größer werdendes magnetisches Feld enthalten, so daß der Fluß konstant bleibt, vgl. Abbildung 4.2. Wir können also von der Situation eines konstanten Feldes  $\gamma_\Phi$  im jeweiligen Zylinder ausgehen, wobei:

$$\text{const.} = \delta = \gamma_\Phi \frac{\rho_\Phi^2}{2}.$$

Die Differentialgleichung, die in diesem Fall für  $\rho < \rho_\Phi$  zu betrachten ist, lautet:

$$\frac{d^2 \bar{R}_{nmk}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\bar{R}_{nmk}}{d\rho} + \left[ \lambda_{nmk} - \left( \frac{m}{\rho} - \frac{\gamma_\Phi}{2} \rho \right)^2 - \left( k + \frac{\beta}{2} \rho^2 \right)^2 \right] \bar{R}_{nmk} = 0. \quad (4.7)$$

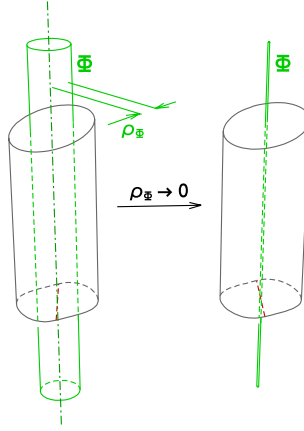


Abbildung 4.2: Endlich ausgedehntes und  $\delta$ -förmiges magnetisches Feld im Zylinderinneren.

Diese Gleichung entspricht genau der Differentialgleichung für die Situation ohne magnetischen Fluß im Inneren, deren Lösung bekannt ist [10]:

$$\tilde{R}_{mk}(\rho) = C\rho^{|\mathbf{m}|} e^{-\alpha\rho^2} .$$

Die allgemeine Lösung in unserem Fall ist eine Linearkombination der beiden Lösungen:

$$R_{mk}(\rho) = A\rho^{+|\mathbf{m}-\delta|} e^{-\alpha\rho^2} + B\rho^{-|\mathbf{m}-\delta|} e^{-\alpha\rho^2} .$$

Als Anschlußbedingung für die logarithmische Ableitung von  $\rho R$  gilt:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\rho} (\ln \rho \tilde{R}) \right|_{\rho=\rho_\Phi} &= \left. \frac{d}{d\rho} (\ln \rho R) \right|_{\rho=\rho_\Phi} \\ \Leftrightarrow \frac{B}{A} &= \rho_\Phi^{2|\mathbf{m}-\delta|} \frac{|\mathbf{m}-\delta| - |\mathbf{m}|}{|\mathbf{m}-\delta| + |\mathbf{m}|} . \end{aligned}$$

Führen wir nun den Grenzübergang  $\rho_\Phi \rightarrow 0$  durch, dann geht der Quotient  $\frac{B}{A}$  gegen null. Von beiden möglichen Lösungen ist also diejenige zu wählen, die im Ursprung wurzelartig beginnt [29]. Für den Variationsansatz ist daher das Vorzeichen für  $\nu$  positiv. Zur Bestimmung der Eigenwerte  $\lambda$  setzen wir den Variationsansatz in die Gleichung (4.4) ein und erhalten nach Multiplikation mit  $R_{0mk}^{\text{var}}(\rho)$  und Integration über  $\rho d\rho$ :

$$\begin{aligned} \lambda_{mk} = k^2 + 2\alpha(|\mathbf{m}-\delta| + 1) - (\mathbf{m}-\delta)\gamma + \left(k\beta + \frac{\gamma^2}{4}\right) \frac{1}{2\alpha} (|\mathbf{m}-\delta| + 1) \\ + \frac{\beta^2}{16\alpha^2} (|\mathbf{m}-\delta| + 2) (|\mathbf{m}-\delta| + 1) . \quad (4.8) \end{aligned}$$

Gesucht wird das Minimum von  $\lambda = \lambda(\alpha(k, m), k, m)$  bezüglich der Parameter  $\alpha$  und  $k$ :

$$2 - \frac{\gamma^2 + 4\bar{k}_m\beta}{8\alpha^2(\bar{k}_m)} - \frac{\beta^2(|m - \delta| + 2)}{8\alpha^3(\bar{k}_m)} = 0 \quad (4.9)$$

$$\bar{k}_m = \frac{-\beta(|m - \delta| + 1)}{4\alpha(\bar{k}_m)}. \quad (4.10)$$

Setzen wir dieses minimale  $\bar{k}_m$  (4.10) in die Gleichung (4.9) ein, so ergibt sich:

$$2 - \frac{\gamma^2}{8\alpha(\bar{k}_m)^2} - \frac{\beta^2}{8\alpha(\bar{k}_m)^3} = 0. \quad (4.11)$$

Einsetzen von Gleichung (4.10) und (4.11) in die Gleichung für  $\lambda$  (4.8) führt zu:

$$\lambda_{m\bar{k}_m} = -(m - \delta)\gamma + 4\alpha(\bar{k}_m)(|m - \delta| + 1) - \frac{\beta^2}{16\alpha(\bar{k}_m)^2}(|m - \delta| + 1). \quad (4.12)$$

Wie schon im Kapitel 3.1 diskutiert, ist die kritische Kurve gerade durch die Bedingung  $\lambda_{m\bar{k}_m} = 1$  definiert:

$$1 = -(m - \delta)\gamma + 4\alpha(|m - \delta|) - \frac{\beta_{c_2}^2}{16\alpha(\bar{k}_m)^2}(|m - \delta| + 1). \quad (4.13)$$

#### 4.1.1 Grenzfälle

Zunächst werden zwei Spezialfälle betrachtet, die die gekennzeichneten Punkte (1) und (2) in der Abbildung der kritischen Kurve 4.3 betreffen.

**Grenzfall (1):**  $\gamma = 0, m - \delta = 0$

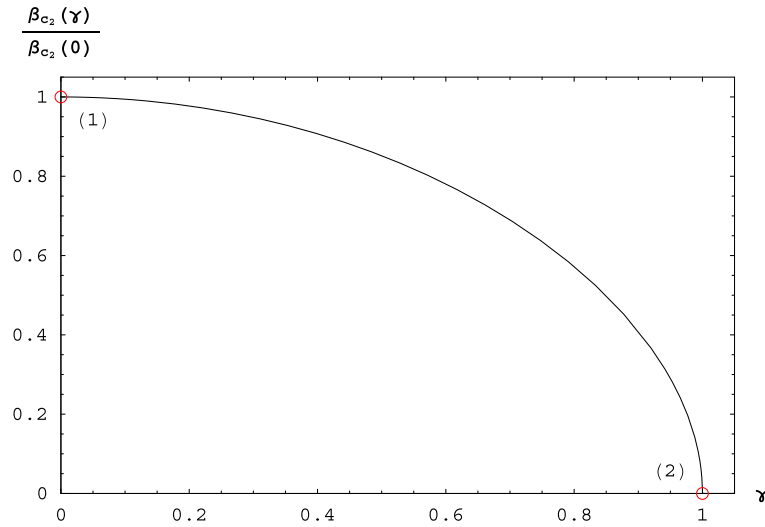
Wird kein äußeres magnetisches Feld angelegt und entspricht der magnetische Fluß einem Vielfachen des Flußquanten, so liefern die Gleichungen:

$$(4.13) \implies 1 = 4\alpha(\bar{k}_m) - \frac{\beta_{c_2}^2}{16\alpha(\bar{k}_m)^2} \quad (4.14)$$

$$(4.11) \implies 2 = \frac{\beta_{c_2}^2}{8\alpha(\bar{k}_m)^3} \implies \alpha(\bar{k}_m) = \left(\frac{\beta_{c_2}}{4}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Und damit:

$$\beta_c = \frac{4}{3^{\frac{3}{2}}} \quad \text{und} \quad \alpha(\bar{k}_m) = \frac{1}{3}. \quad (4.15)$$

Abbildung 4.3: Normierte kritische Kurve  $\beta_{c_2}(\gamma)$  für  $\delta = 0$ .**Grenzfall (2):  $\beta \rightarrow 0$** 

In diesem Fall liegt kein Strom an dem Supraleiter.

$$(4.13) \quad \implies \quad 1 = -(m - \delta) \gamma_c + 4\alpha (|m - \delta| + 1)$$

$$(4.11) \quad \implies \quad 2 = \frac{\gamma_c^2}{8\alpha^2} \quad \implies \quad \alpha(\bar{k}_m) = \frac{\gamma_c}{4}$$

Einsetzen in die obere Gleichung liefert:

$$\gamma_c = \frac{1}{|m - \delta| + 1 - (m - \delta)} \quad (4.16)$$

$$\text{und damit} \quad \alpha(\bar{k}_m) = \frac{1}{4(|m - \delta| + 1 - (m - \delta))}. \quad (4.17)$$

In der späteren Diskussion wird sich zeigen, daß nur der Fall  $(m - \delta) > 0$  für diesen Bereich eine Rolle spielt. Die Gleichung (4.16) liefert dann gerade  $\gamma_c = 1$ , d. h. für einen Typ-I-Supraleiter:  $H_a = H_{c_2} = \sqrt{2}\kappa H_c < H_c$ . Dies bedeutet, daß das kritische Feld, welches zur Zerstörung der Supraleitung führt, bei dieser physikalischen Anordnung kleiner ist als in einem Supraleiter ohne angelegten Strom.

### 4.1.2 Allgemeiner Fall

Der Parameter  $\alpha$  wird nun explizit berechnet und damit die kritische Kurve bestimmt. Es gilt nach (4.13):

$$1 = -(m - \delta) \gamma + 4\alpha (|m - \delta| + 1) - \frac{\beta_{c_2}^2}{16\alpha(\bar{k}_m)^2} (|m - \delta| + 1)$$

$$\Leftrightarrow \alpha(\gamma, \delta) = \frac{1 + (m - \delta) \gamma}{6(|m - \delta| + 1)} + \sqrt{\left(\frac{1 + (m - \delta) \gamma}{6(|m - \delta| + 1)}\right)^2 - \frac{\gamma^2}{48}}$$

$$\alpha(\gamma, \delta) = A \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{48A^2}}\right) \quad (4.18)$$

$$\text{wobei } A = \frac{1 + (m - \delta) \gamma}{6(|m - \delta| + 1)}. \quad (4.19)$$

Die Gleichung (4.18) liefert uns einen Ausdruck für den Parameter  $\alpha$  auf der kritischen Kurve in Abhängigkeit von  $\gamma$ ,  $\delta$  und  $m$ . Aus der Gleichung (4.11) folgt:

$$2\alpha^3 - \frac{\gamma^2 \alpha}{8} - \frac{\beta^2}{8} = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta_{c_2}(\gamma, \delta) = \sqrt{16\alpha^3 - \gamma^2 \alpha}. \quad (4.20)$$

Und damit ergibt sich als kritische Kurve:

$$\beta_{c_2}(\gamma, \delta) = 4 \sqrt{A^3 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{48A^2}}\right)^3 - \frac{\gamma^2}{16} A \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{48A^2}}\right)}. \quad (4.21)$$

Das Einsetzen der dimensionsfreien Parameter und von  $\hbar$  liefert:

$$J_{c_2} \left( \frac{H_a}{H_{c_2}}, \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) = \frac{c_0^2 \rho_2^2 \hbar}{e \xi^3} \left[ A^3 \left( 1 + \sqrt{1 - \left( \frac{H_a}{H_{c_2}} \right)^2 \frac{1}{48A^2}} \right)^3 - \left( \frac{H_a}{H_{c_2}} \right)^2 \frac{A}{16} \left( 1 + \sqrt{1 - \left( \frac{H_a}{H_{c_2}} \right)^2 \frac{1}{48A^2}} \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.22)$$

Für den Wert des äußeren Feldes  $\gamma = 0$  ergibt sich aus (4.21):

$$\beta_{c_2}(\gamma = 0, \delta) = \frac{4}{3\sqrt{3}} \left( \frac{1}{|m - \delta| + 1} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (4.23)$$

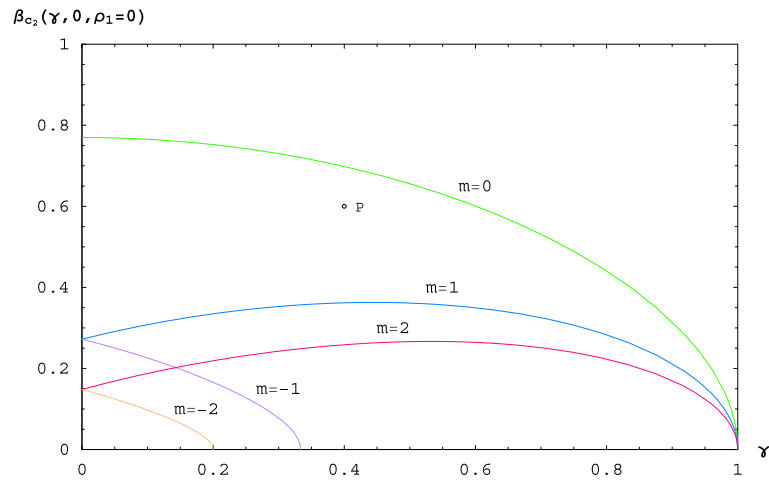


Abbildung 4.4: Darstellung mehrerer möglicher kritischen Kurven  $\beta_{c_2}(\gamma, \delta, \rho_1 = 0)$  für verschiedene Werte von  $m$  bei gegebenem  $\delta = 0$ .

Jedem Wert von  $(m - \delta)$  entspricht eine andere kritische Kurve.

Aus der Arbeit [10] über den Mischzustand ohne einen zusätzlichen Fluß ist bekannt, daß die relevante kritische Kurve durch die jeweils höchstliegende Kurve gegeben ist. Wir betrachten dazu die Abbildung 4.4: Die supraleitenden Fluktuationen unterhalb der Kurve  $m - \delta = 0$  z. B. in P sind bereits so groß, daß die lineare Theorie nicht mehr gewährleistet ist. Andererseits sind die Beiträge der darunter liegenden Kurven zum supraleitenden Fluktuationsstrom klein (siehe Kapitel 7).

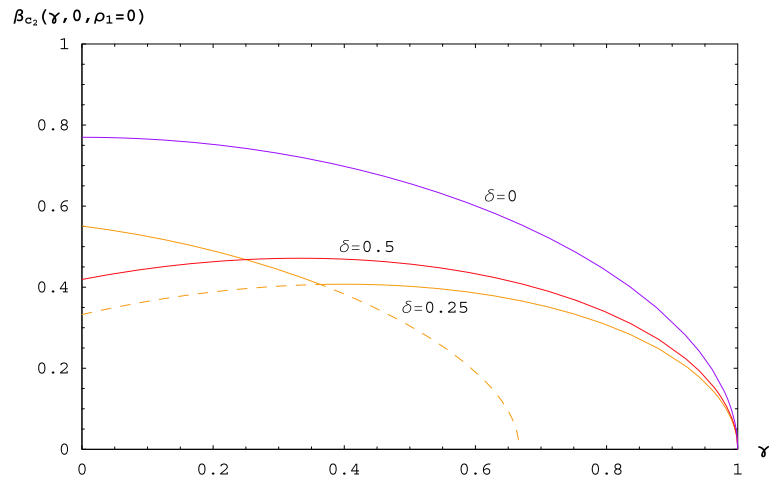


Abbildung 4.5: Darstellung der kritischen Kurve  $\beta(\gamma, \delta, \rho_1 = 0)$  für verschiedene Werte von  $\delta$ .

In unserer Situation ist der Wert von  $\delta$  eine Größe, die kontinuierlich verändert werden kann, während  $m$  ganzzahlig ist. Daher ist nur dann  $m - \delta = 0$ , falls  $\Phi$  ein ganzzahliges Vielfaches des Flußquantens  $\Phi_0$  ist, und es gilt:  $m\Phi_0 = \Phi$ . Im Allgemeinen ist jedoch  $m - \delta \neq 0$ . Da die jeweils höchste Kurve relevant ist, ist  $|m - \delta| < 1$  und  $m - \delta$  liegt zwischen den Werten null für  $\delta = 0, 1, 2, \dots$ , und  $m - \delta = \frac{1}{2}$  für  $\delta = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ . Alle kritischen Kurven mit  $|m - \delta| < \frac{1}{2}$  zeigen einen Knick, vgl. Abbildung 4.5. An dieser Stelle findet ein Übergang von  $m - \delta < 0$  zu  $m - \delta > 0$  statt. Die Stelle für den Knick  $\gamma_k$  berechnet sich aus der Gleichung für die kritische Kurve:

$$\gamma_k = \frac{-1 - 2(m - \delta)}{2(m - \delta)^2 + 2(m - \delta) - 1}. \quad (4.24)$$

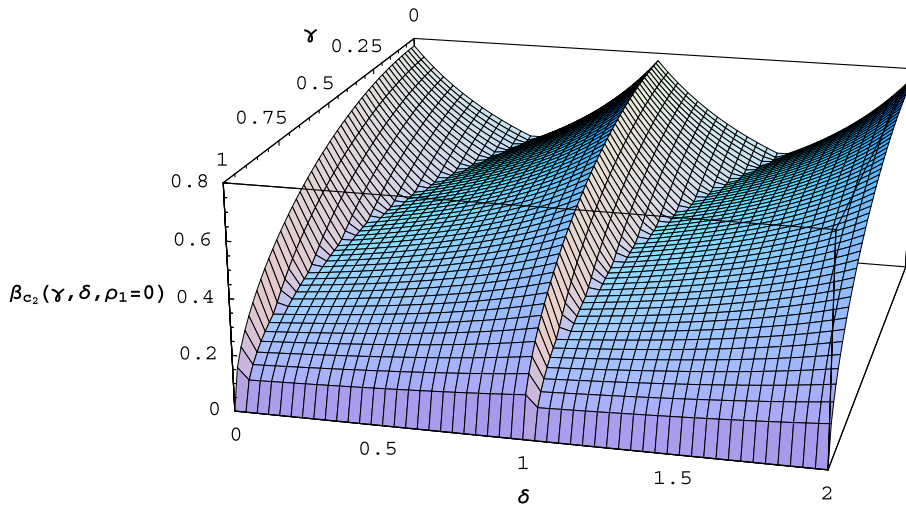


Abbildung 4.6: Dreidimensionale Darstellung der kritischen Kurve  $\beta(\gamma, \delta, \rho_1 = 0)$ .

Die kritische Kurve  $\beta_{c_2}(\gamma, \delta)$  ist in Abb. 4.6 dreidimensional dargestellt. Betrachten wir für den Fall ohne äußeres magnetisches Feld  $\gamma = 0$  das Verhalten des kritischen Stroms bei verschiedenen Einstellungen von  $\delta$ . Die Kurve in Abbildung 4.7 zeigt die periodische Struktur des kritischen Stromes  $\beta_{c_2}(\gamma = 0, \delta)$  und des Variationsparameters  $\alpha(\gamma = 0, \delta)$  in Abhängigkeit vom Fluß. Der kritische Strom wird durch die Vergrößerung des magnetischen Flusses abgesenkt bis etwa auf den halben Wert. Die Supraleitung kann also in einem stromführenden Zylinder allein durch ein Vektorpotential zerstört werden, ohne daß ein Magnetfeld vorhanden ist, sofern der angelegte Strom größer als der halbe Wert des kritischen Stroms  $\beta_{c_2}(0, 0)$  ist. Es ist also möglich, den elektrischen Widerstand des Systems allein durch den angelegten Fluß zu ändern, ohne daß das Magnetfeld am Ort der supraleitenden Fluktuationen geändert wird. Dies ist das zentrale Resultat der vorliegenden Arbeit.

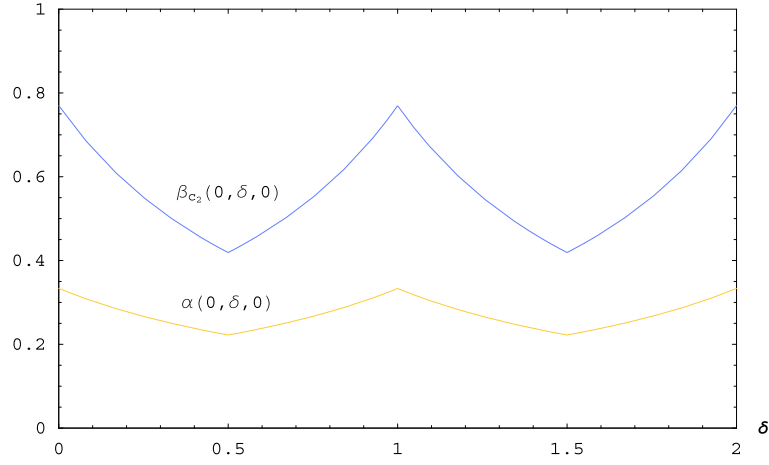


Abbildung 4.7: Kritischer Strom und Variationsparameter für  $\rho_1 = 0$  in Abhängigkeit vom angelegten Fluß für  $\gamma = 0$ .

## 4.2 Strom und magnetischer Fluß

In diesem Abschnitt sollen nun der Suprastrom in  $z$ -Richtung und der durch den Ringstrom verursachte magnetische Fluß berechnet werden. Im Kapitel 3.2 hatten wir in Gleichung (3.41) und (3.42) Ausdrücke für den Strom und den Fluß gefunden, die sich für den Fall des eindimensionalen Mischzustands reduzieren auf:

$$\langle J_z \rangle = \frac{e\Gamma}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \sum_m \int_0^\infty d\tau \sqrt{\tau b} \exp\left[\frac{2\tau}{\varepsilon} \left(\Delta - \frac{\tau^2 b}{24}\right)\right]$$

$$\Phi = \Phi_{\text{dia}} = \frac{-8e\Gamma\xi}{c_0} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \sum_m \int_0^\infty d\tau \frac{a_2}{\sqrt{b\tau}} \exp\left[\frac{2\tau}{\varepsilon} \left(\Delta - \frac{\tau^2 b}{24}\right)\right].$$

Der paramagnetische Anteil des Flußes (3.47) verschwindet aufgrund von  $\rho_1 = 0$  und der oszillierende Anteil (3.46), weil die Koeffizienten  $c$  und  $d$  gleich null sind, vgl. (3.37). In den beiden obigen Ausdrücken kommen die Koeffizienten der Entwicklung von  $\lambda$  um die zweite kritische Kurve vor, vgl. (3.40). In unserem Spezialfall werden wir keine Entwicklung bezüglich  $m$  durchführen, sondern die relevanten  $m$ , die in Kapitel 4.1 bereits diskutiert wurden, in Abhängigkeit vom jeweiligen  $\delta$  getrennt untersuchen. Die Entwicklung von  $\lambda$  hat hier die Form:

$$\lambda_{mk}(\beta, \gamma, \delta) = 1 + \underbrace{a_1 \left(\frac{\beta - \beta_{c2}}{\beta_{c2}}\right) + a_2 \left(\frac{\gamma - \gamma_c}{\gamma_c}\right)}_{=-\Delta \quad (3.44)} + \frac{b}{2} (k - \bar{k}_m)^2 \quad (4.25)$$



mit den Entwicklungsparametern:

$$\begin{aligned} a_1 &= \beta_{c_2} \left. \frac{d\lambda}{d\beta} \right|_{\beta_{c_2}} = \beta_{c_2} \left( \underbrace{\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}}_{=0} \frac{d\alpha}{d\beta} \Big|_{\alpha=\alpha(\bar{k}_m)} + \frac{\partial\lambda}{\partial\beta} \Big|_{\alpha=\alpha(\bar{k}_m)} \right) \\ &= \frac{\beta_{c_2}^2}{8\alpha^2(\bar{k}_m)} (|m - \delta| + 1), \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \gamma_c \left. \frac{d\lambda}{d\gamma} \right|_{\gamma_c} = \gamma_c \left( \underbrace{\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}}_{=0} \frac{d\alpha}{d\gamma} \Big|_{\alpha=\alpha(\bar{k}_m)} + \frac{\partial\lambda}{\partial\gamma} \Big|_{\alpha=\alpha(\bar{k}_m)} \right) \\ &= -(m - \delta) \gamma_c + \frac{\gamma_c^2}{4\alpha} (|m - \delta| + 1), \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} b &= \left. \frac{d^2\lambda}{dk^2} \right|_{\alpha=\alpha(\bar{k}_m)} = \frac{\partial\lambda}{\partial\alpha\partial k} \cdot \frac{d\alpha}{dk} \Big|_{\alpha=\alpha(\bar{k}_m)} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial k^2} \Big|_{\alpha=\alpha(\bar{k}_m)} \\ &= 2 - \frac{\beta_{c_2}^2 (|m - \delta| + 1)}{16\alpha^3 + \frac{\beta_{c_2}^2 (|m - \delta| + 2)}{2}}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Die Koeffizienten hängen vom äußeren Feld und vom magnetischen Fluß ab, d. h. eine graphische Darstellung der Koeffizienten wäre in diesem Fall dreidimensional und daher sehr unübersichtlich. Wir beschränken uns auf die Darstellung des Spezialfalls  $\gamma = 0$  und erhalten in den Abbildungen (4.8) bis (4.10) die Darstellung der drei Koeffizienten in Abhängigkeit vom magnetischen Fluß.

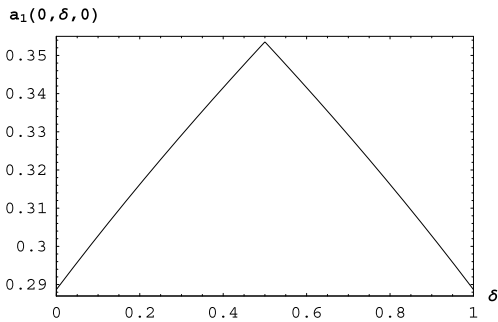


Abbildung 4.8: Koeffizient  $a_1$  in Abhängigkeit vom angelegten Fluß.

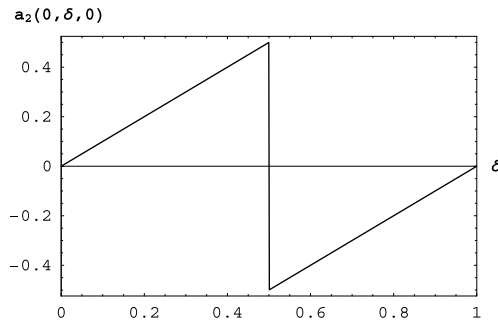


Abbildung 4.9: Koeffizient  $a_2$  in Abhängigkeit vom angelegten Fluß.

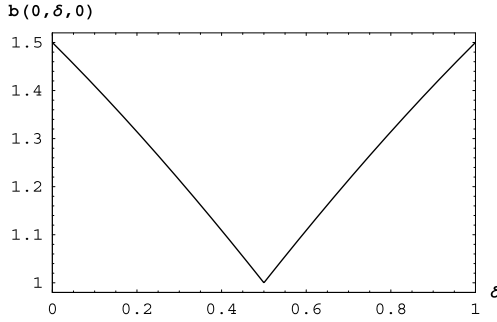


Abbildung 4.10: Koeffizient  $b$  in Abhängigkeit vom angelegten Fluß.

#### 4.2.1 Der magnetische Fluß

In diesem Abschnitt soll nun der magnetische Fluß unter Verwendung der drei Koeffizienten  $a_1$ ,  $a_2$  und  $b$  ausgewertet werden. Es werden dazu drei verschiedene Bereiche betrachtet, für die eine analytische Auswertung möglich ist: Unterhalb der kritischen Kurve, nahe der kritischen Kurve und oberhalb der kritischen Kurve. Das folgende Integral ist dabei zu betrachten:

$$I = \int_0^{\infty} d\tau \frac{1}{\sqrt{\tau}} \exp \left[ \frac{2\Delta\tau}{\varepsilon} - \frac{\tau^3 b}{12\varepsilon} \right]. \quad (4.29)$$

**Unterhalb der kritischen Kurve:**  $\Delta > 0$  und  $|\Delta| \gg \varepsilon^{\frac{2}{3}}$

Dabei ist  $\Delta$  wie bislang definiert als:

$$\Delta = a_1 \left( \frac{\beta_{c_2} - \beta}{\beta_{c_2}} \right) + a_2 \left( \frac{\gamma_c - \gamma}{\gamma_c} \right).$$

Dies bedeutet, daß der Bereich unterhalb der kritischen Kurve betrachtet wird. Die Berechnung des Integrals (4.29) im Ausdruck für den magnetischen Fluß ist mit Hilfe der Sattelpunktmethode möglich.

Die Rechnungen dazu wurden bereits in der Arbeit über den zweidimensionalen Mischzustand [10] durchgeführt und können hier übernommen werden. Allerdings sind in [10] die Parameter  $\Delta$  und  $b$  anders definiert. Als Ergebnis erhalten wir:

$$I \simeq I_1 = \sqrt{\frac{\pi\varepsilon}{2\Delta}} \exp \left[ \frac{8}{3\varepsilon} \sqrt{\frac{2\Delta^3}{b}} \right].$$

Der magnetische Fluß läßt sich damit schreiben als:

$$\Phi \simeq \Phi_1 = \frac{-4eT\xi\pi}{c_0} \sum_m \frac{a_2}{\gamma_c} \sqrt{\frac{2}{b\Delta}} \exp \left[ \frac{8}{3\varepsilon} \Delta^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{2}{b}} \right]. \quad (4.30)$$

**Nähe der kritischen Kurve:**  $|\Delta| \ll \varepsilon^{\frac{2}{3}}$

In diesem Fall kann in dem Ausdruck (4.29) der erste Exponent gegen den zweiten vernachlässigt werden. Das Verhalten des Flusses wird dann auf der kritischen Kurve beschrieben. Das Integral ist in dieser Näherung:

$$I \simeq I_2 = \int_0^{\infty} d\tau \tau^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{-b\tau^3}{12\varepsilon}\right] = \left(\frac{12\varepsilon}{b}\right)^{\frac{1}{6}} \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right).$$

Damit ergibt sich für den Fluß:

$$\Phi \simeq \Phi_2 \frac{-8eT\xi}{c} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \sum_m \frac{a_2}{3\gamma_c \sqrt{b}} \left(\frac{12\varepsilon}{b}\right)^{\frac{1}{6}} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right). \quad (4.31)$$

**Oberhalb der kritischen Kurve:**  $\Delta < 0$  und  $|\Delta| \gg \varepsilon^{\frac{2}{3}}$

In Gleichung (4.29) kann im Exponenten der zweite Term gegen den ersten vernachlässigt werden. Es bleibt das Integral:

$$I \simeq I_3 = \int_0^{\infty} d\tau \tau^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{2|\Delta|\tau}{\varepsilon}\right] = \sqrt{\frac{\pi\varepsilon}{2|\Delta|}}.$$

Der magnetische Fluß ist dann:

$$\Phi \simeq \Phi_3 = \frac{-4\sqrt{2}eT\pi\xi}{c} \sum_m \frac{a_2}{\gamma_c \sqrt{b|\Delta|}}. \quad (4.32)$$

#### 4.2.2 Der Suprastrom in axialer Richtung

In diesem Fall ist das folgende Integral zu betrachten:

$$I' = \int_0^{\infty} d\tau \sqrt{\tau} \exp\left[\frac{2\Delta\tau}{\varepsilon} - \frac{\tau^3 b}{12\varepsilon}\right].$$

**Unterhalb der kritischen Kurve:**  $\Delta > 0$  und  $|\Delta| \gg \varepsilon^{\frac{2}{3}}$

Für diesen Bereich unterhalb der kritischen Kurve liefert die Auswertung des Integrals mit Hilfe der Sattelpunktmethode:

$$\langle J_z \rangle \simeq J_{z1} = 2eT \sum_m \exp\left[\frac{8\Delta}{3\varepsilon} \sqrt{\frac{2\Delta}{b}}\right]. \quad (4.33)$$

**Nahe der kritischen Kurve:**  $|\Delta| \ll \varepsilon^{\frac{2}{3}}$

Auf der kritischen Kurve ergibt sich als Suprastrom in z-Richtung:

$$\langle J_z \rangle \simeq J_{z_2} = 2eT \sum_m \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (4.34)$$

**Oberhalb der kritischen Kurve:**  $\Delta < 0$  und  $|\Delta| \gg \varepsilon^{\frac{2}{3}}$

Oberhalb der kritischen Kurve ergibt sich für den Strom:

$$\langle J_z \rangle \simeq J_{z_3} = \frac{eT\varepsilon}{4\sqrt{2}} \sum_m \frac{\sqrt{b}}{|\Delta|^{\frac{2}{3}}}. \quad (4.35)$$

### 4.3 Interpretation der Ergebnisse

Zuerst sollen die Ergebnisse für den Suprastrom in z-Richtung diskutiert werden. Die Auswertung der Integrale betrifft drei Bereiche: direkt auf der kritischen Kurve, darüber und knapp darunter. Die Gültigkeit der Theorie in diesen Bereichen wird in Kapitel 7 untersucht.

In allen Ausdrücken für den Suprastrom tauchen noch Summationen über die Werte von  $m$  auf. In Kapitel 4.1 wurde schon festgestellt, daß die wesentlichen Beiträge zur kritischen Kurve durch einen oder zwei Werte von  $m$  geliefert werden, so daß sich die Summation für den Suprastrom auf diese beschränken kann:

$$\sum_m \longrightarrow \sum_{m; |m-\delta| < 1}.$$

In den Ausdrücken für den Strom stecken noch die Parameter  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  und  $b$  (Gleichung (4.26) bis (4.28)). Diese wiederum enthalten die Parameter  $\alpha$  und die kritische Kurve  $\beta_{c_2}$ , die jeweils von  $\gamma$  und  $\delta$  abhängen. Es ist also möglich, einen Wert von  $\gamma$  innerhalb des Gültigkeitsbereichs der Theorie einzustellen und dazu einen beliebigen Wert von  $\delta$ . Damit berechnet sich dann der Wert für  $\beta_{c_2}$  und  $\alpha$ , daraus wiederum die Parameter  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  und  $b$  und damit  $\langle J_z \rangle$ . Durch die dargestellten Berechnungen ist also das genaue Verhalten des Suprastroms in der Nähe der kritischen Kurve bekannt.

Es läßt sich aus der Form der Gleichungen (4.33) bis (4.35) schließen, daß der Suprastrom unterhalb der kritischen Kurve exponentiell zunimmt und oberhalb gemäß einem algebraischen Gesetz abnimmt. Für die verschiedenen Bereiche läßt sich das Verhalten des Suprastromes in Abhängigkeit von  $\gamma$  und  $\delta$  als dreidimensionale Kurve darstellen, sofern die Parameter Temperatur und Kohärenzlänge bekannt sind. Allerdings ist es aufgrund der Voraussetzungen nicht möglich, eine gemeinsame Darstellung für  $\langle J_z \rangle$  über alle drei Bereiche anzugeben.

Der Fluß  $\Phi$  hängt, wie anhand der Gleichungen (4.30) bis (4.32) ersichtlich ist, außer von  $b$  und  $\Delta$  noch vom Entwicklungskoeffizienten  $\alpha_2$  ab. Wie schon anhand der kritischen Kurven diskutiert wurde, wechselt das Vorzeichen von  $(m - \delta)$  unter bestimmten Voraussetzungen im Verlauf der kritischen Kurve. Es wird jeweils der Ringstrom mit der Quantenzahl

---

$m$  angeregt, dessen Energie am kleinsten ist. Erhöhen wir beispielsweise ohne äußeres Magnetfeld  $\gamma$  den Fluß  $\delta$ , so wird die Quantenzahl realisiert, für die  $m - \delta$  am kleinsten ist. Das heißt bei ungeradzahligem Vielfachen des halben Flußquantens springt die Quantenzahl  $m$  um eins und das Vorzeichen von  $m - \delta$  ändert sich. Dadurch wechselt auch das Vorzeichen von  $\alpha_2$  (vgl. Abb. 4.9) und damit das Vorzeichen des Flusses  $\Phi$ . Dies entspricht einer Richtungsänderung des Azimutalstroms  $J_\varphi$  im Supraleiter.

## 5 Der zweidimensionale Mischzustand

In diesem Kapitel wird gezeigt, daß der Einfluß eines axialen Flußfadens auf den zweiten kritischen Strom eines Hohlzylinders verschwindet, falls der innere Radius groß im Vergleich zur Kohärenzlänge ist. Die durch die vom Flußfaden erzeugten Abschirmströme nehmen mit  $\frac{1}{\rho_1^2}$  ab.

### 5.1 Eigenwertspektrum und zweite kritische Kurve

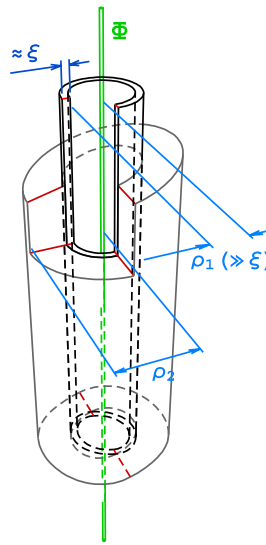


Abbildung 5.1: Supraleitender Hohlzylinder mit großem Innenradius  $\rho_1 \gg \xi$ .

Wir betrachten einen supraleitenden Hohlzylinder, dessen innerer Radius groß gegen die Kohärenzlänge  $\xi$  ist. Die Supraleitung wird in diesem Fall auf eine Schichtdicke der Kohärenzlänge am inneren Zylindermantel zusammengedrängt. Der Abstand zur inneren Oberfläche sei  $x$ , dann ist:

$$\frac{d^2 R_{nmk}}{dx^2} + \frac{1}{\rho_1 + x} \frac{dR_{nmk}}{dx} + \left[ \lambda_{nmk} - \left( \frac{m}{\rho_1 + x} - \frac{\delta}{\rho_1 + x} - \frac{\gamma}{2} \left( \rho_1 + x - \frac{\rho_1^2}{\rho_1 + x} \right) \right)^2 - \left( k + \frac{\beta}{2} \left( (\rho_1 + x)^2 - \rho_1^2 - 2\rho_1^2 \ln \frac{\rho_1 + x}{\rho_1} \right) \right)^2 \right] R_{nmk} = 0. \quad (5.1)$$

In der Näherung  $\frac{x}{\rho_1} \ll 1$  ergibt sich für den Radialteil  $R_{nmk}$  der Wellenfunktion die folgende

Eigenwertgleichung

$$\frac{d^2 R_{nmk}}{dx^2} + \left[ \lambda_{nmk} - (k'_y - \gamma'x)^2 - (k + \beta x^2)^2 \right] R_{nmk} = 0 \quad (5.2)$$

$$\text{mit: } k'_y := \frac{m - \delta}{\rho_1} = k_y - \frac{\delta}{\rho_1} \quad (5.3)$$

$$\gamma' := \frac{m - \delta}{\rho_1^2} + \gamma = \frac{k'_y}{\rho_1} + \gamma. \quad (5.4)$$

Die Größe  $k_y$  ist hier wie in der Arbeit [10] als eine kontinuierliche Größe definiert, die sich im Grenzfall großer  $\rho_1$  aus der Division der diskreten  $m$  durch  $\rho_1$  ergibt:

$$\frac{m}{\rho_1} \longrightarrow k_y. \quad (5.5)$$

Wir gehen wie im eindimensionalen Mischzustand davon aus, daß nur der Grundzustand  $n = 0$  angenommen wird [6]. Zur Lösung von (5.2) machen wir den Ansatz  $R_{0mk}(x) \simeq R_{0mk}^{\text{var}}(x) = c \exp[-\alpha x^2]$  für  $x \geq 0$  mit der Normierung

$$c^2 \int_0^{\infty} dx \rho_1 e^{-2\alpha x^2} = 1. \quad (5.6)$$

Die Ableitung verschwindet an der inneren Grenzfläche  $\left. \frac{d}{dx} R_{0mk}^{\text{var}} \right|_{\rho=\rho_1} = 0$ . Genauso wie im eindimensionalen Mischzustand wird eine Gleichung für  $\lambda$  gefunden, indem wir die Gleichung (5.2) mit  $R_{0mk}^{\text{var}}$  multiplizieren und integrieren:

$$\lambda_{k'_y, k} = \alpha + k'_y{}^2 - k'_y \gamma' \sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha^{-\frac{1}{2}} + \frac{\gamma'^2}{4} \alpha^{-1} + k^2 + \frac{k\beta}{2} \alpha^{-1} + \frac{3}{16} \beta^2 \alpha^{-2}. \quad (5.7)$$

Wir erhalten hier den gleichen Ausdruck für  $\lambda$  wie im zweidimensionalen Mischzustand ohne zusätzlichen Fluß, d. h. bestimmte Ergebnisse können aus [10] direkt übernommen werden, wenn die entsprechenden Größen durch die gestrichenen ( $k'_y$  und  $\gamma'$ ) ersetzt werden. Zur Berechnung der kritischen Kurve benötigen wir die Parameter  $\bar{k}$ ,  $\bar{k}'_y$  und  $\alpha(\bar{k}, \bar{k}'_y)$  im Minimum von  $\lambda$ :

$$\bar{k} = \frac{-\beta}{4\alpha(\bar{k}, \bar{k}'_y)}. \quad (5.8)$$

Der Parameter  $k_y$  tritt sowohl in der neu definierten Größe  $k'_y$  als auch in  $\gamma'$  auf, vgl. (5.3) und (5.4).

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dk_y} \Big|_{k_y=\bar{k}_y} &= \frac{\partial\lambda}{\partial k'_y} \cdot \frac{dk'_y}{dk_y} \Big|_{k_y=\bar{k}_y} + \frac{\partial\lambda}{\partial\gamma'} \cdot \frac{d\gamma'}{dk_y} \Big|_{k_y=\bar{k}_y} = 0 \\ k'_y \left( 2 - \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}} \frac{1}{\rho_1} \right) + \gamma' \left( \frac{1}{2\alpha\rho_1} - \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}} \right) \Big|_{k_y=\bar{k}_y} &= 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

In den Klammern kann jeweils der Term  $\sim \frac{1}{\rho_1}$  gegenüber dem Term der Größenordnung eins vernachlässigt werden. Daher ergibt sich dann:

$$\bar{k}_y = \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi\alpha}} + \frac{\delta}{\rho_1}. \quad (5.10)$$

Aus der Definition von  $\gamma'$  ergibt sich:

$$\bar{\gamma}' = \gamma \left( 1 - \frac{1}{\rho_1 \sqrt{2\pi\alpha}} \right)^{-1}. \quad (5.11)$$

In nullter Näherung in  $\rho_1$  ist damit  $\bar{\gamma}' = \gamma$ .

Die Minimierung bezüglich  $\alpha$  liefert als Gleichung für  $\alpha(\bar{k}, \bar{k}'_y)$  (vgl. [10]):

$$\alpha^3 + \frac{\gamma' \bar{k}'_y}{\sqrt{2\pi}} \alpha^{\frac{3}{2}} - \frac{\bar{k}\beta}{2} \alpha - \frac{\gamma'^2}{4} \alpha - \frac{3}{8} \beta^2 = 0. \quad (5.12)$$

Einsetzen der Bedingungen (5.8) und (5.10) führt auf:

$$\alpha^3(\bar{k}, \bar{k}'_y) - \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \right) \gamma'^2 \alpha(\bar{k}, \bar{k}'_y) - \frac{1}{4} \beta^2(\bar{k}, \bar{k}'_y) = 0 \quad (5.13)$$

$$\text{mit: } \gamma' = \gamma \left( 1 - \frac{1}{\rho_1 \sqrt{2\pi\alpha}} \right)^{-1} \simeq \gamma.$$

Die Bedingung für die kritische Kurve ist  $\lambda_{\bar{k}, \bar{k}'_y} = 1$ , also:

$$\alpha^3(\bar{k}, \bar{k}'_y) - \alpha^2(\bar{k}, \bar{k}'_y) + B' \gamma^2 \alpha(\bar{k}, \bar{k}'_y) + \frac{1}{8} \beta_{c_2}^2 = 0, \quad (5.14)$$

$$\text{wobei } B = \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \right).$$



Aus Gleichung (5.13) und (5.14) erhalten wir, weil gelten muß  $\alpha > 0$  für  $\gamma = 0$ , vgl. (4.15):

$$\alpha(\gamma') = \frac{1}{3} \left( 1 + \sqrt{1 - 3B\gamma'^2} \right). \quad (5.15)$$

Einsetzen in Gleichung (5.13) ergibt die kritische Kurve:

$$\beta_{c_2}(\gamma') = 4 \cdot 3^{-\frac{3}{2}} \left( 1 - \frac{9}{2} B\gamma'^2 + \left( 1 - 3B\gamma'^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.16)$$

Für  $\gamma'$  kann die Gleichung (5.11) in die kritische Kurve eingesetzt werden. In nullter Näherung in  $\frac{1}{\rho_1}$  erhalten wir die gleiche kritische Kurve wie im Fall ohne magnetischen Fluß im Inneren. Diese Kurve stimmt nach entsprechender Skalierung exakt mit der Kurve für den eindimensionalen Mischzustand im Fall  $\delta = 0$  überein, d. h. der Effekt durch den magnetischen Fluß im Inneren verschwindet, wenn der Radius des Hohlzylinders sehr groß gegen die Kohärenzlänge ist. Setzen wir die dimensionsbehafteten Parameter und  $\hbar$  wieder ein, so ergibt sich als zweiter kritischer Strom in Übereinstimmung mit [10]:

$$J_{c_2} \left( \frac{H_a}{H_{c_2}} \right) = \frac{c_0^2 \rho_2^2 \hbar}{e \xi^3} \cdot 3^{-\frac{3}{2}} \left[ 1 - \frac{9}{8} \left( 1 - \frac{2}{\pi} \right) \left( \frac{H_a}{H_{c_2}} \right)^2 + \left( 1 - \frac{3}{4} \left( 1 - \frac{2}{\pi} \right) \left( \frac{H_a}{H_{c_2}} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.17)$$

## 5.2 Strom und magnetischer Fluß

Die Entwicklung der Eigenwerte  $\lambda$  um die kritische Kurve enthält Entwicklungskoeffizienten, die mit Hilfe der Gleichungen aus dem letzten Abschnitt angegeben werden können. Da dort die neuen Variablen  $\gamma'$  und  $k'_y$  eingeführt wurden, soll die Entwicklung ebenfalls bezüglich dieser Parameter durchgeführt werden.

$$\lambda_{k, \bar{k}_y}(\beta, \gamma') = 1 + a_1 \left( \frac{\beta - \beta_{c_2}}{\beta_{c_2}} \right) + a_2 \left( \frac{\gamma' - \gamma'_c}{\gamma'_c} \right) + \frac{b}{2} (k - \bar{k})^2 + c (k - \bar{k}) (k'_y - \bar{k}'_y) + \frac{d}{2} (k'_y - \bar{k}'_y)^2 \quad (5.18)$$

Die Abhängigkeit von  $\delta$  wird in diesem Fall nicht explizit deutlich, sondern steckt in den Parametern  $\gamma'$  und  $k'_y$ .

Die Entwicklungskoeffizienten lauten explizit (k. K.: Abk. für »kritische Kurve«):

$$a_1 = \beta_{c_2} \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} \Big|_{\text{k. K.}} = \frac{\beta_{c_2}^2}{4\alpha^2}, \quad (5.19)$$

$$a_2 = \gamma'_c \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma'} \Big|_{\text{k. K.}} = \frac{2\gamma'^2}{\alpha} B \Big|_{\text{k. K.}} = \frac{2\gamma'^2}{\alpha} B, \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{\partial^2 \lambda}{\partial k^2} \Big|_{\text{k. K.}} = \frac{\partial}{\partial k} \left( \underbrace{\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}}_{=0} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial k} + \frac{\partial \lambda}{\partial k} \right) \Big|_{\text{k. K.}} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial k \partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial k} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial k^2} \Big|_{\text{k. K.}} \\ &= 2 - \frac{2}{7} \left( 1 + \alpha \frac{\gamma'^2}{\beta_{c_2}^2} \left( \frac{4}{7} - \frac{6}{7\pi} \right) \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} c &= \frac{\partial^2 \lambda}{\partial k \partial k'_y} \Big|_{\text{k. K.}} = \frac{\partial}{\partial k} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial k'_y} + \frac{\partial \lambda}{\partial k'_y} \right) \Big|_{\text{k. K.}} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial k \partial k'_y} + \frac{\lambda^2}{\partial k'_y \partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial k} \Big|_{\text{k. K.}} \\ &= \gamma'_c \beta_{c_2} \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \left( \alpha \gamma'^2 \left( 1 - \frac{3}{2}\pi \right) + \frac{7}{4} \beta_{c_2}^2 \right), \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} d &= \frac{\partial^2 \lambda}{\partial k_y'^2} \Big|_{\text{k. K.}} = \frac{\partial}{\partial k'_y} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial k'_y} + \frac{\partial \lambda}{\partial k'_y} \right) \Big|_{\text{k. K.}} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \alpha \partial k'_y} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial k'_y} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial k_y'^2} \Big|_{\text{k. K.}} \\ &= 2 - \left( \frac{7\pi\alpha^2}{\gamma'^2} + 2 - \frac{3}{4}\pi \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Bei der Berechnung von Strom und magnetischem Fluß muß eine Integration  $dk_y$  durchgeführt werden, wobei der Parameter  $k_y$  implizit in  $\gamma'$  und  $k'_y$  enthalten ist. Da der Integrand vom Eigenwert  $\lambda_{k,k_y}$  abhängt, ersetzen wir in der Entwicklung für  $\lambda_{k,k_y}$ , Gleichung (5.18),  $\gamma'$  für große  $\rho_1$  in der Nähe der kritischen Kurve durch

$$\gamma' = \frac{1}{\rho_1} k'_y + \gamma \approx \gamma.$$

$$\begin{aligned} \lambda_{k,k'_y}(\beta, \gamma) &= 1 + a_1 \left( \frac{\beta - \beta_{c_2}}{\beta_{c_2}} \right) + a_2 \left( \frac{\gamma - \gamma_c}{\gamma_c} \right) + \frac{b}{2} (k - \bar{k})^2 \\ &\quad + c (k - \bar{k}) (k'_y - \bar{k}'_y) + \frac{d}{2} (k'_y - \bar{k}'_y)^2 \end{aligned} \quad (5.24)$$

Gleichung (3.33) enthält einen Ausdruck für den Strom in z-Richtung:

$$\langle J_z \rangle = \frac{2eT}{\pi\epsilon} \sum_m \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\partial \lambda_{mkz}}{\partial k} \int_0^{\infty} d\tau \exp \left[ \frac{2}{\epsilon} \left( \tau - \int_{k-\tau}^k \lambda_{nm}(k') dk' \right) \right].$$

Die Ableitung des Ausdrucks (5.24) liefert:

$$\frac{\partial \lambda_{nmk}}{\partial k} = \frac{\partial \lambda_{k,k'_y}}{\partial k} = b(k - \bar{k}) + c(k'_y - \bar{k}'_y). \quad (5.25)$$

Für den Strom ergibt sich also (vgl. Kapitel 3):

$$\langle J_z \rangle = \frac{eT}{\sqrt{\pi\epsilon}} \sum_m \int_0^{\infty} d\tau \sqrt{b\tau} \exp \left[ \frac{1}{\epsilon} \left( 2\tau\Delta - \frac{\tau^3 b}{12} + \tau \frac{c^2 - db}{b} (k'_y - \bar{k}'_y)^2 \right) \right]. \quad (5.26)$$

Dabei ist  $\Delta$  wie bisher die Abkürzung für:

$$\Delta = - \left( a_1 \left( \frac{\beta - \beta_{c2}}{\beta_{c2}} \right) + a_2 \left( \frac{\gamma - \gamma_c}{\gamma_c} \right) \right). \quad (5.27)$$

Die Summation über  $m$  kann in diesem Fall umgewandelt werden in eine Integration:

$$\sum_m \longrightarrow \rho_1 \int_{-\infty}^{\infty} dk_y.$$

Diese Integration vertauscht mit  $\int d\tau$ . Mit der Bedingung  $db > c^2$  ergibt sich:

$$\langle J_z \rangle = \frac{eT\rho_1 b}{\sqrt{db - c^2}} \int_0^{\infty} d\tau \exp \left[ \frac{2\tau\Delta}{\epsilon} - \frac{\tau^3 b}{12\epsilon} \right]. \quad (5.28)$$

Formal stimmt dieses Ergebnis mit den Berechnungen aus [10] überein, die Koeffizienten  $b$ ,  $d$  und  $c$  sind hier allerdings anders definiert. Bei der Berechnung des magnetischen Flusses gehen wir ähnlich vor. Es wird Gleichung (3.34) für den magnetischen Fluß verwendet:

$$\Phi = \frac{8eT\xi}{c_0\epsilon} \sum_m \int_{-\infty}^{\infty} dk \left( -\frac{\partial \lambda_{mk}}{\partial \gamma} + \frac{\rho_1^2}{2} \frac{\partial \lambda_{mk}}{\partial m} \right) \int_0^{\infty} d\tau \exp \left[ \frac{2}{\epsilon} \left( \tau - \int_{k-\tau}^k \lambda_m(k') dk' \right) \right].$$

Mit (5.24) erhalten wir:

$$\left( -\frac{\partial \lambda_{mk}}{\partial \gamma} + \frac{\rho_1^2}{2} \frac{\partial \lambda_{mk}}{\partial m} \right) = -a_2 + \frac{c\rho_1}{2} (k - \bar{k}) + \frac{d\rho_1}{2} (k'_y - \bar{k}'_y).$$

Nach Ausführung der Integrale  $dk'$ ,  $dk$  und der Umwandlung der Summation über  $m$  in eine Integration über  $k_y$  ergibt sich:

$$\Phi = \frac{8eT\xi\rho_1}{c_0\varepsilon} \int dk_y \int_0^\infty d\tau \sqrt{\frac{\pi\varepsilon}{b}} \left( \frac{\rho_1 c \sqrt{\tau}}{4} - \frac{\rho_1 (c^2 - db)}{2b\sqrt{\tau}} (k'_y - \bar{k}'_y) - \frac{a_2}{\sqrt{\tau}} \right) \cdot \exp \left[ \frac{2\tau\Delta}{\varepsilon} - \frac{\tau^3 b}{12\varepsilon} + \frac{\tau(c^2 - db)}{\varepsilon b} \right]. \quad (5.29)$$

Zunächst können wir den Term proportional zu  $a_2$  gegenüber den Termen proportional zu  $\rho_1$  vernachlässigen, weil  $\rho_1 \gg 1$  ist. Die Integration  $dk_y$  führt zum Verschwinden des Terms proportional zu  $(k'_y - \bar{k}'_y)$ . Es bleibt also nur der paramagnetische Anteil des Flusses:

$$\Phi = \Phi_{\text{para}} = \frac{2eT\pi\xi\rho_1}{c_0} \sqrt{\frac{1}{db - c^2}} \int_0^\infty d\tau c\rho_1 \exp \left[ \frac{2\tau\Delta}{\varepsilon} - \frac{\tau^3 b}{12\varepsilon} \right]. \quad (5.30)$$

Die Integrationen  $d\tau$  können für die verschiedenen Bereiche oberhalb, auf und unterhalb der kritischen Kurve ausgewertet werden, vgl. Kapitel 4.

**Unterhalb der kritischen Kurve:**  $\Delta > 0$  und  $|\Delta| \gg \varepsilon^{\frac{2}{3}}$

Dieses ist der Bereich unterhalb der kritischen Kurve, der mit der Sattelpunktmethode ausgewertet wird.

$$\langle J_z \rangle = J_{z_1} = \frac{2eT\rho_1 b}{\sqrt{db - c^2}} \sqrt{\pi\varepsilon} \left( \frac{2}{b\Delta} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left[ \frac{8}{3\varepsilon} \sqrt{\frac{2}{b}} \Delta^{\frac{3}{2}} \right] \quad (5.31)$$

$$\Phi = \Phi_1 = \frac{2eT\pi\xi\rho_1^2}{c_0} \frac{c}{\sqrt{db - c^2}} \sqrt{\pi\varepsilon} \left( \frac{2}{b\Delta} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left[ \frac{8}{3\varepsilon} \sqrt{\frac{2}{b}} \Delta^{\frac{3}{2}} \right] \quad (5.32)$$

**Nahe der kritischen Kurve:**  $|\Delta| \ll \varepsilon^{\frac{2}{3}}$

In diesem Bereich nahe der kritischen Kurve wird der erste Term im Exponenten gegen den zweiten vernachlässigt.

$$\langle J_z \rangle = J_{z_2} = \frac{eT\rho_1 b^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{db - c^2}} \left( \frac{2}{3} \right)^{\frac{2}{3}} \varepsilon^{\frac{1}{3}} \Gamma \left( \frac{1}{3} \right) \quad (5.33)$$

$$\Phi = \Phi_2 = \frac{2eT\pi\xi\rho_1^2}{c_0} \frac{c}{\sqrt{db - c^2}} \left( \frac{2}{3} \right)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{\varepsilon}{b} \right)^{\frac{1}{3}} \Gamma \left( \frac{1}{3} \right) \quad (5.34)$$

**Oberhalb der kritischen Kurve:**  $-\Delta \gg \varepsilon^{\frac{2}{3}}$

In diesem Bereich oberhalb der kritischen Kurve wird der zweite Term im Exponenten gegen den ersten vernachlässigt.

$$\langle J_z \rangle = J_{z_3} = \frac{2eT\rho_1 b}{\sqrt{db - c^2}} \frac{\varepsilon}{2|\Delta|} \quad (5.35)$$

$$\Phi = \Phi_3 = \frac{2eT\pi\xi\rho_1^2}{c_0} \frac{c}{\sqrt{db - c^2}} \frac{\varepsilon}{2|\Delta|} \quad (5.36)$$

Die Auswertung der Ausdrücke

$$\frac{b^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{db - c^2}}, \quad \frac{b^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt{db - c^2}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\sqrt{db - c^2}}$$

mit (5.21), (5.22) und (5.23) entlang der kritischen Kurve zeigt, daß sie nicht stark variieren. Das Verhalten des Flußes  $\Phi$  wird daher direkt vom Koeffizienten  $c$  bestimmt, für den nach Gl. (5.22) gilt:

$$c = \gamma'_c \beta_{c_2} \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \left( \alpha \gamma_c'^2 \left( 1 - \frac{3}{2}\pi \right) + \frac{7}{4}\beta_{c_2}^2 \right).$$

Für den speziellen Fall  $\gamma = 0$  ist  $\gamma' = \frac{m-\delta}{\rho_1^2}$ . Damit ist der magnetische Fluß  $\Phi$  proportional zu  $(m - \delta)$ , d. h. der magnetische Fluß zeigt die erwartete periodische Abhängigkeit vom angelegten Fluß im Inneren.  $\Phi$  hängt nicht mehr vom Innenradius des Zylinders ab, während der Abschirmstrom  $J_\varphi$  wie  $\frac{1}{\rho_1^2}$  abnimmt. Somit verschwindet dessen Einfluß auf den zweiten kritischen Strom für  $\rho_1 \rightarrow \infty$ , vgl. Gl. (5.17), und die kritische Kurve ist nicht mehr vom Fluß im Inneren des Hohlzylinders abhängig.

## 6 Der Übergangsmischzustand

In diesem Kapitel entwickeln wir unter Benutzung des Skalenverhaltens der kritischen Kurve ein Interpolationsverfahren zwischen ein- und zweidimensionalem Mischzustand. Mit dessen Hilfe wird gezeigt, wie der Einfluß eines Flußfadens auf den zweiten kritischen Strom bei zunehmendem Innenradius abnimmt. Ist der innere Radius von der Größenordnung der Kohärenzlänge, so sind der dia- und paramagnetische Antwortterm etwa gleich groß. Der oszillierende Anteil wird relevant. Der Flußfaden bewirkt in diesem Fall eine Phasenverschiebung der magnetischen Oszillationen.

### 6.1 Magnetische Oszillationen

In den letzten beiden Kapiteln haben wir gesehen, daß für  $\rho_1 = 0$  nur der diamagnetische, für  $\rho_1 \gg 1$  nur der paramagnetische Anteil des Flusses eine Rolle spielt. Der Effekt durch den Flußfaden  $\delta$  im Inneren des Zylinders war für  $\rho_1 = 0$  groß und hatte insbesondere Auswirkungen auf den Verlauf der kritischen Kurve. Für  $\rho_1 \gg 1$  verschwand dieser Effekt, wie in Kapitel 5 diskutiert wurde. Eine Realisierung dieses Phänomens im Experiment wird immer die Bohrung eines endlichen Loches erfordern, so daß sich die Frage stellt, welche Auswirkungen dies auf den gefundenen Effekt hat. Insbesondere müssen in diesem Fall andere Randbedingungen berücksichtigt werden, und man muß zunächst davon ausgehen, daß alle drei Anteile des Flusses relevant werden, insbesondere also auch  $\Phi_{\text{osz}}$ .

Ist in dem Supraleiter ein Loch vorhanden, in dem sowohl der Flußfaden  $\Phi$  als auch das magnetische Feld  $H_a$  verlaufen, so tragen beide Teile zum Bohm-Aharonov-Effekt bei. Wie im letzten Kapitel gezeigt, überwiegt der Anteil für das Magnetfeld denjenigen für den Flußfaden für große  $\rho_1$ , so daß wir auch in diesem Kapitel den Spezialfall  $\gamma = 0$  getrennt untersuchen werden.

In der Übergangssituation werden solche  $\rho_1$  untersucht, die von der Größenordnung eins sind. In diesem Fall sind paramagnetischer und diamagnetischer Anteil des Flusses beide ungleich null. Sie besitzen ein entgegengesetztes Vorzeichen, sind aber von der gleichen Größenordnung. Es wird daher nur der Fluß  $\Phi_{\text{osz}}$  betrachtet, der in Abhängigkeit von  $\rho_1$  und  $\gamma$  ein oszillatorisches Verhalten zeigt.

#### 6.1.1 Eigenwertgleichung

Im zweidimensionalen Mischzustand entspricht jedem  $\gamma'$  ein bestimmtes  $\bar{k}'_y$  und damit ein bestimmtes  $\bar{m}$ , das gegeben ist durch Gleichung (5.10):

$$\bar{m} = \delta + \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi\alpha}} \rho_1 .$$

Sei  $m_0$  die ganze Zahl, die den kleinsten Abstand zu  $\bar{m}$  hat. Die relevante kritische Kurve  $\beta_{c_2}(m_0)$  wechselt somit in Abhängigkeit von  $\delta$  und  $\gamma$  und insgesamt ergibt sich die kritische

Kurve als die Einhüllende der einzelnen Kurven. Dabei variiert  $m_0$  von  $m_0 = 0$  für ( $\gamma = \delta = 0$ ) bis zu einem maximalen Wert für  $\gamma = \gamma_{c_2}$  und  $\delta = \delta_c$ , wobei  $\gamma_{c_2}$  definiert ist als derjenige Wert des magnetischen Feldes, für den  $\beta_{c_2} = 0$  wird.  $\delta_c$  ist der äußere magnetische Fluß, für den der kritische Strom bei gegebenem  $\gamma$  am kleinsten ist.

Im Grenzfall großer  $\rho_1$  werden die kritischen Kurven dichter beieinander liegen. Dabei trägt nicht nur  $m_0 = m_0(\gamma, \delta)$  zu den Fluktuationen bei sondern auch benachbarte  $m$ . Im Grenzfall führt das zu einer Integration über  $k_y = \frac{m}{\rho_1}$ , wobei diejenigen  $k_y$ , die in der Nähe von  $\bar{k}_y = \frac{\bar{m}}{\rho_1}$  liegen, den größten Beitrag liefern. Vorteilhaft für die weitere Argumentation ist es, einen allgemeinen Ausdruck für  $\bar{m}$ , ohne Näherungen für den ein- oder zweidimensionalen Mischzustand, zu besitzen. Aus der Eigenwertgleichung für den Radialteil  $R_{nmk}$  (3.22) ergibt sich unter der Annahme, daß wieder nur der Grundzustand  $n = 0$  angenommen wird:

$$\begin{aligned} \lambda_{mk} = & k^2 + k\beta \left\langle \rho^2 - \rho_1^2 - 2\rho_1^2 \ln \frac{\rho}{\rho_1} \right\rangle_{mk} + \frac{\beta^2}{4} \left\langle \left( \rho^2 - \rho_1^2 - 2\rho_1^2 \ln \frac{\rho}{\rho_1} \right)^2 \right\rangle_{mk} \\ & + (m - \delta)^2 \left\langle \frac{1}{\rho^2} \right\rangle_{mk} - (m - \delta) \gamma \left( 1 - \rho_1^2 \left\langle \frac{1}{\rho^2} \right\rangle_{mk} \right) + \frac{\gamma^2}{4} \left\langle \left( \rho - \frac{\rho_1^2}{\rho} \right)^2 \right\rangle_{mk} \\ & - \left\langle \left( \frac{d^2 R_{mk}}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dR_{mk}}{d\rho} \right) R_{mk}^{-1} \right\rangle_{mk}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\text{wobei} \quad \langle (\dots) \rangle_{mk} = \int_{\rho_1}^{\infty} (\dots) \rho \, d\rho R_{mk}^2(\rho).$$

Als Variationsansatz, der Normierungs- und Randbedingungen erfüllt, wählen wir wie in [10]:

$$R_{mk}(\rho) = 2 \sqrt{\frac{\alpha}{1 + \rho_1 \sqrt{2\pi\alpha}}} \exp[-\alpha(\rho - \rho_1)^2]. \quad (6.2)$$

Nicht alle Integrale, die sich beim Einsetzen in den Ausdruck (6.1) ergeben, sind explizit berechenbar. Daher ist es nicht möglich, einen einfachen analytischen Ausdruck für  $\lambda_{mk}(\rho_1)$  anzugeben. Somit lassen sich auch keine analytischen Ausdrücke für den Variationsparameter  $\alpha$  und die kritische Kurve finden, wie das beim eindimensionalen und zweidimensionalen Mischzustand der Fall war. Zur Bestimmung eines allgemeinen  $\bar{m}$  gehen wir auf andere

Weise vor:

$$\left. \frac{\partial \lambda_{mk}}{\partial m} \right|_{\bar{k}\bar{m}} = 2(\bar{m} - \delta) \left\langle \frac{1}{\rho^2} \right\rangle_{mk} - \gamma \left( 1 - \rho_1^2 \left\langle \frac{1}{\rho^2} \right\rangle_{mk} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \bar{m} = \delta - \frac{\gamma \rho_1^2}{2} + \frac{\gamma}{2} \frac{1 + \rho_1 \sqrt{2\pi\alpha}}{4\alpha} \left( \int_0^\infty dx \frac{e^{-x^2}}{x + \sqrt{2\alpha}\rho_1} \right)^{-1} \quad (6.3)$$

$$= \delta_\Phi + \frac{\gamma}{2} \frac{1 + \rho_1 \sqrt{2\pi\alpha}}{4\alpha} \left( \int_0^\infty dx \frac{e^{-x^2}}{x + \sqrt{2\alpha}\rho_1} \right)^{-1}. \quad (6.4)$$

Dabei ist  $x = \sqrt{2\alpha}(\rho - \rho_1)$ . Die Gleichung zeigt die Abhängigkeit des minimalen Wertes  $\bar{m}$  von  $\rho_1$ ,  $\gamma$  und  $\delta$ . Da der Parameter  $\delta = \delta_\Phi + \delta_{H_a}$  für den magnetischen Fluß die Summe aus dem inneren Flußfaden  $\delta_\Phi$  und dem Fluß  $\delta_{H_a} = \frac{\gamma \rho_1^2}{2}$  durch das Feld  $H_a$  ist, bleibt im Ausdruck für  $\bar{m}$  nur der Anteil durch den Flußfaden. Dieses Ergebnis ist konsistent zum Ergebnis der Arbeit [10], die ein magnetisches Feld  $H_a = 0$  im Inneren des Supraleiters vorausgesetzt hat. Unser Ansatz für  $m$  liefert im Grenzfall großer  $\rho_1$  ein Ergebnis, das mit dem in Kapitel 6 berechneten  $\bar{m}$  übereinstimmt.

### 6.1.2 Oszillierender Anteil des magnetischen Flusses

Der oszillierende Anteil des Flusses besitzt generell die folgende Form, vgl. (3.46):

$$\Phi_{osz} = \sum (m - \bar{m}) f_m. \quad (6.5)$$

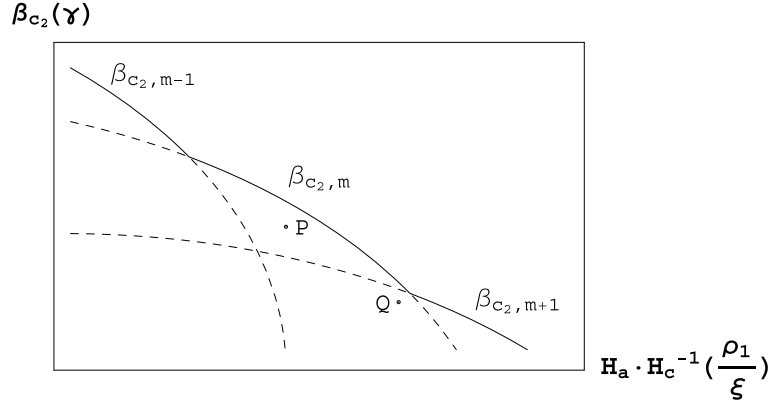
Dabei ist  $f_m$  gegeben durch

$$f_m = \frac{4\varepsilon T \xi}{c_0} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \int_0^\infty d\tau \tau^{-\frac{1}{2}} \frac{db - c^2}{b^{\frac{3}{2}}} \exp \left[ \frac{2\tau}{\varepsilon} \left( \Delta - \frac{\tau^2 b}{24} \right) \right]$$

mit  $\Delta$  aus (3.44).

Den größten Beitrag zum Fluß  $\Phi_{osz}$  liefert der Summand  $m_0$ , die anderen Summanden können gegen diesen Beitrag vernachlässigt werden. Die Erklärung liefert ein Blick auf die kritischen Kurven. Im zweidimensionalen Mischzustand entspricht jedem  $\gamma, \delta$  ein bestimmtes  $\bar{k}_y$  und damit ein  $\bar{m}$ . Daher wird bei etwas kleinerem  $\rho_1$  ein Zustand vorliegen, welcher der Abbildung (6.1) entspricht. Die kritischen Kurven für die verschiedenen  $m$  liegen übereinander. Für bestimmte Punkte unterhalb der kritischen Kurve liefert ein  $m$  den Hauptbeitrag zu den Fluktuationen, beispielsweise in Punkt P. In anderen Punkten liefern zwei  $m$  gleichgroße Beiträge, etwa in Punkt Q. Das sind Punkte, in denen sich zwei Kurven kreuzen. Die



Abbildung 6.1: Skizze der kritischen Kurve  $\beta_{c_2}(\gamma)$  im Übergangsmischzustand.

effektive kritische Kurve ist die Einhüllende der gezeigten kritischen Kurven, zusammengesetzt aus Kurven mit verschiedenem  $m$ . Liegt also ein  $\bar{m}$  vor, das ungefähr halbzahlrig ist,  $|\bar{m} - m_0 + \frac{1}{2}| \ll 1$ , so werden beide Beiträge zum Oszillationsfluß gleich groß mit umgekehrtem Vorzeichen.  $\Phi_{\text{osz}}$  zeigt das gleiche oszillatorische Verhalten wie in [10]:

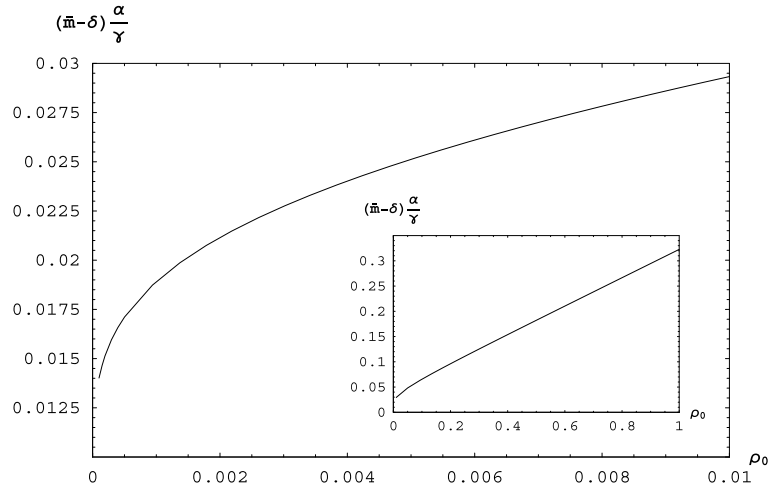
$$\Phi_{\text{osz}} = \begin{cases} 0 & , \quad \bar{m} = m_0 \\ 0 & , \quad \bar{m} = m_0 + \frac{1}{2} \\ (m_0 - \bar{m}) f_{m_0} & , \quad |\bar{m} - m_0| \ll 1 \\ (m_0 - \bar{m}) f_{m_0} + (m_0 + 1 - \bar{m}) f_{m_0+1} & , \quad m_0 + \frac{1}{2} - \bar{m} \ll 1 \\ (m_0 - \bar{m}) f_{m_0} + (m_0 - 1 - \bar{m}) f_{m_0-1} & , \quad \bar{m} - (m_0 - \frac{1}{2}) \ll 1 . \end{cases} \quad (6.6)$$

Die letzten beiden Bedingungen führen dazu, daß die Sägezahnfunktion abgerundet wird, denn die Beiträge der Fluktuationen der kritischen Kurven, die unterhalb der Einhüllenden liegen, sind schon relativ klein geworden. Die Funktion des oszillierenden Flusses wird durch eine Sinusfunktion genähert, die das lineare Verhalten in der Nähe der ganzzahligen Werte von  $\bar{m}$  wiedergibt, was einem ersten Term in einer Fourierreihe entspricht:

$$\Phi_{\text{osz}} = -\frac{1}{2\pi} \sin(2\pi\bar{m}) f_{m_0} . \quad (6.7)$$

Das zugehörige  $\bar{m} = \bar{m}(\gamma, \delta, \rho_1)$  wurde in Gleichung (6.3) angegeben; es läßt sich schreiben als:

$$\bar{m} - \delta = \frac{\gamma}{8\alpha} \left[ (1 + \rho_0 \sqrt{\pi}) \left( \int_0^\infty dx \frac{e^{-x^2}}{x + \rho_0} \right)^{-1} - 2\rho_0^2 \right] . \quad (6.8)$$

Abbildung 6.2:  $(\bar{m} - \delta) \frac{\alpha}{\gamma}$  aufgetragen gegen  $\rho_0$ .

Dabei ist  $\rho_0 = \sqrt{2\alpha}\rho_1$  und der Variationsparameter  $\alpha(\gamma, \delta, \rho_1)$  ein allgemeiner Parameter für beliebiges  $\rho_1$ . Trägt man  $(\bar{m} - \delta) \frac{\alpha}{\gamma}$  gegen  $\rho_0$  auf, so ergibt sich die annähernde Gerade in Abbildung (6.2). Für  $\rho_0$  groß genug gilt somit:

$$\begin{aligned} (\bar{m} - \delta) \frac{\alpha}{\gamma} &\simeq \left( 0.04 + \frac{\rho_0}{2\sqrt{\pi}} \right) \\ \implies \bar{m} &\simeq \delta + \frac{\rho_1 \gamma}{\sqrt{2\pi\alpha}} . \end{aligned} \quad (6.9)$$

Der zweidimensionale Mischzustand ist also für  $\sqrt{\alpha}\rho_1 \gg 0.1$  eine gute Näherung für  $\bar{m}$ .

### 6.1.3 Interpolationsverfahren

Variationsparameter und kritische Kurve zeigen im Fall ohne zusätzlichen Fluß ein universelles Verhalten, d. h. bei entsprechender Normierung stimmen die Kurven für verschiedene  $\rho_1$  exakt überein. Wir haben in Kapitel 5 gezeigt, daß die kritische Kurve und der Variationsparameter im zweidimensionalen Mischzustand für  $\rho_1 \rightarrow \infty$  die gleichen Ausdrücke wie im zweidimensionalen Mischzustand ohne  $\delta$  zeigen. Somit wird die Form einer universellen Kurve erhalten bleiben.

$$\alpha(\gamma, \delta, \rho_1 = \infty) = \frac{1}{3} \left( 1 + \sqrt{1 - \left( 3 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \right) \right) \gamma^2} \right) . \quad (6.10)$$

Wir definieren wieder:

$$\tilde{\gamma}(\rho_1 = \infty) = \gamma \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{H_a}{H_{c_3}}, \quad \tilde{\gamma}(\rho_1 = 0) = \gamma = \frac{H_a}{H_{c_2}}.$$

Damit erhalten wir als universelle Kurve im zweidimensionalen Mischzustand:

$$\tilde{\alpha}(\tilde{\gamma}, \delta, \rho_1 = \infty) = \frac{\alpha(\tilde{\gamma}, \delta, \rho_1 = \infty)}{\alpha(0, \delta, \rho_1 = \infty)} = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{3}{4}\tilde{\gamma}^2}\right). \quad (6.11)$$

Im eindimensionalen Mischzustand ist hingegen:

$$\tilde{\alpha}(\tilde{\gamma}, \delta, \rho_1 = 0) = \frac{\alpha(\tilde{\gamma}, \delta, \rho_1 = 0)}{\alpha(0, \delta, \rho_1 = 0)} = (1 + (m - \delta)\tilde{\gamma}) \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{3}{4}\tilde{\gamma}^2}\right). \quad (6.12)$$

Dabei ist:

$$\tilde{\gamma}(\rho_1) = \begin{cases} \frac{\tilde{\gamma}(\rho_1 = 0) [|\mathbf{m} - \delta| + 1]}{1 + [|\mathbf{m} - \delta|] \tilde{\gamma}(\rho_1 = 0)}, & \rho_1 = 0 \\ \tilde{\gamma}(\rho_1 = \infty) & , \quad \rho_1 = \infty. \end{cases} \quad (6.13)$$

Der Variationsparameter für beliebiges  $\rho_1$  hat nicht mehr die einfache Gestalt wie in der Arbeit [10]. Wir setzen in Anlehnung an diese Arbeit für die Parameter  $\tilde{\gamma}$  an:

$$\tilde{\gamma}(\rho_1) = \frac{H_a}{H_c(\rho_1)}, \quad (6.14)$$

dabei ist

$$H_c(\rho_1) = H_{c_2} + \frac{\rho_1}{\rho_1 + \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}} (H_{c_3} - H_{c_2})$$

und außerdem gelte für  $\tilde{\gamma}$ :

$$\tilde{\gamma}(\tilde{\gamma}(\rho_1), \delta, \rho_1) = \tilde{\gamma}(\tilde{\gamma}, \delta, \rho_1 = 0) + \frac{\rho_1}{\rho_1 + \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}} [\tilde{\gamma}(\tilde{\gamma}, \delta, \rho_1 = \infty) - \tilde{\gamma}(\tilde{\gamma}, \delta, \rho_1 = 0)]. \quad (6.15)$$

Allgemein ist dann

$$\alpha(\tilde{\gamma}(\rho_1), \delta, \rho_1) = \alpha(0, \delta, \rho_1) \cdot f(\tilde{\gamma}(\rho_1, \delta = 0), \delta, \rho_1) \cdot \tilde{\alpha}(\tilde{\gamma}(\rho_1), \delta) \quad (6.16)$$

und dabei ist:

$$\alpha(0, \delta, \rho_1) = \alpha(0, \delta, 0) + \frac{\rho_1}{\rho_1 + \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}} [\alpha(0, \delta, \infty) - \alpha(0, \delta, 0)] \quad (6.17)$$

$$f(\tilde{\gamma}, \delta, \rho_1) = (1 + (m - \delta)\tilde{\gamma}) - \frac{\rho_1}{\rho_1 + \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}} (m - \delta)\tilde{\gamma}. \quad (6.18)$$

Für die kritische Kurve können wir sehr ähnlich vorgehen. Die Kurve im zweidimensionalen Mischzustand ist ebenfalls unabhängig von  $\rho_1$  und  $\delta$ .

$$\beta_{c_2}(\gamma) = 4 \cdot 3^{-\frac{3}{2}} \left( 1 - \frac{9}{2} B \gamma^2 + \left( 1 - 3B \gamma^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Dabei ist

$$B = \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \right) \quad \text{und} \quad \beta_{c_2}(0) = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Die universelle Form ist dann:

$$\bar{\beta}(\bar{\gamma}) = \frac{\beta_{c_2}(\bar{\gamma})}{\beta_{c_2}(0)} = \left( \frac{1}{2} - \frac{9}{16} \bar{\gamma}^2 + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{3}{4} \bar{\gamma}^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.19)$$

Im eindimensionalen Mischzustand hat man:

$$\beta_{c_2}(\gamma) = 4 \left( A^3 \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{48A^2}} \right)^3 - \frac{A\gamma^2}{16} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{48A^2}} \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dabei ist

$$A = \frac{1 + (m - \delta)\gamma}{6(|m - \delta| + 1)} \quad \text{und} \quad \beta_{c_2}(0) = \frac{4}{3\sqrt{3}} (|m - \delta| + 1)^{-\frac{3}{2}}.$$

$$\bar{\beta}(\bar{\gamma}(0), \delta, \rho_1 = 0) = \frac{\beta(\bar{\gamma}, \delta, 0)}{\beta(0, \delta, 0)} = (1 + (m - \delta) \bar{\gamma})^{\frac{3}{2}} \left( \frac{1}{2} - \frac{9}{16} \bar{\gamma}^2 + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{3}{4} \bar{\gamma}^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.20)$$

Die allgemeine kritische Kurve hat dann die Form:

$$\beta_{c_2}(\bar{\gamma}(\rho_1), \delta, \rho_1) = \beta_{c_2}(0, \delta, \rho_1) \cdot f(\bar{\gamma}(\rho_1), \delta, \rho_1) \cdot \bar{\beta}_{c_2}(\bar{\gamma}(\bar{\gamma}, \delta, \rho_1)) \quad (6.21)$$

und dabei ist

$$\beta(0, \delta, \rho_1) = \beta(0, \delta, 0) + \frac{\rho_1}{\rho_1 + \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}} [\beta(0, \delta, \infty) - \beta(0, \delta, 0)] \quad (6.22)$$

$$f(\bar{\gamma}, \delta, \rho_1) = (1 + (m - \delta) \bar{\gamma})^{\frac{3}{2}} - \frac{\rho_1}{\rho_1 + \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}} \left( 1 - (1 + (m - \delta) \bar{\gamma})^{\frac{3}{2}} \right). \quad (6.23)$$

Mit diesen Interpolationsformeln können nun die Werte des Variationsparameters und der kritischen Kurve für beliebiges  $\rho_1$  angegeben werden.

## 6.2 Strom und Fluß im Übergangsmischzustand

Um die Ausdrücke für Strom und magnetischen Fluß auswerten zu können, werden die drei Bereiche  $\Delta \gg \varepsilon^{\frac{2}{3}}$ ,  $|\Delta| \ll \varepsilon^{\frac{2}{3}}$  und  $\Delta < 0$ ,  $|\Delta| \gg \varepsilon^{\frac{2}{3}}$  um die kritische Kurve betrachtet. Die Ergebnisse der Rechnungen können wir aus der Arbeit [10] übernehmen, wobei aber die Koeffizienten der Entwicklung von  $\lambda$  anders definiert sind. Es ist demnach

$$\langle I_z \rangle = eT \begin{cases} 2 \exp \left[ \frac{8}{3\varepsilon} \sqrt{\frac{2}{b}} \Delta^{\frac{3}{2}} \right], & \Delta \gg \varepsilon^{\frac{2}{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}}, & |\Delta| \ll \varepsilon^{\frac{2}{3}} \\ \varepsilon |\Delta|^{-\frac{3}{2}} 2^{-\frac{5}{2}} \sqrt{b}, & \Delta < 0, \quad |\Delta| \gg \varepsilon^{\frac{2}{3}}. \end{cases} \quad (6.24)$$

Die Entwicklungskoeffizienten  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  und  $b$ , die hier vorkommen, müssen wir für beliebiges  $\rho_1$  angeben. Im Falle des Koeffizienten  $\alpha_1$  ist diese Form relativ einfach zu finden:

$$\alpha_1 = \frac{2 \tilde{\gamma} \bar{\beta}_{c_2}^2(\tilde{\gamma})}{3 \tilde{\gamma} \bar{\alpha}^2(\tilde{\gamma})}. \quad (6.25)$$

Für den Koeffizienten  $\alpha_2$  läßt sich die folgende Darstellung finden:

$$\alpha_2 = f_1(\delta, \rho_1) \frac{3}{4} \frac{\tilde{\gamma}^2}{\bar{\alpha}(\tilde{\gamma})} + f_2(\delta, \rho_1), \quad (6.26)$$

mit

$$f_1 = ((m - \delta) \tilde{\gamma} + 1) + \frac{\rho_1}{\rho_1 + \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}} (m - \delta) \tilde{\gamma},$$

$$f_2 = (m - \delta) \tilde{\gamma} \left( \frac{\rho_1}{\rho_1 + \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}} - 1 \right).$$

Für den Koeffizienten  $b$  hat man die Darstellung:

$$b = 2 - \left( f_3 \frac{\bar{\alpha}^3(\tilde{\gamma})}{\bar{\beta}^2(\tilde{\gamma})} + f_4 + \frac{1}{2} \right)^{-1}, \quad (6.27)$$

wobei

$$f_3 = \frac{1}{(|m - \delta| + 1)} + \frac{\rho_1}{\rho_1 + \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}} \left( 3 + \frac{3 - \pi}{\pi - 2} - \frac{1}{(|m - \delta| + 1)} \right),$$

$$f_4 = \frac{1}{2(|m - \delta| + 1)} + \frac{\rho_1}{\rho_1 + \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}} \left( -\frac{3 - \pi}{\pi - 2} - \frac{1}{2(|m - \delta| + 1)} \right).$$

Die Koeffizienten hängen jetzt noch von den Größen  $\bar{\gamma}$ ,  $\delta$  und  $\rho_1$  ab, sie sind also aufgrund der Interpolationsformeln (6.16) und (6.21) prinzipiell für jeden zulässigen Wert berechenbar. Genauso lassen sich die verschiedenen Anteile des Flusses für die drei Bereiche berechnen. Wir benötigen dazu noch allgemeine Koeffizienten  $c$  und  $d$ , die wir aus den Ausdrücken für den zweidimensionalen Mischzustand bestimmen:

$$c = \frac{12\bar{\gamma}\bar{\beta}\sqrt{\frac{2\bar{\alpha}}{\pi}}}{9\bar{\alpha}\bar{\gamma}^2(2-3\pi)+56\bar{\beta}^2} \quad (6.28)$$

$$d = 2 - \left( \frac{28\bar{\alpha}^2}{9\bar{\gamma}^2}\pi + 2 - \frac{3}{4}\pi \right)^{-1}. \quad (6.29)$$

Die Ausdrücke für den Fluß werden aus der Arbeit [10] übernommen, wobei die Koeffizienten aus den Gleichungen (6.25) bis (6.29) verwendet werden.

$$\Phi_{\text{dia}} = -\frac{eT\xi}{c_0} \begin{cases} 4\sqrt{2}\pi\alpha_2\bar{\gamma}^{-1}b^{-\frac{1}{2}}\Delta^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{8}{3\varepsilon}\sqrt{\frac{2}{b}}\Delta^{\frac{3}{2}}\right], & \Delta \gg \varepsilon^{\frac{2}{3}} \\ \frac{8}{3} \cdot 12^{\frac{1}{6}} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \sqrt{\pi}\varepsilon^{-\frac{1}{3}}\alpha_2\bar{\gamma}^{-1}b^{-\frac{2}{3}}, & |\Delta| \ll \varepsilon^{\frac{2}{3}} \\ 2\sqrt{2}\pi\alpha_2\bar{\gamma}^{-1}b^{-\frac{1}{2}}\Delta^{-\frac{1}{2}}, & \Delta < 0, \quad |\Delta| \gg \varepsilon^{\frac{2}{3}}. \end{cases} \quad (6.30)$$

Der paramagnetische Anteil schreibt sich

$$\Phi_{\text{para}} = \frac{eT\rho_1\xi}{c_0} \begin{cases} 4\pi c b^{-1} \exp\left[\frac{8}{3\varepsilon}\sqrt{\frac{2}{b}}\Delta^{\frac{3}{2}}\right], & \Delta \gg \varepsilon^{\frac{2}{3}} \\ 4 \cdot 3^{-\frac{1}{2}}\pi c b^{-1}, & |\Delta| \ll \varepsilon^{\frac{2}{3}} \\ \pi\varepsilon c (2|\Delta|)^{-\frac{3}{2}} b^{-\frac{1}{2}}, & \Delta < 0, \quad |\Delta| \gg \varepsilon^{\frac{2}{3}}. \end{cases} \quad (6.31)$$

Der Unterschied zu den Ausdrücken im zweidimensionalen Mischzustand rührt daher, daß wir in diesem Fall nicht über die verschiedenen  $m$  absummiert haben, bzw. ein Integral über  $k_y$  ausgeführt haben.

Der oszillierende Anteil ist schließlich gegeben durch:

$$\Phi_{\text{osz}} = -\sin(2\pi\bar{m}) \frac{eT\xi}{c_0} \begin{cases} \sqrt{2}(db-c^2)b^{-\frac{3}{2}}\Delta^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{8}{3\varepsilon}\sqrt{\frac{2}{b}}\Delta^{\frac{3}{2}}\right], & \Delta \gg \varepsilon^{\frac{2}{3}} \\ \frac{2}{3} \cdot 12^{\frac{1}{6}} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \pi^{-\frac{1}{2}}\varepsilon^{-\frac{1}{3}}(db-c^2)b^{-\frac{5}{3}}, & |\Delta| \ll \varepsilon^{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{2}(db-c^2)b^{-\frac{3}{2}}|\Delta|^{-\frac{1}{2}}, & \Delta < 0, \quad |\Delta| \gg \varepsilon^{\frac{2}{3}}. \end{cases} \quad (6.32)$$

Das Argument der Sinusfunktion kann aufgrund von Gleichung (6.9) geschrieben werden als:

$$2\pi\bar{m} = 2\pi\delta + \rho_1\bar{\gamma}\sqrt{2\pi}\frac{H_c(\rho_1)}{H_{c2}} \cdot \alpha(0, \delta, \rho_1) \cdot f(\bar{\gamma}, \delta, \rho_1) \cdot \bar{\alpha}(\bar{\gamma}). \quad (6.33)$$

Dieses Ergebnis ist konsistent zu dem Ergebnis der Arbeit [10], allerdings taucht in Gleichung (6.33) noch der magnetische Fluß als Phasenverschiebung auf. Durch die Veränderung des magnetischen Flusses im Zylinder zeigt sich also auch in diesem Fall ein periodisches Verhalten des Flusses  $\Phi_{osz}$ .

### 6.3 Übergangsmischzustand ohne Magnetfeld

Für den Fall, daß kein Magnetfeld im Inneren des Zylinders vorhanden ist, sind der magnetische Fluß  $\delta$  und der Radius  $\rho_1$  des Zylinders die Größen, von denen die kritische Kurve  $\beta_{c2}$  und der Variationsparameter  $\alpha$  abhängen. Für den Fall, daß  $\rho_1 = 0$  und der Fluß gerade die Hälfte eines Flußquanten beträgt, also  $\delta = \frac{1}{2}$ , sind kritische Kurve und Variationsparameter am stärksten verändert, vgl. Kapitel 5. Dagegen beeinflusst der magnetische Fluß den Verlauf der kritischen Kurve für  $\rho_1 \rightarrow \infty$  nicht mehr, vgl. Kapitel 6. Für alle anderen Werte von  $\rho_1$  ergibt sich mit den Ansätzen aus dem letzten Kapitel die implizite Beziehung:

$$\alpha(0, \delta, \rho_1) = \frac{1}{3(|m - \delta|)} \left( \frac{1 + 2\rho_1\sqrt{2\alpha(0, \rho_1, \delta)} (|m - \delta| + 1)}{1 + \rho_1\sqrt{2\alpha(0, \rho_1, \delta)}} \right). \quad (6.34)$$

Aus dieser Gleichung kann  $\alpha$  berechnet werden. In Abbildung 6.3 haben wir  $\alpha$  für die beiden extremen Fälle  $\delta = 0$  und  $\delta = \frac{1}{2}$  gegen den Radius  $\rho_1$  des Zylinders aufgetragen. Mit dem

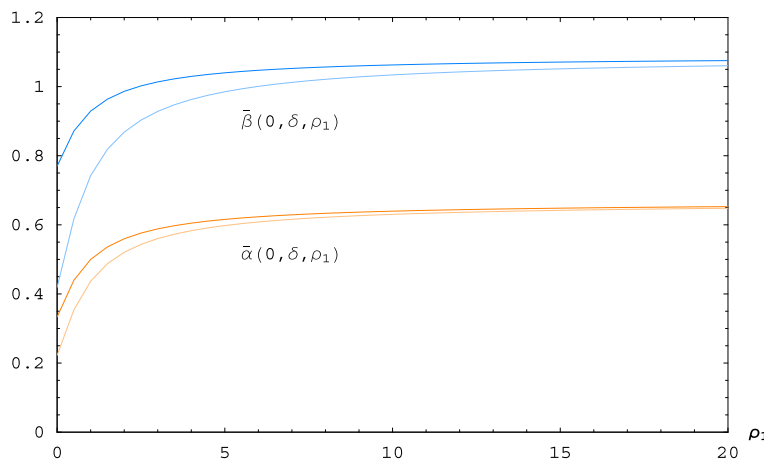


Abbildung 6.3:  $\alpha(0, 0, \rho_1)$  bzw.  $\alpha(0, \frac{1}{2}, \rho_1)$  (rot-orange)  $\beta(0, 0, \rho_1)$  bzw.  $\beta(0, \frac{1}{2}, \rho_1)$  gegen  $\rho_1$  (blau).

Ausdruck für  $\alpha$  kann dann ein Ausdruck für  $\beta$  angegeben werden:

$$\beta(0, \delta, \rho_1) = \frac{4}{3\sqrt{3}} \left( \frac{1}{|\mathfrak{m} - \delta| + 1} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{1 + 2\alpha(0, \rho_1, \delta)\rho_1 (|\mathfrak{m} - \delta| + 1)^{\frac{3}{2}}}{\rho_1 \sqrt{2\alpha(0, \delta, \rho_1)} + 1} \right). \quad (6.35)$$

Dieser Ausdruck ist ebenfalls in der Abbildung 6.3 für  $\delta = 0$  und  $\delta = \frac{1}{2}$  enthalten. Die Kurven spiegeln unser Modell des Übergangs vom eindimensionalen Mischzustand in den zweidimensionalen Mischzustand wider. Insbesondere wird die Absenkung der kritischen Kurve für  $\rho_1 = 0$  deutlich, die für  $\rho_1 \simeq \mathcal{O}(1)$  immer noch erkennbar ist. Zweifellos ist für eine Messung ein möglichst kleines  $\rho_1$  sinnvoll, so daß der Effekt eine größtmögliche Änderung des kritischen Stromes bewirkt. Die Entwicklungskoeffizienten für den Fall  $\gamma = 0$  sind:

$$a_1 = \frac{2}{3} (|\mathfrak{m} - \delta| + 1) \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_1 + \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}} \right) \frac{\beta_{c_2}(0, \delta, \rho_1)^2}{\alpha(0, \delta, \rho_1)^2} \quad (6.36)$$

$$a_2 = 0 \quad (6.37)$$

$$b = 2 - \left( f_3 \frac{\alpha(0, \delta, \rho_1)^3}{\beta_{c_2}(0, \delta, \rho_1)^2} + f_3 + \frac{1}{2} \right)^{-1} \quad (6.38)$$

$$c = 0 \quad (6.39)$$

$$d = 2 \quad (6.40)$$

Mit diesen Koeffizienten wird der diamagnetische Anteil des Flußes null, da dieser proportional zu  $a_2$  ist und der paramagnetische Anteil wird null aufgrund seiner Proportionalität zu  $c$ . Es bleibt der oszillierende Anteil, für den das Argument der Sinusfunktion direkt zum Fluß  $\delta$  proportional ist. Der Fluß zeigt also eine Periodizität in Abhängigkeit vom angelegten Fluß im Inneren, ohne daß am supraleitenden Zylinder ein magnetisches Feld anliegt.



## 7 Gültigkeitsbereich und Größenordnungen

### 7.1 Abschätzung des Gültigkeitsbereichs

Um die Ergebnisse für den Suprastrom und den magnetischen Fluß im ein- und zweidimensionalen Mischzustand zu erhalten, waren zwei Einschränkungen nötig:

$$\varepsilon \ll 1 \quad (7.1)$$

$$J_s \ll J_n . \quad (7.2)$$

In [10] wurde bereits gezeigt, daß die erste Bedingung nur im Fall von Typ-I-Supraleitern gilt. Die zweite Bedingung, daß der Suprastrom klein gegen den angelegten Normalstrom ist, schränkt die Ergebnisse auf einen schmalen Bereich um die kritische Kurve ein. Der Einfluß des magnetischen Flußes  $\Phi$  im Zylinderinneren auf die folgende Abschätzung ist gering, so daß die Argumentation aus [10] übernommen wurde.

Wir wollen die erste Bedingung (7.1) durch typische Größen eines Supraleiters ausdrücken, daher stellen wir zunächst den Parameter  $\varepsilon$  durch die normale Leitfähigkeit  $\sigma$  und den Parameter für den Strom  $\beta$  dar:

$$\varepsilon = \frac{2e\xi}{v} E = \frac{\beta c_0^2}{16\sigma(T - T_c)\xi^2} . \quad (7.3)$$

Dabei sind  $\sigma$ ,  $\xi$  und  $T_c$  Ausdrücke aus der mikroskopischen Theorie.

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m} \quad \begin{array}{l} \text{normale Gleichstromleitfähigkeit} \\ \text{wobei: } \tau \quad \text{mittlere Transport-Relaxationszeit} \\ \quad \quad n \quad \text{Dichte der normalleitenden Elektronen} \end{array}$$

$$\xi(T) = 0.74 \cdot \frac{\xi_0}{\sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}} \quad \text{im Fall von reinen Supraleitern (BCS-Theorie)}$$

$$T_c = 0.18 \cdot \frac{\hbar v_f}{\xi_0} \quad \begin{array}{l} v_f \quad \text{Fermigeschwindigkeit} \\ \xi_0 \quad \text{Kohärenzlänge nach PIPPARD} \end{array}$$

Es gilt:

$$\tau = \frac{\ell}{v_f} \quad \ell \quad \text{mittlere freie Weglänge der Elektronen}$$

$$\xi_0 = \frac{0.96 \cdot \lambda_L(0)}{\kappa} \quad \begin{array}{l} \text{Kohärenzlänge nach PIPPARD} \\ \text{wobei: } \lambda_L(0) \quad \text{Londonsche Eindringtiefe für } T = T_c \\ \quad \quad \kappa \quad \text{Ginzburg-Landau-Parameter} \end{array}$$

$$\lambda_L(0) = \left( \frac{mc^2}{4\pi ne^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{Londonsche Eindringtiefe}$$

In unseren Einheiten ist  $\hbar = 1$ , es ergibt sich daher mit Hilfe der obigen Gleichungen:

$$\varepsilon = 8.65 \cdot \frac{\beta \kappa^2 \xi_0}{\ell} . \quad (7.4)$$

Die Bedingung (7.1)  $\varepsilon \ll 1$  kann nur durch Typ-I-Supraleiter erfüllt werden, für die  $\kappa < 1$  ist. Je reiner eine Probe ist, umso kleiner wird  $\varepsilon$ . Als Beispiel soll Zinn dienen:  $\kappa \sim 10^{-1}$ ,  $\xi_0 \sim 10^{-5}$  cm,  $l \sim 10^{-2}$  cm. Da  $\beta \leq \beta_{c_2} \sim \mathcal{O}(1)$ , ist  $\varepsilon$  höchstens von der Größenordnung  $10^{-4}$ .

Die zweite Bedingung schränkt den Gültigkeitsbereich der Theorie ein. Der Normalstrom im Bereich des Mischzustandes muß groß sein im Vergleich zum longitudinalen Fluktuationsstrom. Dies entspricht der Tatsache, daß die Ginzburg-Landau-Theorie in der linearen Näherung angewendet wird. In der Nähe des kritischen Stroms  $J_{c_2}$  kann man den Normalstrom im Bereich des Mischzustands abschätzen durch:

$$\frac{J_n}{\left(\rho_1 + \frac{\xi}{\sqrt{2\alpha}}\right)^2 - \rho_1^2} \simeq \frac{J_{c_2}}{\rho_2^2 - \rho_1^2}. \quad (7.5)$$

Dabei ist  $\frac{\xi}{\sqrt{2\alpha}}$  die Dicke des Mischzustandes als Abschätzung aus der Halbwertsbreite des Quadrats der makroskopischen Wellenfunktion  $\Psi$ ,  $\rho_1$  bzw.  $\rho_2$  der Innen- bzw. Außenradius des Zylinders. Und mit der Definition von  $\beta$  erhält man aus (7.5):

$$J_n \simeq \frac{J_{c_2}(H_a, \rho_1)}{J_{c_2}(0, \rho_1)} \cdot \frac{c_0^2 \beta_{c_2}(0, \rho_1) \left(1 + 2\rho_1 \sqrt{2\alpha}\right)}{8e\xi\alpha}. \quad (7.6)$$

Dabei ist:

$$\text{(Eindim. Mischzustand)} \quad \beta_{c_2}(0) = \frac{4}{3\sqrt{3}} \left( \frac{1}{|m - \delta| + 1} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (7.7)$$

$$\text{(Zweidim. Mischzustand)} \quad \beta_{c_2}(0) = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}. \quad (7.8)$$

In unmittelbarer Nähe der kritischen Kurve haben wir für den Suprastrom in  $z$ -Richtung (6.24):

$$J_z = \frac{2eT}{\sqrt{3}}.$$

Damit ergibt sich aus (7.2) die Bedingung:

$$\frac{J_{c_2}(H_a, \rho_1)}{J_{c_2}(0, \rho_1)} \gg \frac{16}{\sqrt{3} \left(1 + 2\rho_1 \sqrt{2\alpha}\right)} T \xi \alpha \frac{e^2}{c_0^2} \beta_{c_2}(0, \rho_1)^{-1}. \quad (7.9)$$

Mit Hilfe der Gleichungen für die Londonsche Eindringtiefe und die kritische Temperatur findet sich für den Quotienten  $\frac{e^2}{c_0^2}$  der folgende Ausdruck für  $T \simeq T_c$ :

$$\frac{e^2}{c_0^2} = \frac{3}{4 \cdot 1.76 \xi_0 T_c} \left( \frac{a_0}{\lambda_0} \right)^2. \quad (7.10)$$

Dabei wurde  $a_0 \simeq \frac{\hbar}{p_f}$  verwendet;  $a_0$  ist der interatomare Abstand und  $p_f$  der Fermiimpuls. Damit ergibt sich:

$$\frac{J_{c_2}(H_a, \rho_1)}{J_{c_2}(0, \rho_1)} \gg \frac{12\alpha}{1.76\sqrt{3} (1 + 2\rho_1\sqrt{2\alpha})} \frac{\xi}{\xi_0} \left(\frac{a_0}{\lambda_0}\right)^2 \beta_{c_2}(0, \rho_1)^{-1}. \quad (7.11)$$

Diese Bedingung ist wegen  $\xi \sim \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-\frac{1}{2}}$  erfüllt, falls  $T$  nicht zu nahe bei  $T_c$  ist und bis auf einen kleinen Bereich in der Nähe von  $H_a = H_c$ , dann wird  $J_{c_2}(H_a, \rho_1)$  klein.  $\beta_{c_2}(0, \rho_1)$  ist von der Größenordnung eins und  $\left(\frac{a_0}{\lambda_0}\right)^2 \sim 10^{-4}$ . Die übrigen Faktoren sind von der Größenordnung Eins.

Wir betrachten noch den Gültigkeitsbereich unterhalb der kritischen Kurve. Der Anwendungsbereich der linearisierten Ginzburg-Landau-Theorie reicht bis zu  $J_n \simeq J_s$ . Für den Normalstrom kann der Ausdruck aus (7.6) verwendet werden. Für den Suprastrom im Bereich unterhalb der kritischen Kurve gilt nach (6.24):

$$J_z = 2eT \cdot \exp \left[ \frac{8\Delta}{3\varepsilon} \sqrt{\frac{2\Delta}{b}} \right]. \quad (7.12)$$

Für  $T \simeq T_c$  ergibt sich die Bedingung:

$$\Delta \simeq \underbrace{8.65^{\frac{2}{3}} \left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{2}{3}}}_{\simeq 1} \left(\frac{J_{c_2}(H_a, \Phi)}{J_{c_2}(0, \Phi)}\right)^{\frac{2}{3}} \kappa^{\frac{4}{3}} \left(\frac{\xi_0}{l}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\ln \left(\frac{J_{c_2}(H_a)}{J_{c_2}(0)} \left(\frac{\lambda_0}{a_0}\right)^2 \frac{\xi}{\xi_0}\right)\right)^{\frac{2}{3}}. \quad (7.13)$$

Die Abschätzung für  $\Delta$  liefert die Breite des Gültigkeitsbereichs unterhalb der kritischen Kurve in Abhängigkeit von den Parametern  $H_a$ ,  $\Phi$  und  $J$ . Je reiner die Probe, desto größer ist  $l$  und desto kleiner  $\Delta$ . Je größer das äußere Feld, desto kleiner sind  $J_{c_2}(H_a)$  und  $\Delta$ . Für das Beispiel Zinn ist  $|\Delta|$  von der Größenordnung  $10^{-2}$ .

## 7.2 Größenordnung des zweiten kritischen Stroms

Wir wollen abschätzen, in welchem Größenbereich unsere Werte für den kritischen Strom liegen. Dazu stellen wir uns die Situation eines Hohlzylinders vor, dessen innerer Radius von der Größenordnung  $\xi$  ist und dessen äußerer Radius mindestens  $10\xi$  beträgt. Die typische Breite des Mischzustandes von  $\frac{\xi}{\sqrt{2\alpha}}$  liegt damit im Bereich des Zylinders. Die Definition von  $\beta$  liefert uns:

$$J = \frac{c_0^2 \beta (\rho_2^2 - \rho_1^2)}{4e\xi^3} = \frac{c_0^2 \beta (100\xi^2 - \xi^2)}{4e\xi^3}. \quad (7.14)$$

Für die Abschätzung des zweiten kritischen Stroms verwenden wir den Wert von  $\beta_{c_2}(0) = \frac{4}{3\sqrt{3}}$ . Damit ergibt sich dann:

$$J_{c_2} \simeq 20 \frac{c_0^2}{e\xi}. \quad (7.15)$$

Um den zweiten kritischen Strom in Gaußschen Einheiten angeben zu können, brauchen wir wieder den Faktor  $\hbar$  und verwenden  $\xi \simeq 5 \cdot 10^{-4}$  cm. Damit ergibt sich eine kritische Stromstärke von

$$J_{c_2} \simeq 7.5 \cdot 10^7 \sqrt{\text{erg cm}} \text{ s}^{-1} \simeq 10^{-2} \text{ A}. \quad (7.16)$$

Die physikalische Größe, die in einem Experiment untersucht werden kann, ist der effektive Widerstand des Zylinders,  $R$ . Dieser hängt mit dem Fluktuationsstrom  $J_z$  im Hohlzylinder zusammen

$$R = \frac{V}{J} = \frac{V}{J_n + J_z} \simeq R_n \left( 1 - \frac{J_z}{J_n} \right). \quad (7.17)$$

Wir können also beispielsweise im Fall des eindimensionalen Mischzustandes erwarten, daß sich durch die Variation des magnetischen Flusses der Widerstand der Probe periodisch mit dem Flußquant absenkt. Allerdings können wir nicht davon ausgehen, daß wir den Widerstand  $R = 0$ , also den Fall der kompakten Supraleitung erreichen werden, dazu müßte der Silsbee-Strom unterschritten werden.

$$J_{c_1} = \frac{c_0 \rho_2 H_c}{2} \quad (7.18)$$

Unter Verwendung von  $H_c = \frac{\kappa \Phi_0}{2\sqrt{2}\pi\lambda(T)}$  und mit  $\hbar = 1$  wird daraus:

$$J_{c_1} = \frac{c_0^2 \rho_2}{4\sqrt{2}\pi e \kappa \xi^2} \simeq 0.2 \cdot \frac{c_0^2}{e\xi \kappa} \frac{\rho_2}{\xi}. \quad (7.19)$$

Dieser Ausdruck für den Silsbee-Strom läßt sich insbesondere mit dem zweiten kritischen Strom vergleichen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} J_{c_2} &> J_{c_1} \\ \Leftrightarrow \frac{\rho_2}{\xi} &> \frac{1}{\kappa}. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Mit unserer Abschätzung von  $\kappa \sim 10^{-1}$  wird diese Bedingung nur erfüllt, falls der Radius des Zylinders mindestens die zehnfache Kohärenzlänge beträgt. Das bedeutet, daß sich in Zylindern mit kleinerem Radius keine Zwischenzustandsstruktur ausbilden wird [5].

### 7.3 Größenordnung des magnetischen Flusses

In Kapitel 3 haben wir festgestellt, daß die Ausdrücke für den magnetischen Fluß  $\Phi$  einen Vorfaktor  $f\Phi_0$  enthalten. Diesen Vorfaktor wollen wir in diesem Abschnitt abschätzen.

$$f\Phi_0 = \frac{8eT\xi}{c_0} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} = \frac{e^2}{c_0^2} \frac{\Phi_0 T \xi}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \quad (7.21)$$

Für  $\frac{e^2}{c_0^2}$  verwenden wir die Abschätzung aus Gleichung (7.10), für  $\xi$  den Ausdruck aus Kapitel 7.1 für reine Supraleiter. Wir setzen wieder voraus, daß  $T \simeq T_c$  ist und erhalten dann:

$$f \simeq \left(\frac{a_0}{\lambda_0}\right)^2 \frac{1}{\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (7.22)$$

Nehmen wir weiter an, daß wir uns bis auf  $10^{-3}$  der kritischen Temperatur nähern, d. h.  $1 - \frac{T}{T_c} \simeq 10^{-3}$  und nehmen für  $\left(\frac{a_0}{\lambda_0}\right)^2 \simeq 10^{-4}$ , dann ergibt sich

$$f \simeq 0.5. \quad (7.23)$$

In Kapitel 2.2 hatten wir zum Abschätzen von  $J_{c2}$  vorausgesetzt, daß ein halbes Flußquant abgeschirmt werden kann. Wir wollen dies für den Fall des eindimensionalen Mischzustands auf der kritischen Kurve verifizieren. Nach Gleichung (4.31) haben wir einen Ausdruck für den durch den Abschirmstrom erzeugten Fluß, diesen können wir mit Hilfe des Vorfaktors  $f$  als ungefähr  $\frac{1}{2}\Phi_0$  abschätzen. Weiterhin wird nach Gleichung (4.29) der Abschirmstrom unterhalb der kritischen Kurve exponentiell zunehmen, wobei aber zu beachten ist, daß unsere Gleichungen nur für einen sehr schmalen Bereich unterhalb der kritischen Kurve gelten. Für den Bereich der Supraleitung gilt die Flußquantisierung. Oberhalb der kritischen Kurve zeigt (4.32) die Abnahme des Abschirmstroms. Wir können in dieser Arbeit also nicht davon ausgehen, daß die exakte Flußquantisierung wie im Fall von kompakten Supraleitern für den Mischzustand erfüllt ist, sondern stets nur eine „ungefähre“ Flußquantisierung.

## 8 Schlußfolgerungen und Bewertung der Ergebnisse

In der vorliegenden Arbeit wird auf der Basis der Fluktuationstheorie die Wirkung eines magnetischen Flusses in der inneren Öffnung eines stromführenden Hohlzylinders auf den Mischzustand untersucht. Bisher wurde nur die direkte Auswirkung eines magnetischen Feldes auf die supraleitenden Fluktuationen berechnet. Effekte, die sich durch einen magnetischen Fluß im Inneren des Hohlzylinders ergeben, sind systematisch vernachlässigt worden. In dieser Arbeit wird eine solche Situation, die als Aharonov-Bohm-Effekt interpretiert werden kann, gezielt untersucht. Die hier durchgeführten Rechnungen zeigen, daß die Anwesenheit eines magnetischen Flusses die Eigenschaften des Mischzustandes in verschiedener Weise beeinflußt.

Wie in den Vorgängerarbeiten werden zunächst die beiden einfachsten topologischen Anordnungen untersucht: ein Vollzylinder und ein Hohlzylinder mit großem Innenradius. Diese beiden Fälle ermöglichen eine analytische Lösung der linearisierten Ginzburg-Landau-Gleichungen.

Im Vollzylinder entsteht ein eindimensionaler Mischzustand auf der Zylinderachse bei einem hinreichend großen Strom in Richtung der Achse. Dieser Rest an Supraleitung wird durch ein magnetisches Feld  $H_a \geq H_{c_2}$  zerstört. Bekannt ist außerdem, daß sich eine kritische Kurve  $J_{c_2}(H_a)$  ergibt, welche die Zerstörung der Supraleitung bei angelegtem Strom in Richtung der Zylinderachse beschreibt. In der vorliegenden Arbeit wurde zusätzlich ein Flußfaden auf der Zylinderachse plazierte und dessen Auswirkungen auf die kritische Kurve untersucht. Es zeigt sich, daß die kritische Kurve (4.22) deutlich vom angelegten Fluß abhängt. Die kritische Kurve weist zum einen eine Periodizität auf, die durch das Flußquant  $\Phi_0 = \frac{ch}{2e}$  bestimmt ist, zum anderen eine Absenkung gegenüber dem Fall ohne magnetischen Fluß, vgl. Abbildungen (4.6) und (4.7). Der kritische Strom wird für den Fall, daß kein magnetisches Feld vorhanden ist, allein durch den magnetischen Fluß auf die Hälfte reduziert, sofern der Fluß im Inneren ein ungeradzahliges Vielfaches des halben Flußquanten beträgt.

Weiterhin haben wir das Verhalten des Fluktuationssuprastromes  $J_{s_z}$  im Gültigkeitsbereich unserer Theorie um die kritische Kurve berechnet, sowie den magnetischen Fluß  $\Phi$  untersucht, der sich durch Ringströme aus supraleitenden Fluktuationen ergibt. Die Ringströme wechseln abhängig vom angelegten Fluß ihre Richtung. Der Grund dafür ist, daß derjenige Ringstrom mit der Quantenzahl  $m$  am stärksten angeregt ist, dessen Anregungsenergie am kleinsten ist. Vergrößert man den angelegten Fluß, so springt bei jedem ungeradzahligem Vielfachen des Flußquanten die Quantenzahl  $m$  um Eins und der Faktor  $(m - \delta)$  des angeregten Ringstroms wechselt sein Vorzeichen. Wir führen dies auf eine Quantisierungsbedingung des Gesamtflusses zurück, wobei aber für den Mischzustand nicht die übliche Quantisierungsbedingung kompakter Supraleiter gilt, vgl. Kapitel 7.3.

Für den Fall des zweidimensionalen Mischzustandes wurde die zweite kritische Kurve berechnet, siehe Gleichung (5.17). Diese entspricht der Kurve für den Fall ohne zusätzlichen

angelegten Fluß im Inneren des Zylinders [10], d. h. der Einfluß des magnetischen Flusses auf den kritischen Strom verschwindet für Zylinder mit sehr großer Öffnung. Wir haben die Ausdrücke für den Fluktuationsstrom in Achsenrichtung und den magnetischen Fluß, verursacht durch Fluktuationsströme in Azimutalrichtung, untersucht. Falls kein magnetisches Feld  $H_a$  am Supraleiter anliegt, zeigt der Fluß wieder die schon im eindimensionalen Mischzustand festgestellte Abhängigkeit vom Faktor  $(m - \delta)$ . Bei angelegtem äußerem Feld ist der Einfluß des Magnetfeldes stärker als dieser Effekt.

Der Grenzfall des zweidimensionalen Mischzustandes wurde vor allem deshalb untersucht, weil wir mit Hilfe der beiden Grenzfälle ein Modell finden konnten, mit dem der Übergangsmischzustand, d. h. der Fall eines Zylinders mit einer inneren Öffnung von der Größenordnung der Kohärenzlänge  $\xi$ , beschrieben werden kann. Wir haben eine Gleichung für die zweite kritische Kurve für Zylinder mit beliebiger innerer Öffnung gefunden (6.21), so daß es möglich ist, den kritischen Strom für einen Zylinder mit beliebiger Bohrung aus diesem Zusammenhang zu berechnen. Explizit angegeben haben wir die zweite kritische Kurve für den Fall ohne angelegtes magnetisches Feld  $H_a$ . Der Suprastrom in Richtung der Zylinderachse und der Fluß  $\Phi$  sind in (6.24) und (6.30) bis (6.32) berechnet worden. Im Fall ohne magnetisches Feld  $H_a$  wird deutlich, daß der Fluß durch eine Sinusfunktion gegeben ist, deren Argument vom Fluß im Inneren des Zylinders abhängt. Schließlich wurde noch der Gültigkeitsbereich der Rechnungen untersucht und die Größenordnung des zweiten kritischen Stroms mit  $10^{-2}$  A abgeschätzt. Wenn man bedenkt, daß sich im eindimensionalen Mischzustand eine Absenkung des kritischen Stroms auf die Hälfte ergibt, sollte es technisch möglich sein, eine experimentelle Anordnung zu finden, mit der eine periodische Änderung des Widerstandes in Abhängigkeit vom angelegten Fluß gemessen werden kann. Wir schlagen dies als eine neuartige Messung des Aharonov-Bohm-Effekts vor.

## Literaturnachweis

- [1] W. EHRENBERG, R. W. SIDAY : *Proc. Phys. Soc. London B* 62, 8 (1949).
- [2] Y. AHARONOV, B. BOHM : *Phys. Rev.* 115, 485 (1959).
- [3] L. D. LANDAU: Private Mitteilung an D. Shoenberg.  
Siehe: D. SHOENBERG : *Superconductivity*.  
Cambridge: Cambridge University Press, 1938; Seite 59.
- [4] A. F. ANDREEV, W. BESTGEN : *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 10, 453 (1973)  
sowie *Sov. Phys. JETP* 37, 942 (1973).
- [5] A. F. ANDREEV : *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 10, 453 (1969)  
sowie *JETP Lett.* 10, 291 (1969).
- [6] W. BESTGEN : *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 65, 2097 (1973)  
sowie *Sov. Phys. JETP* 38, 1048 (1974).
- [7] W. BESTGEN : *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 76, 566 (1979)  
sowie *Sov. Phys. JETP* 49, 285 (1979).
- [8] W. BESTGEN : *Z. Phys.* 269, 73 (1974).
- [9] W. BESTGEN : *Sol. State Commun.* 36, 441 (1980).
- [10] W. BESTGEN, F. ROTHEN : *Low. T. Phys.* 77, 257 (1989).
- [11] F. LONDON : *Superfluids I*.  
London, New York: Wiley, 1950.
- [12] C. J. GORTER : *Physica (Utr.)* 23, 45 (1957).
- [13] A. F. ANDREEV : *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 54, 1510 (1968)  
sowie *Sov. Phys. JETP* 27, 809 (1968).
- [14] D. SAINT-JAMES, P. G. DE GENNES : *Phys. Lett.* 7, 306 (1963).
- [15] K. STEINER, H. SCHÖNECK : *Z. Phys.* 44, 346 (1943)  
sowie K. STEINER : *Z. Naturforsch.* 4a, 271 (1949).
- [16] H. MEISSNER : *Phys. Rev.* 101, 1660 (1956).
- [17] H. MEISSNER : *Phys. Rev.* 97, 1627 (1955).
- [18] F. ROTHEN : *J. Low Temp. Phys.* 9, 359 (1972).



- 
- [19] A. F. ANDREEV : *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 51, 1540 (1966)  
sowie *Sov. Phys. JETP* 24, 1019 (1967).
- [20] I. L. LANDAU, Yv. V. SHARVIN : *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 10, 192 (1969)  
sowie *JETP Lett.* 10, 121 (1969).
- [21] I. L. LANDAU, Yv. V. SHARVIN : *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 15, 88 (1972)  
sowie *JETP Lett.* 15, 59 (1972).
- [22] I. L. LANDAU : *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 64, 557 (1973)  
sowie *Sov. Phys. JETP* 37, 285 (1973).
- [23] I. L. LANDAU : *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 67, 250 (1974)  
sowie *Sov. Phys. JETP* 40, 126 (1975).
- [24] I. L. LANDAU : *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 76, 1749 (1979)  
sowie *Sov. Phys. JETP* 49, 889 (1979).
- [25] I. L. LANDAU, A. E. SVISTOV : *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 78, 2287 (1980)  
sowie *Sov. Phys. JETP* 51, 1147 (1980).
- [26] M. PESHKIN, A. TONOMURA : *The Aharonov-Bohm Effect*.  
Heidelberg, New York: Springer, 1989; Seite 68.
- [27] A. SCHMIDT : *Phys. Rev.* 180, 527 (1969).
- [28] I. O. KULIK : *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 59, 584 (1970)  
sowie *Sov. Phys. JETP* 32, 318 (1971).
- [29] L. D. LANDAU, E. M. LIFSCHITZ : *Lehrbuch der Theoretischen Physik*. Dritter Band;  
Moskau, 1974; Seite 35.
- [30] M. TINKHAM : *Introduction to Superconductivity*.  
New York: McGraw-Hill, 1975.

## Danke

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

An erster Stelle gilt mein Dank meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr. W. Bestgen. Durch seine engagierte fachliche und persönliche Betreuung hat er besonderen Anteil am Gelingen meiner Arbeit. Besonders bedanken möchte ich mich dafür, daß er jederzeit ein offenes Ohr für die kleineren und größeren Probleme seiner Doktorandin hatte. Seine Begeisterung für Physik und die Begabung Probleme der Physik anschaulich und spannend darzustellen, waren für mich Vorbild und Motivation, in der theoretischen Physik zu promovieren.

Ein ebenso großer Dank gebührt Herrn Prof. Dr. F. Gebhard, der mich herzlich in seine Arbeitsgruppe aufgenommen hat und für die Finanzierung meiner Doktorarbeit gesorgt hat. In seiner Arbeitsgruppe konnte ich zusätzlich Einblick in die Probleme und die aktuelle Forschung der Vielteilchentheorie gewinnen. Für Rat und Tat bei der Fertigstellung meiner Arbeit bin ich ihm sehr dankbar.

Zu großem Dank bin ich dem Graduiertenkolleg „Optoelektronik mesoskopischer Halbleiter“ verpflichtet, das mich nicht nur finanziell während der Doktorandenzeit unterstützt hat, sondern auch durch Vorlesungen und Seminare einen Blick auf andere Gebiete in diesem Forschungsbereich ermöglicht hat.

Ganz besonderer Dank gilt meiner Freundin Sandra Mahler, die immer für mich da war und besonders in stressigen Situationen die Gelassenheit hatte und die richtigen Worte fand, um mich vor Panikattacken zu bewahren.

Herzlicher Dank gilt Herrn Martin Paech, der mich bei der druck- und satztechnischen Gestaltung meiner Doktorarbeit unterstützt hat.

Ich bedanke mich bei der gesamten Arbeitsgruppe „Vielteilchentheorie“ für die angenehme Arbeitsatmosphäre und die freundschaftliche Zusammenarbeit während der Promotionszeit. Besonders erwähnt sei der „Mensaclub“ mit Sandra Mahler, Jörg Rissler und Rüdiger Thul, der immer ein angenehmer und unterhaltsamer Teil des Tages war.

Ein großes Dankeschön gebührt auch meinen Eltern, die mich in jeglicher Art und Weise während meines Studiums und der Doktorarbeit unterstützt und gefördert haben.

Und zuletzt noch ein ganz dickes Dankeschön an Marc, der mich liebevoll unterstützt hat und mich nie vergessen ließ, daß es noch andere Dinge neben der Physik gibt.