

Eine abstrakte Klassifikation von PL-Blätterungen und gelifteten étale-PL-Gruppoid-Strukturen

DISSERTATION

zur

Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften

(Dr. rer. nat.)

dem Fachbereich Mathematik der
Philipps-Universität Marburg
vorgelegt von

Matthias Schirle

aus Marburg/Lahn

Marburg/Lahn 1998

Vom Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
als Dissertation am 8. Juli 1998 angenommen

Erstgutachter: Prof. Dr. H. Upmeyer, Marburg

Zweitgutachter: Prof. Dr. E. Vogt, Berlin

Tag der mündlichen Prüfung am 15. Juli 1998

Vorwort

An den Anfang des Vorwortes möchte ich einige technische Bemerkungen stellen. Grundbegriffe wie Isotopie, PL-Abbildung usw. werden nicht erklärt und können z.B. in [R-S, Hud, Hirsch, B-J, Spa, tom] nachgeschlagen werden. Vieles wird für alle drei Kategorien DIFF, TOP und PL parallel entwickelt. Daher steht CAT stellvertretend für eine der drei Kategorien. CAT-Faserbündel sind wie gewohnt definiert, wobei alle auftretenden Abbildungen einschließlich der lokalen Trivialisierungen CAT-Abbildungen seien.

Standardmäßige Kategoriebezeichnungen sind der Tabelle

Bezeichnung	Kategorie
Ab	Abelsche Gruppen
Cat	Kleine Kategorien
Grp	Gruppen
Grpd	Gruppoide
Mod_R	Moduln über R
PL	PL-Räume
Set	Mengen
Set₀	Mengen mit Basispunkt
SIM	Simpliziale Komplexe
Top	Topologische Räume
Top₀	Topologische Räume mit Basispunkt

zu entnehmen. Die restlichen Kategorien werden in der Arbeit definiert.

Die Gliederung erfolgt mit dreiteiligen Nummern, die zu Unterabschnitten korrespondieren. Jeder Unterabschnitt enthält höchstens ein Lemma, höchstens eine Bemerkung usw. Daher bezeichnet beispielsweise „Lemma 2.6.4“ das einzige Lemma in Unterabschnitt 2.6.4.

Das Symbolverzeichnis ist nicht alphabetisch geordnet, sondern führt die Symbole in der Reihenfolge ihres Auftretens auf.

Den Kern der Arbeit bilden sicherlich die Kapitel 4–8. Die vorhergehenden Kapitel dienen nicht nur der Festlegung von Bezeichnungen und Definitionen, sondern enthalten auch einige technische Vorbereitungen für die Hauptkapitel sowie elementare Ausführungen, die in dieser Form nicht in der Literatur zu finden sind. Außerdem werden in weiten

Teilen der vorderen Kapitel, insbesondere Kapitel 2, dem Leser einige prinzipielle Sichtweisen nahegebracht, die einerseits das Verständnis der Arbeit fördern und andererseits den grundlegenden Tenor der Arbeit verdeutlichen sollen.

Wer aber zunächst nur das Wesentlichste der Arbeit erfassen möchte, kann durchaus die Kapitel 1–3 überschlagen und erst beim vierten Kapitel beginnen. Sollten dabei unbekannte Begriffe auftauchen, können diese im ausführlichen Stichwortverzeichnis nachgeschlagen werden.

Hinsichtlich des zweiten und auch des dritten Kapitels sei angemerkt, daß die Mikroidbündel schon von HAEFLIGER implizit in seiner Dissertation [Haefl-D] und explizit in [Haefl-T] eingeführt worden sind. Sie werden aber erstens nicht von bündeltheoretischer Warte studiert und zweitens nicht zur Charakterisierung von Blätterungen als Unterbündel des Tangentialmikroidbündels verwendet. Daher bitte ich um Verständnis für meine eigene Darstellung der elementaren Theorie geblätterter Mikroidbündel.

Das Vorwort möchte ich mit Worten des Dankes schließen: Herr Prof. Dr. M. Breuer und Herr Prof. Dr. H. Upmeyer sind meiner Themenstellung und meinen mathematischen Ideen, auf denen diese Arbeit beruht, stets mit aufrichtiger Aufgeschlossenheit begegnet und haben mich gerade auch in organisatorischen Belangen intensiv unterstützt. Daß sich Herr Prof. Dr. E. Vogt aufgrund seines Expertenwissens als Fachgutachter bereit erklärt hat, ist alles andere als selbstverständlich und daher ganz besonders zu erwähnen.

Marburg, den 24. 2. 1998

Matthias Schirle

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Zerlegungen und Blätterungen	11
1.1 Zerlegungen	11
1.2 Bgzsh-Zerlegungen	13
1.3 Blätterungen	21
1.4 Triangulierbare Zerlegungen und Blätterungen	25
1.5 Pseudo-PL-Abbildungen	33
1.6 Blätterungen als Garbenschnitte	34
1.7 Bündelgarben	41
2 Geblätterte Mikroidbündel	47
2.1 Allgemeine Differenzierbarkeitsbegriffe	49
2.2 Allgemeine Tangentialräume	56
2.3 Mikroidbündel	59
2.4 Unterbündel	67
2.5 Geblätterte Mikroidbündel	71
2.6 Blätterungen = Unterbündel	76
3 Gruppoid-Strukturen	89
3.1 Gruppoide	90
3.2 Gruppoid-Strukturen	99
3.3 Etale-Kozykel	107
3.4 Geblätterte Mikroidbündel = Γ -Strukturen	110

4	Allgemeine projektive Systeme	121
4.1	Allgemeine induktive Systeme	122
4.2	Schöne induktive Systeme	130
4.3	Allgemeine projektive Systeme	132
4.4	Relative Injektivität	142
4.5	Die ri-Kategorie	145
4.6	Schöne projektive Systeme	150
4.7	Faserungen und Homotopieäquivalenzen	156
5	Klassifizierende Räume	159
5.1	Das Yoneda-Lemma	159
5.2	Klassifizierendes Objekt relativ zu einem Funktor	162
5.3	Eigene Konstruktion klassifizierender Räume	165
5.4	Das klassifizierende System	169
5.5	Die direkte Charakterisierung	175
5.6	Schöne Eigenschaften	176
5.7	Schwache Homotopieeigenschaften	183
6	Von Monoiden zu Gruppen	189
6.1	Über Monoide im allgemeinen	190
6.2	Äquivalenzrelationen und Untermonoide	194
6.3	Die geometrische Ω -Homologie	198
6.4	Dipol-Homologie	205
7	Zähmung	209
7.1	Zahme Strukturen	210
7.2	Zähmung	213
7.3	\downarrow Zahme Strukturen	220
7.4	Zahme Homologie	225
7.5	ri-Klassifikation von Liftungen	231
7.6	Über variable zahme Strukturen	239
7.7	Ein allgemeiner Klassifikationssatz	246

8	Abstrakte Klassifikationssätze	251
8.1	Zahme Gruppoid-Strukturen	251
8.2	Abstrakte Klassifikation	269
8.3	Anmerkungen	271
	Literaturverzeichnis	281
	Symbolverzeichnis	285
	Index	292

Einleitung

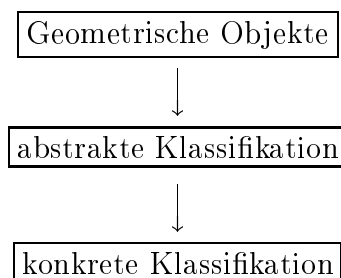
In der Topologie stellt Klassifikation bestimmter Bereiche von topologischen Objekten eine zentrale Thematik dar. Ein herausragendes Beispiel bildet die Klassifikation von Mannigfaltigkeiten, die einerseits von bedeutenden, weitreichenden Resultaten geprägt ist, aber andererseits auch von einigen wenigen, aber doch fundamentalen, offenen Problemen. Auffällig ist hierbei eine starke Dimensionsabhängigkeit—die man inzwischen sicherlich als mathematische Erfahrungstatsache bezeichnen kann—sowohl der Theorien als auch der Resultate.

Stellt schon die Klassifikation von Mannigfaltigkeiten eine nicht gerade leichte Aufgabe dar, so scheinen die Klassifikationsprobleme bei Blätterungen nahezu unlösbar zu sein. Natürlich gibt es gerade für Blätterungen eine Fülle spezieller Resultate insbesondere über Riemannsche Blätterungen, aber an einen allgemeinen Ansatz zur abstrakten Klassifikation, geschweige denn an eine abstrakte Klassifikation von Blätterungen selbst, *war* bisher nicht zu denken.

Vergegenwärtigt man sich die prinzipiellen Schwierigkeiten des Klassifizierens, ist dies auch nicht verwunderlich, im Gegenteil: Was z.B. bei der Klassifikation von Mannigfaltigkeiten bisher erreicht worden ist, kann nur Be- (und Ver)wunderung hervorrufen.

Jene prinzipiellen Schwierigkeiten der Klassifikation geometrischer Objekte sind durch ein grundsätzliches Dilemma verursacht: Für das mathematisch kontrollierbare Arbeiten mit diesen Objekten zwecks Klassifikation sind Vergrößerungen algebraischer oder homotopietheoretischer Art erforderlich. Dadurch gehen aber meist diejenigen Unterschiede zwischen den Objekten verloren, die bei der Klassifikation miterfaßt werden müßten.

Die Vielfalt der bisherigen Klassifikationsmethoden etwa für Mannigfaltigkeiten ist beachtlich. Dennoch ist ihnen allen das Grundschema



gemeinsam. Es sei unbedingt darauf hingewiesen, daß sich die Begriffe ‘abstrakte Klassifikation’ und ‘konkrete Klassifikation’ einer mathematischen Präzisierung entziehen und daher im mathematisch umgangssprachlichen Sinne aufzufassen sind.

Zur sprachlichen Eingrenzung von ‘abstrakte Klassifikation’ diene folgende verbale Umschreibung: Jede Klassifikation einer bestimmten Klasse von topologischen Objekten verlangt zunächst nach einem Ansatz, einem Zugang oder einer generellen Methode. Unter abstrakter Klassifikation verstehen wir diese generelle Methode im Verbund mit einer durch sie ermöglichten, äquivalenten Umformulierung des ursprünglichen Problems, die wiederum die Richtung und Methode einer nachfolgend angestrebten konkreten Klassifikation vorzeichnet oder zumindest andeutet.

In der Regel liegt ein abstraktes Klassifikationsresultat in homotopietheoretischer Form vor, weil die Homotopietheorie das wichtigste und natürlichste Bindeglied zwischen Topologie und Algebra darstellt.

Es folgen einige Beispiele für abstrakte Klassifikationen:

BEISPIELE

- [1] Abstrakte Klassifikation der geschlossenen Waldhausen-Mannigfaltigkeiten:

$$W_0 \approx W_1 \iff \pi_1(W_0) \cong \pi_1(W_1).$$

Konkrete Klassifikation: Bestimmung aller Gruppen, die als Fundamentalgruppen geschlossener Waldhausen-Mannigfaltigkeiten auftreten.

- [2] Abstrakte Klassifikation der Isomorphieklassen numerierbarer G -Prinzipalbündel, wobei G eine topologische Gruppe ist:

$$k_G(X) = [X, BG].$$

Konkrete Klassifikation: Bestimmung der Menge aller Homotopieklassen $[X, BG]$ z.B. mittels Obstruction-Theorie. Dies ist ein Beispiel für eine **Homotopieklassifikation**.

- [3] Abstrakte Klassifikation der Isotopieklassen differenzierbarer Strukturen auf einer geschlossenen, topologischen Mannigfaltigkeit M^m der Dimension $m \geq 5$:

$$\begin{array}{ccc}
 & & B\text{DIFF} \\
 & \nearrow & \downarrow \\
 M & \xrightarrow{f_M} & B\text{TOP}
 \end{array}$$

f_M bezeichnet hierbei die klassifizierende Abbildung des stabilen topologischen Tangentialmikrobündels von M und $B\text{DIFF} \rightarrow B\text{TOP}$ die von der Gruppeninklusion $\text{DIFF} \hookrightarrow \text{TOP}$ induzierte Abbildung. Die abstrakte Klassifikation lautet:

$$\text{DIFF}(M)/\text{Isotopie} = \left\{ \text{Homotopieklassen aller Lifts von } f_M \text{ über } \left. \begin{array}{l} B\text{DIFF} \\ \longrightarrow \\ B\text{TOP} \end{array} \right\},$$

wobei $BDIFF \rightarrow BTOP$ o.E. als Faserung angenommen werden kann. Konkrete Klassifikation: Bestimmung dieser Lifthomotopieklassen (z.B. mittels Obstructionstheorie). Dies ist ein Beispiel für eine **Lifthomotopieklassifikation**.

- [4] Abstrakte Klassifikation höherdimensionaler Mannigfaltigkeiten:
 Exakte Surgery-Sequenz.
 Konkrete Klassifikation: Berechnung der Wall-Gruppen und Abbildungen in dieser Sequenz. Oder noch besser: Beweis der Novikov-Vermutung!

Eine abstrakte Klassifikation mittels Lifthomotopieklassen wie in Beispiel [3] spricht das Herz eines Topologen sicherlich noch mit am meisten an, und zwar aus folgenden Gründen:

- Das ursprüngliche topologische Problem ist äquivalent und vollständig in ein rein homotopietheoretisches Problem übersetzt.
- Die Lifthomotopieklassifikation ist ästhetisch, konzeptionell überzeugend und von einfacher Gestalt.
- Diese abstrakte Klassifikation ist vor allem *universell*: $BTOP$ und $BDIFF$ sind bis auf Homotopieäquivalenz eindeutige, klassifizierende Räume, die stabile Isomorphieklassen von Mikrobündeln mit Übergangsfunktionen in TOP bzw. $DIFF$ klassifizieren, wodurch f_M bis auf Homotopie eindeutig festgelegt ist, wobei f_M in engstem Zusammenhang mit M steht.

Gerade der letzte Punkt ist besonders wichtig, denn eine Lifthomotopieklassifikation läßt sich immer auf künstliche Weise erzwingen: man ersetze $BTOP$ durch die Menge¹⁾ B der Homöomorphieklassen topologischer Mannigfaltigkeiten und $BDIFF$ entsprechend durch die Menge \tilde{B} aller differenzierbaren Strukturen auf diesen. Für f_M wähle man dann die kanonische Inklusion. Damit bekommt man die schlechtmöglichste aller Lifthomotopieklassifikationen, was sich auf zweifache Weise äußert:

- Die Homotopietypen von B und \tilde{B} sind unnötigerweise viel zu komplex.
- Es ist nicht auszumachen, welche geometrischen Objekte, wenn überhaupt, die Homotopiefunktionen $[\cdot, B]$, $[\cdot, \tilde{B}]$ klassifizieren, und was jene mit den differenzierbaren Strukturen zu tun haben.

Der Terminus „Klassifikation von Blätterungen“ bedarf dringend einer näheren Erklärung, denn in der Literatur versteht man darunter oft auch die abstrakte Klassifikation der *Konkordanzklassen* von Blätterungen auf geschlossenen Mannigfaltigkeiten (s. [Thurs]) oder die abstrakte Klassifikation der *integrierbaren Homotopieklassen* von Blätterungen auf offenen Mannigfaltigkeiten (s. [Haefl]), die sich beide als Lifthomotopieklassifikationen formulieren lassen. Dabei ist jedoch folgendes zu bedenken: Es gibt keinerlei Anhaltspunkte, welche geometrischen Eigenschaften zwei konkordante Blätterungen gemeinsam haben, was erst recht für die integrierbaren Homotopieklassen gilt.

¹⁾ von mengentheoretischen Schwierigkeiten werde hier mal abgesehen.

Dagegen besitzen zwei Blätterungen genau dann dieselben geometrischen Eigenschaften, wenn sie *isomorph* sind. Daher ist in dieser Arbeit mit der abstrakten Klassifikation von Blätterungen stets die abstrakte Klassifikation der *Isomorphieklassen* von Blätterungen gemeint, die in allgemeiner Form bisher nicht existierte. Grob gesprochen lautet das Hauptresultat der vorliegenden Arbeit:

Im Prinzip gibt es für PL-Blätterungen eine zum Beispiel [3] analoge und unabhängig von der Dimension und Kodimension einheitliche Lifthomotopie-klassifikation.

Bevor die mathematische Form dieser abstrakten Klassifikation von PL-Blätterungen dargelegt wird, sollte die „Philosophie“ der Arbeit verdeutlicht werden:

In der konventionellen Topologie definiert man für eine betreffende Klasse von geometrischen Objekten kunstvolle Invarianten meist algebraischer Art, die möglichst fein und zahlreich genug sein sollen, um mit ihnen die Isomorphieklassen der Objekte klassifizieren zu können. Manchmal kommt man damit ans Ziel, manchmal aber auch nicht. Die Herangehensweise dieser Arbeit ist jedoch eine ganz andere:

Anstatt von der Ursprungskategorie als „Eichkategorie“ auszugehen, sollte man versuchen, von ihr unabhängig einen der jeweils betrachteten Objektklasse angepaßten, natürlichen und geeigneten Rahmen (i.e. richtige Kategorien, richtige Räume) zu ihrer Beschreibung zu finden, der es erlaubt, mit einfachsten Mitteln (i.e. Homologie, Homotopie) eine abstrakte Klassifikation zu gewinnen. Oder anders ausgedrückt: Der mathematische Eifer wird von der Konstruktion der komplizierten Invarianten auf die Konstruktion der geeigneten Räume und Kategorien verlagert.

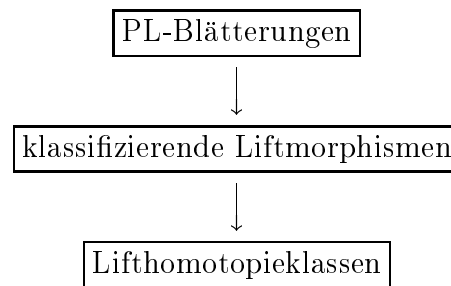
Dieses duale Vorgehen kann man sehr schön am Beispiel des Satzes von Frobenius demonstrieren: Lt. diesem sind nur die involutiven Tangentialfelder²⁾ von C^∞ -Blätterungen induziert. Dies liegt aber einfach nur daran, daß herkömmliche Vektorbündel nicht der geeignete Rahmen zur Beschreibung von Blätterungen sind. Wie Korollar 2.6.6 zeigt, ist der richtige Rahmen durch die geblättern Mikroidbündel gegeben, denn demnach korrespondieren DIFF-Blätterungen tatsächlich zu Unterbündeln des geblättern Tangentialmikroidbündels.

Gegenüber Vektorbündeln weisen geblättern Mikroidbündel jedoch einen gravierenden Nachteil auf: Ihre Isomorphieklassen sind nicht homotopieinvariant! Daher liefert ein klassifizierender Raum für deren Homotopieklassen auch keine abstrakte Klassifikation von Blätterungen. Die Arbeit zeigt, wie man trotzdem und unabhängig von geblättern Mikroidbündeln eine abstrakte Klassifikation von PL-Blätterungen gewinnen kann.

Die methodischen Ideen in dieser Arbeit lassen sich folgendermaßen umreißen:

Das Grundschema ist durch

²⁾Ein Tangentialfeld ist ein Unterbündel des Tangentialbündels.



gegeben. Beide Schritte sind in etwa gleich essentiell. Der Anfang des ersten Schrittes ist noch relativ konventionell: äquivalente Beschreibung von CAT-Blätterungen mittels *gelifteter* Gruppoid-Strukturen. Obwohl dies eigentlich trivial ist, findet sich in der Literatur scheinbar keine solche Charakterisierung, denn man kennt nach HAEFLIGER bisher wohl nur die Charakterisierung mittels spezieller (i.e. submersiver) Gruppoid-Strukturen. Die *Bündelblätterungen*, i.e. Blätterungen, deren Blätter ein Faserbündel darstellen, erlauben aber keine solche Charakterisierung, so daß sie deswegen auch nicht analog wie PL-Blätterungen abstrakt klassifiziert werden können.

Danach wird sich auf die Suche nach einem klassifizierenden Raum für Gruppoid-Strukturen begeben, der diese ganz direkt (und nicht etwa deren Homotopieklassen o.ä.) klassifizieren soll. Der Grundgedanke ist hierbei folgender:

Das Ziel ist ein geeigneter Rahmen für eine Art Lifthomotopieklassifikation von Blätterungen. Dieser Rahmen wird voraussichtlich die Konstruktion neuer Kategorien und eines neuen Homotopiebegriffes mit sich bringen. Wie dieser beschaffen sein muß, kann aber nicht im vorhinein entschieden werden. Gelingt jedoch jene direkte Klassifikation von Gruppoid-Strukturen, besteht auch eine realistische Chance, den geeigneten Homotopiebegriff zu finden.

Die Suche nach einem klassifizierenden Raum für Gruppoid-Strukturen ist jedoch vollkommen sinnlos, da ein solcher nach Satz 5.1.1 gar nicht existieren *kann*. Aber prinzipiell wissen wir ja bereits, woran das liegt: **Top** ist dafür eben nicht die richtige Kategorie.

Eine geeignete Kategorie ist aber **Top⁺**, die Kategorie der allgemeinen projektiven topologischen Systeme, die allgemeiner als in der Literatur üblich definiert werden muß. Hierbei ist **Top** \subset **Top⁺** eine volle Unterkategorie. Auch die Morphismen dieser erweiterten Kategorie sind von allgemeinerer Gestalt und am ehesten noch mit den Morphismen der Pro-Kategorie Pro-**Top** vergleichbar. Es gibt aber auch Unterschiede (siehe hierzu Bemerkung 4.3.2). Weil sich in **Top⁺** der Begriff der stetigen Abbildung befriedigend (und mit **Top** kompatibel) definieren läßt, übertragen sich wichtige Eigenschaften und Konstruktionen in **Top** auf die Oberkategorie **Top⁺**, aber so manches ist in **Top⁺** auch anders als in **Top**.

Da aber die Gruppoid-Strukturen als kontravarianter Funktor auf **Top** definiert sind, ergibt es eigentlich keinen Sinn, von einem klassifizierenden Objekt aus **Top⁺** zu sprechen. Auch hier schafft eine Begriffserweiterung des 'klassifizierenden Objektes relativ zu einem Funktor' Abhilfe: Seien \mathcal{A}, \mathcal{B} Kategorien, $i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein kovarianter und $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Set}$ ein kontravarianter Funktor. F heißt schwach klassifizierbar relativ i , wenn ein Objekt $Y \in \mathcal{B}$ existiert, so daß die Funktoren F und $\text{Mor}(\cdot, Y) \circ i$ natürlich äquivalent sind.

Ein klassifizierendes Objekt im herkömmlichen Sinne ist in dieser Terminologie also dasselbe wie ein klassifizierendes Objekt relativ zum Identitätsfunktork.

Der Lohn für diese Neuerungen besteht in der Existenz eines (bis auf \mathbf{Top}^\star -Isomorphie) *eindeutigen* klassifizierenden „Raumes“ $B^\star\Gamma \in \mathbf{Top}^\star$ für die abzählbaren Γ -Strukturen (i.e. Γ -Strukturen zu abzählbaren Überdeckungen, wobei Γ eine topologische Kategorie ist.) (Satz 5.4.2). Das klassifizierende System $B^\star\Gamma$ ist schwach homotopieäquivalent zum klassifizierenden Raum $B\Gamma \in \mathbf{Top}$ der Homotopieklassen abzählbarer Γ -Strukturen, wobei Γ nur als topologische Kategorie vorausgesetzt wird. Außerdem ist $B\Gamma$ schwach homotopieäquivalent zum klassischen Raum $B_{\text{Milnor}}\Gamma$ (s. [Mi, Haefl]).

Die Konsequenz dieser Bemühungen ist eine *direkte Liftklassifikation* von Blätterungen, wozu wir folgende Gruppoide einführen und uns auf den Fall $\text{CAT} = \text{PL}$ beschränken:

Mit $\Gamma_m := \Gamma_m^{\text{PL}}$ werde der Gruppoid aller Keime lokaler PL-Homöomorphismen des \mathbb{R}^m bezeichnet und mit $\Gamma_{\{m,q\}} := \Gamma_{\{m,q\}}^{\text{PL}}$ der Gruppoid aller Keime lokaler PL-Homöomorphismen des \mathbb{R}^m , die die Standardblätterung $\mathcal{F}_{m,q}$ des \mathbb{R}^m der Kodimension q respektieren. Die Kartenwechsel der PL-Struktur von M^m definieren eine kanonische Γ_m -Struktur σ_M von M und die Blätterkartenwechsel einer PL-Blätterung \mathcal{F} auf M der Kodimension q entsprechend eine $\Gamma_{\{m,q\}}$ -Struktur $\sigma_{\mathcal{F}}$. Nun induziert die Inklusion $\Gamma_{\{m,q\}} \subset \Gamma_m$ auf der Ebene der Gruppoid-Kozykel eine Abbildung $H^1(i) : H^1(M; \Gamma_{\{m,q\}}) \rightarrow H^1(M; \Gamma_m)$ mit der Eigenschaft, daß die $\Gamma_{\{m,q\}}$ -Struktur $\sigma_{\mathcal{F}}$ einen Lift von σ_M über $H^1(i)$ darstellt.

Die Lifts von σ_M übersetzen sich in Lifts der klassifizierenden Abbildung

$$f_M : M \longrightarrow B^\star\Gamma_m$$

von σ_M , was die folgende direkte Charakterisierung solcher Blätterungen (mit $\text{Fol}_q(M)$ bezeichnet) liefert:

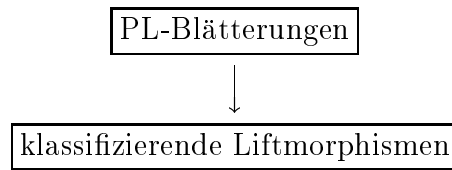
$$\text{Fol}_q(M) = \text{Lifts von } f_M \text{ über } B^\star\Gamma_{\{m,q\}} \rightarrow B^\star\Gamma_m,$$

wobei die rechte Abbildung $B^\star\Gamma_{\{m,q\}} \rightarrow B^\star\Gamma_m$ von $i : \Gamma_{\{m,q\}} \hookrightarrow \Gamma_m$ induziert ist. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & B^\star\Gamma_{\{m,q\}} \\ & \nearrow & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f_M} & B^\star\Gamma_m \end{array}$$

dient der Visualisierung dieser direkten Klassifikation. Um die Isomorphieklassen zu bekommen, muß noch die Aktion von $\text{Aut}^{\text{PL}} M$ auf den Lifts ausdividiert werden.

Auf diese Weise ist zunächst der erste Schritt



vollbracht. Im zweiten Schritt kommt die „Philosophie“ der Arbeit mindestens ebenso zum Tragen wie im ersten Schritt.

Geht man aus dieser Situation heraus einfach zu den Homotopieklassen der Lifts von f_M über, bekommt man (wegen der fehlenden Homotopieinvarianz bei geblätterten Mikroidbündeln) natürlich keine abstrakte Klassifikation von $\text{Fol}_q(M)$ modulo Isotopie oder dergleichen, weil die Lifthomotopieklassen zu stark vergrößern. An dieser Stelle braucht man eine neue Idee: Nach Konstruktion sind für jeden topologischen Gruppoiden Γ die Komponenten des Systems $B^*\Gamma$ nicht Hausdorffsch, so daß es auch nicht erstaunt, wenn mit den Lifthomotopieklassen nicht klassifiziert werden kann. Von daher liegt die Vermutung nahe, eine „Zähmung“ dieser wilden Topologie von $B^*\Gamma$ könnte eine strengere Topologie liefern, so daß die Homotopieklassen (bzgl. der gezähmten Topologie) der Lifts von f_M schließlich doch die gewünschte abstrakte Lifthomotopieklassifikation von Blätterungen liefert, was sich *im Prinzip* tatsächlich auch bestätigt. Einzelheiten hierzu werden im folgenden erörtert.

Die Begriffe ‘zahn’ und ‘wild’ sind in der Topologie wohlbekannt. So wird etwa eine topologische Einbettung $f : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ (also ein Knoten) zahn genannt, wenn f ambient homöomorph zu einer PL-Abbildung ist. Daher gilt eine PL-Abbildung als der Prototyp einer zahmen Abbildung.

Eine Übertragung dieser Definition auf $B^*\Gamma$ ist natürlich nicht möglich, weil $B^*\Gamma$ noch nicht mal Hausdorffsch geschweige denn triangulierbar ist. Daher wird man um eine Erweiterung des konventionellen Begriffes nicht herumkommen.

Hierzu gibt die folgende Beobachtung den entscheidenden Ausschlag:

- 1.) Injektivität ist eigentlich auch schon ein gewisser Aspekt des Zahnseins.
- 2.) Das Verhalten einer i.a. nicht injektiven Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist zum großen Teil vom Verhältnis der Fasern von f gegenüber der Topologie von X bestimmt, wozu eine Kenntnis der Topologie von Y nicht vonnöten ist.

Den passendsten Prototyp eines solchen zahmen „Faserverhältnisses“ stellt sicherlich eine sog. triangulierbare Zerlegung dar (s. 1. Kapitel). Aus dieser Konzeption heraus sind auch die Pseudo-PL-Abbildungen definiert.

Somit braucht nur der Definitionsbereich, aber nicht der Bildbereich einer zahmen Abbildung ein Polyeder zu sein. Daraus ergibt sich eine sehr allgemeine Begriffsbildung von ‘zahmer Struktur’ eines topologischen Raumes X : Diese bestehe einfach aus irgendwelchen, gegebenen stetigen Abbildungen $P \rightarrow X$ mit kompakten Polyedern P , so daß Verkettung von rechts mit PL-Abbildungen wieder einer zahme Abbildung liefert. Diese Definition läßt sich ohne Schwierigkeiten auf \mathbf{Top}^* übertragen.

Wieder ist es entscheidend, die richtige zahme Struktur von $B^*\Gamma$ zu finden. Hierfür bilden sich in der Arbeit mehrere Möglichkeiten heraus, die eine abstrakte Klassifikation ermöglichen, von denen die sog. nd-zahme Standardstruktur favorisiert wird.

Mit der Wahl einer geeigneten Zählungsstruktur von $B^{\star}\Gamma$ ist aber die abstrakte Klassifikation noch längst nicht erledigt. Was man außerdem noch braucht, ist ein Argument, das von der Homotopie oder gar Homologie zweier Abbildungen auf deren Gleichheit oder zumindest Isomorphie schließen läßt. Eine sehr einfache und generelle Bedingung für einen solchen Schluß ist die folgende: Die beiden betrachteten Abbildungen $f_0, f_1 : M \rightarrow X$ seien beide injektiv, auf der *geschlossenen* PL-Mannigfaltigkeit M definiert und homolog, wobei X ein Polyeder mit $\dim X = \dim M$ ist (s. Lemma 7.5.1).

Die abstrakte Klassifikation wird letztendlich auf dieses einfache Vergleichsargument zurückgeführt, was wiederum einigen Aufwand erfordert, denn die Tatsache, daß \mathbf{Top}^{\star} -Morphismen $M \rightarrow B^{\star}\Gamma$ keine Abbildungen im üblichen Sinne sind, bereitet einige Probleme, die mittels verschiedener Strategien gelöst werden müssen. Eine Schlüsseleigenschaft hierfür *wäre* die Additivität der nd-zahmen Struktur, d.h. zwei Abbildungen, die jeweils zahm auf zwei Unterpolyedern sind und auf dem Durchschnitt übereinstimmen, sollen sich zu einer zahmen Abbildung vereinigen lassen. Das Problem: Nur die sog. nd-zahme *Grundstruktur* ist additiv, nicht aber die nd-zahme Struktur selbst. Dieses Problem wird mit \mathbf{P}^{\downarrow} -Polyedern und den von ihnen induzierten variablen \downarrow zahmen Strukturen behoben. \mathbf{P}^{\downarrow} -Polyeder sind i.w. kompakte Polyeder zusammen mit einer Isomorphieklasse surjektiver PL-Abbildungen. Mit Hilfe der \mathbf{P}^{\downarrow} -Polyeder wird die fehlende Existenz von allgemeinen Pushouts in \mathbf{PL} umgangen, indem man auf Pushouts von PL-Einbettungen zurückgreift.

Für die Additivität der nd-zahmen Grundstruktur von $B^{\star}\Gamma$ ist außerdem folgende wichtige Systemeigenschaft ausschlaggebend, falls Γ als étale-Gruppoid vorliegt: Die Systemmorphisme von $B^{\star}\Gamma$ sind dann nämlich alle Serre-Faserungen mit schwach zusammenziehbarer Faser.

Eine variable zahme Struktur von $X^{\star} \in \mathbf{Top}^{\star}$ induziert eine entsprechende variable zahme Homotopie und Homologie von X^{\star} . Speziell für $B^{\star}\Gamma$, Γ étale-PL-Gruppoid, ermöglicht diese eine abstrakte Klassifikation mittels gezähmter *Dipol*-Homologie, so daß die gezähmten Lifthomotopieklassen (modulo der Selbshomotopieäquivalenzen $[M, M]^{\simeq}$ von M) doch nicht ganz die richtige abstrakte Klassifikation zu liefern *scheinen*. Daß dies aber dennoch so ist, kann daher bis jetzt nur vermutet werden.

Eine auf jeden Fall richtige, abstrakte Klassifikation der PL-Isomorphieklassen von PL-Blätterungen einer festen Kodimension $q \leq m$ ist also durch die Lift-Dipol-Homologieklassen gegeben. Die Definition der Dipol-Homologie ist erst in \mathbf{Top}^{\star} sinnvoll, da sie in \mathbf{Top} mit der singulären Homologie zusammenfällt.

Ein anderes wesentliches Element ist die *Zählungskonstruktion*, die es möglich macht, stets mit ungezähmten Objekten aus \mathbf{Top}^{\star} zu arbeiten.

Jede variable \downarrow zahme Struktur eines Systems $X^{\star} \in \mathbf{Top}^{\star}$ induziert das Zählungssystem $P_v^{\downarrow\star}(X^{\star})$, das man gewissermaßen auch als eine Pseudo-Triangulierung von X^{\star} bzgl. jener variablen \downarrow zahmen Struktur ansehen kann. Für étale-PL-Gruppoid Γ wählen wir die kürzere Bezeichnung

$$P^{\star}\Gamma := P_v^{\downarrow\star}(B^{\star}\Gamma).$$

Diese Zählung ist im gewissen Sinne funktoriell, d.h. ein étale-PL-Gruppoidhomomorphismus $\varphi : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ induziert einen \mathbf{Top}^{\star} -Morphismus $P^{\star}\varphi : P^{\star}\tilde{\Gamma} \rightarrow P^{\star}\Gamma$ und dieser

einen Dipol-Homologiemorphismus

$$H_m^D(P^\star\varphi; \mathbb{Z}_2) : H_m^D(P^\star\tilde{\Gamma}; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_m^D(P^\star\Gamma; \mathbb{Z}_2).$$

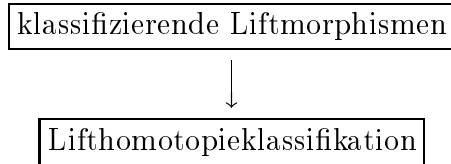
Wenden wir dies auf $\tilde{\Gamma} := \Gamma_{\{m,q\}}$, $\Gamma := \Gamma_m$ und $\varphi := i$ an und beachten, daß die klassifizierende Abbildung f_M eine Homologieklassse $f_{M,*}[M] \in H_m^D(P^\star\Gamma_m; \mathbb{Z}_2)$ sowie eine Abbildung $\tilde{f}_M : M \rightarrow P^\star\Gamma_m$ induziert (wobei $[M]$ die Fundamentalklasse von M bezeichne), so erhalten wir für eine geschlossene, zusammenhängende PL-Mannigfaltigkeit M^m bereits die abstrakte Klassifikation (Satz 8.2.3)

$$\boxed{\text{Fol}_q(M)/\cong = \left(H_m^D(P^\star i; \mathbb{Z}_2)\right)^{-1}(f_{M,*}[M]).}$$

Außerdem gibt es eine *surjektive* Lifthomotopieklassifikation

$$\boxed{\{\text{Lifthomotopieklassen von } [\tilde{f}_M]\}/[M, M]^\simeq \longrightarrow \text{Fol}_q(M)/\cong}$$

Damit ist endlich auch der zweite Schritt



realisiert. Der Beweis dieses Satzes bzw. von Satz 7.7.2 liefert zudem eine allgemeine, abstrakte Klassifikation von gelifteten étale-PL-Gruppoid-Strukturen.

Die Möglichkeit eines Übergangs von dieser abstrakten Klassifikation zu einer konkreten steht und fällt natürlich mit der Bestimmung der Homotopietypen von $P^\star\Gamma_{\{m,q\}}$ und $P^\star\Gamma_m$ bzw. mit Aussagen über den Homotopietyp der homotopietheoretischen Faser von $P^\star i : P^\star\Gamma_{\{m,q\}} \rightarrow P^\star\Gamma_m$, falls eine solche überhaupt in \mathbf{Top}^\star existiert.

Zu dieser Frage liefert Satz 8.1.4 für die unteren Dimensionen eine optimale Antwort: Für jeden m -dimensionalen étale-PL-Gruppoiden Γ besitzt die Zählung $P^\star\Gamma$ bis zur Dimension $m - 1$ denselben PL-schwachen Homotopietyp wie $B\Gamma$.

Eine Übertragung von Satz 8.2.3 auf topologische Blätterungen mit Hilfe der in der Arbeit vorgestellten Methoden ist derzeit zwar noch nicht verfügbar, könnte wohl aber im Kontext des *Pfadargumentes* aus Anmerkung 8.3.2 in Zukunft realisiert werden.

Die Arbeit gliedert sich in acht Kapitel. Jedes Kapitel ist mit einer eigenen Einleitung versehen, um die jeweiligen prinzipiellen Themen aufzubereiten.

Das erste Kapitel definiert Blätterungen und Bündelblätterungen als spezielle bogenzusammenhängende (bgzsh-) Zerlegungen, führt die triangulierbaren Zerlegungen und Blätterungen ein, und weist nach der Definition der Pseudo-PL-Abbildungen auf die äquivalente Interpretation von Blätterungen als Garbenschnitte hin.

Die bereits im Vorwort erwähnten Mikroidbündel sind das Thema des zweiten Kapitels. Die ersten beiden Abschnitte befassen sich mit dem heuristischen Zusammenhang zwischen verallgemeinerten Differenzierbarkeitsbegriffen und allgemeinen Tangentialräumen.

Neu ist die Definition der Unterbündel von Mikroidbündeln und der Satz über die bijektive Korrespondenz zwischen Blätterungen und Unterbündeln des Tangentialmikroidbündels.

Im dritten Kapitel werden Gruppoide und étale-Gruppoide, Gruppoid-Kozykel und Gruppoid-Strukturen definiert, und der Satz über die Entsprechung zwischen geblätterten Mikroidbündeln und bestimmten Gruppoid-Strukturen erwähnt.

Im vierten Kapitel werden allgemeine induktive und projektive Systeme eingeführt und ihre wichtigsten elementaren Eigenschaften studiert. Eine besondere Stellung nehmen hierbei die schönen induktiven und projektiven Systeme ein, die über sehr feudale Eigenschaften verfügen. Für die Kategorie \mathbf{Top}^* werden ferner die Begriffe „Serre-Faserung“ und „schwache Homotopieäquivalenz“ definiert. Eine Spielart von projektiven \mathbf{Top} -Systemen wird durch den Begriff der relativen Injektivität geschaffen, die aus mehreren Gründen in die Arbeit aufgenommen wurde: Zum einen trägt sie zur Transparenz des Beweises vom Klassifikationssatz 7.5.2 bei, der dann mit einigen Änderungen als Beweis von Satz 7.7.2 verwendet werden kann. Zum anderen liefert relative Injektivität den idealen Übergang von den zahmen Strukturen zu den variablen zahmen Strukturen. Drittens scheint man für die abstrakte Klassifikation von *simplizialen* étale-Gruppoid-Strukturen (und damit evtl. für die abstrakte Klassifikation von triangulierbaren Blätterungen) mit dem ri-Klassifikationssatz und damit ohne \mathbf{P}^\downarrow -Polyeder auszukommen.

Das 5. Kapitel enthält neben der Einführung von klassifizierenden Objekten relativ zu Funktoren das *Eindeutigkeitsprinzip*, die Konstruktion von $B^*\Gamma$ und die direkte Charakterisierung von Blätterungen als Lifts der klassifizierenden Abbildung f_M . Außerdem wird die schöne Systemfaserungseigenschaft von $B^*\Gamma$ (für étale-Gruppoide) sowie die schwache Homotopieäquivalenz $B\Gamma \rightarrow B^*\Gamma$ (für topologische Kategorien Γ) und $B_{\text{Milnor}}\Gamma \rightarrow B\Gamma$ (für topologische Gruppoide Γ) bewiesen.

Die geometrische Ω -Homologie, die wir zur Klassifikation nicht benötigen, sowie die wichtige klassifikationsrelevante Dipol-Homologie werden im 6. Kapitel definiert. Vorher wird geschildert, wie man ohne Verwendung von Grothendieck-Gruppen oder freien abelschen Gruppen durch Ausdividieren geeigneter Äquivalenzrelationen von Monoiden zu abelschen Gruppen gelangt, um so der direkten geometrischen Vorstellung noch mehr entgegen zu kommen.

Das zentrale Thema des 7. Kapitels bilden zahme Strukturen und etliche Varianten, die Einführung der \mathbf{P}^\downarrow -Polyeder sowie die Zähmungskonstruktion, die im Laufe des Kapitels mehr und mehr verallgemeinert wird und schließlich in den Klassifikationssätzen 7.5.2 und 7.7.2 gipfelt.

Im 8. Kapitel werden die Voraussetzungen für diese Sätze überprüft und zusammengetragen, um die abstrakte Klassifikation von PL-Blätterungen und gelifteten étale-PL-Gruppoid-Strukturen formulieren und beweisen zu können. Dafür werden vorher zahme Gruppoid-Strukturen und die zahmen Standardgrundstrukturen auf $B^*\Gamma$ definiert. Satz 8.1.4 liefert außerdem die bereits erwähnte schwache PL-Homotopieäquivalenz in den unteren Dimensionen zwischen $B\Gamma$ und der Zähmung $P^*\Gamma$ (bzgl. der nd-zahmen Standardgrundstruktur). Anmerkungen allgemeiner Art, die vorwiegend das Verständnis der internen Konstruktionsvorgänge fördern sollen, runden die Arbeit ab.

Kapitel 1

Zerlegungen und Blätterungen

Es gibt verschiedene, zueinander äquivalente Definitionen von Blätterungen. Wir wollen die Blätterungen als spezielle Zerlegungen auffassen, weil einige ihrer elementaren Eigenschaften ebenso für bogenweise zusammenhängende Zerlegungen gelten, die im zweiten Abschnitt definiert werden. Vorher führen wir im ersten Abschnitt ganz allgemein Zerlegungen ein und studieren ihre wichtigsten elementaren Eigenschaften. Die Definition der Blätterungen erfolgt im dritten Abschnitt, in dem auch die Klasse der Bündelblätterungen erwähnt wird.

Im vierten Abschnitt werden die triangulierbaren Blätterungen eingeführt, deren Blätterräume stets Hausdorffsch sind. Als eine der Vorbereitungen für das siebte Kapitel schließt sich daran die Definition der Pseudo-PL-Abbildungen an.

In den letzten beiden Abschnitten werden Blätterungen und Bündelblätterungen als Garbenschnitte interpretiert.

1.1 Zerlegungen

1.1.1 Wir betrachten Zerlegungen¹⁾ zunächst ganz unabhängig von jeglicher Topologie. Eine Zerlegung \mathcal{F} einer Menge M ist, wie das Wort schon andeutet, eine Menge von paarweise disjunkten Teilmengen von M , die M überdecken. Das bedeutet anders gesagt, daß genau eine Äquivalenzrelation auf M existiert, deren Äquivalenzklassen die Zerlegung \mathcal{F} von M bilden.

In diesem Sinne gibt es eine bijektive Korrespondenz zwischen den Zerlegungen von M und den Äquivalenzrelationen auf M .

Daher werden wir eine gegebene Zerlegung \mathcal{F} manchmal auch als Äquivalenzrelation auffassen, wenn dies für die Argumentation günstiger ist. Die Notation \mathcal{F} ist zwar unüblich, soll aber daran erinnern, daß Blätterungen (foliations im Englischen) nur

¹⁾Für topologische Räume sind in der Literatur Zerlegungen etwas spezieller definiert, siehe dazu Bemerkung 1.2.3.

spezielle Zerlegungen sind. Daher sollen die Elemente einer Zerlegung \mathcal{F} , also die Äquivalenzklassen, **Blätter** heißen, die meist mit L (von Englisch leaf) bezeichnet werden. Ferner schreiben wir $L \in \mathcal{F}$. Wir setzen nicht voraus, daß $M \neq \emptyset$ sein soll. Dann kann \mathcal{F} nämlich nur die leere Äquivalenzrelation sein. Wem das nicht zusagt, kann sich aber immer auf nichtleere Mengen zurückziehen, denn nur für diese benötigen wir sämtliche Aussagen dieser Arbeit.

WEITERE BEZEICHNUNGEN. Ist \mathcal{F} eine Zerlegung von M mit der zugehörigen Äquivalenzrelation „ \sim “, so bezeichne $M/\mathcal{F} := M/\sim$ den **Blätterraum** oder Blätterquotienten von \mathcal{F} , und die Quotientenabbildung $\pi : M \rightarrow M/\mathcal{F}$ werde **Blätterprojektion** genannt.

Sei \mathcal{F} eine Zerlegung von N und $f : M \rightarrow N$ eine Mengenabbildung. Dann induziert f eine Zerlegung

$$f^*(\mathcal{F}) = \{ f^{-1}(L) \mid L \in \mathcal{F} \text{ Blatt} \}$$

von M , die man auch als **Pullback** bezeichnet. Ist speziell $f = i : M \hookrightarrow N$ eine Inklusion, sei $\mathcal{F}|_M := i^*(\mathcal{F})$ die Einschränkung von \mathcal{F} auf M . Wegen der *Kontravarianz* des Pullbacks hat man also einen kontravarianten Funktor $\mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$.

Ist \mathcal{F} eine Zerlegung von M , \mathcal{F}' eine Zerlegung von N und $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung, so heie f **blättertreu**, wenn f jedes Blatt aus \mathcal{F} in ein geeignetes Blatt von \mathcal{F}' abbildet. Wir schreiben

$$f : (M, \mathcal{F}) \longrightarrow (N, \mathcal{F}')$$

genau dann, wenn f blättertreu ist.

Vorsicht: Ist $f : (M, \mathcal{F}) \longrightarrow (N, \mathcal{F}')$ blättertreu und gleichzeitig bijektiv, so braucht f noch lange nicht ein Blatt aus \mathcal{F} bijektiv auf ein Blatt aus \mathcal{F}' abzubilden. Man siehe jedoch Folgerung 1.3.1. Daher führen wir den **Transport** von Zerlegungen ein:

Mittels Bijektionen können Zerlegungen kovariant transportiert werden: Sei $f : M \xrightarrow{\cong} N$ eine Bijektion und \mathcal{F} eine Zerlegung auf M . Dann induziert f die Zerlegung

$$f_*(\mathcal{F}) := \{ f(L) \mid L \in \mathcal{F} \text{ Blatt} \}$$

auf N . Selbstverständlich gilt $f^*f_*(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.

1.1.2 DEFINITION. Für je zwei Zerlegungen \mathcal{F}_0 und \mathcal{F}_1 von M gelte $\mathcal{F}_0 \leq \mathcal{F}_1$, wenn jedes Blatt von \mathcal{F}_0 in einem geeigneten Blatt von \mathcal{F}_1 enthalten ist. Es folgt, daß jedes Blatt von \mathcal{F}_1 eine disjunkte Vereinigung von Blättern aus \mathcal{F}_0 ist. Daher werden die Zerlegungen von M durch „ \leq “ (teil)geordnet. Äquivalent dazu gilt $\mathcal{F}_0 \leq \mathcal{F}_1$, wenn \mathcal{F}_0 als Äquivalenzrelation feiner ist als \mathcal{F}_1 . Dies ist wiederum äquivalent dazu, daß die Blätterprojektion von \mathcal{F}_1 durch die von \mathcal{F}_0 faktorisiert (siehe Abb.).

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ \pi_0 \swarrow & & \searrow \pi_1 \\ M/\mathcal{F}_0 & \longrightarrow & M/\mathcal{F}_1 \end{array}$$

1.1.3 Wir wenden uns jetzt der Frage zu, wie man auf einer Überdeckung gegebene Einzelzerlegungen so zu einer Gesamtzerlegung zusammensetzen kann, daß diese in einem bestimmten Sinne eindeutig ist. Sei dazu $(M_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung der Menge M mit Zerlegungen \mathcal{F}_i von M_i für jedes $i \in I$. Jedes \mathcal{F}_i entspricht einer Äquivalenzrelation r_i auf M_i , die wie folgt zu einer Äquivalenzrelation R_i auf M trivial fortgesetzt wird:

$$x R_i y \quad : \iff \quad x = y \quad \text{oder} \quad x, y \in M_i \quad \text{und} \quad x r_i y.$$

R_i ist daher die feinste aller Fortsetzungen von r_i auf M . Bekanntlich ist die von allen R_i erzeugte Äquivalenzrelation R die kleinste Äquivalenzrelation auf M , die alle R_i enthält. Darüber hinaus kann R konkret angegeben werden: Es gilt $x R y$ genau dann, wenn Indizes $i_0, \dots, i_n \in I$ und Elemente $x_k \in M_{i_{k-1}} \cap M_{i_k}$ für alle $k = 1, \dots, n$ existieren, so daß $x \in M_{i_0}$, $y \in M_{i_n}$, $x r_{i_0} x_1$, $y r_{i_n} x_n$ und $x_k r_{i_k} x_{k+1}$ für alle $k = 1, \dots, n-1$. Die gesuchte „Summenzerlegung“ der \mathcal{F}_i ist nun einfach diejenige Zerlegung \mathcal{F} von M , die der Äquivalenzrelation R entspricht. Die Gestalt von R impliziert, daß jedes Blatt von \mathcal{F} eine Vereinigung von Blättern gewisser \mathcal{F}_i ist. Es ist zweckmäßig, $\mathcal{F} = \sum_i \mathcal{F}_i =: \Sigma \mathcal{F}_i$ zu schreiben. Aufgrund der Korrespondenz zwischen Äquivalenzrelationen und Zerlegungen erhalten wir sofort die

FOLGERUNG. *Zu jeder Überdeckung $(M_i)_{i \in I}$ von M und jeder Familie $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ von Zerlegungen \mathcal{F}_i von M_i existiert genau eine (bzgl. \leq) kleinste Zerlegung \mathcal{F} von M , die sog. Summenzerlegung der \mathcal{F}_i , geschrieben $\mathcal{F} = \Sigma \mathcal{F}_i = \sum_i \mathcal{F}_i$, mit der Eigenschaft $\mathcal{F}_i \leq \mathcal{F}|_{M_i}$ für alle $i \in I$.* △

KOROLLAR. *Seien $(M_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von M und $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$, $(\bar{\mathcal{F}}_i)_{i \in I}$ zwei Familien von Zerlegungen \mathcal{F}_i , $\bar{\mathcal{F}}_i$ von M_i mit $\mathcal{F}_i \leq \bar{\mathcal{F}}_i$ für alle i . Dann gilt $\sum_i \mathcal{F}_i \leq \sum_i \bar{\mathcal{F}}_i$.*

BEWEIS: Es gilt $\mathcal{F}_i \leq \bar{\mathcal{F}}_i \leq \sum_i \bar{\mathcal{F}}_i$ für alle i . Also folgt $\sum_i \mathcal{F}_i \leq \sum_i \bar{\mathcal{F}}_i$ wegen der Minimalitätseigenschaft von $\sum_i \mathcal{F}_i$. △

1.2 Bogenzusammenhängende Zerlegungen

Die im vorigen Abschnitt vorgestellten Zerlegungen sind noch viel zu allgemein, um mit ihnen konkret zu arbeiten. Etwas interessanter sind dagegen bogenzusammenhängende Zerlegungen, die in diesem Abschnitt definiert werden. Für diese beantworten wir vor allem zwei zueinander duale Fragestellungen. Unter welchen sinnvollen, hinreichenden Bedingungen gilt

$$\mathcal{F} = \sum (\mathcal{F}|_{X_i}) \quad \text{und} \quad \left(\sum \mathcal{F}_i \right) \Big|_{X_i} = \mathcal{F}_i \Gamma$$

1.2.1 DEFINITION. Eine bogenweise zusammenhängende oder bogenzusammenhängende Zerlegung, kurz **bgzsh-Zerlegung**, eines topologischen Raumes X ist eine Zerlegung \mathcal{F} von X , so daß jedes Blatt L aus \mathcal{F} bzgl. der induzierten Topologie $L \subset X$ bogenweise zusammenhängend ist.

Die Definitionen des Blätterraumes, der Blätterprojektion aus 1.1.1 und der Ordnungsrelation \leq aus 1.1.2 können wortwörtlich übernommen werden, wobei der Blätterraum mit der Quotiententopologie versehen sei, so daß die Blätterprojektion insbesondere stetig ist. **Selbst für separiertes X ist der Blätterraum X/\mathcal{F} meistens nicht separiert.** Eine viel schwächere Eigenschaft als die Separiertheit des Blätterraumes liefert die folgende

1.2.2 DEFINITION. Eine bgzsh-Zerlegung \mathcal{F} von $X \in \text{TOP}$ heie **lokal separiert**, wenn zu jedem $x \in X$ und jeder Umgebung U von x eine offene Umgebung V von x existiert, so daß $V \subset U$ und $V/(\mathcal{F}|_V)$ ein Hausdorff-Raum ist.

Die Definition des **Pullbacks** verlangt folgende Änderung: Für eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ und eine bgzsh-Zerlegung \mathcal{F} von Y sei

$$f^*(\mathcal{F}) = \{ \text{Bogenkomponenten von } f^{-1}(L) \mid L \in \mathcal{F} \text{ Blatt} \}.$$

KONVENTION. Von jetzt an vereinbaren wir, daß, wenn nichts anderes ausdrücklich gesagt wird, der Pullback unter stetigen Abbildungen stets in diesem Sinne zu verstehen ist. Dies gilt insbesondere für die Einschränkungen von bgzsh-Zerlegungen auf topologische Unterräume.

Wir bemerken noch, daß die bgzsh-Zerlegungen topologischer Räume einen kontravarianten Funktor **Top** \rightarrow **Set** induzieren. Aus der Kontravarianz folgt beispielsweise für $A \subset B \subset X$

$$(\mathcal{F}|_B)|_A = \mathcal{F}|_A.$$

Formelmäßig schreibt sich die Kontravarianz des Pullbacks als

$$(g \circ f)^*(\mathcal{F}) = f^*(g^*\mathcal{F}).$$

Der Transport $f_*(\mathcal{F})$ von bgzsh-Zerlegungen \mathcal{F} ist wie in 1.1.1 entsprechend für Homöomorphismen f definiert. Bezeichnet $\text{Aut}(X)$ die Gruppe der Homöomorphismen von X , so operiert also $\text{Aut}(X)$ und jede Untergruppe $G \subset \text{Aut}(X)$ via Transport auf den bgzsh-Zerlegungen von X . Die Orbits dieser G -Operation nennen wir auch die **G-Klassen** der bgzsh-Zerlegungen von X .

Wie man sich mit der Definition des bgzsh-Pullbacks klarmachen kann, folgt unmittelbar das

KOROLLAR. Sind \mathcal{F} und \mathcal{F}' zwei bgzsh-Zerlegungen von $Y \in \text{Top}$ mit $\mathcal{F} \leq \mathcal{F}'$, und ist $f : X \rightarrow Y$ stetig, so folgt $f^*(\mathcal{F}) \leq f^*(\mathcal{F}')$. △

1.2.3 BEMERKUNG. Bei topologischen Räumen weicht die Literaturdefinition einer Zerlegung von der unsrigen aus dem ersten Abschnitt ab: Die Blätter sind zusätzlich

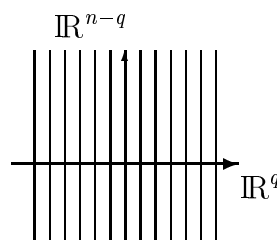
noch abgeschlossen und i.a. nicht zusammenhängend (siehe z.B. [Top] oder [Kura]). Außerdem gibt es noch die sog. **oberhalbstetigen Zerlegungen** von topologischen Räumen. Bei diesen sind nicht nur die Blätter abgeschlossen, sondern auch die Blätterprojektion ist eine abgeschlossene Abbildung (s. [Kura], [Top]). Dies ist äquivalent dazu, daß für jede offene Teilmenge $U \subset X$ die Vereinigung aller in U enthaltenen Blätter offen ist. Wenn X normal ist und \mathcal{F} eine oberhalbstetige Zerlegung von X , folgt auch die Normalität des Blätterraumes X/\mathcal{F} (s. [Top]). Für die speziellere Klasse der monotonen, oberhalbstetigen Zerlegungen²⁾ hatte BING (vgl. [Top]) im Rahmen der geometrischen Topologie eine Theorie entwickelt, deren Bedeutung von vielen Mathematikern zu Unrecht skeptisch beurteilt wurde (vgl. hierzu die Bemerkung von KRECK auf Seite 133 in [DMV]). Denn diese Theorie konnte FREEDMAN essentiell für seinen Beweis des 5-dimensionalen s -Kobordismussatzes verwenden, aus dem die Klassifikation der einfach zusammenhängenden, topologischen 4-Mannigfaltigkeiten folgte (s. [Freed1], [Freed2]).

BEISPIELE

- [1] Das wichtigste Beispiel einer bgzsh-Zerlegung ist $\mathcal{F}_{n,q}$, definiert als

$$\mathcal{F}_{n,q} = \{ \text{Fasern der Standardprojektion } \mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q \}$$

mit $q \leq n$ (siehe Bild).



$\mathcal{F}_{n,q}$ ist die wichtigste, einfachste, schönste und regelmäßigste bgzsh-Zerlegung von \mathbb{R}^n der Kodimension q , denn die Blätter sind zueinander parallele, affine Unterräume des \mathbb{R}^n der Kodimension q . Daher dient $\mathcal{F}_{n,q}$ auch als Standardmodell einer Blätterung der Kodimension q , d.h. alle Blätterungen der Kodimension q auf Mannigfaltigkeiten sind lokal nach $\mathcal{F}_{n,q}$ modelliert, was genauer im nächsten Abschnitt definiert wird.

- [2] Jeder topologische Raum X definiert die **triviale bgzsh-Zerlegung**, bei der jedes Blatt genau einer Bogenkomponente von X entspricht, d.h. die triviale bgzsh-Zerlegung ist die größte aller bgzsh-Zerlegungen von X .
- [3] Im Gegensatz dazu gibt es auch eine kleinste aller bgzsh-Zerlegungen auf X , die **Punktezerlegung**, bei der jedes Blatt aus genau einem Punkt von X besteht.

Selbstverständlich haben Folgerung 1.1.3 und Korollar 1.1.3 ein direktes Analogon für bgzsh-Zerlegungen, denn die konkrete Konstruktion von $\sum \mathcal{F}_i$ impliziert, daß $\sum \mathcal{F}_i$ eine bgzsh-Zerlegung ist, sofern auch alle \mathcal{F}_i bgzsh-Zerlegungen sind.

²⁾Bei diesen sind die Blätter kompakt und zusammenhängend.

FOLGERUNG. Für jede Überdeckung $(X_i)_{i \in I}$ eines topologischen Raumes X und jede Familie $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ von bgzsh-Zerlegungen \mathcal{F}_i von X_i ist die Summenzerlegung der \mathcal{F}_i aus 1.1.3, geschrieben $\mathcal{F} = \sum \mathcal{F}_i = \sum_i \mathcal{F}_i$, die (bzgl. \leq) kleinste bgzsh-Zerlegung \mathcal{F} von X mit der Eigenschaft $\mathcal{F}_i \leq \mathcal{F}|_{X_i}$ für alle $i \in I$. \triangle

KOROLLAR. Seien $(X_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von X und $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}, (\bar{\mathcal{F}}_i)_{i \in I}$ zwei Familien von bgzsh-Zerlegungen $\mathcal{F}_i, \bar{\mathcal{F}}_i$ von X_i mit $\mathcal{F}_i \leq \bar{\mathcal{F}}_i$ für alle i . Dann gilt $\sum_i \mathcal{F}_i \leq \sum_i \bar{\mathcal{F}}_i$. \triangle

1.2.4 Allmählich wollen wir nun die am Anfang dieses Abschnitts erwähnten Problemstellungen angehen. Hierfür ist es am sinnvollsten, sich auf offene Überdeckungen zu beschränken, weil diese am problemlosesten sind. Wir beginnen mit einem grundlegenden Lemma, welches nicht nur das erste Problem löst, sondern auch zur Lösung des zweiten Problems weiterverwendet wird.

LEMMA. Sei \mathcal{F} eine bgzsh-Zerlegung von X und $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X . Dann gilt

$$\mathcal{F} = \sum_i \mathcal{F}|_{U_i}.$$

BEWEIS: Selbstverständlich gilt $\mathcal{F}|_{U_i} =: \mathcal{F}_i \leq \mathcal{F}|_{U_i}$ und somit $\sum \mathcal{F}_i \leq \mathcal{F}$ wegen der Minimalität der Summenzerlegung nach Folgerung 1.2.3. Sei nun L ein Blatt von \mathcal{F} . L ist bogenweise zusammenhängend, so daß zu je zwei Punkten $x, y \in L$ ein Weg $v : [a, b] \rightarrow L$ von x nach y existiert. Wegen der Existenz der Lebesgue-Zahl für die offene Überdeckung $v^{-1}(U_i)$ von $[a, b]$ gibt es eine Unterteilung $a = t_0 < \dots < t_n = b$ von $[a, b]$, so daß jedes $v([t_l, t_{l+1}]), l = 0, \dots, n-1$ in einem geeigneten U_i enthalten ist. Für jedes solche l zerfällt $L \cap U_i$ in seine Bogenkomponenten. Daher liegt jedes $v([t_l, t_{l+1}])$ in solch einer Komponente und damit in einem Blatt von $\mathcal{F}|_{U_i}$. Fassen wir $\sum \mathcal{F}_i$ als Äquivalenzrelation auf, sind daher x und y äquivalent. Das bedeutet, daß jedes Blatt von \mathcal{F} in einem Blatt von $\sum \mathcal{F}_i$ enthalten ist, so daß nunmehr auch $\mathcal{F} \leq \sum \mathcal{F}_i$ gilt. \triangle

KOROLLAR. Ist $A \subset X$, $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X und \mathcal{F} eine bgzsh-Zerlegung von X , dann gilt

$$\mathcal{F}|_A = \sum_i \mathcal{F}|_{A \cap U_i}.$$

BEWEIS: Man braucht außer dem vorigen Lemma nur noch die Kontravarianz des Einschränkens zu beachten:

$$\mathcal{F}|_A = \sum_i (\mathcal{F}|_A)|_{A \cap U_i} = \sum_i \mathcal{F}|_{A \cap U_i}. \quad \triangle$$

FOLGERUNG. Seien \mathcal{F}_0 und \mathcal{F}_1 zwei bgzsh-Zerlegungen von X . Dann ist äquivalent:

(i) $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_1$.

(ii) Zu jedem $x \in X$ existiert eine Umgebung U_x von x mit $\mathcal{F}_0|_{U_x} = \mathcal{F}_1|_{U_x}$.

BEWEIS: (i) \Rightarrow (ii) ist klar. Zur Rückrichtung: Ohne Einschränkung kann jedes U_x offen gewählt werden (evtl. verkleinern), so daß $(U_x)_{x \in X}$ eine offene Überdeckung von X ist. Das letzte Lemma liefert dann

$$\mathcal{F}_0 = \sum_x \mathcal{F}_0|_{U_x} = \sum_x \mathcal{F}_1|_{U_x} = \mathcal{F}_1. \quad \triangle$$

1.2.5 Diese Folgerung impliziert sofort eine andere:

FOLGERUNG. Sei $X = X_0 \cup X_1$ und \mathcal{F}_i bgzsh-Zerlegung von X_i , $i = 0, 1$. Dann ist äquivalent:

(i) $\mathcal{F}_0|_{X_0 \cap X_1} = \mathcal{F}_1|_{X_0 \cap X_1}$.

(ii) Zu jedem $x \in X_0 \cap X_1$ existiert eine Umgebung U_x von x mit $\mathcal{F}_0|_{X_0 \cap X_1 \cap U_x} = \mathcal{F}_1|_{X_0 \cap X_1 \cap U_x}$. \triangle

BEZEICHNUNG. Erfüllen \mathcal{F}_0 und \mathcal{F}_1 eine und damit beide Bedingungen (i), (ii), nennen wir \mathcal{F}_0 und \mathcal{F}_1 **kompatibel**. Allgemeiner soll eine Familie $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ von bgzsh-Zerlegungen von X_i , wobei $(X_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von X sei, kompatibel heißen, wenn für alle $i, j \in I$ \mathcal{F}_i und \mathcal{F}_j kompatibel sind, was nach der letzten Folgerung äquivalent zu $\mathcal{F}_i|_{X_i \cap X_j} = \mathcal{F}_j|_{X_i \cap X_j}$ ist.

Zur Formulierung des nächsten Lemmas bedarf es einiger klärender Vorbereitungen. Zwei Überdeckungen $(U_i)_{i \in I}$ und $(V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eines topologischen Raumes X kann man zu einer neuen Überdeckung $(W_\mu)_{\mu \in M} =: (U_i) \cup (V_\lambda)$ vereinigen, indem man als neue Indexmenge $M = I \dot{\cup} \Lambda$ wählt und

$$W_\mu = \begin{cases} U_\mu, & \mu \in I \\ V_\mu, & \mu \in \Lambda \end{cases}$$

setzt. Sind zusätzlich noch bgzsh-Zerlegungen \mathcal{F}_i von U_i und \mathcal{F}_λ von V_λ für alle i, λ gegeben, werden analog bgzsh-Zerlegungen \mathcal{F}_μ von W_μ definiert. Auch hier schreiben wir suggestiver $(\mathcal{F}_\mu)_{\mu \in M} = (\mathcal{F}_i) \cup (\mathcal{F}_\lambda)$.

Nun kann der Fall auftreten, daß (V_λ) darüber hinaus eine Verfeinerung von (U_i) ist. Etwas genauer verstehen wir darunter eine Mengenabbildung $r : \Lambda \rightarrow I$, so daß $V_\lambda \subset U_{r(\lambda)}$ für alle $\lambda \in \Lambda$ gilt. Wir nennen r eine Verfeinerungsabbildung. Dieses r induziert für jede Familie $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ von bgzsh-Zerlegungen \mathcal{F}_i auf U_i durch

$$\mathcal{F}_\lambda := \mathcal{F}_{r(\lambda)}|_{V_\lambda} \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

eine Familie $(\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ von bgzsh-Zerlegungen \mathcal{F}_λ von V_λ . Wir bezeichnen (\mathcal{F}_λ) als die induzierte Verfeinerung von (\mathcal{F}_i) .

LEMMA. Seien $(U_i)_{i \in I}$ und $(V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ zwei offene Überdeckungen von X , (V_λ) eine Verfeinerung von (U_i) , und $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ eine kompatible Familie von bgzsh-Zerlegungen \mathcal{F}_i von U_i . Dann sind sowohl die induzierte Verfeinerung (\mathcal{F}_λ) als auch die Vereinigung $(\mathcal{F}_i) \cup (\mathcal{F}_\lambda)$ kompatibel.

BEWEIS: Die Behauptung folgt sofort aus der letzten Folgerung und der Kontravarianz des Einschränkens (s. in 1.2.2) von bgzsh-Zerlegungen. \triangle

1.2.6 LEMMA. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X , $J \subset I$, so daß $(U_j)_{j \in J}$ ebenfalls eine Überdeckung von X ist, und $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ eine kompatible Familie von bgzsh-Zerlegungen \mathcal{F}_i von U_i für alle $i \in I$. Dann gilt $\sum_{i \in I} \mathcal{F}_i = \sum_{j \in J} \mathcal{F}_j$.

BEWEIS: Zunächst gilt nach Folgerung 1.2.3 $\mathcal{F}_j \leq (\sum_i \mathcal{F}_i)|_{U_j}$ für alle $j \in I$ und damit erst recht für alle $j \in J$. Mit der Minimalitätseigenschaft von $\sum_{j \in J} \mathcal{F}_j$ bekommt man daher sofort die Ungleichung $\sum_{j \in J} \mathcal{F}_j \leq \sum_{i \in I} \mathcal{F}_i$.

Für die Umkehrung dieser Ungleichung muß etwas mehr getan werden. Zuerst wählen wir irgendein $i \in I$ und halten es im weiteren fest. Aus $\mathcal{F}_j \leq (\sum_{j \in J} \mathcal{F}_j)|_{U_j}$ für alle $j \in J$ folgt durch Einschränkung (Korollar 1.2.2)

$$\mathcal{F}_j|_{U_j \cap U_i} \leq \left(\left(\sum_{j \in J} \mathcal{F}_j \right) \Big|_{U_j} \right) \Big|_{U_j \cap U_i} \quad \forall j \in J.$$

Wie schon früher greift jetzt wieder das Argument der Kontravarianz des Einschränkens, wodurch sich die Ungleichung vereinfacht zu

$$\mathcal{F}_j|_{U_j \cap U_i} \leq \left(\sum_{j \in J} \mathcal{F}_j \right) \Big|_{U_j \cap U_i} \quad \forall j \in J.$$

Wegen der Kompatibilität von (\mathcal{F}_i) gilt nach Folgerung 1.2.5

$$\mathcal{F}_j|_{U_j \cap U_i} = \mathcal{F}_i|_{U_j \cap U_i} \quad \forall j \in J.$$

Einsetzen liefert

$$\mathcal{F}_i|_{U_j \cap U_i} \leq \left(\sum_{j \in J} \mathcal{F}_j \right) \Big|_{U_j \cap U_i} \quad \forall j \in J.$$

Nach Korollar 1.2.3 ist das Verkleben von Zerlegungen mit der Monotonie verträglich, woraus sich unter Beachtung von Lemma 1.2.4 und Korollar 1.2.4 die entscheidende Ungleichung

$$\mathcal{F}_i \leq \left(\sum_{j \in J} \mathcal{F}_j \right) \Big|_{U_i}$$

ergibt. Da i beliebig gewählt werden konnte, folgt $\sum_{i \in I} \mathcal{F}_i \leq \sum_{j \in J} \mathcal{F}_j$ wegen der Minimalität von $\sum_{i \in I} \mathcal{F}_i$. \triangle

FOLGERUNG. X , (U_i) und (\mathcal{F}_i) seien wie im vorstehenden Lemma gegeben. Ferner sei $(V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine offene Verfeinerung von (U_i) . Wie vorher bezeichne (\mathcal{F}_λ) die induzierte Verfeinerung von (\mathcal{F}_i) . Dann gilt

$$\sum_{i \in I} \mathcal{F}_i = \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda.$$

BEWEIS: Sei $(W_\mu)_{\mu \in M}$ die Vereinigung $(U_i) \cup (V_\lambda)$ und $(\mathcal{F}_\mu)_{\mu \in M}$ die Vereinigung $(\mathcal{F}_i) \cup (\mathcal{F}_\lambda)$, die nach Lemma 1.2.5 wieder kompatibel ist. Das vorige Lemma impliziert dann

$$\sum_{i \in I} \mathcal{F}_i = \sum_{\mu \in M} \mathcal{F}_\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda. \quad \triangle$$

Nun haben wir die nötigen Hilfsmittel beisammen, um das zweite Problem zu lösen:

1.2.7 LEMMA. X sei ein topologischer Raum mit abzählbarer topologischer Basis, $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X und $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ eine kompatible Familie von lokal separierten, bgzsh-Zerlegungen \mathcal{F}_i von (U_i) , so daß jedes Blatt $L_i \in \mathcal{F}_i$ für alle $i \in I$ lokal bogenweise zusammenhängend³⁾ ist. Dann gilt

$$\left(\sum \mathcal{F}_i \right) \Big|_{U_i} = \mathcal{F}_i \quad \text{für alle } i.$$

BEWEIS: Weil jedes \mathcal{F}_i lokal separiert ist, gibt es nach Definition 1.2.2 zu jedem $x \in X$ ein $i =: r(x) \in I$ mit $x \in U_i$ und eine offene Umgebung $U_x \subset U_i$ von x , so daß $U_x / (\mathcal{F}_i|_{U_x})$ separiert ist. Somit ist $(U_x)_{x \in X}$ eine offene Verfeinerung von $(U_i)_{i \in I}$ mit der Verfeinerungsabbildung⁴⁾ $r : X \rightarrow I$. Wegen der Voraussetzung an X gibt es eine Einbettung $R : \mathbb{N} \hookrightarrow X$, so daß $(V_n := U_{R(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Teilüberdeckung von X darstellt. Mit der Verfeinerungsabbildung $\varrho := r \circ R : \mathbb{N} \rightarrow X \rightarrow I$ ist also $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Verfeinerung von $(U_i)_{i \in I}$. (\mathcal{F}_n) sei die zugehörige nach Lemma 1.2.5 kompatible Verfeinerung von (\mathcal{F}_i) . Die Blätter von \mathcal{F}_n sind wiederum alle lokal bogenweise zusammenhängend.

Hauptziel ist zunächst der Beweis von $(\sum \mathcal{F}_n) \Big|_{V_n} = \mathcal{F}_n$.

Wegen Folgerung 1.2.3 gilt $\mathcal{F}_n \leq (\sum \mathcal{F}_n) \Big|_{V_n}$, so daß nur die Umkehrung dieser Ungleichung für uns interessant ist. Hierfür müssen wir uns ein wenig den Beweis von Folgerung 1.1.3 ins Gedächtnis rufen: Aus diesem geht hervor, daß ein Blatt L von $\sum \mathcal{F}_n$ eine Vereinigung von Blättern gewisser \mathcal{F}_n ist und zwar derart, daß zu je zwei Blättern $L_0 \in \mathcal{F}_{n_0}$ und $L_k \in \mathcal{F}_{n_k}$ mit $L_0, L_k \subset L$ natürliche Zahlen n_1, \dots, n_{k-1} und Blätter $L_1 \in \mathcal{F}_{n_1}, \dots, L_{k-1} \in$

³⁾D.h. zu jedem $x \in L_i$ und jeder Umgebung $U \subset L_i$ von x existiert eine offene, bogenweise zusammenhängende Menge V mit $x \in V \subset U$.

⁴⁾Auswahlaxiom!

$\mathcal{F}_{n_{k-1}}$ existieren mit $L_l \cap L_{l+1} \neq \emptyset, l = 0, \dots, k-1$. Dabei können wir ohne Einschränkung $n_l \neq n_{l+1}$ für alle $l = 0, \dots, k-1$ annehmen.

Halten wir zunächst L_0 und V_{n_1} fest. L_0 und daher auch $L_0 \cap V_{n_1} \subset X$ ist lokal bogenweise zusammenhängend und besitzt eine abzählbare topologische Basis. Somit sind die Bogenkomponenten von $L_0 \cap V_{n_1}$ abzählbar. Aufgrund der Kompatibilität von \mathcal{F}_{n_0} und \mathcal{F}_{n_1} trifft jede Bogenkomponente von $L_0 \cap V_{n_1}$ genau ein Blatt L_1 aus \mathcal{F}_{n_1} . Also trifft L_0 höchstens abzählbar viele Blätter aus \mathcal{F}_{n_1} . Da V_{n_0} aber höchstens abzählbar viele andere V_n schneiden kann, gibt es auch nur abzählbar viele Blätter L_1 , die mit L_0 durch solch einen obigen Blätterweg der Länge $k = 1$ verbunden sind. Nun halten wir L_0 und zusätzlich solch ein L_1 fest. Wiederum gibt es nur abzählbar viele Blätterwege der Länge 2 mit zwei festen Anfangsgliedern. Die Menge jener L_1 war aber bereits abzählbar, so daß es insgesamt nur abzählbar viele Blätterwege der Länge 2 gibt. Dies kann induktiv fortgeführt werden, wodurch wir einsehen, daß *jedes Blatt L aus $\sum \mathcal{F}_n$ eine Vereinigung abzählbar vieler Blätter gewisser \mathcal{F}_n ist.*

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest und K eine Bogenkomponente von $L \cap V_n$ (d.h. K ist ein Blatt aus $(\sum \mathcal{F}_n)|_{V_n}$). Jedes Blatt aus \mathcal{F}_n , welches K schneidet, ist bereits ganz in K enthalten, so daß K eine Vereinigung von Blättern aus \mathcal{F}_n ist. Da aber L höchstens abzählbar viele Blätter aus \mathcal{F}_n enthält, gilt dies erst recht für K .

Die Inklusion $K \hookrightarrow V_n$ induziert eine Abbildung

$$K \longrightarrow V_n/\mathcal{F}_n.$$

Das Bild von K in V_n/\mathcal{F}_n , welches wir mit B bezeichnen, ist abzählbar.

Behauptung: B ist einpunktig:

Wir nehmen das Gegenteil an und können daher einen nichtkonstanten Weg $w : [0, 1] \rightarrow B$ wählen. Nach Voraussetzung ist V_n/\mathcal{F}_n und damit B separiert. w ist nicht konstant und daher Bild w nichteinpunktig. Somit wäre Bild w ein nichteinpunktiger, abzählbarer, kompakter und zusammenhängender Hausdorff-Raum, was aber nach [Hock, Korollar 2-81] unmöglich ist, also Widerspruch.

Daß B nur aus einem Punkt besteht, bedeutet, daß K in einem Blatt von \mathcal{F}_n enthalten ist. Mit anderen Worten gilt also $(\sum \mathcal{F}_n)|_{V_n} \leq \mathcal{F}_n$, so daß die Identität

$$\left(\sum \mathcal{F}_n\right)|_{V_n} = \mathcal{F}_n$$

bewiesen ist. Mit Hilfe dieser Identität wird nun der Beweis durch untenstehende Gleichungskette abgeschlossen, für die außerdem noch Folgerung 1.2.6, Lemma 1.2.4, die Kontravarianz des Einschränkens, die Definition von (\mathcal{F}_n) gemäß 1.2.5 und die Kompatibilität von (\mathcal{F}_i) benötigt werden:

$$\begin{aligned}
(\sum \mathcal{F}_i)|_{U_i} &= (\sum \mathcal{F}_n)|_{U_i} \\
&= \sum_n (\sum \mathcal{F}_n)|_{U_i \cap V_n} \\
&= \sum_n ((\sum \mathcal{F}_n)|_{V_n})|_{U_i \cap V_n} \\
&= \sum_n \mathcal{F}_n|_{U_i \cap V_n} \\
&= \sum_n (\mathcal{F}_{\varrho(n)}|_{V_n})|_{U_i \cap V_n} \\
&= \sum_n \mathcal{F}_{\varrho(n)}|_{U_i \cap V_n} \\
&= \sum_n (\mathcal{F}_{\varrho(n)}|_{U_i \cap U_{\varrho(n)}})|_{U_i \cap V_n} \\
&= \sum_n (\mathcal{F}_i|_{U_i \cap U_{\varrho(n)}})|_{U_i \cap V_n} \\
&= \sum_n \mathcal{F}_i|_{U_i \cap V_n} \\
&= \mathcal{F}_i.
\end{aligned}$$

△

1.2.8 Für Blätterungen gibt es den Begriff der Regularität, den wir nun zuerst für bgzsh-Zerlegungen definieren.

Notiz: Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig und \mathcal{F} eine bgzsh-Zerlegung auf Y , dann faktorisiert f zu $X/f^*\mathcal{F} \rightarrow Y/\mathcal{F}$. Wir benötigen diese Notiz für folgende

DEFINITION. Sei \mathcal{F} eine bgzsh-Zerlegung von $X \in \mathbf{Top}$ und $A \subset X$. Dann heie A \mathcal{F} -regulär, falls die Faktorisierung $A/\mathcal{F}|_A \rightarrow X/\mathcal{F}$ injektiv ist.

Anschaulicher ist A genau dann \mathcal{F} -regulär, wenn $A \cap L$ bogenzusammenhängend ist für jedes Blatt $L \in \mathcal{F}$. Aber mit obiger Definition ist der Beweis des folgenden Lemmas unmittelbar einzusehen.

LEMMA. Sei $A \subset B \subset X$ und \mathcal{F} eine bgzsh-Zerlegung von X . Dann gilt:

(1) „Regularität ist transitiv“, d.h. ist A $\mathcal{F}|_B$ -regulär und B \mathcal{F} -regulär, dann ist A \mathcal{F} -regulär.

(2) Falls A \mathcal{F} -regulär, ist A $\mathcal{F}|_B$ -regulär.

△

1.3 Blätterungen

Wie bereits in Beispiel 1.2.3 angedeutet, ist eine Blätterung auf einer Mannigfaltigkeit M^m nichts anderes als eine bgzsh-Zerlegung \mathcal{F} auf M , die lokal nach der Standardblätterung $\mathcal{F}_{m,q}$ modelliert ist, hier die genaue Definition:

DEFINITION. Sei $\text{CAT} = \text{TOP}, \text{DIFF}, \text{PL}$. Eine bgzsh-Zerlegung \mathcal{F} einer unberandeten CAT-Mannigfaltigkeit M^m der Dimension m sei definitionsgemäß eine **CAT-Blätterung** der Kodimension q von M , wenn \mathcal{F} und $\mathcal{F}_{m,q}$ im lokalen Sinne CAT-isomorph sind, d.h. zu jedem Punkt $x \in M$ existiert eine Umgebung $U \subset M$ von x , ein Punkt $y \in \mathbb{R}^m$, eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^m$ von y sowie ein blättertreuer CAT-Isomorphismus

$$\varphi : (U, \mathcal{F}|_U) \longrightarrow (V, \mathcal{F}_{m,q}|_V)$$

mit $\varphi(x) = y$, so daß $\varphi^{-1} : (V, \mathcal{F}_{m,q}|_V) \rightarrow (U, \mathcal{F}|_U)$ ebenfalls blättertreu ist. (Mit anderen Worten gilt also $\mathcal{F}_{m,q}|_V = \varphi_*(\mathcal{F}|_U)$.)

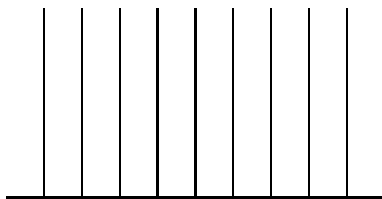
Wir nennen φ daher auch eine **Blätterkarte** von \mathcal{F} . Falls $V = \mathbb{R}^m$ ist, heiße φ eine **kartesische Blätterkarte** und $\mathcal{F}|_U$ dementsprechend eine **kartesische CAT-Blätterung** auf U .

Es sei daran erinnert, daß jede Umgebung von $y \in \mathbb{R}^m$ eine andere Umgebung von y enthält, die bzgl. $\mathcal{F}_{m,q}$ blättertreu CAT-isomorph zu \mathbb{R}^m ist. Daher können alle Blätterkarten von (M, \mathcal{F}) o.E. kartesisch gewählt werden.

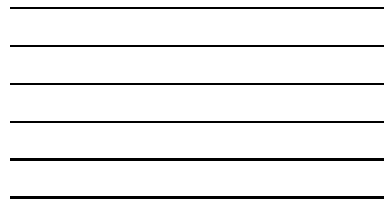
KONVENTION. Wenn von einem blättertreuen CAT-Isomorphismus $\varphi : U \rightarrow V$ mit offenen Mengen $U \subset M, V \subset N$, wobei M, N CAT-Mannigfaltigkeiten seien, und CAT-Blätterungen \mathcal{F}_U auf U, \mathcal{F}_V auf V die Rede ist, so soll damit stets die strengere Bedingung $\varphi_*(\mathcal{F}_U) = \mathcal{F}_V$ gemeint sein.

Einen guten Überblick der Blätterungstheorie bietet der Artikel [Laws].

BEMERKUNG. Für berandete Mannigfaltigkeiten kommen vor allem zwei Standardblätterungen von \mathbb{H}^n in Frage, nach denen man lokal modellieren kann: $\mathbb{H}^{n-q} \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ für die „randtransversalen“ Blätterungen und $\mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{H}^q \rightarrow \mathbb{H}^q$ für die „randparallelen“ Blätterungen.



randtransversal



randparallel

BEZEICHNUNG. Für jede CAT-Mannigfaltigkeit M^m und jedes $0 \leq q \leq m$ bezeichne $\text{Fol}_q(M)$ die Menge aller CAT-Blätterungen von M der Kodimension q . Zur Betonung der CAT-Struktur schreiben wir manchmal auch $\text{Fol}_q^{\text{CAT}}(M)$.

1.3.1 LEMMA. $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1$ seien zwei CAT-Blätterungen gleicher Kodimension auf einer (randlosen) CAT-Mannigfaltigkeit mit $\mathcal{F}_0 \leq \mathcal{F}_1$. Dann ist $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_1$.

BEWEIS: Wir haben zu zeigen, daß jedes Blatt $L \in \mathcal{F}_1$ auch ein Blatt von \mathcal{F}_0 ist. Wegen $\mathcal{F}_0 \leq \mathcal{F}_1$ ist L eine disjunkte Vereinigung

$$L = \bigcup_i L_i$$

von Blättern $L_i \in \mathcal{F}_0$. Die L_i haben die gleiche Dimension wie L und sind daher nach dem Satz über die Gebietstreue offene Teilmengen von L . \triangle

FOLGERUNG. Seien $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1$ CAT-Blätterungen gleicher Kodimension auf der CAT-Mannigfaltigkeit M und $\varphi : (M, \mathcal{F}_0) \rightarrow (M, \mathcal{F}_1)$ ein CAT-Automorphismus von M mit $\varphi_*(\mathcal{F}_0) \leq \mathcal{F}_1$. Dann ist $\mathcal{F}_1 = \varphi_*(\mathcal{F}_0)$. \triangle

1.3.2 Der Begriff der Regularität aus Definition 1.2.8 ist am ehesten mit Blätterungen in Verbindung zu bringen.

DEFINITION. Eine CAT-Blätterung \mathcal{F} auf einer CAT-Mannigfaltigkeit M heißt regulär, wenn zu jedem Punkt $x \in M$ eine Umgebung U von x existiert, so daß U \mathcal{F} -regulär und $\mathcal{F}|_U$ CAT-kartesisch ist.

FOLGERUNG. Der Blätterraum einer regulären CAT-Blätterung ist eine i.a. nicht separierte CAT-Mannigfaltigkeit.

BEWEIS: Außer der Regularität braucht man noch die aus der Literatur bekannte Offenheit der Blätterprojektion. \triangle

Für den folgenden Unterabschnitt benötigen wir das

LEMMA. Die offenen Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$, so daß U $\mathcal{F}_{n,q}$ -regulär und $\mathcal{F}_{n,q}|_U$ kartesische CAT-Blätterung ist, bilden eine Basis der Topologie des \mathbb{R}^n . \triangle

1.3.3 Das nächste Lemma dient als technisches Hilfsmittel für die Konstruktion der bijektiven Korrespondenz zwischen Blätterungen und gewissen Unterbündelkeimen des Tangentialmikroïdbündels.

DEFINITION. Sei $p \in M$ ein Punkt einer CAT-Mannigfaltigkeit M . Eine CAT-Blätterung auf einer Umgebung von p heiße eine lokale CAT-Blätterung um p . Zwei solche lokalen CAT-Blätterungen um p werden **keimäquivalent** genannt, wenn ihre jeweiligen Einschränkungen auf eine geeignete, kleinere Umgebung von p übereinstimmen. Die Äquivalenzklasse einer lokalen CAT-Blätterung \mathcal{F} um p heie auch der **Keim** von \mathcal{F} in p .

LEMMA. Seien M^m eine CAT-Mannigfaltigkeit, $U_1, \dots, U_k \subset M$ Umgebungen von $p \in M$ und \mathcal{F}_i kartesische CAT-Blätterungen auf U_i für alle i , so daß

$$\text{Keim von } \mathcal{F}_i \text{ in } p = \text{Keim von } \mathcal{F}_j \text{ in } p$$

für alle i, j . Dann existiert eine Umgebung $U \subset \bigcap_i U_i$ von p mit

- (1) $\mathcal{F}_i|_U = \mathcal{F}_j|_U =: \mathcal{F}$ für alle i, j .
- (2) \mathcal{F} kartesisch.
- (3) U \mathcal{F}_i -regulär für alle i .

BEWEIS: Aufgrund der Keimbedingung existiert eine Umgebung $U \subset \bigcap_i U_i$ von p , für die (1) erfüllt ist. Im zweiten Schritt verkleinern wir U zu \tilde{U} , so daß außerdem (2) gilt:

Sei $\varphi_1 : (U_1, \mathcal{F}_1) \xrightarrow{\cong} (\mathbb{R}^m, \mathcal{F}_{m,q})$ eine kartesische Blätterkarte. Wegen Lemma 1.3.2 existiert eine Umgebung $V \subset \varphi_1(U)$ von $\varphi_1(p)$, so daß V $\mathcal{F}_{m,q}$ -regulär und $\mathcal{F}_{m,q}|_V$ eine kartesische CAT-Blätterung ist. Mit φ_1^{-1} zurückübersetzt heißt dies, daß $\tilde{U} := \varphi_1^{-1}(V)$ \mathcal{F}_1 -regulär und $\mathcal{F}_1|_{\tilde{U}}$ kartesisch ist. Weil $\tilde{U} \subset U$ und (1) bereits gilt, folgen (1) und (2) auch für die kleinere Umgebung \tilde{U} .

Um (3) zu bekommen, gehen wir induktiv nach $l = 1, \dots, k$ vor. Nach Induktionsvoraussetzung gelte (1),(2) für alle i, j bzw. i und (3) nur für $i = 1, \dots, l$. Den Induktionsanfang für $l = 1$ haben wir bereits.

$l-1 \rightarrow l$: Mit genau der analogen Argumentation wie vorhin erhalten wir eine Umgebung $\tilde{U} \subset U$ von p , so daß \tilde{U} \mathcal{F}_l -regulär ist, und (1),(2) für \tilde{U} anstatt U gelten. Wir müssen noch zeigen, daß \tilde{U} ebenso \mathcal{F}_i -regulär für alle $i = 1, \dots, l-1$ ist: Nach Lemma 1.2.8 ist \tilde{U} $\mathcal{F}_l|_U$ -regulär. Auf U sind aber nach Induktionsvoraussetzung alle \mathcal{F}_i gleich, so daß \tilde{U} sogar $\mathcal{F}_i|_U$ -regulär ist für alle i . U ist bereits \mathcal{F}_i -regulär für alle $i = 1, \dots, l-1$, so daß wiederum mit Lemma 1.2.8 unser Ziel erreicht ist. \triangle

1.3.4 Für eine CAT-Mannigfaltigkeit M bezeichne $\text{Aut}^{\text{CAT}}(M)$ die Gruppe der CAT-Isomorphismen von M und $\text{Iso}^{\text{CAT}}(M)$ die Untergruppe der CAT-Isotopien von M . Ist die CAT-Kategorie von M bekannt, schreiben wir kürzer $\text{Aut}(M)$ und $\text{Iso}(M)$.

Der Transport von Blätterungen durch Automorphismen $\varphi \in \text{Aut}(M)$ ist natürlich genauso wie in 1.1.1 bzw. 1.2.2 erklärt und damit auch die **G-Klassen** von CAT-Blätterungen auf M (von fester Kodimension q) für jede Untergruppe $G \subset \text{Aut}(M)$, die wir mit

$$\text{Fol}_q(M)/G$$

bezeichnen. Ist $G = \text{Aut}(M)$, sprechen wir stattdessen auch von den **Isomorphieklassen** der CAT-Blätterungen auf M , geschrieben als

$$\text{Fol}_q(M)/\cong,$$

und bei $G = \text{Iso}(M)$ entsprechend von den **Isotopieklassen**, die wir mit

$$\text{Fol}_q(M)/\text{Isotopie}$$

abkürzen.

Unter dem **Klassifikationsproblem der Blätterungen** verstehen wir das Problem der Klassifikation der Isotopie- oder auch Isomorphieklassen der CAT-Blätterungen von M , für das bislang noch keine allgemeine (auch nicht abstrakte) Lösungsmethode gefunden worden ist.

1.3.5 In diesem Unterabschnitt definieren wir Bündelblätterungen, also solche Blätterungen, die von Faserbündeln herkommen.

DEFINITION. Seien M und F CAT-Mannigfaltigkeiten mit $q := \dim M - \dim F \geq 0$. Eine CAT-Blätterung \mathcal{F} von M der Kodimension q heiße eine **CAT-Bündelblätterung** von M mit Faser F , falls M/\mathcal{F} eine CAT-Mannigfaltigkeit der Dimension q und die Blätterprojektion $M \rightarrow M/\mathcal{F}$ ein CAT-Faserbündel mit Faser F ist. Die Definition soll auch randtransversale und randparallele Bündelblätterungen mit einschließen.

BEZEICHNUNG. Für die Menge aller CAT-Bündelblätterungen von M mit Faser F schreiben wir $\text{Bufol}_F(M)$.

G -Klassen von Bündelblätterungen sind analog den G -Klassen von Blätterungen definiert und werden als $\text{Bufol}_F(M)/G$ geschrieben mit den zu vorigem Unterabschnitt analogen Spezialisierungen $\text{Bufol}_F(M)/\cong$ und $\text{Bufol}_F(M)/\text{Isotopie}$.

1.4 Triangulierbare Zerlegungen und Blätterungen

Die triangulierbaren Zerlegungen bilden die natürlichste Klasse von bgzsh-Zerlegungen, deren Blätterräume Hausdorffsch sind. Sie wurden in [Sch] eingeführt und näher studiert. In dieser Arbeit gehen wir nur soweit auf sie ein, wie wir sie auch tatsächlich benötigen. Insbesondere ist unser Zugang nicht funktoriell, wofür nämlich *koordinatenendliche* Polyeder erforderlich wären (s. [Sch]).

1.4.1 Die Begriffe ‘simplicialer Komplex’ und ‘simpliciale Abbildung’ gebrauchen wir wie in [Spa]. Simpliciale Komplexe und simpliciale Abbildungen bilden eine Kategorie **SIM**.

Jede *endliche* Menge X induziert kanonisch den simplicialen Komplex PX , die Menge aller Teilmengen von X . Die einfachsten simplicialen Komplexe sind daher die n -dimensionalen Standardmodelle Δ_n , definiert als $\Delta_n = P\{0, \dots, n\}$.

Gemäß ihrer Definition sind simpliciale Komplexe einerseits zwar kombinatorische Objekte, können aber andererseits via eines kovarianten Funktors

$$|\cdot| : \mathbf{SIM} \longrightarrow \mathbf{Top}$$

auch als topologische Objekte realisiert werden. Faßt man beispielsweise eine endliche Menge X wie oben als simplizialen Komplex auf, so ist die geometrische Realisierung $|X|$ durch $|X| = \{ \alpha : X \rightarrow [0, 1] \mid \sum_{x \in X} \alpha(x) = 1 \}$ gegeben, versehen mit der Metrik $d(\alpha, \beta) = \sqrt{\sum_{x \in X} (\alpha(x) - \beta(x))^2}$. Folglich ist $|X|$ konvex und kann suggestiver mit allen formalen konvexen Linearkombinationen $\{ \sum_{i=0}^n t_i x_i \mid \text{alle } t_i \geq 0, \sum_{i=0}^n t_i = 1 \}$ identifiziert werden, wobei $X = \{x_0, \dots, x_n\}$ mit $n+1$ verschiedenen Elementen x_i . Der **Träger** oder der offene Kern von $|X|$ ist als

$$\langle X \rangle := \left\{ \sum_{i=0}^n t_i x_i \mid \text{alle } t_i > 0, \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\}$$

definiert.

Wir erwähnen noch, daß im Vergleich zu [Spa] die geometrische Realisation eines simplizialen Komplexes $K \in \mathbf{SIM}$ alternativ auch als

$$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} |\sigma| \Big/ \text{Seitenrelationen},$$

mit der Quotiententopologie definiert werden kann. Mit den Seitenrelationen sind hierbei diejenigen Identifizierungen gemeint, die durch alle Inklusionen $|\tau| \subset |\sigma|$, $\tau \subset \sigma$ Seite, gegeben sind. $|K|$ ist ein CW-Komplex und daher insbesondere ein normaler Hausdorffraum.

BEZEICHNUNG. K und L seien simpliziale Komplexe. Eine Abbildung $f : |K| \rightarrow |L|$ soll simplizial genannt werden, wenn es eine simpliziale Abbildung $g : K \rightarrow L$ mit $f = |g|$ gibt (g ist dann auch eindeutig).

Für jeden topologischen Raum X sei

$$\text{Triang}(X) := \{ t : |K| \xrightarrow{\approx} X \mid t \text{ Top-Homöomorphismus und } K \in \mathbf{SIM} \}$$

die Menge⁵⁾ aller Triangulierungen von X . Dabei kann $\text{Triang}(X)$ durchaus leer sein (z.B. wenn X nicht separiert ist). Ist aber $\text{Triang}(X) \neq \emptyset$, heißt X **triangulierbar**. SPANIER nennt X stattdessen ein Polyeder, aber wir werden Polyeder etwas anders definieren. Falls $t : |K| \xrightarrow{\approx} X$ eine Triangulierung von X ist, schreibt man einfach $|K| = X$.

Mit Triangulierungen eng verwandt ist der Begriff der Unterteilung: Seien $K, K' \in \mathbf{SIM}$ und $u : |K'| \xrightarrow{\approx} |K|$ ein topologischer Homöomorphismus. Dann heißt u eine **Unterteilung** von K , kurz $K' \triangleleft K$, wenn die Bedingungen

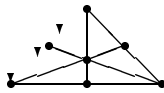
$$(1) \quad u(|\text{Simplex}|) \subset |\text{Simplex}|$$

$$(2) \quad u|_{|\text{Simplex}|} \quad \text{affin linear}$$

⁵⁾Dies ist tatsächlich auch eine Menge!

erfüllt sind.

BEISPIEL. Die wichtigste Unterteilung eines simplizialen Komplexes K ist die baryzentrische Subdivision-Unterteilung $sdK \triangleleft K$, auch erste **Ableitung** genannt und $K' \triangleleft K$ geschrieben, deren Konstruktionsprinzip am folgenden Bild abzulesen ist.



Sind $t, t' \in \text{Triang}(X)$ zwei Triangulierungen eines topologischen Raumes X , existiert folglich genau ein Homöomorphismus φ mit $t' = t \circ \varphi$. Man schreibt $t' \triangleleft t$, falls φ eine Unterteilung ist und nennt dann t' eine Unterteilung von t .

Mittels dieses Unterteilungsbegriffes kann man auf $\text{Triang}(X)$ die Äquivalenzrelation

$$t_0 \sim t_1 \quad : \iff \quad \exists t \text{ mit } t \triangleleft t_0 \text{ und } t \triangleleft t_1$$

definieren. Die Transitivität dieser Relation folgt übrigens aus [Spa, Ziffer 2, S. 121]. Unter einem **Polyeder** verstehen wir nun einen topologischen Raum X zusammen mit einer nichtleeren Äquivalenzklasse $T \subset \text{Triang}(X)$, die wir die **Polyederstruktur** von (X, T) nennen. Wie üblich bezeichnet man (X, T) meist nur mit einem Symbol, etwa mit X . Die Triangulierungen $t \in T$ eines Polyeders (X, T) seien die **Karten** von $X \equiv (X, T)$. In Verbindung mit der Schreibweise $|K| = X$ für eine Karte $t : |K| \rightarrow X$ nennen wir einfacher K eine **Karte** von X .

Eine Teilmenge $A \subset X$ eines Polyeders X heie ein **Unterpolyeder**, wenn es eine Karte $|K| = X$ von X und einen simplizialen Unterkomplex $L \subset K$ mit $|L| = A$ gibt. Die dadurch induzierten Triangulierungen von A bilden dann die Polyederstruktur von A . Eine endliche Vereinigung von Unterpolyedern stellt wieder ein Unterpolyeder dar, wobei jede Karte von X eine Unterteilung besitzt, die jeweils Karten der Unterpolyeder enthält.

Polyeder sind etwas allgemeiner als PL-Räume, denn ein herkömmlicher PL-Raum im Sinne von [Hud] ist dasselbe wie ein lokal kompaktes Polyeder mit abzählbarer Basis der Topologie. Kompakte Polyeder sind daher mit kompakten PL-Räumen identisch. Ein Unterpolyeder eines kompakten Polyeders ist selbst wieder ein kompaktes Polyeder, so daß PL-Unterräume und Unterpolyeder zwei verschiedene Begriffe sind.

Eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen Polyedern X, Y werde **triangulierbar** genannt, wenn Karten $|K| = X$ von X und $|L| = Y$ von Y existieren, so daß $f : |K| \rightarrow |L|$ simplizial ist. Sind X, Y beide kompakt, so ist eine triangulierbare Abbildung $f : X \rightarrow Y$ dasselbe wie eine PL-Abbildung. Ist lediglich X kompakt, so existieren zu beliebig vorgegebenen Karten $|K| = X$ von X und $|L| = Y$ von Y Unterteilungen $K' \triangleleft K$ und $L' \triangleleft L$, so daß die triangulierbare Abbildung $f : |K'| \rightarrow |L'|$ simplizial ist.

Warnung: Die Verkettung zweier triangulierbarer Abbildungen braucht keineswegs triangulierbar zu sein! (Es sei denn, die betreffenden Polyeder sind alle kompakt.)

Für Polyeder gibt es das folgende Analogon zu Lemma 1.2.4:

LEMMA. *Es seien P ein Polyeder und $(P_i)_{i \in I}$ eine überdeckende Familie von Unterpolyedern $P_i \subset P$ von P mit der Eigenschaft, daß zu jedem Kompaktum $K \subset P$ eine endliche Teilfamilie von (P_i) existiert, die K überdeckt. Dann gilt für jede bgzsh-Zerlegung \mathcal{F} von P , bei der jedes Blatt ein Unterpolyeder von P ist, daß $\mathcal{F} = \sum_i \mathcal{F}|_{P_i}$.*

BEWEIS: Wir rufen uns den Beweis von Lemma 1.2.4 ins Gedächtnis zurück und argumentieren i.w. analog: Seien $x, y \in L$ Punkte eines Blattes $L \in \mathcal{F}$. Wegen simplizialer Approximation lassen sich x und y durch einen triangulierbaren Weg $w : [0, 1] \rightarrow L$ verbinden. Das Bild von w ist kompakt und wird daher von einer endlichen Teilfamilie $(P_j)_{j \in J}$, $J \subset I$, überdeckt. Wie oben bemerkt wurde, gibt es eine Karte K von P , die Karten von L und aller P_j , $j \in J$ induziert. O.E. läßt sich K und eine PL-Karte $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$ von $[0, 1]$ so wählen, daß w simplizial ist. Daher gibt es Indizes $j_0, \dots, j_n \in J$ (Wiederholungen zugelassen) mit $w([t_i, t_{i+1}]) \subset P_{j_i}$ für alle $i = 0, \dots, n$. Dies beweist $L \in \sum_i \mathcal{F}|_{P_{j_i}}$ und daher $\mathcal{F} \leq \sum_{i \in I} \mathcal{F}|_{P_i}$. \triangle

1.4.2 Fassen wir zwei endliche Mengen σ, ϱ als simpliziale Komplexe auf, so induziert die geometrische Realisation $|p| : |\sigma| \rightarrow |\varrho|$ einer Mengenabbildung $p : \sigma \rightarrow \varrho$ die bgzsh-Zerlegung

$$\mathcal{F}_p := |p|^*(\text{Punktezerlegung})$$

auf $|\sigma|$, bei der jedes Blatt konvex ist, und je zwei Blätter parallel zueinander liegen. Jede bgzsh-Zerlegung \mathcal{F} auf $|\sigma|$ von dieser Form nennen wir eine **simpliziale Zerlegung** des Simplex $|\sigma|$. Wir sagen einfach, \mathcal{F} ist simplizial auf $|\sigma|$.

Sei $|K| = X$ eine Karte des Polyeders X und \mathcal{F} eine bgzsh-Zerlegung von X . Dann heie \mathcal{F} eine **simpliziale Zerlegung** von X bzgl. K , wenn für jedes Simplex $\sigma \in K$ die eingeschränkte bgzsh-Zerlegung $\mathcal{F}_\sigma := \mathcal{F}|_{|\sigma|}$ simplizial auf $|\sigma|$ ist, und jedes Blatt von \mathcal{F} ein Unterpolyeder von X darstellt.

DEFINITION. Eine bgzsh-Zerlegung \mathcal{F} eines Polyeders X heißt **triangulierbar**, wenn es eine Karte K von X gibt, so daß \mathcal{F} eine simpliziale Zerlegung von X bzgl. K ist. K wird dann eine **Karte** von \mathcal{F} genannt.

Es schließt sich die Definition einer **triangulierbaren Blätterung** an: Sei \mathcal{F} eine PL-Blätterung (der Kodimension q) auf der PL-Mannigfaltigkeit M^m . Dann heie \mathcal{F} eine triangulierbare Blätterung von M (der Kodimension q), wenn \mathcal{F} außerdem eine triangulierbare Zerlegung von M ist.

Mittelpunkt dieses Abschnitts ist der

QUOTIENTENSATZ. *X sei ein Polyeder und \mathcal{F} eine triangulierbare Zerlegung von X . Dann existiert auf dem Blätterraum X/\mathcal{F} eine Polyederstruktur, so daß die Blätterprojektion $X \rightarrow X/\mathcal{F}$ eine triangulierbare Abbildung darstellt. Als Polyeder ist X/\mathcal{F} insbesondere auch ein Hausdorff-Raum.*

BEWEIS: Nach Voraussetzung gibt es eine Karte K von \mathcal{F} . Für jedes Simplex $\sigma \in K$ setzen wir $\mathcal{F}_\sigma := \mathcal{F}|_{|\sigma|}$. Wie gewohnt bezeichnen wir die Blätterprojektion $X \rightarrow X/\mathcal{F}$ mit π .

Das Beweisprinzip: Wir definieren den simplizialen Unterkomplex $\text{Para}-K \subset K$ der *Parametersimplizes* von \mathcal{F} und zeigen zunächst, daß für jedes Simplex $\tau \in \text{Para}'-K$ der ersten Ableitung von $\text{Para}-K$ die Einschränkung $\pi|_{|\tau|}$ injektiv ist. Ferner ist $|\text{Para}-K| \hookrightarrow |K| \xrightarrow{\pi} X/\mathcal{F}$ surjektiv. Die zweite Ableitung $\text{Para}''-K \triangleleft \text{Para}'-K$ induziert dann eine Triangulierung von $X/\mathcal{F} = \pi(|\text{Para}''-K|)$ und läßt sich dann derart zu einer Unterteilung $K'' \triangleleft K$ fortsetzen, daß \mathcal{F} simplizial bzgl. K'' ist.

Umsetzung: Ein Simplex $\sigma \in K$ von K heiße ein Parametersimplex von \mathcal{F} , falls \mathcal{F}_σ die Punktezerlegung von $|\sigma|$ ist. Die Menge aller Parametersimplizes von \mathcal{F} bildet somit einen simplizialen Unterkomplex $\text{Para}-K \subset K$ von K .

Um den Quotienten von $|\text{Para}-K|$ nach der Äquivalenzrelation

$$x \sim x' : \iff \pi(x) = \pi(x')$$

angemessen beschreiben zu können, definieren wir folgenden Gruppoiden G : Die Einheiten von G sind die Parametersimplizes selbst. Zur Definition der Morphismen von G benötigen wir eine Vorbetrachtung. Für jedes Simplex $\sigma \in K$ von K ist \mathcal{F}_σ nach Voraussetzung von der Form $\mathcal{F}_\sigma = \mathcal{F}_p$ mit einer Mengenabbildung $p : \sigma \rightarrow \tau$, wobei p o.B.d.A. surjektiv sei. Jedes Parametersimplex $\varrho \subset \sigma$ von \mathcal{F} mit $\dim \varrho = \dim \tau$, welches wir ein bzgl. σ *maximales Parametersimplex* nennen wollen, liefert eine Bijektion $p|_{\varrho} : \varrho \rightarrow \tau$, so daß via p für je zwei solche Parametersimplizes $\varrho_0, \varrho_1 \subset \sigma$ ein simplizialer Isomorphismus $|\varrho_0| \xrightarrow{\cong} |\varrho_1|$ induziert wird, der dann nicht mehr von p , sondern nur noch von \mathcal{F}_σ abhängt: Jedes Blatt von \mathcal{F}_σ schneidet sowohl $|\varrho_0|$ als auch $|\varrho_1|$ in jeweils genau einem Punkt. Betrachten wir nun eine endliche Folge

$$(\varrho_0, \sigma_0, \varrho'_0), \dots, (\varrho_n, \sigma_n, \varrho'_n),$$

mit

- $\sigma_i \in K$ Simplex für alle $i = 0, \dots, n$,
- $\varrho_i, \varrho'_i \subset \sigma_i$ bzgl. σ_i maximale Parametersimplizes für alle i ,
- $\varrho'_i = \varrho_{i+1}$ für alle $i = 0, \dots, n-1$.

Lt. Vorbetrachtung wird für jedes i eine Bijektion $\gamma_i : \varrho_i \rightarrow \varrho'_i$ induziert, so daß wegen der letzten Bedingung die Verkettung $\gamma := \gamma_n \circ \dots \circ \gamma_0$ definiert ist und somit den simplizialen Isomorphismus $g := |\gamma| : |\varrho_0| \xrightarrow{\cong} |\varrho'_n|$ liefert. Die Gruppoidenelemente von G seien nun alle auf diese Weise gewonnenen, simplizialen Isomorphismen $g : |\varrho_0| \rightarrow |\varrho'_n|$, wobei natürlich ϱ_0 die Quelle von g und ϱ'_n das Ziel von g sei. Insbesondere ist G_ϱ^ϱ eine Untergruppe der simplizialen Permutationen von ϱ . Hervorzuheben ist noch die *Seitenverträglichkeit* von G , d.h. ist $g : \varrho_0 \rightarrow \varrho_1$ ein Gruppoidenelement von G und sind $\tau_0 \subset \varrho_0, \tau_1 \subset \varrho_1$ Seiten mit $g(\tau_0) = \tau_1$, so ist auch die Einschränkung $g|_{\tau_0} : \tau_0 \rightarrow \tau_1$ aus G , was man am einfachsten so sieht: Sind $\varrho, \varrho' \subset \sigma$ zwei bzgl. σ maximale Parametersimplizes und $\gamma : \varrho \rightarrow \varrho'$ der von \mathcal{F}_σ

induzierte simpliziale Isomorphismus, so daß sich Seiten $\tau \subset \varrho, \tau' \subset \varrho'$ via γ entsprechen, dann sind $\tau, \tau' \subset \nu := \tau \cup \tau'$ bzgl. ν maximale Parametersimplizes.

Um einzusehen, daß mittels G das Verhalten von π auf $|\text{Para}-K|$ vollständig beschrieben werden kann, müssen wir noch weitere Eigenschaften von Parametersimplizes erwähnen, die sich unmittelbar aus der konvexen Darstellung $|\sigma| = \{\sum t_i \sigma_i | t_i \geq 0, \sum t_i = 1\}$ ableiten lassen, wobei $\sigma \in K$ ein Simplex von K sei:

- (1) Seien $L \in \mathcal{F}_\sigma$ ein Blatt und $\varrho \subset \sigma$ ein bzgl. σ maximales Parametersimplex. Dann gilt die Äquivalenz: $L \cap \langle \sigma \rangle \neq \emptyset \iff L \cap \langle \varrho \rangle \neq \emptyset$ (= Punkt).
- (2) Seien $\tau \subset \sigma$ eine Seite und $\varrho' \subset \tau$ ein bzgl. τ maximales Parametersimplex. Dann gibt es ein bzgl. σ maximales Parametersimplex ϱ mit $\varrho' \subset \varrho$.

Folgerung 1: $\sigma_0, \sigma_1 \in K$ seien zwei Simplizes von K , so daß Blätter $L_0 \in \mathcal{F}_{\sigma_0}, L_1 \in \mathcal{F}_{\sigma_1}$ existieren mit $L_0 \cap L_1 \neq \emptyset$ und $L_0 \cap \langle \sigma_0 \rangle \neq \emptyset, L_1 \cap \langle \sigma_1 \rangle \neq \emptyset$. Dann gibt es ein bzgl. $\sigma_0 \cap \sigma_1, \sigma_0, \sigma_1$ simultan maximales Parametersimplex $\varrho \subset \sigma_0 \cap \sigma_1$.

Beweis: Wegen $\emptyset \neq L_0 \cap L_1 \subset |\sigma_0| \cap |\sigma_1| = |\sigma_0 \cap \sigma_1|$ existiert überhaupt ein bzgl. $\sigma_0 \cap \sigma_1$ maximales Parametersimplex $\varrho \subset \sigma_0 \cap \sigma_1$. Nach (2) gibt es dann ein bzgl. σ_0 maximales Parametersimplex ϱ_0 mit $\varrho \subset \varrho_0$. Aus $L_0 \cap |\sigma_0 \cap \sigma_1| \neq \emptyset$ folgt $L_0 \cap |\varrho| \neq \emptyset$, so daß wegen Eigenschaft (1) (Einpunktigkeit!) $|\varrho| \cap \langle \varrho_0 \rangle \neq \emptyset$ und damit $\varrho = \varrho_0$ gelten muß. Daher ist ϱ auch ein bzgl. σ_0 maximales Parametersimplex. Ebenso gilt bzgl. σ_1 , was den Beweis der Folgerung beendet.

Weil jedes Blatt von \mathcal{F}_σ ein Parametersimplex von \mathcal{F} trifft, wird $|\text{Para}-K|$ von π surjektiv auf X/\mathcal{F} abgebildet. Sind $x, y \in |\text{Para}-K|$, dann existieren eindeutig bestimmte Parametersimplizes ϱ_x, ϱ_y mit $x \in \langle \varrho_x \rangle$ und $y \in \langle \varrho_y \rangle$.

Behauptung 1: Es gilt $x \sim y$ genau dann, wenn ein Gruppoidenelement $g \in G$ mit Quelle ϱ_x und Ziel ϱ_y existiert, so daß $g(x) = y$.

Beweis: Die Rückrichtung ergibt sich aus der Konstruktion von G . Setzen wir also $\pi(x) = \pi(y)$ voraus. Wegen Lemma 1.4.1 gilt $\mathcal{F} = \sum_\sigma \mathcal{F}_\sigma$. Daher gibt es eine endliche Simplexfolge $\sigma_0, \dots, \sigma_n$ und eine entsprechende Blätterfolge L_0, \dots, L_n von Blättern $L_i \in \mathcal{F}_{\sigma_i}$ mit $L_i \cap L_{i+1} \neq \emptyset, i = 0, \dots, n-1$, und $x \in L_0, y \in L_n$. O.B.d.A. soll dabei $L_i \cap \langle \sigma_i \rangle \neq \emptyset$ für alle i gelten.

Wegen $x \in \langle \varrho_x \rangle \cap |\sigma_0|$ ist ϱ_x zunächst eine Seite von σ_0 . Ferner gibt es eine Seite $\tau \subset \sigma_0$, so daß ϱ_x ein bzgl. τ maximales Parametersimplex darstellt, das gemäß (2) in einem bzgl. σ_0 maximalen Parametersimplex $\varrho \subset \sigma_0$ enthalten ist. Da L_0 sowohl $|\varrho_x|$ als auch lt. (1) $\langle \varrho \rangle$ in genau einem Punkt trifft, gilt $|\varrho_x| \cap \langle \varrho \rangle \neq \emptyset$ und damit $\varrho_x = \varrho$, d.h. ϱ_x ist tatsächlich ein bzgl. σ_0 maximales Parametersimplex. Ebenso ist natürlich ϱ_y ein bzgl. σ_n maximales Parametersimplex.

Gemäß obiger, beweisinterner Folgerung 1 können wir zu jedem $i = 0, \dots, n-1$ ein bzgl. $\sigma_i \cap \sigma_{i+1}, \sigma_i, \sigma_{i+1}$ simultan maximales Parametersimplex $\varrho'_i \subset \sigma_i \cap \sigma_{i+1}$ wählen. Wir setzen $\varrho_0 := \varrho_x, \varrho'_n := \varrho_y$ und $\varrho_i := \varrho'_{i-1}$ für $i = 1, \dots, n$. Dann ist $(\varrho_0, \sigma_0, \varrho'_0), \dots, (\varrho_n, \sigma_n, \varrho'_n)$ die gesuchte Folge, die das $g \in G$ mit $g(x) = y$ induziert.

Als Konsequenz aus dieser Behauptung 1 können wir die Äquivalenzrelation \sim noch etwas schöner beschreiben, was aus der Seitenverträglichkeit von G folgt: $x \sim y \iff$ Es existieren Parametersimplizes ϱ, ϱ' von \mathcal{F} und ein Gruppoidenelement $g \in G$ mit Quelle ϱ und Ziel ϱ' , so daß $x \in |\varrho|, y \in |\varrho'|$ und $g(x) = y$ gilt.

Sei ϱ eine endliche Menge, aufgefaßt als simplizialer Komplex. Dann operiert $\text{Aut}\varrho$ via der geometrischen Relisation effektiv auf $|\varrho|$ (Simplexpermutationen).

Behauptung 2: Jeder $\text{Aut}\varrho$ -Orbit trifft $|\tau|$ in höchstens einem Punkt, wobei $\tau \in \varrho' \triangleleft \varrho$ ein beliebiges Simplex der ersten baryzentrischen Unterteilung von ϱ sei.

Beweis: Man führt eine vollständige Induktion nach $\dim \varrho$. Für $\dim \varrho = 0$ ist alles klar. Der Induktionsschritt: ϱ besitze die Ecken $\varrho_0, \dots, \varrho_n, b = \sum_0^n \frac{1}{n+1} \varrho_i$ bezeichne den Schwerpunkt von $|\varrho|$ und $|\dot{\varrho}| := |\varrho| \setminus \langle \varrho \rangle$ den Rand von $|\varrho|$. Dann ist

$$|\varrho| = b|\dot{\varrho}|$$

der Kegel über $|\dot{\varrho}|$ mit Kegelpunkt b . Per Definition gilt $\varrho' = b(\dot{\varrho}')$, so daß $\tau \in \varrho'$ von der Form $\tau = b\tau'$ ist mit einem eindeutigen $\tau' \in \dot{\varrho}'$. Seien nun $x, y \in |\tau|$ und $g \in \text{Aut}\varrho$ mit $|g|(x) = y$. Ist $x = b$, so ist auch $y = b$, also $x = y$. O.E. werde daher $x, y \neq b$ angenommen. Dann wird $|\tau| \setminus b$ kanonisch mit $|\tau'| \times (0, 1]$ identifiziert, so daß x, y die eindeutigen Darstellungen $x = (x', t_x), y = (y', t_y)$ besitzen mit $x', y' \in |\tau'|$ und $t_x, t_y \in (0, 1]$. Aus $|g|(x) = y$ folgt $t_x = t_y =: t$ und $|g|(x') = y'$, so daß nach Induktionsvoraussetzung $x' = y'$ gilt, was die gewünschte Gleichheit von x und y impliziert.

Folgerung 2: Jedes Blatt aus \mathcal{F} trifft ein beliebiges Simplex aus $\text{Para}'-K$ in höchstens einem Punkt.

Beweis: Seien $\varrho' \in \text{Para}'-K$ ein Simplex und $x', y' \in |\varrho'|$ mit $x' \sim y'$. Dann gibt es genau ein Parametersimplex ϱ , so daß $\langle \varrho' \rangle$ ganz in $\langle \varrho \rangle$ enthalten ist. Falls x' in $\langle \varrho \rangle$ liegt, muß nach Behauptung 1 und aus Dimensionsgründen auch y' in $\langle \varrho \rangle$ liegen und umgekehrt. Mit Behauptung 2 bekommen wir daraus $x' = y'$. Andernfalls liegen x', y' beide im Rand von $|\varrho'|$, und man erhält $x' = y'$ aus Induktion nach der Simplexdimension von ϱ' .

Mit $\text{Para}''-K$ bezeichnen wir die zweite kanonische Ableitung von $\text{Para}-K$. Da die geometrischen Realisationen simplizialer Isomorphismen Schwerpunkte respektieren, induziert jedes Gruppoidenelement $g \in G$ mit Quelle ϱ und Ziel $\tilde{\varrho}$ simpliziale Isomorphismen $g' : \varrho' \rightarrow \tilde{\varrho}'$ und $g'' : \varrho'' \rightarrow \tilde{\varrho}''$. Daher kann man genauso gut auch die Simplizes aus $\text{Para}'-K$ oder aus $\text{Para}''-K$ als Einheiten von G wählen. Die entsprechenden Gruppoide bezeichnen wir einfach mit G' bzw. G'' . \sim kann dann analog mittels G' oder G'' charakterisiert werden.

Folgerung 3: Behauptung 1 gilt analog für G' und G'' .

Beweis: Man nutzt aus, daß zu jedem Simplex $\varrho' \in \text{Para}'-K$ genau ein Parametersimplex ϱ mit $\langle \varrho' \rangle \subset \langle \varrho \rangle$ existiert, und wendet Behauptung 1 an. Analog verfährt man für G'' .

Mit Para''_0-K bezeichnen wir die Eckenmenge von $\text{Para}''-K$, auf der wir zunächst die eingeschränkte Äquivalenzrelation \sim betrachten: Allgemein sei S ein simplizialer Komplex mit Eckenmenge S_0 , auf der eine Äquivalenzrelation \sim gegeben ist. $p : S_0 \rightarrow S_0/\sim$ sei die kanonische Projektion. Dann bildet die Menge aller Teilmengen $\tilde{\sigma} \subset S_0/\sim$ der Form

$$S_0/\sim \supset \tilde{\sigma} = p(\sigma), \quad \sigma \in S \text{ Simplex}$$

einen simplizialen Komplex S/\sim , so daß $p : S \rightarrow S/\sim$ simplizial ist. Insbesondere bekommen wir einen simplizialen Komplex

$$\text{Para}''-K/\sim,$$

der X/\mathcal{F} triangulieren soll. Dazu werden wir die Identität $id_{|\text{Para}''-K|}$ zu stetigen und zueinander inversen Abbildungen

$$X/\mathcal{F} = |\text{Para}''-K|/\sim \longrightarrow |\text{Para}''-K/\sim| \quad \text{und} \quad |\text{Para}''-K/\sim| \longrightarrow |\text{Para}''-K|/\sim$$

folgendermaßen faktorisieren lassen:

Sind nun ϱ_0'', ϱ_1'' zwei Simplizes aus $\text{Para}''-K$, $g'' : |\varrho_0''| \rightarrow |\varrho_1''|$ ein Element aus G'' und $x \in |\varrho_0''|, y \in |\varrho_1''|$ mit $g''(x) = y$, so fallen ϱ_0'' und ϱ_1'' zu einem Simplex in $\text{Para}''-K/\sim$ zusammen, wobei auch x und y in $|\text{Para}''-K/\sim|$ miteinander identifiziert werden, d.h. wir haben die Faktorisierung $|\text{Para}''-K|/\sim \longrightarrow |\text{Para}''-K/\sim|$. Befassen wir uns mit der umgekehrten Richtung. Dazu studieren wir die Projektion $p : \text{Para}''-K \rightarrow \text{Para}''-K/\sim$ noch etwas genauer. Seien $\varrho'', \tilde{\varrho}''$ zwei Simplizes aus $\text{Para}''-K$, die von p jeweils isomorph auf dasselbe Simplex in $\text{Para}''-K/\sim$ abgebildet werden, wodurch ein simplizialer Isomorphismus $\gamma : \varrho'' \rightarrow \tilde{\varrho}''$ definiert ist.

Behauptung 3: Es existiert genau ein Gruppoidenelement $g'' : |\varrho''| \rightarrow |\tilde{\varrho}''|$ aus G'' . g'' ist zudem mit $|\gamma|$ identisch.

Beweis: Seien ϱ' bzw. $\tilde{\varrho}'$ die eindeutigen Simplizes aus $\text{Para}'-K$ mit $\langle \varrho'' \rangle \subset \langle \varrho' \rangle$ bzw. $\langle \tilde{\varrho}'' \rangle \subset \langle \tilde{\varrho}' \rangle$. ϱ_0'' bezeichne diejenige Ecke von ϱ'' , die der Schwerpunkt von ϱ' ist, und $\tilde{\varrho}_0''$ sei die Ecke von $\tilde{\varrho}''$ mit $p(\tilde{\varrho}_0'') = \varrho_0''$. Wenden wir Folgerung 3 an (Einheiten = $\text{Para}'-K$), so muß aus Dimensionsgründen $\tilde{\varrho}_0''$ im Inneren von $\tilde{\varrho}'$ liegen (vgl. das entsprechende Argument im Beweis von Folgerung 2), so daß $\tilde{\varrho}_0''$ auch der Schwerpunkt von $\tilde{\varrho}'$ ist. Nach Folgerung 3 gibt es ein Gruppoidenelement $g' : |\varrho'| \rightarrow |\tilde{\varrho}'|$ aus G' mit $g'(\varrho_0'') = \tilde{\varrho}_0''$. Folglich ist jede andere Ecke $\tilde{\varrho}_i''$ von $\tilde{\varrho}''$ äquivalent zu $g'(\gamma^{-1}(\tilde{\varrho}_i''))$, so daß nach Folgerung 2 angewandt auf $\tilde{\varrho}'$ die Eindeutigkeit und Übereinstimmung mit $|\gamma|$ von g' eingeschränkt auf $|\varrho''|$ bewiesen ist.

Sind $x, y \in |\text{Para}''-K|$ mit $|p|(x) = y$, so wählen wir zunächst eindeutige Simplizes $\varrho_x'', \varrho_y'' \in \text{Para}''-K$ mit $x \in \langle \varrho_x'' \rangle$ und $y \in \langle \varrho_y'' \rangle$. Wegen $|p|(x) = y$ werden ϱ_x'' und ϱ_y'' durch p isomorph auf dasselbe Simplex abgebildet, so daß der induzierte Isomorphismus $\gamma : \varrho_x'' \rightarrow \varrho_y''$ mit $|\gamma|(x) = y$ nach Behauptung 3 ein Gruppoidenelement von G'' ist, und daher nach Folgerung 3 $x \sim y$ gilt, d.h. wir haben jetzt endlich auch die Faktorisierung $|\text{Para}''-K/\sim| \longrightarrow |\text{Para}''-K|/\sim$. Daß die Verkettungen dieser beiden Faktorisierungen jeweils die Identität ergibt, folgt direkt aus der Eindeutigkeit der Faktorisierung. Somit ist

$$|\text{Para}''-K/\sim| \xrightarrow{\cong} |\text{Para}''-K|/\sim$$

eine Triangulierung von X/\mathcal{F} , die eine Polyederstruktur auf X/\mathcal{F} induziert.

Als nächstes suchen wir uns eine geeignete Fortsetzung der Unterteilung $\text{Para}''-K \triangleleft \text{Para}-K$ zu einer Unterteilung $K'' \triangleleft K$ von K . Für ein beliebiges Simplex $\sigma \in K$ wählen wir eine Surjektion $f : \sigma \rightarrow \varrho$, die \mathcal{F}_σ induziert. Nach [R-S, 2.8(6)] ist dann

$$C_\sigma := \{ |\alpha| \cap |f|^{-1}(|\tau|) : \alpha \subset \sigma, \tau \in \varrho'' \}$$

ein Zellenkomplex, der $|\sigma|$ unterteilt und auf jedem Parametersimplex aus σ die zweite baryzentrische Unterteilung liefert. Man rechnet für jede Seite $\tau \subset \sigma$ die Gleichung $C_\tau = C_\sigma \cap |\tau|$ nach und erhält daraus für je zwei Simplizes $\sigma, \tilde{\sigma}$ aus K die Kompatibilität

$$C_{\sigma \cap \tilde{\sigma}} = C_\sigma \cap C_{\tilde{\sigma}}.$$

Ganz analog wie in [R-S, Proposition 2.9] ordnet man die Ecken $\text{Para}''-K$ total und unterteilt den „abstrakten Zellenkomplex“ $C = \bigcup_\sigma C_\sigma$ ⁶⁾ (Kompatibilität) zu einem simplizialen Komplex $K'' \triangleleft K$, ohne neue Ecken einzuführen. Dabei bleibt also $\text{Para}''-K$ unverändert. Insbesondere induziert K'' für jedes Simplex $\sigma \in K$ eine Unterteilung $\sigma'' \triangleleft \sigma$, so daß \mathcal{F} nach Konstruktion simplizial bzgl. K'' ist. Die Eckenabbildung $p : \text{Para}''-K \rightarrow \text{Para}''-K/\sim$ induziert eine simpliziale Abbildung $p : K'' \rightarrow \text{Para}''-K/\sim$, deren geometrische Realisation mit π übereinstimmt. \triangle

1.5 Pseudo-PL-Abbildungen

Die Aussage, $f : X \rightarrow Y$ sei eine PL-Abbildung, setzt normalerweise voraus, daß X und Y beide PL-Räume sind.

„PL“ bedeutet „stückweise linear“ oder äquivalent dazu „lokal konisch“. Die Fasern einer PL-Abbildung $f : X \rightarrow Y$ besitzen bezüglich der Polyederstruktur von X eine sehr reguläre Gestalt. Dazu eine Bezeichnung: X, Y seien topologische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Dann sei

$$\mathcal{F}_f := f^*(\text{Punktezerlegung})$$

die von f induzierte bgzsh-Zerlegung auf X .

Für eine eigentliche PL-Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist \mathcal{F}_f eine triangulierbare Zerlegung auf X . Daher faktorisiert f nach dem Quotientensatz durch eine PL-Abbildung $\pi : X \rightarrow X/\mathcal{F}_f$ zu einer PL-Abbildung $\bar{f} : X/\mathcal{F}_f \rightarrow Y$ mit $\mathcal{F}_{\bar{f}} = \text{Punktezerlegung}$, so daß \bar{f} also eine nichtdegenerierte PL-Abbildung ist. Auf diese Weise zerlegt sich jede eigentliche PL-Abbildung kanonisch in eine Verkettung zweier PL-Abbildungen.

Nun fällt uns auf, daß zur Charakterisierung von π die PL-Struktur von Y gar nicht erforderlich ist, denn \mathcal{F}_f braucht nur eine triangulierbare Zerlegung von X zu sein, was für jede stetige Abbildung f definiert werden kann.

Etwas problematischer dagegen verhält es sich mit der Faktorabbildung \bar{f} , deren induzierte Zerlegung $\mathcal{F}_{\bar{f}}$ die Punktezerlegung ergibt. Aber das mag in manchen Fällen eine zu schwache Bedingung darstellen, und es wird in der Praxis mannigfache Möglichkeiten zusätzlicher Bedingungen an \bar{f} geben, die einem das liefern sollen, was man gerne haben möchte. Wir haben uns für folgende entschieden:

1.5.1 BEZEICHNUNG. Eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen X, Y heiße **residual lokal injektiv**, wenn die Menge aller $x \in X$, für die

⁶⁾der ja eingeschränkt auf $|\text{Para}''-K|$ mit $\text{Para}''-K$ übereinstimmt.

eine Umgebung U von x existiert, auf der f injektiv ist, residual in X , also offen und dicht, ist. f heißt **stabil residual lokal injektiv**, wenn für jeden Unterraum $A \subset X$ die Einschränkung $f|_A : A \rightarrow Y$ residual lokal injektiv ist.

DEFINITION. X sei ein Polyeder, Y ein topologischer Raum und $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Dann heie f eine **Pseudo-PL-Abbildung**, wenn zweierlei gilt:

- (1) Die von f induzierte Zerlegung \mathcal{F}_f ist eine triangulierbare Zerlegung von X ,
- (2) Die eindeutige Faktorisierung $\bar{f} : X/\mathcal{F}_f \rightarrow Y$ durch die Blätterprojektion $\pi : X \rightarrow X/\mathcal{F}_f$ ist stabil residual lokal injektiv.

KOROLLAR. X, Y seien kompakte Polyeder, Z ein topologischer Raum, $g : X \rightarrow Y$ eine PL-Abbildung und $f : Y \rightarrow Z$ eine Pseudo-PL-Abbildung. Dann ist auch $f \circ g : X \rightarrow Z$ eine Pseudo-PL-Abbildung. \triangle

Stabil residual lokal injektive Abbildungen verfügen über folgende *Additivitätseigenschaft*:

LEMMA. $f : X \rightarrow Y$ sei stetig und $X = X_0 \cup X_1$ mit abgeschlossenen Unterräumen $X_0, X_1 \subset X$. Sind die beiden Einschränkungen $f|_{X_0} : X_0 \rightarrow Y$ und $f|_{X_1} : X_1 \rightarrow Y$ stabil residual lokal injektiv, dann auch f .

BEWEIS: Wegen der Berücksichtigung beliebiger Unterräume $A \subset X$ genügt der Nachweis der Additivität von „residual lokal injektiv“.

Sei $x \in X$. Gilt $x \in X - X_0$ oder $x \in X - X_1$, so gibt es nahe x ein x' , so daß f nahe x' lokal injektiv ist. Befassen wir uns also mit dem Fall $x \in X_0 \cap X_1$. Für $x \in (X_0 \cap X_1)^\circ$ argumentieren wir genauso wie eben. Ansonsten trifft eine beliebige Umgebung das Innere von X_0 oder X_1 , so daß der erste Fall wiederum eintritt und die Dichtheit insgesamt bewiesen ist. \triangle

FOLGERUNG. Sei $f : P \rightarrow X$ eine auf einem kompakten Polyeder P definierte Abbildung, für die eine Karte $|K| = P$ von P existiert, so daß $f|_{|\sigma|}$ für jedes Simplex $\sigma \in K$ injektiv ist. Dann ist f stabil residual lokal injektiv. \triangle

1.6 Blätterungen als Garbenschnitte

Dieser Abschnitt ist mehr beiläufiger Natur und stellt fest, daß Blätterungen und auch Bündelblätterungen auf einer CAT-Mannigfaltigkeit M als stetige Schnitte von geeigneten Mengengarben über M aufgefaßt werden können, was manchmal ganz angenehm sein kann (wie z.B. im nächsten Kapitel).

Weil dadurch bestimmte geometrische Objekte (z.B. Blätterungen) mit stetigen Abbildungen identifiziert werden können, stellt dies durchaus einen erwähnenswerten, heuristischen Fortschritt in Hinblick auf abstrakte Klassifikation dar. Nimmt man die von der

nd-zahmen Grundstruktur erzeugte zahme Struktur (und nicht wie in Anmerkung 8.3.4 die von ihr induzierte v-↓zahme Struktur), erhält man einerseits sogar eine *injektive* homologische Klassifikation von $\text{Fol}_q(M)/\cong$ (vgl. Satz 8.2.2). Aber andererseits sind damit zwei gravierende Nachteile noch nicht aus der Welt geschafft:

- (1) Es fehlt eine Charakterisierung derjenigen gelifteten Homologieklassen (über der Fundamentalklasse von M), die von Blätterungen induziert sind, d.h. es fehlt eine *surjektive*, homologische Klassifikation von $\text{Fol}_q(M)/\cong$.
- (2) Selbst wenn dieses Problem gelöst wäre, hätte man nur eine „individuelle“, abstrakte Klassifikation und keine solche mit Hilfe *universeller* klassifizierender Objekte und klassifizierender Abbildungen (s. Kapitel 8).

1.6.1 Unter einer Garbe werde in dieser Arbeit stets eine stetige Abbildung

$$\pi : S \rightarrow X$$

verstanden, die surjektiv und ein lokaler Homöomorphismus ist, d.h. zu jedem $s \in S$ existiert eine offene Umgebung U von s , so daß $\pi(U) \subset X$ offen und $\pi|_U : U \xrightarrow{\cong} \pi(U)$ ein Homöomorphismus ist.

π nennt man auch eine Garbe über X . S heißt der **Totalraum** und X die **Basis** von π . Da die Konstruktion oder Definition einer Garbe $\pi : S \rightarrow X$ in der Praxis auf die Konstruktion oder Definition des Totalraumes $S = S(X)$ hinausläuft, aus der sich die Projektion π automatisch ergibt, werden wir das Symbol für den Totalraum meistens auch als Bezeichnung für die gesamte Garbe wählen.

Ein **Schnitt** von π sei per Definition eine stetige Abbildung $s : X \rightarrow S$ mit $\pi \circ s = id$. Die Menge aller Schnitte von π schreiben wir als $\Gamma(\pi)$ oder manchmal auch als $\Gamma(S)$.

BEMERKUNG. Die eben definierten Garben sind genauer Mengengarben. Andere Garben treten in dieser Arbeit nicht auf. Der gravierende Nachteil gegenüber Garben algebraischer Art ist die Nichtexistenz von exakten Garbensequenzen, so daß man die Schnitte einer Garbe S , also bei algebraischen Garben die nullte Kohomologie von X mit Koeffizienten in S , nicht wie üblich auf diese Weise berechnen kann.

Bekanntlich kann man Garben stets aus Prägarben konstruieren. Bei Bündelgarben ist allerdings diese Konstruktion unangemessen, und daher werden wir auch alle anderen Garben in dieser Arbeit stets direkt definieren oder konstruieren.

1.6.2 DEFINITION. $\pi : S \rightarrow X$ sei eine Garbe. Eine Gruppe G operiere von links sowohl auf S als auch auf X , wobei beide Gruppenoperationen stetig seien, falls G eine topologische Gruppe ist. Dann heiße π eine **G-äquivariante Garbe**, falls π G -äquivariant ist, i.e.

$$\pi(gs) = g\pi(s)$$

für alle $s \in S$ und $g \in G$.

Wir sagen manchmal auch, G operiert auf π . Wenn $G \subset \text{Aut}(X)$, soll dabei stillschweigend stets vorausgesetzt werden, daß G als Untergruppe von $\text{Aut}(X)$ kanonisch auf X operiert.

Allgemein induziert die Linksoperation von G auf einer G -äquivarianten Garbe π wie folgt eine Linksoperation von G auf $\Gamma(\pi)$:

$$gs(x) := gs(g^{-1}x)$$

für alle $g \in G, s \in \Gamma(\pi), x \in X$. In diesem Sinne ist dann die Menge

$$\Gamma(\pi)/G$$

der **G-Klassen von Schnitten** von π für jede G -äquivariante Garbe π definiert.

1.6.3 Es gibt viele Standardbeispiele für Garben, etwa die Garbe der stetigen, differenzierbaren, holomorphen oder meromorphen Funktionen auf entsprechenden Mannigfaltigkeiten. Für die Definition von solchen Beispielen sei auf die einschlägige Literatur verwiesen. Wir dagegen wollen uns mit speziellen Klassen von Garben beschäftigen, die zur Beschreibung bestimmter topologischer Probleme geeignet sind. Dies trifft in ganz besonderem Maße auf die äquivarianten Blätterungsgarben und Bündelgarben zu, die im nächsten Unterabschnitt konstruiert werden.

BEISPIELE

- [1] Die Überlagerungen sind genau diejenigen Garben, die zudem auch noch Faserbündel sind.
- [2] CAT stehe wieder als Abkürzung für TOP, DIFF, PL. M und N seien zwei CAT-Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension. In der üblichen Weise kann man für jeden Punkt $x \in M$ auf der Menge

$$\{ f : U \hookrightarrow N \mid U \text{ offene Umgebung von } x, f \text{ offene CAT-Einbettung, } f \text{ orientierungserhaltend, falls } M \text{ und } N \text{ orientierbar} \}$$

die Äquivalenzrelation der Keime definieren, wobei zwei solche Elemente f_0, f_1 genau dann äquivalent sein sollen, wenn sie eingeschränkt auf eine geeignete Umgebung von x gleich sind. Die Menge aller dieser Keime um x sei mit $S_x(M, N)$ bezeichnet. Wir setzen

$$S(M, N) = \bigcup_x S_x(M, N),$$

standardmäßig versehen mit der étale-Topologie, so daß eine Basis der Topologie von $S(M, N)$ folgendermaßen gegeben ist: Sei $f : U \hookrightarrow N$ wie oben eine CAT-Einbettung mit $U \subset M$ offen. f definiert für jedes $x \in U$ den Keim $f_x \in S_x(M, N)$. Sei $U_f := \bigcup_{x \in U} f_x \subset S(M, N)$. Man überlegt sich, daß alle diese Teilmengen die Basis einer Topologie auf $S(M, N)$ bilden. Die konstante Abbildung $S_x(M, N) \rightarrow \{x\}$ definiert schließlich die Garbe $\pi : S(M, N) \rightarrow M$. Aber π ist sogar eine äquivariante Garbe, denn die CAT-Automorphismen $\text{Aut}^{\text{CAT}}(M)$ operieren von links durch Invertierung

und Verkettung von rechts auf den Keimen wie folgt: Sind $\varphi \in \text{Aut}^{\text{CAT}}(M)$ und $f : U \hookrightarrow N$ wie oben, dann sei

$$\varphi f = f \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U)}.$$

Diese Operation überträgt sich auf die Keime und liefert so die äquivariante Garbe $\pi : S(M, N) \rightarrow M$ über M . Wir nennen $S(M, N)$ einfach die Garbe der lokalen Homöomorphismen von M nach N .

- [3] In diesem Beispiel definieren wir die Blätterungsgarben $F_q(M)$. Wie vorhin sei M^m eine CAT-Mannigfaltigkeit und $0 \leq q \leq m$. Analog definieren wir für jedes $x \in M$ auf der Menge

$$\{ \mathcal{F} \mid U \text{ offene Umgebung von } x, \mathcal{F} \text{ CAT-Blätterung auf } U, \text{codim } \mathcal{F} = q \}$$

zwei Elemente als keimäquivalent, wenn sie eingeschränkt auf eine geeignete offene Umgebung W von x gleich sind. $F_q(M)_x$ sei die Menge aller dieser Keime in x , und wie beim letzten Beispiel bilden die analog definierten Teilmengen $U_{\mathcal{F}}$ eine Basis von

$$F_q(M) = \bigcup_x F_q(M)_x,$$

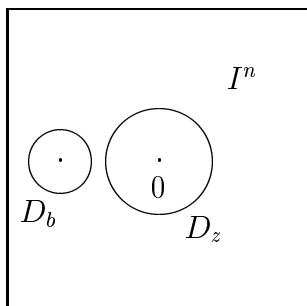
so daß die Projektion $\pi_q : F_q(M) \rightarrow M$ eine Garbe über M darstellt, die wir kürzer als die **Garbe der lokalen CAT-Blätterungen** von M der Kodimension q bezeichnen. π_q ist zusätzlich eine $\text{Aut}^{\text{CAT}}(M)$ -äquivariante Garbe, weil lokale Blätterungen von Automorphismen durch Operation von links wie in 1.1.1 transportiert werden können. Soll die CAT-Struktur besonders hervorgehoben werden, schreiben wir auch $F_q^{\text{CAT}}(M)$.

SATZ. M, N seien zwei CAT-Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension m und $0 \leq q \leq m$. Dann gelten die folgenden Eigenschaften:

- (1) Falls M zusammenhängend, ist auch der Totalraum $F_q(M)$ bogenzusammenhängend.
- (2) Falls M und N zusammenhängend, ist auch der Totalraum $S(M, N)$ bogenzusammenhängend.
- (3) Es gibt eine natürliche, bijektive Korrespondenz zwischen den Schnitten von $S(M, N)$ und den (orientierungserhaltenden) stetigen Abbildungen $M \rightarrow N$, die lokal CAT-Homöomorphismen sind.
- (4) Es gibt eine natürliche, bijektive Korrespondenz zwischen den Schnitten von $F_q(M)$ und den CAT-Blätterungen von M der Kodimension q .
- (5) Für jede Untergruppe $G \subset \text{Aut}^{\text{CAT}}(M)$ gibt es eine natürliche, bijektive Korrespondenz zwischen $\Gamma(F_q(M))/G$ und $\text{Fol}_q(M)/G$.

BEWEIS: Wir zeigen zu Beginn, daß $F_q(M)$ bogenzusammenhängend ist. Dazu benötigen wir folgendes allgemeine Argument, den **Scheibensatz**⁷⁾: Ist M eine zusammenhängende CAT-Mannigfaltigkeit der Dimension n (M berandet erlaubt), und sind $h_1, h_2 : B^n \hookrightarrow \text{int-}M$ zwei CAT-Einbettungen des n -dimensionalen CAT-Balles B^n , dann ist h_1 stationär auf ∂M ambient CAT-isotop zu h_2 oder zu $h_2 \circ r_n$, wobei r_n die Spiegelung der ersten Koordinate bezeichne. Nach diesem Satz gibt es höchstens zwei ambiante Isotopieklassen von Scheibeneinbettungen, wodurch Orientierbarkeit rein geometrisch definiert werden kann: M ist orientierbar, wenn es zwei solche Klassen gibt und nicht-orientierbar, wenn es nur eine gibt. Im differenzierbaren Fall ist diese Definition zu der üblichen (s. [Hirsch]) und im topologischen Fall zu der homologischen Orientierbarkeit äquivalent. Eine Orientierung von M ist eine Wahl der beiden Isotopieklassen.

Wir kommen nun zum Beweis von (1): Es soll gezeigt werden, daß sich je zwei Blätterungskeime \mathcal{F}_0 in $x_0 \in M$ und \mathcal{F}_1 in $x_1 \in M$ mit $x_0 \neq x_1$ durch einen Weg in $F_q(M)$ verbinden lassen. Wir fassen \mathcal{F}_0 und \mathcal{F}_1 als CAT-Blätterungen auf offenen Umgebungen U_0 von x_0 bzw. U_1 von x_1 auf, die o.B.d.A. kartesische Blätterkarten seien. Daher existieren jeweils Umgebungen B_0, B_1 ⁸⁾ von x_0 bzw. x_1 und CAT-Blätterisomorphismen $d_i : (I^n = I^p \times I^q, \mathcal{F}_{n,q}) \xrightarrow{\cong} (B_i, \mathcal{F}_i|_{B_i})$, $i = 0, 1$, die in derselben Orientierungsklasse liegen, falls M orientiert ist. Ferner gelte natürlich $d_i(0) = x_i$. Wir wählen nun im Würfel I^n zwei disjunkte kleinere CAT-Bälle $D_z, D_b \subset I^n$, die wie im unteren Bild angedeutet beide CAT-Untermannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^n seien,



so daß D_z eine Umgebung der 0 ist. Das Bild von D_z unter d_0 ist ein CAT-Ball in M , wobei o.E. $x_1 \notin d_0(D_z)$ und $d_1(D_b) \cap d_0(D_z) = \emptyset$ gelte. Entfernt man das Innere dieses Balles, erhält man eine berandete CAT-Mannigfaltigkeit \hat{M} . Falls $m \geq 2$, ist \hat{M} stets zusammenhängend. Für $m = 1$ muß man die Intervalle D_b notfalls verschieden passend zu d_0 und d_1 wählen und zwar so, daß deren Bilder unter d_0, d_1 in derselben Komponente von \hat{M} liegen. Oder man führt den (sowieso trivialen) Beweis für $\dim M = 1$ gesondert. Wegen obigem Scheibensatz existiert nun eine auf $\partial \hat{M}$ stationäre, ambiante CAT-Isotopie in $\text{int-}\hat{M}$ von $d_0|_{D_b}$ nach $d_1|_{D_b}$, die stationär auf $d_0(D_z)$ zu einer ambienten Isotopie h von M fortgesetzt werden kann. Die Blätterung $\mathcal{F}_{n,q}|_{\text{int-}I^n}$ wird mittels h zu einer Blätterung \mathcal{F}' von $h(d_0(\text{int-}I^n))$ transformiert, die eingeschränkt auf $d_1(D_b)$ mit \mathcal{F}_1 übereinstimmt.

Fassen wir zusammen: Es existiert wegen $h|_{d_0(D_z)} = \text{id}$ eine zusammenhängende Umgebung $W = h(d_0(\text{int-}I^n))$ von $d_1(D_b) \cup d_0(D_z)$ mit CAT-Blätterung \mathcal{F}_W auf W , die nach

⁷⁾Für CAT = DIFF, PL ist er bekanntlich richtig (s. [Hirsch, R-S]), und im topologischen Fall *sollte* er nach den Resultaten von FREEDMAN und insbesondere der bewiesenen, 4-dimensionalen Ringvermutung ebenfalls eine Selbstverständlichkeit sein; aber eine explizite Literaturangabe steht noch aus.

⁸⁾Diese sind im differenzierbaren Fall keine DIFF-Bälle, was auch nicht erforderlich ist.

Einschränkung auf $d_1(D_b) \subset U_1$ mit \mathcal{F}_1 und auf $d_0(D_z) \subset U_0$ mit \mathcal{F}_0 übereinstimmt. Jetzt muß man nur noch den Bogenzusammenhang von U_1 berücksichtigen, und das Beweisziel ist erreicht.

Der Beweis für den Bogenzusammenhang von $S(M, N)$ folgt i.w. der gleichen Beweisidee mit einigen technischen Modifikationen, die hier nur skizzenhaft angegeben werden: f_0, f_1 seien zwei Einbettungskeime in x_0 bzw. x_1 mit $f_0(x_0) = y_0$ bzw. $f_1(x_1) = y_1$ und auf entsprechenden Umgebungen U_0, U_1 definiert. Man wähle wiederum Balleinbettungen d_0, d_1 und die Bälle D_z, D_b . Zuerst findet man eine auf $d_1(D_z)$ und $d_0(D_b)$ stationäre Isotopie h_M von M , die $d_1|_{D_z}$ nach $d_0|_{D_b}$ transportiert. Dann findet man eine nahe y_0 stationäre Isotopie h_N von N , die $f_0 \circ h_M \circ d_1|_{D_z}$ nach $f_1 \circ d_0|_{D_b}$ transportiert. Somit ist $h_N \circ f_0 \circ h_M$ nahe x_0 eine Fortsetzung von f_0 mit zusammenhängendem Definitionsbereich, der eine offene Teilmenge $V \subset U_1$ enthält, so daß $h_N \circ f_0 \circ h_M|_V = f_1|_V$. Da U_1 zusammenhängend ist, folgt insgesamt das Gewünschte.

Zum Beweis von (3): Jede stetige Abbildung $f : M \rightarrow N$, die lokal homöomorph und orientierungserhaltend ist, induziert durch $x \mapsto$ Keim von f in x einen Schnitt $s_f : M \rightarrow S(M, N)$. Interessanter ist die Rückrichtung. Sei $s : M \rightarrow S(M, N)$ ein Schnitt. Da s stetig ist, existiert zu jedem $x \in M$ eine offene Umgebung U_x von x und eine (orientierungserhaltende) CAT-Einbettung $s_x : U_x \hookrightarrow N$, so daß

$$\text{Keim von } s_y \text{ in } y = \text{Keim von } s_x \text{ in } y$$

für alle $y \in U_x$. Insbesondere gilt

$$s_x(y) = s_y(y)$$

für alle $y \in U_x$. Somit ist $f : M \rightarrow N$ mit $f(x) := s_x(x)$ stetig und lokal ein CAT-Homöomorphismus. Offensichtlich sind diese beiden Zuordnungen zueinander invers.

Der Beweis von (4) wird etwas anders geführt: Ist $s : M \rightarrow F_q(M)$ ein Schnitt, so liefert die Stetigkeit von s zu jedem $x \in M$ die Existenz einer offenen Umgebung U_x von x und einer CAT-Blätterung \mathcal{F}_x auf U_x der Kodimension q , so daß

$$\text{Blätterungskeim von } \mathcal{F}_y \text{ in } y = \text{Blätterungskeim von } \mathcal{F}_x \text{ in } y$$

für alle $y \in U_x$ gilt. O.B.d.A. sei jedes U_x eine kartesische Blätterkarte für \mathcal{F}_x . Damit folgt für je zwei Punkte $x, \bar{x} \in M$

$$\text{Blätterungskeim von } \mathcal{F}_x \text{ in } y = \text{Blätterungskeim von } \mathcal{F}_{\bar{x}} \text{ in } y$$

für alle $y \in U_x \cap U_{\bar{x}}$. Dies bedeutet aber nach der Bedingung (ii) in Folgerung 1.2.5 nichts anderes, als daß die Familie $(\mathcal{F}_x)_{x \in M}$ kompatibel ist. Daher sind alle Voraussetzungen für das Lemma 1.2.7 erfüllt, so daß die Summenzerlegung $\sum \mathcal{F}_x$ der Bedingung

$$\left(\sum \mathcal{F}_y \right) \Big|_{U_x} = \mathcal{F}_x$$

für alle $x \in M$ genügt. Somit ist $\mathcal{F} := \sum \mathcal{F}_x$ eine CAT-Blätterung auf M der Kodimension q . Wegen Folgerung 1.2.4 ist \mathcal{F} durch s wohldefiniert. Aus der Konstruktion ergibt sich sofort die Bijektivität der Korrespondenz.

Um (5) einzusehen, muß man sich nur klarmachen, daß die Korrespondenz aus (4) die Gruppenoperationen von $\text{Aut}^{\text{CAT}}(M)$ sowohl auf den Schnitten als auch den Blätterungen respektiert. \triangle

KOROLLAR. *Mit den gleichen Voraussetzungen sei zusätzlich M geschlossen, N zusammenhängend und nicht kompakt, wobei $\partial N \neq \emptyset$ zugelassen wird. Dann besitzt die Garbe $S(M, N)$ keinen Schnitt.*

BEWEIS: Gäbe es einen Schnitt, dann nach obigem Satz auch ein stetiges $f : M \rightarrow N$, das lokal topologisch ist. Da N separiert und M kompakt, ist $f(M) \subset N$ abgeschlossen. Aber f ist auch eine offene Abbildung, und daher müßte $f(M) = N$ gelten, da $f(M) \subset N$ offen, im Widerspruch zur Nichtkompaktheit von N . \triangle

FOLGERUNG. *M und N seien zwei zusammenhängende, geschlossene CAT-Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension mit endlichen, isomorphen Fundamentalgruppen. Dann gilt:*

$$M \cong_{\text{CAT}} N \iff \text{Es existiert ein Schnitt von } S(M, N).$$

BEWEIS: Die Hinrichtung ist klar. Es existiere ein Schnitt von $S(M, N)$. Dieser induziert eine stetige, lokal topologische Abbildung $f : M \rightarrow N$. Mit dem Zusammenhangsargument von vorhin folgt die Surjektivität von f . Aber eine Garbe zwischen kompakten Räumen ist eine Überlagerung. Wäre f nicht einblättrig, also kein CAT-Homöomorphismus, müßte, da M und N beide zusammenhängend, $\pi_1(M)$ isomorph zu einer echten Untergruppe von $\pi_1(N)$ sein, was aber aufgrund der Endlichkeit und Isomorphie der beiden Gruppen unmöglich ist. \triangle

Aussage (4) des Satzes gibt zu einer Verallgemeinerung von Blätterungen Anlaß, den sog. **parametrisierten Blätterungen**: Wie gewohnt sei M^m eine CAT-Mannigfaltigkeit und $0 \leq q \leq m$. Ferner sei $f : X \rightarrow M$ eine stetige Abbildung. Eine parametrisierte CAT-Blätterungen von M der Kodimension q mit Basisabbildung f sei per Definition eine stetige Abbildung $\bar{f} : X \rightarrow F_q(M)$ mit $\pi_q \circ \bar{f} = f$. Die üblichen Blätterungen haben also die Basisabbildung id_M .

1.6.4 Bekanntlich läßt sich ein stetiger Garbenschnitt über einer abgeschlossenen Teilmenge eines parakompakten Raumes auf eine offene Umgebung fortsetzen. Für das fünfte Kapitel brauchen wir folgende Modifikation:

LEMMA. *Bezeichnet $B^n \subset \mathbb{R}^n$ die n -dimensionale Vollkugel, und sind $\pi : S \rightarrow X$ eine Garbe, $A \subset \partial B^n$ offen in ∂B^n , $f : B^n \rightarrow X$ stetig und $\bar{f} : A \rightarrow S$ ein stetiger Lift von $f|_A$, dann läßt sich \bar{f} zu einem stetigen Lift $\bar{F} : U \rightarrow S$ von $f|_U$ fortsetzen, wobei U eine in B^n offene, geeignete Umgebung von A ist, die der Bedingung $U \cap \partial B^n = A$ genügt.*

BEWEIS: Wir folgen einfach dem Beweis von Satz 13.1 auf Seite 61 in [Kultze] und benutzen auch die gleichen Bezeichnungen. Da die Lifts \bar{f}, \bar{F} zu Schnitten in die Pullbackgarbe f^*S korrespondieren, können wir o.E. $X = B^n$ und $f = id_{B^n}$ annehmen. Ferner setzen wir $\sigma := \bar{f}$. Zu jedem $x \in A$ gibt es eine in B^n offene Umgebung V_x von x und einen Schnitt σ_x über V_x mit $\sigma_x|_{V_x \cap A} = \sigma_{V_x \cap A}$ und $V_x \cap \partial B^n = V_x \cap A$. Als offene Teilmenge von B^n ist $Y := \bigcup_{x \in A} V_x$ eine Mannigfaltigkeit und daher parakompakt, so daß eine lokal endliche offene Verfeinerung $(U_i)_{i \in I}$ von $(V_x)_{x \in A}$ existiert. Außerdem haben wir $Y \cap \partial B^n = A$. Von da an kann man den Beweis in [Kultze] wortwörtlich abschreiben, wobei allerdings X durch Y ersetzt werden muß. \triangle

1.7 Bündelgarben

Es ist gar nicht evident, wie Bündelgarben allgemein definiert werden sollten. Das ist für unsere Zwecke auch nicht erforderlich, da wir nur eine konkrete Konstruktion benötigen. Der Leser mag am besten selbst entscheiden, welche Eigenschaften dieser konkreten Bündelgarben er für ausschlaggebend hält. Entscheidend ist für uns nur die Tatsache, daß Bündelblätterungen auf M mit Faser F bijektiv zu Schnitten der Bündelgarbe $B_F(M)$ korrespondieren.

1.7.1 Den ganzen Abschnitt über bezeichnen $M^m = M$ und F zwei zusammenhängende CAT-Mannigfaltigkeiten, so daß $q := \dim M - \dim F \geq 0$ und F geschlossen ist.

Als erstes müssen wir den Begriff der **Tubenumgebung** klären: Sei $L \subset M$ eine lokal flache CAT-Untermannigfaltigkeit von M . Eine (abgeschlossene) CAT-Tubenumgebung von L ist eine CAT-Einbettung $t : E \hookrightarrow M$, wobei E ein CAT-Ballbündel über L mit Nullschnitt $i : L \hookrightarrow E$ sei, so daß $t \circ i = id_L$ und $t(E)$ eine Umgebung von L ist. t heißt trivial, wenn E ein triviales CAT-Ballbündel über L ist. Die analoge Definition von offenen Tubenumgebungen ist evident. Das Wort ‘Tubenumgebung’ bezeichne stets eine abgeschlossene Tubenumgebung.

Falls $t : E \rightarrow M$ eine triviale Tubenumgebung ist, existiert ein CAT-Isomorphismus $h : t(E) \xrightarrow{\cong} L \times \overset{\circ}{B}^p$ mit $p = \dim M - \dim L$. Dann ist $h^{-1}(L \times \overset{\circ}{B}^p)$ eine offene Umgebung von L , die durch $\{h^{-1}(L \times b) \mid b \in \overset{\circ}{B}^p\}$ geblättert ist. Eine solche Blätterung nennen wir eine **triviale CAT-Tubenblätterung** von L . Daher ist die Existenz einer trivialen CAT-Tubenblätterung von L äquivalent zu der Existenz einer trivialen CAT-Tubenumgebung von L .

Mit M und F wie oben sei

$$\mathbf{L}(F; M) := \{ L \subset M \text{ CAT-Untermannigfaltigkeit} \mid L \cong_{\text{CAT}} F, \\ L \text{ besitzt triviale CAT-Tubenumgebung} \}.$$

1.7.2 LEMMA. Falls $\mathbf{L}(F; M) \neq \emptyset$, existiert zu jedem $x \in M$ ein $L \in \mathbf{L}(F; M)$ mit $x \in L$.

BEWEIS: Da $\mathbf{L}(F; M) \neq \emptyset$ existiert ein $L \in \mathbf{L}(F; M)$. Wähle irgendein $y \in L$. Wegen der Homogenität von M existiert eine CAT-Isotopie $\varphi : M \rightarrow M$ mit $\varphi(y) = x$. Daher gilt $x \in L' := \varphi(L) \in \mathbf{L}(F; M)$, da durch φ auch jede triviale CAT-Tubenblätterung von L zu einer von L' transportiert wird. \triangle

Falls $k < m$, ist $\mathbf{L}(S^k; M)$ stets nichtleer und das vorige Lemma anwendbar.

1.7.3 Nach diesen Begriffsklärungen können wir für $\mathbf{L}(F; M) \neq \emptyset$ direkt die Konstruktion der Bündelgarbe

$$\pi_F : B_F(M) \rightarrow M$$

angehen. Dazu halten wir zunächst ein $L \in \mathbf{L}(F; M)$ fest. Dieses L induziert die Menge aller Tupel

$$\{(V, \mathcal{F}_V)\},$$

wobei V eine offene Umgebung von L und \mathcal{F}_V eine CAT-Blätterung von V der Kodimension q sei, die eingeschränkt auf eine evtl. kleinere Umgebung eine triviale CAT-Tubenblätterung von L ist.

Zwei solche Tupel $(V, \mathcal{F}_V), (V', \mathcal{F}_{V'})$ erklären wir als keimäquivalent, wenn eine Umgebung $W \subset V \cap V'$ existiert mit

$$\mathcal{F}_V|_W = \mathcal{F}_{V'}|_W.$$

Wir setzen

$$\Lambda_L := \{(V, \mathcal{F}_V)\} / \sim \quad \text{und} \quad B_L := L \times \Lambda_L.$$

Jede Teilmenge $L \times \lambda \subset B_L$, $\lambda \in \Lambda_L$, werde ein Lift von L genannt. Die Inklusion $L \subset M$ induziert die Abbildung

$$\pi_L : B_L = L \times \Lambda_L \longrightarrow L \subset M.$$

Für jeden Lift \tilde{L} von L ist daher $\pi_L|_{\tilde{L}} : \tilde{L} \xrightarrow{\cong} L$ eine Bijektion. An dieser Stelle schieben wir ein zu Lemma 1.3.3 analoges Lemma ein:

1.7.4 LEMMA. *Seien $U_1, \dots, U_k \subset M$ offene Umgebungen von $L \in \mathbf{L}(F; M)$ und \mathcal{F}_i triviale CAT-Tubenblätterungen auf U_i von L für alle i , so daß*

$$\text{Keim von } \mathcal{F}_i \text{ um } L = \text{Keim von } \mathcal{F}_j \text{ um } L$$

für alle i, j . Dann existiert eine Umgebung $U \subset \bigcap_i U_i$ um L mit

- (1) $\mathcal{F}_i|_U = \mathcal{F}_j|_U =: \mathcal{F}$ für alle i, j .
- (2) \mathcal{F} triviale CAT-Tubenblätterung von L .
- (3) U \mathcal{F}_i -regulär für alle i .

BEWEIS: Im Prinzip können wir den analogen Beweis zu Lemma 1.3.3 führen, wenn wir nicht nach $\mathcal{F}_{m,q}$, sondern nach $\{F \times \{r\} \mid r \in \mathbb{R}^q\}$ modellieren. Außerdem muß man ausnutzen, daß die Umgebung $\varphi_1(U)$ von $\varphi_1(L)$ aufgrund der Kompaktheit von F eine triviale Tubenumgebung V enthält, die somit automatisch $\{F \times \{r\} \mid r \in \mathbb{R}^q\}$ -regulär ist. \triangle

1.7.5 Als Menge ist der Totalraum $B_F(M)$ definiert durch

$$B_F(M) := \bigcup_{L \in \mathbf{L}(F;M)} B_L.$$

Die einzelnen π_L setzen sich dementsprechend zu einer Abbildung

$$\pi_F := \bigcup_{L \in \mathbf{L}(F;M)} \pi_L : B_F(M) \longrightarrow M$$

zusammen, die nach Lemma 1.7.2 surjektiv ist.

Als nächstes definieren wir eine Topologie auf $B_F(M)$. Sei dafür $L \in \mathbf{L}(F;M)$, V eine offene Umgebung von L und \mathcal{F}_V eine triviale CAT-Tubenblätterung von L auf V der Form $\{h^{-1}(L \times u) \mid u \in U \subset \mathbb{R}^q\}$, wobei U eine offene Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^q$ und $h : V \xrightarrow{\cong} L \times U$ ein CAT-Isomorphismus sei, so daß L dem Blatt $L \times 0$ entspricht. Daraus folgt aber sofort, daß V zusammen mit \mathcal{F}_V auch eine triviale CAT-Tubenblätterung von jedem $h^{-1}(L \times u)$ ist für alle $u \in U$ und somit ein Element in $\Lambda_{h^{-1}(L \times u)}$ liefert. Daher induziert (V, \mathcal{F}_V) eine Menge $\tilde{V} \subset B_F(M)$, so daß

$$\pi_F|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \xrightarrow{\cong} V$$

bijektiv ist. Ein solches \tilde{V} wollen wir eine **Bündelgarbenumgebung** des Liftes

$$\tilde{L} = (\pi_F)^{-1}(L) \cap \tilde{V}$$

nennen. Die Bündelgarbenumgebungen bilden zwar noch keine Basis einer Topologie, aber man erhält diese durch Hinzunahme aller Mengen $\tilde{W} \subset \tilde{V}$, wobei $\pi_F(\tilde{W}) \subset V$ offen. Mit dieser Konstruktion der Topologie von $B_F(M)$ sieht man sofort, daß π_F eine Garbe über M ist.

Wir erhalten aber noch eine Zusatzstruktur, weil $\text{Aut}^{\text{CAT}}(M)$ auf $\mathbf{L}(F;M)$ und den trivialen Tubenblätterungen via Transport wie in 1.1.1 operiert. Daher operiert $\text{Aut}^{\text{CAT}}(M)$ auf der Garbe π_F . Insbesondere ist π_F $\text{Aut}^{\text{CAT}}(M)$ -äquivariant.

LEMMA. (a) Die Bogenkomponenten von $B_L \subset B_F(M)$ als topologischer Unterraum von $B_F(M)$ sind gerade die Lifts von L .

(b) Für je zwei $L, L' \in \mathbf{L}(F;M)$ mit $L \neq L'$ lassen sich $B_L, B_{L'} \subset B_F(M)$ durch offene Umgebungen in $B_F(M)$ trennen, die jeweils als Vereinigung von Bündelgarbenumgebungen sämtlicher Lifts von L bzw. L' gewählt werden können.

BEWEIS: Jeder Lift von L ist bogenzusammenhängend und daher in einer Bogenkomponente von B_L enthalten. Zu jedem Lift \tilde{L} von L gibt es eine geeignete Bündelgarbenumgebung \tilde{V} . Daher gilt

$$B_L \cap \tilde{V} = \tilde{L},$$

so daß $\tilde{L} \subset B_L$ offen. Da jede Bogenkomponente von B_L zusammenhängend ist, kann sie keine disjunkte Vereinigung nichtleerer offener Mengen sein und somit nur aus einem Lift von L bestehen.

zu (b): Da $L \neq L'$, existieren $x_0 \in L$ und Umgebungen U_0 von x_0 und U' von L' mit $U_0 \cap U' = \emptyset$. Sei \tilde{L}' irgendein Lift von L' . Dann gehört zu \tilde{L}' eine Bündelgarbenumgebung $\tilde{V}_{\tilde{L}'}$, die aufgrund der Kompaktheit von L' so gewählt werden kann, daß $\pi_F(\tilde{V}_{\tilde{L}'}) \subset U'$. Damit sei

$$\tilde{V}' := \bigcup_{\tilde{L}'} \tilde{V}_{\tilde{L}'}$$

als Umgebung von $B_{L'}$ definiert. Sei nun \tilde{L} irgendein Lift von L . Eine triviale Tubenblätterung (V, \mathcal{F}_V) von L als zugehörigen Keimrepräsentanten kann man stets so verkleinern, daß o.E. jedes Blatt von \mathcal{F}_V U_0 trifft. Mit der von (V, \mathcal{F}_V) induzierten Bündelgarbenumgebung $\tilde{V}_{\tilde{L}}$ von \tilde{L} setzen wir

$$\tilde{V} := \bigcup_{\tilde{L}} \tilde{V}_{\tilde{L}}.$$

Wir zeigen jetzt, daß $\tilde{V} \cap \tilde{V}' = \emptyset$: Da \tilde{V} und \tilde{V}' beide Vereinigungen von Bündelgarbenumgebungen sind, würde die Annahme des Gegenteils aufgrund der Mengenkonstruktion von $B_F(M)$ die Existenz eines $\tilde{L} \in \mathbf{L}(F; M)$ und eines Liftes \hat{L} von \tilde{L} implizieren mit $\hat{L} \subset \tilde{V} \cap \tilde{V}'$. Das bedeutet aber $\tilde{L} \subset U'$ und $\tilde{L} \cap U_0 \neq \emptyset$ im Widerspruch zu $U_0 \cap U' = \emptyset$. \triangle

SATZ. *Es werden die üblichen Bezeichnungen und Voraussetzungen dieses Abschnittes verwandt, insbesondere sei $\mathbf{L}(F; M) \neq \emptyset$.*

- (1) $\pi_F : B_F(M) \rightarrow M$ ist eine Garbe über M , auf der $\text{Aut}^{\text{CAT}}(M)$ äquivariant operiert.
- (2) Die Schnitte $\Gamma(\pi_F)$ entsprechen bijektiv den CAT-Bündelblätterungen von M mit Faser F .
- (3) Für jede Untergruppe $G \subset \text{Aut}^{\text{CAT}}(M)$ gibt es eine bijektive Korrespondenz zwischen $\Gamma(\pi_F)/G$ und $\text{Bufol}_F(M)/G$.

BEWEIS: (1) ist bereits gezeigt.

Zu (2): Wegen der lokalen Trivialisierungsbedingung eines Faserbündels ist klar, daß jede CAT-Bündelblätterung auf M mit Faser F einen Schnitt von π_F induziert. Die Umkehrung ist allerdings nicht ganz so evident. Sei $s : M \rightarrow B_F(M)$ ein Schnitt von π_F und $x_0 \in M$ beliebig, aber fest. Dann existiert genau ein $L_0 \in \mathbf{L}(F; M)$ und ein Lift $\tilde{L}_0 \subset B_F(M)$ von L_0 mit $x_0 \in L_0$ und $s(x_0) \in \tilde{L}_0$.

Wir zeigen als erstes, daß $s(L_0) = \tilde{L}_0$: Aufgrund des Bogenzusammenhangs von L_0 reicht es zu zeigen, daß für jeden Weg $w : [0, 1] \rightarrow L_0$ mit $w(0) = x_0$ der transportierte Weg $s \circ w$ ganz in \tilde{L}_0 verläuft. Dafür benutzen wir das letzte Lemma wie folgt: Zu jedem $L \in \mathbf{L}(F; M) \setminus \{L_0\}$ existieren offene Umgebungen \tilde{U}_L von B_{L_0} und \tilde{V}_L von B_L mit

$$\tilde{U}_L \cap \tilde{V}_L = \emptyset.$$

Nun bildet die Vereinigungsüberdeckung $(\tilde{U}_L) \cup (\tilde{V}_L)$ eine offene Überdeckung von $B_F(M)$. Daher existiert eine Unterteilung $0 = t_0 < \dots < t_i < \dots < t_k = 1$ von $[0, 1]$, so daß für jedes $i = 0, \dots, k-1$

$$(s \circ w)([t_i, t_{i+1}]) \subset \tilde{U}_L \text{ oder } \tilde{V}_L$$

mit einem geeigneten $L \in \mathbf{L}(F; M) \setminus \{L_0\}$ gilt. Wir beginnen bei $i = 0$: Da $(s \circ w)(0) \in B_{L_0}$ und $\tilde{U}_L \cap \tilde{V}_L = \emptyset$, gibt es kein $L \neq L_0$ mit $(s \circ w)([t_0, t_1]) \subset \tilde{V}_L$. Also bleibt nur die Möglichkeit $(s \circ w)([t_0, t_1]) \subset \tilde{U}_L$ übrig mit einem passenden L . Die genauere Gestalt von \tilde{U}_L im vorigen Lemma impliziert

$$(\pi_F)^{-1}(L_0) \cap \tilde{U}_L = B_{L_0}.$$

Die Bogenkomponenten von B_{L_0} sind nach dem ersten Teil des letzten Lemmas aber gerade die Lifts von L_0 . Daraus folgt schließlich $(s \circ w)([t_0, t_1]) \subset \tilde{L}_0$. Induktiv nach i verfährt man so weiter, so daß $(s \circ w)([0, 1]) \subset \tilde{L}_0$ und somit wie gewünscht $s(L_0) \subset \tilde{L}_0$ gilt. Da $\pi_F : \tilde{L}_0 \cong L_0$, folgt daraus sofort $s(L_0) = \tilde{L}_0$.

Zu \tilde{L}_0 wählen wir weiter eine Bündelgarbenumgebung \tilde{V}_0 von \tilde{L}_0 . Da L_0 kompakt und s stetig ist, existiert eine triviale CAT-Tubenblätterung (V, \mathcal{F}_V) von L_0 , so daß (nach evtl. Verkleinerung von \tilde{V}_0) $\pi_F : \tilde{V}_0 \cong V$ und \tilde{V}_0 von (V, \mathcal{F}_V) induziert ist. Es folgt $s(V) = \tilde{V}_0$. Auf diese Weise existiert zu jedem $x \in M$ ein $L_x \in \mathbf{L}(F; M)$ und eine triviale CAT-Tubenblätterung \mathcal{F}_x auf einer Tubenumgebung V_x . Wir wollen natürlich wieder Lemma 1.2.7 anwenden, wozu wir uns von der Kompatibilität der Familie (\mathcal{F}_x) überzeugen müssen: Sei \tilde{L}_x der zugehörige Lift von L_x mit der entsprechenden Bündelgarbenumgebung \tilde{V}_x . Sei $L_y \in \mathcal{F}_x$ irgendein Blatt durch $y \in V_x$. Dann existiert zu L_y genau ein Lift $\tilde{L}_y \subset \tilde{V}_x$. Mit der gleichen Argumentation von oben für L_y anstelle von L_0 folgt $s(L_y) = \tilde{L}_y$. Aber \tilde{V}_x ist auch eine Bündelgarbenumgebung von \tilde{L}_y . Je zwei Bündelgarbenumgebungen von \tilde{L}_y induzieren aber triviale Tubenblätterungen von L_y , die keimäquivalent sind. Dies impliziert die Kompatibilität. Daher induziert s eine CAT-Blätterung \mathcal{F} auf M , so daß jedes Blatt $L \in \mathcal{F}$ eine Umgebung V besitzt, auf der $\mathcal{F}|_V$ eine triviale CAT-Tubenblätterung von L ist. Daher ist $M \rightarrow M/\mathcal{F}$ ein CAT-Faserbündel über der (evtl. nicht separierten) CAT-Mannigfaltigkeit M/\mathcal{F} . Aber M/\mathcal{F} besitzt zunächst mal eine abzählbare Basis seiner Topologie. Weil nun aber jedes Blatt von \mathcal{F} eine triviale Tubenblätterung als gesättigte Umgebung besitzt, ist M/\mathcal{F} tatsächlich auch ein Hausdorff-Raum und damit eine (übliche) CAT-Mannigfaltigkeit der Dimension q , so daß $M \rightarrow M/\mathcal{F}$ ein CAT-Faserbündel mit Faser F darstellt.

(3) folgt sofort aus der Konstruktion von Schnitten aus Bündelblätterungen und der Definition der Operation von $\text{Aut}^{\text{CAT}}(M)$ auf $B_F(M)$. \triangle

BEMERKUNG. Die Bogenkomponenten von $B_F(M)$ lassen sich anscheinend durch Isotopieklassen von $\mathbf{L}(F; M)$ charakterisieren. Hierzu geben wir das folgende Lemma ohne Beweis an:

1.7.6 LEMMA. *Sei $\text{CAT} = \text{PL}$ und $k \leq \min(m/2 - 1, m - 3)$. Falls $\pi_1(M)$ trivial auf $\pi_k(M)$ operiert, bilden die Bogenkomponenten von $B_{S^k}(M)$ eine Teilmenge von $\pi_k(M)$.*

Kapitel 2

Geblätterte Mikroidbündel

Im vorigen Kapitel haben wir Blätterungen mit Garbenschnitten identifiziert. Ein heuristisch ganz anderer Zugang ist der Versuch, im Rahmen eines *geeigneten* Bündelbegriffes Blätterungen (einer bestimmten Mannigfaltigkeit M) mit Unterbündeln eines Oberbündels (das nur von M abhängt) zu identifizieren. Daß dafür der herkömmliche Bündelbegriff ungeeignet ist, lehrt uns gerade der Satz von FROBENIUS (s. [Wa]). Daher würde man erfahrungsgemäß die Existenz eines solchen geeigneten Bündelbegriffes eher nicht erwarten. Aber wir haben Glück: Tatsächlich gibt es solche geeigneten Bündel, nämlich die geblätterten Mikroidbündel.

Geblätterte Mikroidbündel gibt es eigentlich „überall“, denn z.B. jede Riemannsche Mannigfaltigkeit (M^m, g) induziert ein kanonisches, geblättertes, bis auf Isomorphie eindeutiges Mikroidbündel: Bezeichnet TM das Tangentialbündel von M mit der Bündelprojektion $\pi : TM \rightarrow M$, und identifizieren wir M mit seinem Nullschnitt $M \xrightarrow{i} TM$, dann gibt es eine offene Umgebung $O \supset M$ von M , die den Definitionsbereich der Exponentialabbildung $\exp : O \rightarrow M$ darstellt. Mit der bgzsh-Zerlegung

$$\mathcal{F} := \exp^*(\text{Punktezerlegung von } M)$$

auf O ist dann

$$(\pi|_O, i, \mathcal{F})$$

ein differenzierbares, geblättertes Mikroidbündel mit Faser \mathbb{R}^m . Eine andere Wahl von O ändert nicht die Isomorphieklasse von $(\pi|_O, i, \mathcal{F})$. Besonders schön wird es bei einer Liegruppe G mit ihrer Liealgebra \mathfrak{g} , weil die Exponentialabbildung auf ganz \mathfrak{g} definiert ist. Es wäre sicherlich eine reizvolle Aufgabe, die Eigenschaften des zugeordneten, geblätterten Mikroidbündels mit möglichst rein algebraischen Eigenschaften der Liealgebra \mathfrak{g} zu charakterisieren.

Nur aus oberflächlicher Sicht scheinen die zwei Zugänge zur Beschreibung von Blätterungen nicht sehr viel miteinander zu tun zu haben, denn in Abschnitt 2.6 wird sich ihre direkte Entsprechung zueinander herausstellen.

Für Bündel, gleich welcher Art, versucht man immer, klassifizierende Räume und klassifizierende Abbildungen zu konstruieren. Wegen der Homotopy Covering Property reicht es normalerweise aus, dies in der Homotopiekategorie zu tun. Aber gerade jene Eigenschaft ist in fundamentaler Weise verletzt:

Homotope Pullbacks geblätterter Mikroïdbündel sind i.a. nicht isomorph!

D.h. selbst wenn ein klassifizierendes Objekt¹⁾ für geblätterte Mikroïdbündel existiert, und die Unterbündel, also die Blätterungen, des Tangentialmikroïdbündels (mit zugehöriger klassifizierender Abbildung f) durch die Lifts von f gegeben sind, dann liefern deren Homotopieklassen noch nicht mal die Isomorphieklassen der Blätterungen, so daß eine abstrakte Klassifikation von Blätterungen in dieser Weise nicht möglich ist.

Wie bereits in der Einleitung erwähnt wurde, sind wir auf Mikroïdbündel gar nicht angewiesen. Dennoch kann man die vorliegende Arbeit, wenn man will, ganz von der Warte der geblätterten Mikroïdbündel betrachten und sie als eine Möglichkeit auffassen, die fehlende Homotopy Covering Property auf andere Weise sozusagen wieder wettzumachen und dadurch letztendlich doch eine abstrakte Klassifikation von Blätterungen zu bekommen.

Eine alternative Möglichkeit, in gewissen Grenzen die Homotopieinvarianz der Klassifikation doch noch zu erhalten, liefert z.B. die Arbeit [Bra], in der die Γ -Strukturen und damit wegen Satz 3.4.4 auch die geblätterten Mikroïdbündel durch *lineare* Homotopieklassen von Abbildungen klassifiziert sind. Das genaue Theorem lautet:

THEOREM B. *For any topological groupoid G and a locally compact space X , there is a one-to-one natural correspondence between linear-homotopy classes of maps from X to BG and G -structures on X .*

Hierzu ein Kommentar vom Autor BRACHO: “In principle, Theorem B should enable us to work with Haefliger structures in terms more precise than “up to homotopy” (e.g. foliations up to isotopy). Unfortunately, we still do not know the invariants of linear homotopy necessary to undertake such projects.”

Daher wird in der vorliegenden Arbeit, wie in der Einleitung erläutert, ein anderer Weg eingeschlagen, um klassifizierende Invarianten für Blätterungen zu finden, wenn auch ihre Berechnungsmöglichkeiten bis dato noch nicht erforscht sind.

Im Geiste des siebten Kapitels über zahme Strukturen kann man obiges Theorem von BRACHO auch noch anders interpretieren: Lineare Homotopie ist sicherlich eine Art gezähmte Homotopie, so daß die G -Strukturen zu gezähmten Homotopieklassen korrespondieren.

Interessanterweise ergibt sich ein völlig natürlicher und von Blätterungen gänzlich unabhängiger Zugang zu Mikroïdbündeln und später zu geblätterten Mikroïdbündeln über eine ganz elementare, heuristische Analyse des Differenzierbarkeitsbegriffes, die zu einer allgemeinen Definition von Differenzierbarkeit führt. Unmittelbar damit verknüpft ist eine allgemeine Begriffsbildung von ‘Tangentialraum’ und ‘Tangentialabbildung’. In diesem Sinne ist auch folgende Aussage zu verstehen:

Jede stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen ist zwar i.a. nicht differenzierbar, besitzt aber stets eine Tangentialabbildung.

¹⁾in welchem Sinne auch immer, siehe hierzu die ersten beiden Abschnitte im 5. Kapitel.

Dies führt auf natürliche und heuristisch einsichtige Weise für *jeden* topologischen Raum X zu einer **Neuinterpretation** des Produktes

$$X \times X,$$

nämlich als geblättrtes, triviales Mikroidbündel über X mit Faser X und kanonischer Bündelprojektion $X \times X \rightarrow X$ auf den ersten Faktor. $X \times X$ heißt auch das **Tangentialmikroidbündel** von X .

Mikroidbündel sind sehr eng mit den aus der Literatur schon lange bekannten Mikrobündeln verwandt. Wie in [Thurs] implizit angedeutet, besteht der definitorische Hauptunterschied darin, daß bei Mikroidbündeln nicht nur Nullschnitte, sondern auch ganz allgemeine Schnitte zugelassen sind. Aufgrund der Translationsstruktur des \mathbb{R}^n sind aber Schnitte von Mikroidbündeln mit Faser \mathbb{R}^n lokal äquivalent zu Nullschnitten. Somit gilt:

Mikroidbündel mit Faser \mathbb{R}^n sind dasselbe wie n -Mikrobündel.

Von einem allgemeinen Tangentialbegriff abgesehen wäre daher im klassischen Fall der Mannigfaltigkeiten rein gar nichts gewonnen. Dies ändert sich aber völlig, wenn man *geblättrte* Mikroidbündel einführt. Denn bei diesen kommt es i.w. darauf an, wie sich die Schnitte mit den zusätzlichen Blätterungen schneiden, so daß die o.g. lokale Äquivalenz verloren geht. Genau dies ist auch der Grund für die fehlende Homotopy Covering Property. Zum „Ausgleich“ dafür erhält man aber auch die

bijektive Korrespondenz zwischen Blätterungen und gewissen Unterbündelkeimen des geblättrten Tangentialmikroidbündels.

2.1 Allgemeine Differenzierbarkeitsbegriffe

Dieser und der nächste Abschnitt sind eigentlich nur als Vorbemerkung zur heuristischen Einführung der Mikroidbündel gedacht. Entsprechend sind manche Erklärungen und Bemerkungen nicht exakt formuliert oder verifiziert.

Mit dem Begriff der Differenzierbarkeit wird jeder Mathematiker relativ früh konfrontiert und vertraut gemacht. So wundert es keinen, daß der Differenzierbarkeitsbegriff vollkommen abgeklärt zu sein scheint, und man fragt sich daher, ob es darüber überhaupt noch etwas nachzudenken gäbe. Aber wir werden gleich sehen, daß es diesbezüglich sehr wohl allgemeine Gesichtspunkte gibt, die erwähnt werden sollten.

Unsere kleine heuristische Analyse des klassischen Differenzierbarkeitsbegriffes beginnt zunächst mit der Beobachtung, daß dieser kein atomarer, sondern ein zusammengesetzter Begriff ist. Sprachlich ausgedrückt besteht die Gleichung

Differenzierbarkeit = gute lokale Approximierbarkeit durch lineare Abbildungen.

Somit ist Differenzierbarkeit in die zwei Komponenten „gute lokale Approximierbarkeit“ und „lineare Abbildungen“ aufgeteilt, die über das „durch“ miteinander verknüpft sind. Aus dieser Sicht verbirgt sich hinter der Differenzierbarkeit die Zielvorstellung, eine gegebene Abbildung möglichst gut durch eine „sehr einfache“ Abbildung zumindest lokal zu approximieren, dann die Eigenschaften dieser approximierenden Abbildung quasi stellvertretend zu studieren, um daraus wiederum auf Eigenschaften der ursprünglichen Abbildung zu schließen. Konkret wird „sehr einfach“ durch „linear“ realisiert. Da für lineare Abbildungen eine sehr befriedigende und reichhaltige Theorie zur Verfügung steht, können alle Begriffe und Methoden aus der linearen Algebra zum Studium der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten und Abbildungen angewendet werden. So ist es dank jener approximierenden Linearität z.B. möglich, Differentialformen, Vektorfelder, Krümmung, Differentialoperatoren, Lie-Ableitungen etc. zu definieren. So gesehen, kann man sich unter Differenzierbarkeit in der Tat nichts besseres als approximierende Linearität vorstellen.

Orientiert man sich aber unabhängig von dieser ausgezeichneten Bedeutung der Linearität an der o.g. Zweiteiligkeit des klassischen Differenzierbarkeitsbegriffes, wird schnell klar, wie dieser auf natürliche Weise verallgemeinert werden kann: Indem Abbildungen aus einer vorgegebenen Abbildungsklasse \mathcal{A} als lokale Approximationen zugelassen werden, was man als **Differenzierbarkeit bzgl. \mathcal{A}** bezeichnen könnte. Als exakte Definition ergibt sich daher sofort:

2.1.1 DEFINITION. *Seien X und Y metrische Räume, $f : X \rightarrow Y$ eine Mengenabbildung, $x_0 \in X$, und \mathcal{A}_{x_0} eine Menge von Keimen von Mengenabbildungen, die auf Umgebungen von x_0 definiert sind und nach Y abbilden. Dann heie f differenzierbar in x_0 bzgl. \mathcal{A}_{x_0} , falls ein Keim $A \in \mathcal{A}_{x_0}$ existiert mit $A(x_0) = f(x_0)$ und*

$$d(f(x), A(x)) = o(d(x, x_0)), \quad x \rightarrow x_0,$$

wobei d jeweils die Metrik bezeichne. A heie eine \mathcal{A}_{x_0} -Approximation von f in x_0 .

Dieses A ist i.a. nicht eindeutig bestimmt, so daß es im ursprünglichen Sinne nicht möglich ist, von einer Ableitung zu sprechen. Eindeutigkeit folgt aber z.B., falls die Keime affin linear sind. Eine Möglichkeit, dieses Problem zu lösen, besteht in der Einführung der Äquivalenzrelation

$$A \sim A' \iff d(A(x), A'(x)) = o(d(x, x_0))$$

auf den Keimen von \mathcal{A}_{x_0} . Den Quotienten \mathcal{A}_{x_0}/\sim schreiben wir als $\tilde{\mathcal{A}}_{x_0}$, und \bar{A} bezeichne die Äquivalenzklasse von A . Die Dreiecksungleichung impliziert unmittelbar das

LEMMA. *Die Menge aller \mathcal{A}_{x_0} -Approximationskeime von f in x_0 ist entweder leer oder eine Äquivalenzklasse. △*

Wenn f differenzierbar bzgl. \mathcal{A}_{x_0} ist, wollen wir diese Äquivalenzklasse mit $D_{x_0}^{\mathcal{A}_{x_0}}(f)$ bezeichnen und sie die **Ableitung** oder das **Differential** von f in x_0 bzgl. \mathcal{A}_{x_0} nennen. Noch praktischer ist es, einfach von der \mathcal{A}_{x_0} -Ableitung von f zu sprechen.

BEMERKUNG. Vielleicht wäre es schön, eine metrikfreie Definition der Differenzierbarkeit zu haben. Dafür wäre aber Uniformisierbarkeit nicht ausreichend, denn was man bräuchte, wäre so etwas wie ein Maß für unterschiedliche Konvergenzgeschwindigkeiten. Wahrscheinlich läßt sich ein solches auch ohne Metriken definieren. Der Aufwand könnte aber vielleicht zu immens werden, um gegenüber seinem Effekt in natürlicher Weise noch angemessen zu sein. Von daher ist die obige Definition vielleicht noch die angebrachteste. Selbstverständlich genügen auch Quasimetriken.

KETTENREGEL. Für metrische Räume X, Y, Z und $x_0 \in X, y_0 \in Y$ seien Mengen

- \mathcal{A}_{x_0} von Abbildungskeimen um x_0 nach Y ,
- \mathcal{B}_{y_0} von Abbildungskeimen um y_0 nach Z ,
- \mathcal{A}'_{x_0} von Abbildungskeimen um x_0 nach Z

gegeben, die alle Lipschitz-stetig in x_0 bzw. y_0 seien, i.e. $d(A(x), A(x_0)) = O(d(x, x_0)), x \rightarrow x_0$. Außerdem gelte $B \circ A \in \mathcal{A}'_{x_0}$ für alle $B \in \mathcal{B}_{y_0}$ und $A \in \mathcal{A}_{x_0}$ mit $A(x_0) = y_0$. Sind $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen mit $f(x_0) = y_0$, so daß f differenzierbar in x_0 bzgl. \mathcal{A}_{x_0} und g differenzierbar in y_0 bzgl. \mathcal{B}_{y_0} ist, dann ist auch $g \circ f$ differenzierbar in x_0 bzgl. \mathcal{A}'_{x_0} mit

$$D_{x_0}^{\mathcal{A}'_{x_0}}(g \circ f) = D_{y_0}^{\mathcal{B}_{y_0}}(g) \circ D_{x_0}^{\mathcal{A}_{x_0}}(f).$$

BEWEIS: Der Beweis besteht hauptsächlich aus einer mehrmaligen Anwendung der Dreiecksungleichung. Für zwei Approximationskeime A von f und B von g haben wir zunächst die Abschätzung

$$d((g \circ f)(x), (B \circ A)(x)) \leq d((g \circ f)(x), (B \circ f)(x)) + d((B \circ f)(x), (B \circ A)(x)).$$

Der zweite Summand wird durch die Gleichung

$$d((B \circ f)(x), (B \circ A)(x)) = O(d(f(x), A(x))) = O(o(d(x, x_0))) = o(d(x, x_0))$$

erledigt. Nun zum ersten Summanden. Da g von B in y_0 approximiert wird, gilt

$$d((g \circ f)(x), (B \circ f)(x)) = o(d(f(x), f(x_0))).$$

Wir brauchen daher nur noch $d(f(x), f(x_0)) = O(d(x, x_0))$ zu zeigen:

$$\begin{aligned} d(f(x), f(x_0)) &\leq d(f(x), A(x)) + d(A(x), A(x_0)) \\ &= o(d(x, x_0)) + d(A(x), A(x_0)) \\ &= o(d(x, x_0)) + O(d(x, x_0)) \\ &= O(d(x, x_0)). \end{aligned}$$

△

Aus der drittletzten und vorletzten Ungleichung folgt sofort das

KOROLLAR. Sei A eine \mathcal{A}_{x_0} -Approximation von f in x_0 . Dann gilt:

- (i) Ist A beschränkt nahe x_0 , dann auch f .
- (ii) Ist A stetig in x_0 , dann auch f .
- (iii) Ist A Lipschitz-stetig in x_0 , dann auch f . △

Die Dreiecksungleichung impliziert ferner die *Transitivität* der Differenzierbarkeit:

FOLGERUNG. \mathcal{A}_{x_0} und \mathcal{B}_{x_0} seien zwei Mengen von Abbildungskeimen derart, daß jedes $A \in \mathcal{A}_{x_0}$ differenzierbar in x_0 bzgl. \mathcal{B}_{x_0} ist. Dann impliziert die Differenzierbarkeit von $f : X \rightarrow Y$ in x_0 bzgl. \mathcal{A}_{x_0} auch die Differenzierbarkeit von f in x_0 bzgl. \mathcal{B}_{x_0} . △

2.1.2 Für die Definition der *stetigen* Differenzierbarkeit wäre es erforderlich, die verschiedenen „Abbildungshalme“ \mathcal{A}_x , die für jedes $x \in X$ gegeben seien, nicht nur einfach zu einer Menge \mathcal{A} zusammenzufassen, sondern auch geeignet zu topologisieren oder sogar zu metrisieren (für iterierte Differenzierbarkeit). Wie dies konkret zu erfolgen hat, ist allerdings noch nicht klar, weswegen wir \mathcal{A} hier nur als **Abbildungsmenge** mit der Projektion $p : \mathcal{A} \rightarrow X$ auffassen wollen. Was natürlich immer möglich ist, aber meist eine viel zu starke Stetigkeit bedeutet, daß man \mathcal{A} als Abbildungsgarbe topologisiert, indem man die von lokalen Repräsentanten $U \rightarrow Y$ (aus \mathcal{A} mit $U \subset X$ offen) induzierte étale-Topologie nimmt. Beispiele hierfür sind etwa die Garbe der holomorphen Funktionskeime, falls $Y = \mathbb{C}$ und X komplexe Mannigfaltigkeit, oder die Garbe der affinen Abbildungskeime, falls $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, oder die Garbe der stetigen Abbildungskeime etc.

Bei gegebener Abbildungsmenge \mathcal{A} werde eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ differenzierbar bzgl. \mathcal{A} genannt, wenn sie in jedem Punkt $x \in X$ differenzierbar bzgl. des Halmes \mathcal{A}_x ist. Nach dem letzten Korollar gilt in dieser Terminologie das

LEMMA. *Eine Abbildung zwischen metrischen Räumen ist genau dann stetig, wenn sie differenzierbar bzgl. der Garbe der stetigen Abbildungskeime ist.* △

2.1.3 Bevor wir einige Beispiele angeben, wollen wir den Fall der PL-Diffbarkeit näher studieren, da dieser in der Tat besondere Beachtung verdient. Ausgangspunkt sind zwei PL-Räume X und Y sowie eine Abbildungsmenge \mathcal{A} über X . Auf PL-Räumen gibt es zwar keine kanonischen Metriken, aber lt. [Spa] induziert jede Triangulierung eine kanonische Metrik, die lokal die gleiche Topologie erzeugt, da jeder PL-Raum lokal kompakt ist. Aus diesem Grunde sind auch alle solchen lokalen Metriken lokal äquivalent, so daß die Differenzierbarkeit in jedem Punkt bzgl. \mathcal{A} wohldefiniert ist. Wird für \mathcal{A} die Menge der PL-Abbildungkeime gewählt, ist Differenzierbarkeit bzgl. \mathcal{A} definiert und wird kürzer einfach mit **PL-Diffbarkeit** bezeichnet.

LEMMA. *Es seien die obigen Voraussetzungen gegeben. Ist eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ PL-diffbar, dann ist in jedem Punkt $x \in X$ der zugehörige Approximationskeim $A_x \in \mathcal{A}_x$ eindeutig, so daß die PL-Ableitung $D_x^{PL}(f)$ von f in x einpunktig ist. Somit ist ein Schnitt*

$$D^{PL}(f) : X \rightarrow \mathcal{A} \quad \text{von} \quad p : \mathcal{A} \rightarrow X$$

gegeben, der als PL-Ableitung von f bezeichnet werde.

BEWEIS: A und A' seien zwei PL-Approximationskeime von f in x_0 . Die Lokalkompaktheit ermöglicht jeweils eine PL-Einbettung von Umgebungen U um x_0 bzw. V um $y_0 = f(x_0)$ in einen \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{R}^m . Ferner sei U so gewählt, daß A und A' , aufgefaßt als Keimrepräsentanten, auf U definiert sind. Außerdem kann man die von \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{R}^m vererbten Metriken verwenden. Die Dreiecksungleichung impliziert zunächst

$$d(A(x), A'(x)) = o(d(x, x_0)), \quad x \rightarrow x_0.$$

Wir setzen $B := A - A'$. Dann ist B eine PL-Abbildung $U \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $B(x_0) = 0$. Nach [R-S] existiert um x_0 eine Umgebung $W \subset U$, so daß B in W konisch linear in x_0 ist, d.h. für jedes $x \in W$ und $t \in [0, 1]$ gilt $B(x_0 + t(x - x_0)) = B(x_0) + t(B(x) - B(x_0))$. Mit $x_t := x_0 + t(x - x_0)$ folgt daher

$$\frac{\|B(x_t) - B(x_0)\|}{\|x_t - x_0\|} = \frac{\|B(x) - B(x_0)\|}{\|x - x_0\|} \quad \text{für alle } x \in W \text{ und } t \in (0, 1].$$

Andererseits gilt

$$\frac{\|B(x_t) - B(x_0)\|}{\|x_t - x_0\|} = \frac{\|A(x_t) - A'(x_t)\|}{\|x_t - x_0\|} \longrightarrow 0, \quad t \rightarrow 0,$$

da A und A' äquivalent sind. Dies ist aber nur möglich, wenn $B(x) = 0$ für alle $x \in W$ gilt. △

Der in 2.1.1 vorgestellte Differenzierbarkeitsbegriff eignet sich nicht nur für Verallgemeinerungen, sondern auch für Spezialisierungen, wie einige der folgenden Beispiele zeigen.

BEISPIELE

- [1] Klassische Differenzierbarkeit in endlichdimensionalen euklidischen Räumen erhält man durch affin lineare Abbildungskeime. Zu beachten ist hierbei lediglich, daß eine lineare Abbildung durch ihre Einschränkung auf eine beliebig kleine Umgebung des Nullpunktes eindeutig festgelegt ist.
- [2] Ebenso ist die Differenzierbarkeit in Banachräumen gemäß [Lang] ein Spezialfall unserer Definition 2.1.1. Dies trifft allerdings nicht auf die Differenzierbarkeit in allgemeinen topologischen Vektorräumen zu, da diese i.a. keine Metrik besitzen.
- [3] Natürlich könnte man in Banachräumen auch Differenzierbarkeit bzgl. unbeschränkter Operatoren betrachten, was aber wahrscheinlich nur wenig sinnvoll ist, da die Kettenregel i.a. verletzt ist.
- [4] Eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ mit $A \subset \mathbb{R}^n$ und $B \subset \mathbb{R}^m$ ist nach [G-P] per Definition differenzierbar, wenn sie sich lokal differenzierbar auf eine offene Menge des \mathbb{R}^n fortsetzen läßt. Eine Verallgemeinerung dessen erhält man durch Differenzierbarkeit bzgl. auf A eingeschränkter, affin linearer Abbildungskeime.

- [5] Daran anknüpfend gewinnt man in analoger Weise auch eine Verallgemeinerung der C^∞ -subkartesischen Räume, für die MARSHALL in [Mar] einen de Rham'schen Satz bewies. Hierbei wird Differenzierbarkeit durch lokale, *stabile* differenzierbare Fortsetzung (auch im Bildbereich) erklärt, stabil im Sinne der Standardinklusionen $\mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ für $k < n$. Entsprechend wähle man für die Verallgemeinerung eingeschränkte, stabil affine Abbildungskeime. Die Theorie aus [Mar] kann sicherlich auf solche verallgemeinerten, subkartesischen Räume übertragen werden.
- [6] In [B-M] wurde die Theorie aus [Mar] auf den Fall unendlicher Dimensionen verallgemeinert.
- [7] Jeder Matrixuntervektorraum M von $M(n \times m, \mathbb{R})$ induziert M -Differenzierbarkeit für Abbildungen $U \rightarrow V$, wobei $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, mittels der Bedingung, daß die assoziierten linearen Teile der affinen Abbildungskeime in M liegen sollen. Einfacher ausgedrückt ist eine Abbildung $f : U \rightarrow V$ genau dann M -differenzierbar, wenn $D_u(f) \in M$ für alle $u \in U$. Falls $V = \mathbb{R}^1$, bilden die M -differenzierbaren Abbildungen $U \rightarrow \mathbb{R}^1$ eine reelle Algebra.
- [8] Analog wird für jede Untergruppe $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ die G -Differenzierbarkeit definiert. Fordert man G -Differenzierbarkeit von den Kartenwechseln der Mannigfaltigkeitsatlanten, so erhält man nichts anderes als die altbekannten G -Strukturen auf Mannigfaltigkeiten (nicht zu verwechseln mit den G -Mannigfaltigkeiten).
- [9] Problem: Ist eine meßbar-differenzierbare Funktion wieder meßbar?
- [10] Die in 2.1.3 definierte PL-Diffbarkeit kann man zur Definition von (PL-Diff)-Mannigfaltigkeiten nutzen, indem man von den Kartenwechseln die PL-Diffbarkeit fordert. Insbesondere ist jede PL-Mannigfaltigkeit kanonisch auch eine (PL-Diff)-Mannigfaltigkeit. Man kann sich überlegen, daß für solche Mannigfaltigkeiten algebraische Derivationen und geometrische Richtungsableitungen auf natürliche Weise definiert sind, wodurch Tangentialräume und Tangentialbündel induziert werden. Diese Tangentialräume sind i.a. jedoch unendlichdimensionale Vektorräume!! Anders gesagt besteht das Problem bei allgemeineren Differentiationsbegriffen nicht so sehr in der Existenz, sondern vielmehr in der Endlichdimensionalität des assoziierten Tangentialraumes. Klassische Differentiation scheint sogar eine notwendige Bedingung für die Endlichdimensionalität (und Nichttrivialität) des Tangentialraumes zu sein.

2.1.4 Zu einer allgemeinen, elementaren Betrachtung der Differentiation gehört auch eine Untersuchung der additiven und derivativen Eigenschaften. Hierfür sei im folgenden der Bildbereich der betreffenden Abbildungskeime stets ein normierter reeller oder komplexer Vektorraum E , der jedoch nicht vollständig zu sein braucht. Werden multiplikative Eigenschaften benötigt, soll E außerdem eine reelle bzw. komplexe Algebra sein, deren Norm lediglich die Ungleichung

$$(2.1.5) \quad \|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

zu erfüllen braucht.

Wegen der Dreiecksungleichung ist die Additivität der allgemeinen Differentiation unmittelbar nachzuvollziehen: Sind $f, g : X \rightarrow E$ Abbildungen, \mathcal{A}_{x_0} ein bzgl. Addition und skalarer Multiplikation abgeschlossener Abbildungskeim, also ein Vektorraum, sowie $A_{x_0}, B_{x_0} \in \mathcal{A}_{x_0}$ Approximationskeime von f bzw. g in x_0 , so ist $A_{x_0} + B_{x_0}$ ein Approximationskeim in x_0 von $f + g$. Eine analoge Aussage gilt für die skalare Multiplikation λf .

Bekanntlich wird von LEIBNIZ berichtet, er habe eine Weile geglaubt, daß die Ableitung eines Produktes einfach das Produkt der Ableitungen sei. Betrachtet man sich das folgende Lemma, erscheint einem dieser Lapsus sogar ein wenig verständlich; wer weiß, vielleicht hatte LEIBNIZ eine ähnliche Rechnung im Kopf. . .

LEMMA. *Sei \mathcal{A}_{x_0} wie oben nicht nur ein Vektorraum, sondern auch noch abgeschlossen gegenüber Multiplikation, also eine Algebra, deren Elemente nahe x_0 beschränkt seien. Sind A_{x_0} und B_{x_0} zwei \mathcal{A}_{x_0} -Approximationen von f bzw. g in x_0 , so ist das Produkt $A_{x_0}B_{x_0}$ eine \mathcal{A}_{x_0} -Approximation von fg in x_0 .*

BEWEIS: Zur Vereinfachung setzen wir $A = A_{x_0}, B = B_{x_0}$. Nach Voraussetzung ist B nahe x_0 beschränkt und daher nach Korollar 2.1.1 (i) auch g . Der Beweis besteht dann aus der folgenden Rechnung:

$$\begin{aligned} \|f(x)g(x) - A(x)B(x)\| &= \|f(x)g(x) - A(x)g(x) + A(x)g(x) - A(x)B(x)\| \\ &= \|(f(x) - A(x))g(x) + A(x)(g(x) - B(x))\| \\ &\leq O(\|f(x) - A(x)\|) + O(\|g(x) - B(x)\|) \\ &= o(\|x - x_0\|). \end{aligned} \quad \triangle$$

Aus der Sicht des letzten Lemmas würde die Multiplikativität der Differentiation eigentlich natürlicher wirken als die übliche Derivativität. Aber das Produkt zweier affiner Abbildungen ist eben i.a. nicht mehr affin. So gesehen ist es eigentlich gar nicht mehr so selbstverständlich, daß sich ein Produkt ableiten läßt.

DERIVATIONSREGEL. *Mit denselben Voraussetzungen wie bei der Additivität seien außerdem alle Keime aus \mathcal{A}_{x_0} Lipschitz-stetig in x_0 . Sind $A, B \in \mathcal{A}_{x_0}$ Approximationskeime von f bzw. g in x_0 , dann ist mit den Notationen $f_0 = f(x_0), g_0 = g(x_0), A_0 = A(x_0), B_0 = B(x_0)$*

$$(*) \quad Ag_0 + f_0B - f_0g_0 = (A - A_0)g_0 + f_0(B - B_0) + f_0g_0$$

eine \mathcal{A}_{x_0} -Approximation des Produktes fg .

BEWEIS: Zwecks besserer Übersicht schreiben wir $f_x = f(x), g_x = g(x), A_x = A(x), B_x = B(x)$. Mit Einfügen, Dreiecksungleichung, Ungleichung (2.1.5) und Korollar

2.1.1 (iii) bekommen wir

$$\begin{aligned}
& \|f_x g_x - (A_x g_0 + f_0 B_x - f_0 g_0)\| \\
&= \|f_x g_x - A_x g_x + A_x g_x - A_x g_0 - f_0 B_x + f_0 g_0\| \\
&= \|(f_x - A_x)g_x + (A_x g_x - A_x g_0 - A_0 B_x + A_0 g_0)\| \\
&\leq o(\|x - x_0\|) + \|A_x g_x - A_x g_0 - A_0 B_x + A_0 g_0\|.
\end{aligned}$$

Damit ist f durch A ersetzt und somit das Problem etwas vereinfacht worden. Analog substituieren wir g durch B und brauchen daher nur noch

$$\|A_x B_x - A_x B_0 - A_0 B_x + A_0 B_0\| \stackrel{!}{=} o(\|x - x_0\|)$$

zu zeigen: Mit (2.1.5), der Stetigkeit von A in x_0 und der Lipschitz-Stetigkeit von B in x_0 erhält man

$$\begin{aligned}
\|A_x B_x - A_x B_0 - A_0 B_x + A_0 B_0\| &= \|(A_x - A_0)(B_x - B_0)\| \\
&\leq \|A_x - A_0\| \cdot \|B_x - B_0\| \\
&= \|A_x - A_0\| O(\|x - x_0\|) \\
&= o(\|x - x_0\|). \qquad \triangle
\end{aligned}$$

Die übliche Derivationsformel sieht eigentlich etwas anders aus, aber man muß bedenken, daß sich die klassische Ableitung nicht auf die ganze affine Approximation bezieht, sondern nur auf deren linearen Anteil. Bei allgemeinen Approximationen A ist dieser per Definition als $A - A_0$ zu setzen, wodurch die Verträglichkeit mit dem klassischen Fall gesichert ist. Mit dieser Festsetzung kann die „linearisierte“ Version der Derivationsregel dem linken Teil der rechten Seite von (\star) entnommen werden, womit man die klassische Form der Derivationsregel erhält.

2.2 Allgemeine Tangentialräume

Wie bereits in Beispiel [10] erwähnt, ist es i.a. nicht möglich, für Mannigfaltigkeiten mit anderen als linearen Differenzierbarkeitsstrukturen in herkömmlicher Weise einen nicht-trivialen und endlichdimensionalen, linearen Tangentialraum zu definieren. Man könnte diese Schwierigkeit rein technisch mit dem Argument begründen, daß die klassischen Konstruktionsmethoden sich eben an bestimmten Stellen nicht übertragen lassen. Eine klarere und befriedigendere Erklärung liefert aber eine mehr prinzipielle Sichtweise, die den eigentlichen Grund für jene Schwierigkeit deutlicher zum Vorschein bringt und nun dargelegt wird.

Dazu sollte man am besten mit einer charakteristischen Problemsituation beginnen: Gegeben seien Punkte $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^m$, offene Umgebungen U von x_0 , V von y_0 , eine Abbildung $f : U \rightarrow V$ mit $f(x_0) = y_0$ sowie Mengen von Abbildungskeimen \mathcal{A}_{x_0} in x_0 und \mathcal{B}_{y_0} in y_0 , so daß f differenzierbar bzgl. \mathcal{A}_{x_0} in x_0 sei. Die Frage lautet nun, wie man in x_0 und y_0 am besten Tangentialräume und eine entsprechende Tangentialabbildung

f_* von f definiert. Zunächst ist nach 2.1.1 klar, daß $D_{x_0}^{A_{x_0}}(f)$ der gesuchten Tangentialabbildung entspricht. Da diese „Abbildung“ keine Abbildung, sondern eine Menge von Abbildungen ist, sollte man besser von einem „Tangentialmorphismus“ sprechen und ihn mit $T_{x_0}f$ (bzgl. \mathcal{A}_{x_0}) bezeichnen.

Um außerdem Elemente $A \in \mathcal{A}_{x_0}$, wobei $A(x_0) = y_0$, mit solchen aus \mathcal{B}_{y_0} verketten zu können²⁾, müßte jedes solche A stetig in x_0 sein, und wie es die Kettenregel aus 2.1.1 verlangt, sogar Lipschitz-stetig in x_0 .

Ist aber erstmal der Begriff der allgemeinen Tangentialabbildung intuitiv befriedigend geklärt, fällt es einem viel leichter, zu verstehen, was ein Tangentialraum eigentlich sein soll. Offensichtlich soll doch ein Approximationskeim $A \in T_{x_0}f$ eine Verbindung zwischen den Tangentialräumen T_{x_0} und T_{y_0} schaffen, also müssen T_{x_0} und T_{y_0} etwas mit dem Definitionsbereich bzw. Bildbereich von A zu tun haben. Ferner sollte im Fall der klassischen Differenzierbarkeit der allgemeine Tangentialraumbegriff mit dem klassischen übereinstimmen oder zumindest äquivalent zu ihm sein. Daher sei zunächst \mathcal{A}_{x_0} die Menge der affinen Abbildungskeime. Dann besteht $T_{x_0}f$ nur aus einer einzigen affinen Approximation A . Es ist aber gerade ein charakteristisches Merkmal affiner Abbildungen, daß sie *eindeutig* durch ihren Keim in x_0 bestimmt sind. Außerdem ist zu jeder affinen Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $A(x_0) = y_0$ eine eindeutige lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ assoziiert. Dieses L ist jedoch nichts anderes als die klassische Ableitung $L = D_{x_0}f$ von f in x_0 . Der adäquate Definitionsbereich einer linearen Abbildung ist natürlich ein linearer Raum, so daß kleine Umgebungen um x_0 ausscheiden, und es bleibt nur noch die Wahl $T_{x_0} = \mathbb{R}^n$. Allgemeine Approximationskeime sind aber i.a. keine Einschränkungen von auf ganz \mathbb{R}^n definierten Abbildungen und selbst wenn, brauchen sie nicht durch ihren Keim in x_0 determiniert zu sein. Somit scheidet im allgemeinen Fall der ganze \mathbb{R}^n aus, und nur noch kleine, geeignete Umgebungen von x_0 kommen in Frage. Eigentlich liegt es somit nahe, gleich den ganzen „Umgebungskeim“ von x_0 als Tangentialraum zu nehmen. Hierbei ist jedoch zu bedenken, daß das Tangentialbündel immerhin noch ein topologischer Raum sein sollte. Was daher gebraucht wird, ist eine allgemeine Konstruktion von $T\mathbb{R}^n$ mit einer Projektion $p : T\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, so daß

(\star) „die Faser über jedem $x \in \mathbb{R}^n$ eine beliebig kleine Umgebung von x sein kann.“

Diese Einsicht hat zwei wichtige Konsequenzen:

- (1) Die gesuchte allgemeine Tangentialbündelkonstruktion ist im Prinzip vollkommen unabhängig vom betreffenden Differentiationsbegriff.
- (2) Sie sollte außerdem so durchführbar sein, daß sie nur von der Topologie abzuhängen braucht (aber nicht muß).

Mit dem zweiten Punkt ist z.B. konkreter gemeint, daß es sowohl in der topologischen als auch der stückweise linearen Kategorie allgemeine Tangentialbündel geben sollte.

²⁾Daß sich allgemein differenzierbare Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten verketten lassen und somit die Kettenregel gelten sollte, ist das mindeste, was man erwarten kann.

Inzwischen haben wir alle heuristischen Voraussetzungen beisammen, um anzudeuten, wie die Aussage (\star) ganz allgemein für topologische Räume umgesetzt werden kann. Bei einem beliebigen topologischen Raum X muß natürlich außerdem beachtet werden, daß die einzelnen Tangentialräume $T_x X$ stetig mit x zu variieren haben. Das Tangentialbündel TX von X ist definiert als

$$X \times X = TX \xrightarrow{p} X,$$

wobei p einfach die Projektion auf die erste Koordinate sei. Hierbei wurde bereits die gleiche Bezeichnung für das Tangentialbündel und seinen Totalraum verwendet. Ferner gibt es die standardmäßige Diagonale

$$\Delta : X \rightarrow X \times X, \quad x \mapsto (x, x),$$

die ein stetiger Schnitt von p ist.

Der entscheidende Kniff besteht darin, daß dieses „beliebig kleine Umgebung“ aus (\star) durch eine lokale Trivialisierungsbedingung von TX realisiert wird, die sich aber nur auf eine kleine, geeignete Umgebung $V \subset TX$ von $\Delta(x)$ bezieht und nicht, wie gewohnt, auf das ganze Urbild einer Umgebung von x in X . Dieses Konzept ist keineswegs neu, sondern bereits seit langem mit den Mikrobündeln verwirklicht. Neu ist hierbei nur, daß nicht nur Mannigfaltigkeiten, sondern auch beliebige topologische Räume zugelassen werden und die lokalen Schnitte keine Nullschnitte mehr zu sein brauchen.

Der Begriff des Nullschnittes ist ohnehin nur bei Mikrobündeln sinnvoll, deren Faser einen ausgezeichneten Punkt besitzen wie etwa $0 \in \mathbb{R}^n$. Zwar haben Mannigfaltigkeiten keinen ausgezeichneten Punkt, denn je zwei verschiedene Punkte lassen sich durch eine Isotopie ineinander überführen, aber gerade deswegen läßt sich jeder Punkt gleichermaßen auszeichnen. Diese Homogenitätseigenschaft ist für beliebige topologische Räume i.a. sogar lokal verletzt, und genau aus diesem Grunde muß man allgemeine lokale Schnitte zulassen.

Jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ induziert die „Tangentialabbildung“

$$Tf : TX \rightarrow TY, \quad Tf = f \times f : X \times X \rightarrow Y \times Y.$$

Dies mag auf den ersten Blick etwas komisch anmuten, ist aber auf den zweiten Blick mit dem allgemeinen Differentiationsbegriff aus dem vorigen Abschnitt voll verträglich: Denn nach Lemma 2.1.2 ist für metrische Räume X, Y f genau dann stetig, wenn f differenzierbar bzgl. der stetigen Abbildungskeime ist. Die beste stetige Approximation von f ist aber f selbst! Diese „identische“ Approximation existiert aber nicht nur für metrische, sondern auch topologische Räume X, Y . Bei der allgemeinen Differenzierbarkeit bzgl. stetiger Abbildungen muß man natürlich die gewohnten Richtungsableitungen über Bord werfen, da stetige Wege $w : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $w(0) = 0$ im Nullpunkt nunmal keine ausgezeichnete Richtung besitzen.

BEMERKUNG. Man könnte denken, daß n -dimensionale (PL-Diff)-Mannigfaltigkeiten doch in gewisser Weise einen Tangentialraum mit Faser \mathbb{R}^n besitzen. Rein punktweise betrachtet, trifft dies auch zu, denn als Tangentialabbildungen kann man kanonisch konisch lineare Abbildungen $T_x f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ nehmen. Die Schwierigkeit entsteht aber durch die lokale und von x stetig abhängige Trivialisierungsbedingung, weil diese konisch linearen Tangentialabbildungen $T_x f$ in höchstem Maße unstetig von x abhängen. Wenn man

daher auch für (PL-Diff)-Mannigfaltigkeiten ein natürliches Tangentialbündel definieren will, muß man sich mit der obigen Konstruktion begnügen.

2.3 Mikroidbündel

Nach den Ausführungen in den beiden vorhergehenden Abschnitten sollte es dem Leser keine Schwierigkeiten bereiten, die weiteren Definitionen auch intuitiv annehmen zu können.

2.3.1 CAT stehe stellvertretend für eine der drei Bezeichnungen TOP, PL, DIFF. Als erstes definieren wir triviale CAT-Mikroidbündel.

DEFINITION. B und F seien CAT-Räume. Ein triviales CAT-Mikroidbündel über B mit Faser F ist ein Tupel $\xi = (p, i)$, wobei

$$p : B \times F \rightarrow B$$

die Standardprojektion auf den ersten Faktor sei und $i : B \rightarrow B \times F$ ein *stetiger* Schnitt von p , i.e. $p \circ i = id$. B heißt auch die Basis von ξ und $B \times F$ der Totalraum. Der Schnitt i korrespondiert zu einer stetigen Abbildung $s : B \rightarrow F$ mit $i(x) = (x, s(x))$ für alle $x \in B$. Das triviale Mikroidbündel ξ heie **schnittoffen**, falls s eine offene Abbildung ist.

BEMERKUNG. Eigentlich schiene es natürlich sinnvoller, wenn i ein CAT-Schnitt wäre und nicht nur stetig. Der Grund hierfür ist den Unterabschnitten 3.4.1 und 5.3.1 zu entnehmen: Die Übergangsfunktionen gehören zu einem topologischen Gruppoiden, und die klassifizierenden Abbildungen, die direkt die Schnitte induzieren, sind auch nur stetig.

BEISPIELE

- [1] Das für diese Arbeit wichtigste Beispiel eines trivialen Mikroidbündels ist das im vorigen Abschnitt erwähnte Tangentialbündel: Es sei X ein topologischer Raum. Das **Tangentialmikroidbündel** $\tau(X)$ ist definiert durch $\tau(X) = (p, \Delta)$, wobei $p : X \times X \rightarrow X$ die Projektion auf die erste Komponente sei (i.e. $(x, y) \mapsto x$) und Δ die übliche Diagonalabbildung $\Delta : X \rightarrow X \times X, x \mapsto (x, x)$. Das Schöne an dieser Definition ist ihre Universalität, denn sie gilt analog für alle drei CAT-Kategorien und unabhängig davon, ob X eine Mannigfaltigkeit ist oder nicht. Um Verwechslungen mit dem klassischen Tangentialbündel TX bei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten auszuschließen, wählen wir lieber (und anders als im vorigen Abschnitt) die Notation $\tau(X)$. An dieser Stelle sollte gleich auf einen wichtigen Unterschied zum Tangentialmikrobndel hingewiesen werden: Dieses ist, wie bereits erwähnt, zwar genauso definiert, aber bei weitem nicht trivial, wie man es normalerweise auch von Tangentialbndeln gewohnt ist. Das liegt ganz einfach daran, da bei Mikroidbündeln (insbesondere trivialen) alle Sorten von Fasern zugelassen

sind, wohingegen bei Mikrobündeln die Faser als ein \mathbb{R}^n anzusehen wäre. Aber in unserem Sinne ist $\tau(X)$ ein triviales Mikroidbündel über X mit Faser X . Anders ausgedrückt: Das Tangentialmikroidbündel ist zwar trivial, aber dafür steckt die Komplexität in der Faser.

- [2] Jedes triviale Vektorbündel mit Faser \mathbb{R}^n oder \mathbb{C}^n induziert durch Hinzunahme des kanonischen Nullschnittes ein triviales Mikroidbündel mit derselben Faser.

2.3.2 DEFINITION. X, E, F seien CAT-Räume. Ein Tupel

$$\xi = (p : E \rightarrow X, i : X \rightarrow E),$$

wobei p eine CAT-Abbildung und i ein (nur) stetiger Schnitt von p sei, heißt ein CAT-Mikroidbündel über X mit Faser F , falls ξ schnittlokal isomorph zu einem trivialen Mikroidbündel ist, d.h. zu jedem $x \in X$ existiert eine Umgebung $U \subset X$ von x , eine Umgebung $V \subset E$ von $i(x)$ mit $i(U) \subset V$ und $p(V) = U$, ein Punkt $\varphi \in F$, eine Umgebung $U_F \subset F$ von φ , so daß das eingeschränkte Tupel $\xi|_V = (p|_V : V \rightarrow U, i : U \rightarrow V)$ CAT-isomorph zu einem trivialen Mikroidbündel über U mit Faser U_F ist; genauer: es existiert ein stetiger Schnitt $j : U \rightarrow U \times U_F$ von $p_1 : U \times U_F \rightarrow U$ mit $j(x) = \varphi$ sowie ein faser- und schnitttreuer CAT-Isomorphismus

$$h : V \xrightarrow{\cong} U \times U_F,$$

die sogenannte *Trivialisierung*, so daß die beiden folgenden Diagramme kommutieren.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow[h \cong]{} & U \times U_F \\ & \searrow p & \swarrow p_1 \\ & & U \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow[h \cong]{} & U \times U_F \\ & \searrow i & \swarrow j \\ & & U \end{array}$$

BEZEICHNUNG. $E(\xi) := E$ heißt der **Totalraum** von ξ , X die **Basis** und h wie schon erwähnt, eine **lokale Trivialisierung**. Manchmal wird etwas ungenauer auch $U \times U_F$ eine Trivialisierung genannt. ξ heißt ein **schnittoffenes** Mikroidbündel über X mit Faser F , falls alle Trivialisierungen $U \times U_F$ schnittoffen gewählt werden können. Eine Familie (V_i, h_i) von lokalen Trivialisierungen $h_i : V_i \rightarrow U_i \times U_{F,i}$ von ξ wie in der Definition, so daß die V_i den Schnitt $i(X)$ überdecken, nennen wir einen **Atlas** von ξ .

BEMERKUNG. Die Faser F ist *kein* Bestandteil von ξ , so daß ξ auch ein Mikroidbündel mit einer anderen Faser F' sein kann. Soll die Faser explizit zum Mikroidbündel ξ dazugehören, schreiben wir $\xi = (p, i, F)$.

An dieser Definition läßt sich der wesentliche Unterschied zu Mikrobündeln ablesen, wie sie z.B. in [Mi1, L-R, And] definiert sind: CAT- n -Mikrobündel sind in der Terminologie obiger Definition spezielle Mikroidbündel und zwar solche mit Faser $F = \mathbb{R}^n$, $\varphi = 0$ und Nullschnitt j . Es folgt, daß o.E. $U_{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n$ gewählt werden kann und der Schnitt i stets eine CAT-Abbildung ist.

BEISPIELE

- [1] Jedes triviale Mikroiddbündel über X mit Faser F ist auch ein Mikroiddbündel über X mit Faser F . Dies trifft insbesondere auf das Tangentialmikroiddbündel $\tau(X)$ zu.
- [2] Wie bereits erwähnt, ist jedes n -Mikrobündel über X auch ein Mikroiddbündel über X mit Faser \mathbb{R}^n .
- [3] Jedes n -Vektorbündel über X ist mit dem kanonischen Nullschnitt ein n -Mikrobündel über X .

Das Verhältnis zwischen Mikroiddbündeln und Mikrobündeln beschreibt das

LEMMA. Sei $\xi = (p : E \rightarrow X, i : X \rightarrow E)$ mit p CAT-Abbildung und i stetiger Schnitt von p . Dann ist äquivalent:

- (i) ξ ist ein CAT n -Mikrobündel über X .
- (ii) ξ ist ein CAT-Mikroiddbündel über X mit Faser \mathbb{R}^n .

BEWEIS: Offen ist nur noch (ii) \Rightarrow (i): Wir übernehmen die Bezeichnungen aus der Definition und brauchen daher nur noch zu zeigen, daß zu jedem $x \in X$ eine lokale Trivialisierung $\eta = (p_1, j)$ über einer geeigneten Umgebung U von x mit Faser $U_{\mathbb{R}^n} \subset \mathbb{R}^n$ existiert, die schnitt- und fasertreu CAT-isomorph zu einem trivialen Mikroiddbündel über U mit Nullschnitt ist. Gemäß der Definition gehen wir von irgendeiner lokalen Trivialisierung $V \xrightarrow{\cong} U \times U_{\mathbb{R}^n}$ um $i(x)$ mit Schnitt j aus. j_2 bezeichne die Projektion von j auf die zweite Komponente, in diesem Fall auf $U_{\mathbb{R}^n}$. Falls $\varphi = j_2(x) \neq 0$, translatieren wir zunächst $U_{\mathbb{R}^n}$ mittels $y \mapsto y - \varphi$ in eine Umgebung $\tilde{U}_{\mathbb{R}^n}$ des Nullpunktes. Diese Translation induziert einen CAT-Isomorphismus $U \times U_{\mathbb{R}^n} \xrightarrow{\cong} U \times \tilde{U}_{\mathbb{R}^n}$, der entsprechend einen Schnitt \tilde{j} definiert und daher faser- und schnitttreu ist. Wir können also o.E. $j_2(x) = 0$ annehmen. Zur Vereinfachung setzen wir $U_0 = U_{\mathbb{R}^n}$.

Als nächstes wird ausgenutzt, daß U_0 eine kleinere Umgebung \tilde{U}_0 von 0 enthält, die (stationär auf 0) CAT-isomorph zu \mathbb{R}^n ist. Weil j_2 stetig ist, existiert eine Umgebung $\tilde{U} \subset U$ von x mit $j_2(\tilde{U}) \subset U_0$. Dies liefert eine kleinere Trivialisierung zu $\tilde{U} \times \tilde{U}_0$. Der CAT-Isomorphismus $\tilde{U}_0 \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$ induziert analog zu vorhin wieder einen faser- und schnitttreuen CAT-Isomorphismus

$$\tilde{U} \times \tilde{U}_0 \xrightarrow{\cong} \tilde{U} \times \mathbb{R}^n$$

für einen entsprechenden Schnitt $\tilde{j} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U} \times \mathbb{R}^n$.

Damit haben wir die letzte Reduktion: Zu zeigen ist, daß ein triviales Mikroiddbündel $\xi = (p, i)$ über X mit Faser \mathbb{R}^n faser- und schnitttreu CAT-isomorph zu einem trivialen

Mikroïdbündel über X mit gleicher Faser und Nullschnitt ist. Mit Hilfe des faserstreuen CAT-Isomorphismus

$$h : X \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} X \times \mathbb{R}^n, \quad (x, r) \mapsto (x, r - (p_2 \circ i)(x)),$$

der die Umkehrabbildung $(x, r) \mapsto (x, r + (p_2 \circ i)(x))$ besitzt, wird i schließlich zum gewünschten Nullschnitt transformiert. \triangle

Zwei CAT-Räume F und F' heißen **lokal isomorph**, wenn zu je zwei Punkten $\varphi \in F$ und $\varphi' \in F'$ Umgebungen U von φ und U' von φ' existieren, die CAT-isomorph zueinander sind. Dies stiftet eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der CAT-Räume.

FOLGERUNG. Sei $i : X \rightarrow E$ ein stetiger Schnitt von $p : E \rightarrow X$ und F, F' zwei lokal isomorphe CAT-Räume. Dann sind mit $\xi := (p, i)$ äquivalent:

(i) ξ ist ein CAT-Mikroïdbündel über X mit Faser F .

(ii) ξ ist ein CAT-Mikroïdbündel über X mit Faser F' .

BEWEIS: Zum Beweis braucht man das Argument für die Verkleinerung von $U \times U_0$ zu $\tilde{U} \times \tilde{U}_0$ aus dem Beweis des vorigen Lemmas. \triangle

KOROLLAR. Sei ξ wie im letzten Lemma gegeben. Dann ist äquivalent:

(i) ξ ist ein CAT-Mikroïdbündel über X mit einer n -dimensionalen CAT-Mannigfaltigkeit als Faser.

(ii) ξ ist ein CAT n -Mikroïdbündel über X . \triangle

2.3.3 LEMMA. $W \subset E$ sei eine offene Umgebung von $i(X)$, wobei $i : X \rightarrow E$ der Schnitt eines CAT-Mikroïdbündels $\xi = (p, i)$ mit Faser F ist. Dann ist auch $\xi|_W := (p|_W : W \rightarrow X, i : X \rightarrow W)$ ein CAT-Mikroïdbündel über X mit Faser F .

BEWEIS: Im Prinzip wird wieder das o.g. Verkleinerungsargument angewandt: Sei $x \in X$ und $V \subset E$ eine Umgebung von $i(x)$, die wie üblich zu $U \times U_F$ trivialisiert ist. Wir fassen daher $W \cap V$ als Umgebung von $(x, \varphi) \in U \times U_F$ auf. Wegen der Produkttopologie und der Stetigkeit des Schnittes $j : U \rightarrow U \times U_F$ gibt es kleinere Umgebungen $\tilde{U} \subset U$ von x und $\tilde{U}_F \subset U_F$ von φ mit $\tilde{U} \times \tilde{U}_F \subset W \cap V$ und $j(\tilde{U}) \subset \tilde{U}_F$. Dies liefert eine Umgebung $\tilde{V} \subset W \cap V$ von $i(x)$, die durch $(\tilde{U} \times \tilde{U}_F \rightarrow \tilde{U}, j|_{\tilde{U}})$ trivialisiert ist. \triangle

Es ist einer der essentiellen Merkmale von Mikro- oder Mikroïdbündeln, daß es bei ihnen - wie aus der Definition ersichtlich - nur auf das Verhalten in der Nähe des Schnittes ankommt. Daher ist es sinnvoll, Morphismen zwischen Mikroïdbündeln als Abbildungskeime zu definieren, was durch das letzte Lemma ermöglicht wird:

Um für zwei CAT-Mikroïdbündel $\xi = (p : E \rightarrow X, i)$ und $\eta = (p' : E' \rightarrow Y, i')$ Morphismen $\xi \rightarrow \eta$ definieren zu können, betrachten wir zunächst Paare (f, \bar{f}) von CAT-Abbildungen $f : X \rightarrow Y$, $\bar{f} : W \rightarrow E'$, sogenannte **Prämorphismen**, wobei W eine offene Umgebung des Schnittes von ξ sei (d.h. eine Umgebung von $i(X)$), und die beiden folgenden Diagramme kommutieren

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\bar{f}} & E' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\bar{f}} & E' \\ i \uparrow & & \uparrow i' \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Zwei solche Prämorphismen (f, \bar{f}) und (g, \bar{g}) sollen äquivalent sein, also denselben Keim repräsentieren, falls $f = g$ und \bar{f} mit \bar{g} auf einer gemeinsamen Umgebung des Schnittes übereinstimmt. Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation, die zudem durch evtl. Verkleinerung der Schnittumgebungen W eine wohldefinierte Verkettung der Äquivalenzklassen dieser Prämorphismen ermöglicht. Ein Morphismus von ξ nach η sei per Definition eine solche Äquivalenzklasse, auch Keim genannt und $[f, \bar{f}]$ geschrieben. Auf diese Weise ist folglich die Kategorie der CAT-Mikroïdbündel und deren Morphismen, die wir auch **Mikroïdmorphismen** nennen, definiert.

Der spezielle Fall $X = Y$ bedarf einer besonderen Erwähnung: Wie auch bei herkömmlichen Bündeln üblich, soll die Basisabbildung $f : X \rightarrow X$ stets die Identität sein, es sei denn, etwas anderes wird ausdrücklich erwähnt. Wir identifizieren einen Prämorphismus (id_X, \bar{f}) mit \bar{f} , bezeichnen daher \bar{f} selbst als **Tripelprämorphismus**, setzen

$$[\bar{f}] := [id_X, \bar{f}]$$

und nennen $[\bar{f}]$ einen **Tripelmorphismus** über X . Mit dieser Konvention sind für jedes $X \in \mathbf{Top}$ die **Isomorphieklassen von Mikroïdbündeln** über X definiert. Zur besseren Unterscheidung sprechen wir manchmal auch von den **Tripelisomorphieklassen** über X . Das vielleicht wichtigste Beispiel eines solchen Tripelisomorphismus ist die Inklusion $\xi|_W \hookrightarrow \xi$, wobei W eine offene Umgebung des Schnittes sei. Das nächste Korollar charakterisiert Tripelisomorphismen mittels Prämorphismen.

KOROLLAR. ξ und $\tilde{\xi}$ seien zwei CAT-Mikroïdbündel über X mit Schnitten s bzw. \tilde{s} und Totalräumen E bzw. \tilde{E} , sowie $f : \xi \rightarrow \tilde{\xi}$ und $g : \tilde{\xi} \rightarrow \xi$ zwei CAT-Tripelprämorphismen. Dann sind äquivalent:

(i) $[g] \circ [f] = [id_\xi]$ und $[f] \circ [g] = [id_{\tilde{\xi}}]$.

(ii) Es existieren offene Umgebungen W von $s(X)$ und \tilde{W} von $\tilde{s}(X)$, so daß $f : W \rightarrow \tilde{W}$ und $g : \tilde{W} \rightarrow W$ definiert sind und $g \circ f = id_W$, $f \circ g = id_{\tilde{W}}$ gilt.

BEWEIS: (ii) \Rightarrow (i) ist klar.

(i) \Rightarrow (ii): Wegen $[g] \circ [f] = [id_\xi]$ gibt es zunächst offene Umgebungen W_0 von $s(X)$ und \tilde{W}_0 von $\tilde{s}(X)$, so daß $f : W_0 \rightarrow \tilde{W}_0$ und $g : \tilde{W}_0 \rightarrow E$ definiert sind, und $g \circ f = id_{W_0}$ gilt. Wegen $[f] \circ [g] = [id_\xi]$ können wir ferner eine offene Umgebung $\tilde{W}_1 \subset \tilde{W}_0$ von $\tilde{s}(X)$ mit $g(\tilde{W}_1) \subset W_0$ und $f \circ g = id_{\tilde{W}_1}$ wählen. Nun seien $W_1 := f^{-1}(\tilde{W}_1) \subset W_0$ und $\tilde{W}_2 := f(W_1)$, womit wir $f : W_1 \rightarrow \tilde{W}_2$, $g : \tilde{W}_2 \rightarrow W_1$ und

$$g \circ f = id_{W_1}, f \circ g = id_{\tilde{W}_2}$$

bekommen. Der Beweis ist also abgeschlossen, sobald wir gezeigt haben, daß \tilde{W}_2 eine offene Umgebung von $\tilde{s}(X)$ ist: Zunächst ist W_1 wegen der Schnittreue und Stetigkeit von f eine offene Umgebung von $s(X)$. $\tilde{s}(X) \subset \tilde{W}_2$ ist eine weitere Folge der Schnittreue von f . Die Gleichung $g \circ f = id_{W_1}$ impliziert $g(\tilde{W}_2) = W_1$ und damit wegen der Injektivität von $g|_{\tilde{W}_1}$ die Beziehung $\tilde{W}_2 = g^{-1}(W_1) \cap \tilde{W}_1$. \triangle

Pullback von Mikroidbündeln: Einer der fundamentalsten Bündelkonstruktionen ist das Pullback, welches auch für Mikroidbündel funktioniert:

Das mengentheoretische Pullback (s. Diagramm)

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\bar{f}} & E \\ \downarrow p' & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

(p', \bar{f}) von (f, p) , wobei f eine CAT-Abbildung und $\xi = (p : E \rightarrow Y, i : Y \rightarrow E)$ ein CAT-Mikroidbündel über Y mit Faser F sei, liefert das Pullback CAT-Mikroidbündel $f^*\xi = (p', i' : X \rightarrow f^*E)$ über X mit derselben Faser F , wobei i' durch $i'(x) = (x, (i \circ f)(x))$ gegeben ist. Ferner ist $[f, \bar{f}]$ ein CAT-Mikroidmorphismus $f^*\xi \rightarrow \xi$.

BEWEIS: Bekanntlich ist

$$f^*E = \{(x, e) \in X \times E \mid f(x) = p(e)\} \subset X \times E$$

und p' bzw. \bar{f} die Einschränkung der Projektion von $X \times E$ auf X bzw. E . Wir müssen die lokale Trivialisierungsbedingung für $f^*\xi$ nachweisen.

Sei dazu $x \in X$. Für ξ gilt nach Voraussetzung die lokale Trivialisierungsbedingung aus Definition 2.3.2 mit derselben Formulierung und denselben Bezeichnungen, die wir für diesen Beweis allesamt übernehmen. Mit $U' = f^{-1}(U)$ und $V' = f^*E \cap (U' \times V)$ ist eine Trivialisierung

$$h' : V' \xrightarrow{\cong} U' \times U_F$$

von V' durch die Zuordnung

$$(u', v) \mapsto (u', h(v)) = (u', f(u'), u_F) \mapsto (u', u_F),$$

mit der Umkehrabbildung

$$(u', u_F) \mapsto (u', f(u'), u_F) \mapsto (u', h^{-1}(f(u'), u_F))$$

gegeben.

Insbesondere ist V' CAT-isomorph zu $\text{graph } f|_{U'} \times U_F$. Im Fall $\text{CAT} = \text{DIFF}$ ist $\text{graph } f|_{U'} \subset U' \times U$ eine CAT-Untermannigfaltigkeit und somit auch $f^*E \subset X \times E$ ein CAT-Unterraum. Für $\text{CAT} = \text{TOP, PL}$ ist dies sowieso klar. Infolgedessen ist $f^*E \subset X \times E$ ein CAT-Unterraum.

Der von h' transportierte Schnitt j' besitzt die Form

$$u' \mapsto (u', (j_2 \circ f)(u')).$$

Evidenterweise ist h' schnitt- und fasertreu. Ebenso unmittelbar ist die Aussage über (f, \bar{f}) zu verifizieren, denn nach Konstruktion ist \bar{f} fasertreu, und die Schnitttreue folgt sofort aus der Definition von i' . \triangle

FOLGERUNG. *Das Pullback von Mikroidbündeln ist kontravariant.*

BEWEIS: In der Mengenkategorie ist diese Aussage bekanntlich richtig, so daß nur noch die Kontravarianz der Pullback-Schnitte nachzuweisen ist, die sich jedoch aus der natürlichen Definition von i' sofort ergibt. \triangle

BEISPIELE

- [1] Für eine Inklusion $f : X \hookrightarrow Y$ ist mit $E|_X = p^{-1}(X)$ die Einschränkung $\xi|_X = (p : E|_X \rightarrow X, i|_X : X \rightarrow E|_X)$ ein Mikroidbündel über X mit derselben Faser wie bei ξ und kann mit $f^*\xi$ identifiziert werden.
- [2] Sei $\xi = B \times F \rightarrow B$ ein triviales CAT-Mikroidbündel und $f : X \rightarrow B$ eine stetige CAT-Abbildung. Nach der Definition 2.3.1 entspricht der Schnitt von ξ einer stetigen Abbildung $s : B \rightarrow F$. Nun ist $f^*\xi$ ein triviales Mikroidbündel über X mit Totalraum $\text{graph } f \times F$, wobei der Schnitt zu $s \circ f : X \rightarrow B \rightarrow F$ korrespondiert. Mit der Identifikation $\text{graph } f = X$ kann $f^*\xi$ daher mit dem trivialen Mikroidbündel $X \times F \rightarrow X$ gleichgesetzt werden, wobei der Schnitt $s \circ f : X \rightarrow B \rightarrow F$ entspricht.

BEZEICHNUNG. Ist $f : X \rightarrow M$ eine CAT-Abbildung, so sei $\xi_f := f^*\tau(M)$ das induzierte triviale Mikroidbündel über X mit Faser M und Schnitt $x \mapsto (x, f(x))$. Dies verdeutlicht, daß es unter allen trivialen Mikroidbündeln mit Faser M ein universelles gibt, nämlich $\tau(M)$.

2.3.4 Whitney-Summe: Seien ξ und $\bar{\xi}$ zwei CAT-Mikroïdbündel über X mit jeweiligen Projektionen p und \bar{p} , Schnitten i und \bar{i} , Totalräumen E und \bar{E} und Fasern F, \bar{F} . Dann sei $\xi \oplus \bar{\xi}$ „analog“ zur Whitney-Summe von Vektorbündeln definiert, i.e. $\xi \oplus \bar{\xi}$ ist ein CAT-Mikroïdbündel über X mit Totalraum

$$E(\xi \oplus \bar{\xi}) = \{ (e, \bar{e}) \in E \times \bar{E} \mid p(e) = \bar{p}(\bar{e}) \},$$

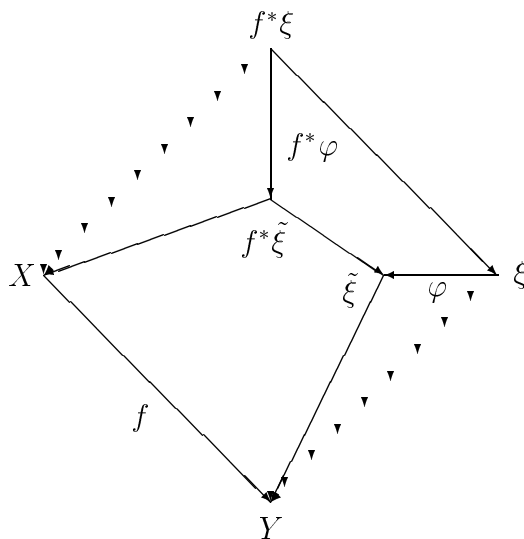
Projektion $(e, \bar{e}) \mapsto p(e)$, also = Pullback(p, \bar{p}), Schnitt $i \times \bar{i} : X \rightarrow E(\xi \oplus \bar{\xi})$ und Faser $F \times \bar{F}$. Die Verifikation der Mikroïdbündel-eigenschaft von $\xi \oplus \bar{\xi}$ ergibt sich direkt aus der konkreten Gestalt des Pullbacks und der Definition 2.3.2.

Die Verknüpfung bzgl. der Whitney-Summe von CAT-Mikroïdbündeln über einem festen CAT-Raum X ist somit eine kommutative und assoziative Operation.

Außerdem wird die Whitney-Summe von Pullbacks respektiert, d.h. es gilt

$$f^*(\xi \oplus \bar{\xi}) = f^*\xi \oplus f^*\bar{\xi}.$$

2.3.5 Die Pullback-Operation verträgt sich außerdem mit Tripelprämorphisismen: Seien $f : X \rightarrow Y$ eine CAT-Abbildung, ξ und $\tilde{\xi}$ zwei CAT-Mikroïdbündel über Y und $\varphi : \xi \rightarrow \tilde{\xi}$ ein Tripelprämorphisismus. Nach dem Diagrammschema



induziert dann f aufgrund der universellen Pullbackeigenschaft einen eindeutigen Tripelprämorphisismus $f^*\varphi : f^*\xi \rightarrow f^*\tilde{\xi}$, der das Diagramm kommutativ macht. Wegen Eindeutigkeit gilt $f^*(\psi \circ \varphi) = f^*\psi \circ f^*\varphi$.

Ist speziell W eine offene Umgebung des Schnittes von $\tilde{\xi}$ und $\varphi : \xi := \tilde{\xi}|_W \hookrightarrow \tilde{\xi}$ die Inklusion $W \subset E(\tilde{\xi})$, dann ist auch $f^*E(\xi) \subset f^*E(\tilde{\xi})$ eine offene Umgebung des Schnittes von $f^*\tilde{\xi}$ und $f^*\varphi$ mit dieser Inklusion identisch. Daher lassen sich mit f^* nicht nur Tripelprämorphisismen, sondern sogar Tripelmorphismen zurückziehen. Insbesondere gilt

$$f^*(\text{Tripelisomorphismus}) = \text{Tripelisomorphismus}.$$

BEMERKUNG. Die Gültigkeit eines Homotopiesatzes für Pullbacks von Mikroïdbündeln mit allgemeinen Fasern wird in dieser Arbeit gar nicht untersucht. Zumindest bei Mannigfaltigkeiten als Fasern, also für Mikrobündel, ist der Homotopiesatz nach [Mi1] richtig. Für geblätterte Mikroïdbündel ist er allerdings falsch (s. Beispiel [4] in 2.5.3).

2.4 Unterbündel

Obwohl die Definition adäquater Unterbündel von Mikrodbündeln nicht so offensichtlich zu sein scheint wie bei Vektor- oder Mikrobündeln, gibt es eine analoge Parallele für ihre klassifizierenden Abbildungen: Ist $GL(n, k) \subset GL(n)$ diejenige Untergruppe, die $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ in sich selbst abbildet, so sind alle k -dimensionalen Untervektorbündel eines gegebenen n -dimensionalen Vektorbündels ξ über X durch die Lifts (bzw. deren Faserhomotopieklassen) der klassifizierenden Abbildung f_ξ gegeben (s. Bild).

$$\begin{array}{ccc}
 & & BGL(n, k) \\
 & \nearrow & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{f_\xi} & BGL(n)
 \end{array}$$

Wie der Satz 5.5.1 in Verbindung mit Satz 3.4.4 zeigt, muß man bei Mikrodbündeln $GL(n)$ und $GL(n, k)$ durch entsprechende Gruppoide ersetzen und die zunächst fehlende Homotopieinvarianz mit den Resultaten des achten Kapitels in anderer Form wieder wettmachen.

Zu Beginn erinnern wir an die Definition von Unterbündeln bei Mikrobündeln: Sei $\xi = (p : E \rightarrow X, i)$ ein n -Mikrobündel. $E' \subset E$ mit $i(X) \subset E'$ heißt ein k -Mikrounterbündel von ξ , wenn, wieder mit den üblichen Bezeichnungen, zu jedem $x \in X$ eine faser- und nullschnitttreue Trivialisierung $h : V \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ existiert mit

$$h(V \cap E') = U \times \mathbb{R}^k \times 0,$$

wobei $\mathbb{R}^k \times 0 \subset \mathbb{R}^n$ die Standardeinbettung ist. Wegen $i(U) \subset V \cap E'$ folgt sofort, daß $(p|_{E'} : E' \rightarrow X, i : X \rightarrow E')$ ein k -Mikrobündel ist.

Die untenstehende Definition von Mikrodbündeln ist so getroffen, daß sie mit Mikrounterbündeln verträglich ist.

2.4.1 DEFINITION. F' und R' seien zwei CAT-Räume und $\xi = (p : E \rightarrow X, i : X \rightarrow E)$ ein CAT-Mikrodbündel über X mit Faser $F := R \times F'$. Ein CAT-Unterraum $E' \subset E$ heiße ein CAT-Mikrodbündel von ξ mit Faser F' und Kontrafaser R' , falls folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

- (i) $i(X) \subset E'$.
- (ii) Bzgl. der Faser F gelte die übliche Trivialisierungsbedingung (mit den gleichen Bezeichnungen) aus Definition 2.3.2, nur mit folgendem Zusatz: $U_F = U_{R'} \times U_{F'}$, $U_{R'}$ Umgebung von $r' \in R'$, $U_{F'}$ Umgebung von $\varphi' \in F'$, $\varphi = (r', \varphi')$,

$$h : V \xrightarrow{\cong} U \times (U_{R'} \times U_{F'}) = (U \times U_{R'}) \times U_{F'}$$

die faser- und schnitttreue Trivialisierung von V , so daß

$$h(V \cap E') = j_{U,R'}(U) \times U_{F'},$$

wobei $j_{U,R'} : U \rightarrow U \times U_{R'}$ die Verkettung von j mit der Projektion $(U \times U_{R'}) \times U_{F'} \rightarrow U \times U_{R'}$ bezeichnet.

Lokale Trivialisierungen wie in (ii) nennen wir auch **lokale Unterbündeltrivialisierungen**. Wir sagen auch, V besitzt eine Unterbündeltrivialisierung. Können diese Unterbündeltrivialisierungen alle schnittoffen gewählt werden, heißt E' ein **schnittoffenes** Unterbündel von ξ . Analog zu Bezeichnung 2.3.2 sind **Atlanten** von Unterbündeln (ξ, E') definiert.

BEMERKUNG. Die rechte Seite der Trivialisierung in (ii) beschreibt also ein triviales Mikroidbündel über U mit einem Unterbündel $h(V \cap E')$, das wir hier wieder mit E' bezeichnen, so daß $E' = j_{U,R'}(U) \times U_{F'}$. Wählt man nun derart jeweils kleinere Umgebungen $\tilde{U} \subset U$, $\tilde{U}_{R'} \subset U_{R'}$, $\tilde{U}_{F'} \subset U_{F'}$ von x, r', φ' , daß $j(\tilde{U}) \subset \tilde{U} \times \tilde{U}_{R'} \times \tilde{U}_{F'}$, gilt wiederum die Gleichung

$$E' \cap \tilde{U} \times \tilde{U}_{R'} \times \tilde{U}_{F'} = j_{\tilde{U},R'}(\tilde{U}) \times \tilde{U}_{F'},$$

so daß man auf diese Weise eine kleinere Unterbündeltrivialisierung gefunden hat. Insbesondere enthält jede Umgebung von $i(x)$ in $E(\xi)$ eine Umgebung von $i(x)$, die eine Unterbündeltrivialisierung besitzt.

FOLGERUNG. *Wie vorher sei E' ein Mikroidunterbündel von ξ mit Faser F' und Kontrafaser R' . Dann gilt zweierlei:*

- (a) $\xi' := (p|_{E'} : E' \rightarrow X, i : X \rightarrow E')$ ist ein Mikroidbündel über X mit Faser F' .
- (b) Sind F' und R' Mannigfaltigkeiten der Dimension k bzw. l , so ist $E' \subset E$ ein k -Mikrounterbündel des $(k+l)$ -Mikrobündels ξ .

BEWEIS: Für (a) braucht man nur noch die Projektion $U \times U_{R'} \times U_{F'} \rightarrow U \times U_{F'}$ anzuwenden. Der Beweis von (b) erfordert aber etwas mehr Aufmerksamkeit. Es ist nämlich zu beachten, daß die einzelnen Transformationen aus dem Beweis von Lemma 2.3.2 stets so gewählt werden können, daß sie die Unterbündelform aus voriger Bemerkung respektieren. Das sieht man direkt oder an einer Stelle mit der vorigen Bemerkung. \triangle

KOROLLAR. *Für jedes n -Mikrobündel ξ ist ein k -Mikrounterbündel von ξ dasselbe wie ein Mikroidunterbündel von ξ mit Faser \mathbb{R}^k und Kontrafaser \mathbb{R}^{n-k} .* \triangle

Eine Analyse des Beweises der Pullback-Eigenschaft in 2.3.3 zeigt, daß sich die Pullback-Konstruktion mit Unterbündeln verträgt.

LEMMA. *Sei $f^*\xi$ das Pullback von ξ und $\tilde{E} \subset E$ ein Unterbündel von ξ . Dann ist auch $\tilde{f}^{-1}(\tilde{E}) \subset f^*E$ ein Unterbündel von $f^*\xi$ mit derselben Faser und Kontrafaser wie*

bei \tilde{E} . Ferner ist $(p'|_{\tilde{f}^{-1}(\tilde{E})} : \tilde{f}^{-1}(\tilde{E}) \rightarrow X, i' : X \rightarrow \tilde{f}^{-1}(\tilde{E}))$ das Pullback unter f von $\tilde{\xi} = (p|_{\tilde{E}} : \tilde{E} \rightarrow Y, i : Y \rightarrow \tilde{E})$. \triangle

2.4.2 Es ist zweckmäßig, auf der Menge aller Unterbündel eines fest gegebenen Mikroidbündels ξ eine Äquivalenzrelation einzuführen, und zwar durch

$$E' \sim E'' : \iff \exists \text{ offene Umgebung } W \subset E \text{ des Schnittes mit } E' \cap W = E'' \cap W.$$

Die Äquivalenzklasse \bar{E}' eines Unterbündels $E' \subset E(\xi)$ nennen wir auch einen **Unterbündelkeim** von ξ .

2.4.3 Eine spezielle Klasse von Unterbündeln stellen die **Unterbündel mit globaler Faser** dar. Sie unterscheiden sich von unseren bisherigen Unterbündeln durch eine schärfere Trivialisierungsbedingung. Für deren Formulierung müssen wir aber vorher einen neuen Begriff einführen:

Lemma + Bezeichnung: Seien $p : E \rightarrow X$ eine stetige Abbildung und $E', W \subset E$ Teilmengen. Dann sind äquivalent:

- (i) Für jedes $x \in X$ gilt $E' \cap W \cap p^{-1}(x) = \emptyset$ oder $E' \cap p^{-1}(x) \subset W$.
- (ii) Für je zwei $e'_0, e'_1 \in E'$ mit $p(e'_0) = p(e'_1)$ gilt: $e'_0 \in W \iff e'_1 \in W$.

Ist (i) oder/und (ii) erfüllt, heiße W **vertikal** bzgl. E' . \triangle

KOROLLAR. Sei $p : E \rightarrow X$ wie oben und $E' \subset E$ eine feste Teilmenge.

- (a) Beliebige Durchschnitte und beliebige Vereinigungen bzgl. E' vertikaler Mengen sind wiederum vertikal bzgl. E' .
- (b) Ist W vertikal bzgl. E' und $V \subset W$ vertikal bzgl. $E' \cap W$, dann ist V vertikal bzgl. E' .
- (c) Ist W vertikal bzgl. E' und $E'' \subset E'$, dann ist W auch vertikal bzgl. E'' .
- (d) Seien $(E'_i)_{i \in I}$ und $(W_i)_{i \in I}$ zwei Familien (mit gleicher Indexmenge I) von Teilmengen aus E , so daß W_i vertikal bzgl. E'_i ist für alle $i \in I$. Dann ist auch $\bigcap_i W_i$ vertikal bzgl. $\bigcap_i E'_i$. \triangle

Jede Teilmenge $W \subset E$ mit $E' \subset W$ ist trivialerweise vertikal bzgl. E' . Mit einer zusätzlichen Bedingung gilt auch die Umkehrung:

LEMMA. Seien p, E', W wie oben, $i : X \rightarrow E$ ein stetiger Schnitt von p mit $i(X) \subset E' \cap W$ und W vertikal bzgl. E' . Dann gilt $E' \subset W$.

BEWEIS: $i(X) \subset E' \cap W \Rightarrow E' \cap W \cap p^{-1}(x) \neq \emptyset \forall x \in X \Rightarrow E' \cap p^{-1}(x) \subset W \forall x \in X$.
Weil E die Vereinigung der Fasern von p ist, folgt daraus $E' \subset W$. \triangle

DEFINITION. ξ sei ein CAT-Mikroïdbündel über X mit Schnitt i , $E' \subset E(\xi)$ eine Teilmenge mit $i(X) \subset E'$ und F', R' zwei CAT-Räume. E' heißt ein Unterbündel von ξ mit globaler Faser F' und Kontrafaser R' , wenn zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung V von $i(x)$ existiert, die wie in Definition 2.4.1 trivialisiert werden kann, wobei noch zwei zusätzliche Bedingungen erfüllt seien:

- (1) V ist vertikal bzgl. E' .
- (2) $U_{F'} = F'$ (gleiche Bezeichnung wie in Definition 2.4.1).

Eine solche lokale Trivialisierung nennen wir eine **globale Unterbündeltrivialisierung** von E' .

Ein Blick in den Beweis von Folgerung 2.4.1 liefert uns sofort die

FOLGERUNG. Sei E' ein CAT-Unterbündel mit globaler Faser F' und Kontrafaser R' des CAT-Mikroïdbündels $\xi = (p : E \rightarrow X, i : X \rightarrow E)$. Dann ist $\xi' := (p|_{E'} : E' \rightarrow X, i : X \rightarrow E')$ ein CAT-Faserbündel über X mit Faser F' und Schnitt i . Insbesondere können die lokalen Faserbündeltrivialisierungen von ξ' schnittreu gewählt werden. \triangle

BEMERKUNG. Eine völlig analoge Bemerkung 2.4.1 (Verkleinerungsargument) für Unterbündel mit globaler Faser F' bekommen wir aber nur dann, wenn F' *kompakt* ist: Zwar liefert die Verkleinerung der rechten Seite (nur U und $U_{R'}$ dürfen natürlich verkleinert werden) wegen obigem Korollar (b) wieder eine Trivialisierung mit globaler Faser F' , aber um zu zeigen, daß jede bzgl. E' vertikale Umgebung W von $i(x)$ eine offene Umgebung enthält, die eine globale Unterbündeltrivialisierung zuläßt, müssen wir ein Kompaktheitsargument bemühen, da man nur weiß, daß es zu jedem $\varphi' \in F'$ eine offene Produktumgebung $U_{\varphi'} \times U_{R',\varphi'} \times U_{F',\varphi'} \subset h(V \cap W)$ gibt, so daß man zur Konstruktion einer offenen Umgebung $U_x \times U_{R',x} \times F' \subset h(V \cap W)$ eine endliche Teilüberdeckung $(U_{F',\varphi'})$ von F' benötigt.

In Analogie zu Lemma 2.4.1 respektiert die Pullback-Operation ebenso Unterbündel mit globaler Faser.

Allerdings ist es nicht sinnvoll, analog zu 2.4.2 Keime von Unterbündeln mit globaler Faser zu definieren, da für eine Umgebung W des Schnittes $E' \cap W$ i.a. nur dann ein Unterbündel mit globaler Faser darstellt, wenn W vertikal bzgl. E' ist, was nach obigem Lemma $E' \subset W$ bedeutet. Oder anders ausgedrückt: Die Keimrelation liefert in diesem Falle die Identitätsrelation und ist daher überflüssig. In 2.6.3 werden wir jedoch von dieser trivialen Keimrelation Gebrauch machen!

WARNUNG. Aus einem ganz bestimmten Grund kann die vorliegende Arbeit keinen abstrakten Klassifikationssatz für Bündelblätterungen liefern: Wegen Satz 2.6.6 (2) müßte man die $\text{Aut}M$ -Klassen von Unterbündeln eines geblätterten Mikroidunterbündels ξ mit globaler Faser abstrakt klassifizieren. Dabei tritt folgende Schwierigkeit auf: Ist ξ' ein anderes zu ξ isomorphes, geblättertes Mikroidbündel, dann gibt es aber deswegen noch lange keine kanonische Korrespondenz zwischen ihren Unterbündeln mit globaler Faser. Daher können die Unterbündel von ξ mit globaler Faser nicht als *geöffnete* Gruppoid-Strukturen charakterisiert werden, was für ihre abstrakte Klassifikation jedoch methodisch unabdingbar wäre.

2.5 Geblätterte Mikroidbündel

Versieht man ein Mikroidbündel mit der Zusatzstruktur einer bgzsh-Zerlegung, die bzgl. der lokalen Trivialisierungen bestimmten Bedingungen genügt, erhält man ein geblättertes Mikroidbündel. Prinzipiell liegt eine Analogie zu geblätterten Bündeln vor.

Mit Ausnahme der Ausführungen über den Vergleich zwischen Mikrobündeln und Mikroidbündeln kann nahezu alles aus dem vorigen Abschnitt auf geblätterte Mikroidbündel übertragen werden; man braucht nur zu beachten, daß alle Argumente mit den zusätzlichen Zerlegungen kompatibel sind.

2.5.1 In Analogie zu vorigem Abschnitt definieren wir zuerst die trivial geblätterten Mikroidbündel, nach denen die geblätterten Mikroidbündel lokal modelliert sind.

Zwei CAT-Räume B, F , wobei B bogenweise zusammenhängend sei, und eine stetige Abbildung $s : B \rightarrow F$ induzieren wie folgt ein **trivial geblättertes CAT-Mikroidbündel** über B mit Faser F : Die Fasern der Standardprojektion

$$B \times F \rightarrow F$$

bilden eine bgzsh-Zerlegung \mathcal{F} von $B \times F$, die wir die **Standardzerlegung** von $B \times F$ nennen. Wie vorher sei $p : B \times F \rightarrow B$ die Standardprojektion auf den ersten Faktor und $i(x) = (x, s(x))$ der zu s gehörige Schnitt $i : B \rightarrow B \times F$ von p . Dann sei das Tripel $\xi = (p, i, \mathcal{F})$ unser gesuchtes, trivial geblättertes CAT-Mikroidbündel. ξ werde wieder *schnittoffen* genannt, wenn s offen ist.

KONVENTION. Von nun an verstehen wir, wenn nichts anderes gesagt wird, automatisch alle trivialen CAT-Mikroidbündel über bogenzusammenhängenden Basen mit obiger Standardzerlegung und fassen sie so stets als trivial geblätterte CAT-Mikroidbündel auf.

BEZEICHNUNG. Die Projektion von $B \times F$ auf den zweiten Faktor F interpretieren wir als „Exponentialabbildung“ und schreiben

$$\exp : B \times F \rightarrow F.$$

Wie vorher sind auch alle trivial geblätterteten Mikroidbündel mit Basis B und Faser F durch die stetigen Abbildungen $B \rightarrow F$ klassifiziert.

BEISPIEL. Gemäß obiger Konvention ist $\tau(M)$ für einen bogenzusammenhängenden CAT-Raum M ein trivial geblättertetes CAT-Mikroidbündel über M . Insbesondere ist die Exponentialabbildung $\exp : \tau(M) \rightarrow M$ definiert. $\tau(M)$ ist schnittoffen.

2.5.2 DEFINITION. Sei X ein lokal bogenzusammenhängender CAT-Raum, $(p : E \rightarrow X, i : X \rightarrow E)$ ein CAT-Mikroidbündel über X mit Faser F und \mathcal{F} eine bgzsh-Zerlegung auf E . Dann heißt

$$\xi = (p, i, \mathcal{F})$$

ein geblättertetes CAT-Mikroidbündel über X mit Faser F , wenn wie in Definition 2.3.2 die lokalen Trivialisierungen existieren und außerdem blättertreu gewählt werden können, also

$$h : (V, \mathcal{F}|_V) \xrightarrow{\cong} (U \times U_F, \text{Standardzerlegung})$$

gilt (h^{-1} soll natürlich ebenfalls blättertreu sein).

Können sämtliche Trivialisierungen aus der Definition so gewählt werden, daß $(U \times U_F, \text{Standardzerlegung})$ schnittoffene, trivial geblättertete CAT-Mikroidbündel sind, wird ξ **schnittoffen** genannt. Eine überdeckende Familie (V_i, h_i) von blättertreuen lokalen Trivialisierungen von ξ nennen wir wie auch schon in Bezeichnung 2.3.2 einen **Atlas** von ξ .

BEZEICHNUNG. Für jedes geblättertete Mikroidbündel ξ sei $\mathcal{F}(\xi)$ die zugehörige bgzsh-Zerlegung auf dem Totalraum $E(\xi)$ von ξ .

Ganz analog gilt Folgerung 2.3.2 auch für geblättertete Mikroidbündel:

FOLGERUNG. Sei $i : X \rightarrow E$ ein stetiger Schnitt der CAT-Abbildung $p : E \rightarrow X$, \mathcal{F} eine bgzsh-Zerlegung auf E und F, F' zwei lokal isomorphe CAT-Räume. Dann sind mit $\xi := (p, i, \mathcal{F})$ äquivalent:

(i) ξ ist ein geblättertetes CAT-Mikroidbündel über X mit Faser F .

(ii) ξ ist ein geblättertetes CAT-Mikroidbündel über X mit Faser F' . △

2.5.3 Die Kategorie der geblätterteten CAT-Mikroidbündel

Zur Definition dieser Kategorie gehen wir analog wie in 2.3.3 vor. Zunächst läßt sich Lemma 2.3.3 analog übernehmen, wobei selbstverständlich $\mathcal{F}(\xi|_W) := \mathcal{F}(\xi)|_W$ gesetzt wird.

Die Äquivalenzrelation von Prämorphisimen

$$(f : X \rightarrow Y, \bar{f} : W \rightarrow E')$$

wird genauso wie in 2.3.3 erklärt, wobei hier alle \bar{f} natürlich noch blättertreu sein müssen, d.h. $f(\text{Blatt}) \subset \text{Blatt}$.

Auf diese Weise ist die Kategorie der geblätterten CAT-Mikroïdbündel definiert.

Ebenso übertragen sich die Begriffe „Tripelprämorphimus“ und „Tripelmorphimus“ aus 2.3.3 auf geblätterte CAT-Mikroïdbündel. Insbesondere ist Isomorphie (genauer Tripelisomorphie) zwischen geblätterten CAT-Mikroïdbündeln über einer festen Basis X definiert. Selbstverständlich gilt auch Korollar 2.3.3 analog.

BEZEICHNUNG. Für ein geblättertes CAT-Mikroïdbündel ξ bezeichne $\text{Aut}(\xi)$ die Gruppe der CAT-Tripelisomorphismen von ξ .

LEMMA. ξ sei ein schnittoffenes, geblättertes CAT-Mikroïdbündel. Dann ist $\text{Aut}(\xi)$ trivial.

BEWEIS: Mit den gewohnten Bezeichnungen sei $\xi = (p : E \rightarrow X, i : X \rightarrow E, \mathcal{F})$, F irgendeine Faser von ξ und $[\bar{f}] \in \text{Aut}(\xi)$. Wegen Korollar 2.3.3, das wie oben bemerkt auch im geblätterten Fall gilt, können wir $[\bar{f}]$ durch einen Präisomorphismus $\bar{f} : W \xrightarrow{\cong} W'$ repräsentieren, wobei W, W' geeignete, offene Umgebungen von $i(X)$ sind. Zu jedem $x \in X$ existiert eine offene Umgebung $V_x \subset W \cap W'$ von $i(x)$, die via $h : V_x \rightarrow U_x \times U_{F,x}$ zu einem schnittoffenen, trivial geblätterten Mikroïdbündel $U_x \times U_{F,x}$ trivialisiert werden kann. Weil \bar{f} auf dem Schnitt stationär ist, gibt es eine kleinere Trivialisierung $\tilde{U}_x \times \tilde{U}_{F,x} \subset U_x \times U_{F,x}$ mit

$$h \circ \bar{f} \circ h^{-1}(\tilde{U}_x \times \tilde{U}_{F,x}) \subset U_x \times U_{F,x}.$$

Da $\bar{f} \text{ id}_X$ als Basisabbildung hat, können wir o.B.d.A. $\tilde{U}_x = U_x$ annehmen.

Die CAT-Abbildung

$$h \circ \bar{f} \circ h^{-1} : U_x \times \tilde{U}_{F,x} \longrightarrow U_x \times U_{F,x}$$

ist eine offene CAT-Einbettung sowie faser- und blättertreu und erfüllt damit alle Voraussetzungen von Lemma 2.6.4. Daher können wir diese Abbildung in Produktform $h_0 \times h_1$ schreiben, wobei wegen der Stationarität in der ersten Komponente $h_0 = \text{id}_{U_x}$ gilt. Ist j der Schnitt des trivialen Mikroïdbündels $U_x \times \tilde{U}_{F,x}$, so sei $B_x \subset \tilde{U}_{F,x}$ das Bild $j_2(U_x)$, wobei j_2 die Projektion von j auf die zweite Komponente bezeichnet. Wegen der Schnittoffenheit ist B_x eine offene Umgebung von $j_2(x)$. Da sich \bar{f} auf dem Schnitt wie die Identität verhält, gilt $h_1|_{B_x} = \text{id}_{B_x}$. Mit der offenen Umgebung $\tilde{V}_x := h^{-1}(U_x \times B_x)$ von $i(x)$ bekommen wir somit die Gleichung

$$\bar{f}|_{\tilde{V}_x} = \text{id}_{\tilde{V}_x} \quad \text{für jedes } x \in X.$$

Daher ist \bar{f} eingeschränkt auf $\tilde{W} := \bigcup_x \tilde{V}_x$ stationär, also gleich der Identität. Dies bedeutet aber nichts anderes als $[\bar{f}] = [\text{id}]$. \triangle

Pullback von geblätterten Mikroïdbündeln: Seien X, Y lokal bogenzusammenhängende CAT-Räume, $f : X \rightarrow Y$ eine CAT-Abbildung und $\xi = (p : E \rightarrow Y, i : Y \rightarrow E, \mathcal{F})$ ein geblättertes CAT-Mikroïdbündel über Y mit Faser F und Zerlegung \mathcal{F} . Dann ist mit den Bezeichnungen des Pullbackdiagramms

$$\begin{array}{ccc}
f^*E & \xrightarrow{\bar{f}} & E \\
p' \downarrow & & \downarrow p \\
X & \xrightarrow{f} & Y
\end{array}$$

$f^*\xi$ zusammen mit der bgzsh-Zerlegung $\mathcal{F}(f^*\xi) := \bar{f}^*\mathcal{F}$ von f^*E ein geblättertes CAT-Mikroïdbündel über X . Ferner ist $[f, \bar{f}]$ ein geblätterter CAT-Mikroïdmorphismus $f^*\xi \rightarrow \xi$.

BEWEIS: Bis auf kleine Änderungen und Ergänzungen können wir den Beweis in 2.3.3 übernehmen. O.E. sei X bogenweise zusammenhängend. Für $x \in X$ ist die lokale Trivialisierungsbedingung für $y = f(x)$ nach Definition 2.5.2 mit derselben Formulierung und denselben Bezeichnungen, die wir für diesen Beweis allesamt übertragen, erfüllt. Sei U' diejenige Bogenkomponente von $f^{-1}(U)$, die x enthält. Mit $V' := f^*E \cap (U' \times V)$ muß man jetzt nur einsehen, daß die frühere Trivialisierung

$$h' : V' \xrightarrow{\cong} U' \times U_F, \quad (u', v) \mapsto (u', h(v)) = (u', f(u'), u_F) \mapsto (u', u_F)$$

und ihre Umkehrung

$$(u', u_F) \mapsto (u', f(u'), u_F) \mapsto (u', h^{-1}(f(u'), u_F))$$

beide blättertreu sind: Die Zerlegung \mathcal{F} von E induziert die bgzsh-Zerlegung

$$\mathcal{G} := \{ X \times L \mid L \in \mathcal{F} \text{ Blatt} \}$$

auf $X \times E$, wobei $\mathcal{F}(f^*\xi) = \bar{f}^*\mathcal{F} = \mathcal{G}|_{f^*E}$. Schränkt man \mathcal{G} auf $U' \times V$ ein und transportiert V mit h nach $U \times U_F$, so ist $\mathcal{G}|_{U' \times U \times U_F}$ dasselbe wie die von der Projektion $U' \times U \times U_F \rightarrow U_F$ induzierte Zerlegung, deren Einschränkung auf $f^*E \cap U' \times V$ der Zerlegung

$$\{ \text{graph } f|_{U'} \times \varphi \mid \varphi \in U_F \}$$

entspricht, die schließlich isomorph auf die Standardzerlegung von $U' \times U_F$ projiziert wird. \triangle

BEISPIELE

- [1] Sei $f : X \hookrightarrow Y$ eine Inklusion und ξ ein geblättertes Mikroïdbündel über Y mit bgzsh-Zerlegung \mathcal{F} . Die kanonische Identifizierung $f^*\xi = \xi|_X$ im Sinne von Mikroïdbündeln ist aber auch blättertreu bzgl. der bgzsh-Zerlegungen $\mathcal{F}(f^*\xi)$ und $\mathcal{F}|_{E|_X}$, so daß auch im Sinne von geblätterten Mikroïdbündeln $f^*(\xi)$ dasselbe ist wie $(\xi|_X, F|_{E|_X})$.

- [2] Pullbacks von trivial geblätternen CAT-Mikroïdbündeln sind wiederum trivial geblätternen CAT-Mikroïdbündel: Dies folgt aus dem obigen Beweis in Verbindung mit der Identifikation $\text{graph } f \times F = X \times F$ aus dem analogen Beispiel [2] in 2.3.3, die blätternestreu ist.
- [3] Falls X und M bogenzusammenhängende CAT-Räume sind, ist insbesondere $\xi_f = f^*\tau(M)$ ein trivial geblätternen CAT-Mikroïdbündel über X mit Faser M und Schnitt $i(x) = (x, f(x))$ (vgl. Bezeichnung 2.3.3 und Beispiel [2] in 2.3.3).
- [4] Wir benötigen noch ein charakteristisches Beispiel, um zu verstehen, warum der Homotopiesatz für Pullbacks von geblätternen Mikroïdbündeln falsch ist. Sei dazu I das Einheitsintervall und $f : I \rightarrow I$ die konstante Abbildung, die alles auf die 0 wirft. f ist natürlich homotop zur Identität. Wäre der Homotopiesatz für geblätternen Mikroïdbündel richtig, müßte $\tau(I) = id^*\tau(I)$ isomorph zum trivial geblätternen Mikroïdbündel $f^*\tau(I) = \xi_f$ sein. Nun liegt aber der Schnitt von ξ_f ganz in einem Blatt der Standardzerlegung von ξ_f , wohingegen der Schnitt von $\tau(I)$ jedes Blatt seiner Standardzerlegung in genau einem Punkt schneidet. Daher können $\tau(I)$ und ξ_f nicht isomorph sein. Allgemein ausgedrückt: Eine Homotopie zwischen Pullbacks eines geblätternen Mikroïdbündels sagt i.a. nichts über das Verhältnis zwischen den Schnitten und den jeweiligen Zerlegungen aus.

BEMERKUNG. Alles aus 2.3.5 und insbesondere die Definition von $f^*\varphi$ kann für geblätternen Mikroïdbündel übernommen werden.

2.5.4 Whitney-Summe: Auch 2.3.4 überträgt sich vollkommen analog auf geblätternen Mikroïdbündel, sobald klar ist, wie die Zerlegung auf $E(\xi \oplus \bar{\xi})$ definiert werden soll: Wir nehmen auf $E(\xi) \times E(\bar{\xi})$ zuerst die Produktzerlegung $\mathcal{F}(\xi) \times \mathcal{F}(\bar{\xi})$ und schränken diese auf $E(\xi \oplus \bar{\xi}) \subset E(\xi) \times E(\bar{\xi})$ ein.

Damit ist die Whitney-Summe von geblätternen CAT-Mikroïdbündeln über einem festen CAT-Raum X kommutativ und assoziativ.

Außerdem wird die Whitney-Summe von Pullbacks respektiert, d.h. es gilt

$$f^*(\xi \oplus \bar{\xi}) = f^*\xi \oplus f^*\bar{\xi}.$$

2.5.5 Was man unter einem Unterbündel eines geblätternen CAT-Mikroïdbündels verstehen soll, ist nun leicht zu erraten:

Definition 2.4.1 kann mit folgenden Zusätzen wortwörtlich übernommen werden: ξ sei natürlich ein geblätternen CAT-Mikroïdbündel, und die lokale Trivialisierung CAT in Bedingung (ii) muß selbstverständlich blätternestreu sein und wird analog wie in Definition 2.4.1 eine lokale Unterbündeltrivialisierung genannt. Wie in 2.4.1 sind analog auch **Atlanten** von Unterbündeln (ξ, E') definiert.

Die der Definition 2.4.1 nachfolgende Bemerkung gilt entsprechend auch im geblätternen Fall. Damit die rechte Seite eine Unterbündeltrivialisierung im geblätternen Sinne ist, muß \tilde{U} außerdem natürlich bogenweise zusammenhängend sein. Ebenso evident ist der

Begriff des **schnittoffenen** Unterbündels eines geblätternen CAT-Mikroidebündels (vgl. 2.5.2, 2.4.1).

BEMERKUNG. *Unterbündel von geblätternen Mikroidebündeln sind i.a. selbst keine geblätternen Mikroidebündel!*

Damit ein Unterbündel mit der eingeschränkten Zerlegung wieder geblättert ist, müssen alle $j_{U,R'}$ so gewählt werden können, daß ihre Projektionen auf die R' -Koordinate lokal konstant sind, was aber i.a. nicht möglich ist.

Da, wie wir sahen, die Trivialisierungen des Pullbacks von den originalen Trivialisierungen induziert sind, gilt Lemma 2.4.1 analog für geblätternen Mikroidebündel.

2.5.6 Unterbündel von geblätternen Mikroidebündeln mit globaler Faser werden ganz analog wie in 2.4.3 definiert, wobei natürlich die lokalen Unterbündeltrivialisierungen blättertreu sein müssen. Ansonsten kann alles aus 2.4.3 wortwörtlich übernommen werden.

2.6 Blätterungen = Unterbündel

Wir wollen nun versuchen, einen Zusammenhang zwischen Blätterungen und den Keimen gewisser Unterbündel des geblätternen Tangentialmikroidebündels herzustellen, um auf diese Weise den Satz von Frobenius zu umgehen.

Nicht nur wegen größerer Allgemeinheit, sondern auch wegen besserer Transparenz leiten wir obigen Zusammenhang für parametrisierte Blätterungen her und somit auch für Blätterungen.

Ohne Einschränkung sei $CAT = TOP$. Ausgangspunkt sind eine m -dimensionale, bogenzusammenhängende Mannigfaltigkeit M , ein bogenzusammenhängender und lokal bogenzusammenhängender Raum X , eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow M$ und $0 \leq q \leq m$. Alle diese Daten bleiben während dieses Abschnittes fixiert. Aus technischen Gründen muß X parakompakt sein.

f induziert das trivial geblätternen Mikroidebündel $\xi_f = (p_1 : X \times M \rightarrow X, i : X \rightarrow X \times M)$ mit

$$i(x) = (x, f(x)).$$

Es gilt $\xi_f = f^*\tau(M)$ (s. Beispiel [3] in 2.5.3). Nach Folgerung 2.5.2 ist ξ_f auch ein geblätternen Mikroidebündel über X mit Faser \mathbb{R}^m .

Wie im zweiten Kapitel sei $\pi_q : F_q(M) \rightarrow M$ die Garbe der lokalen, q -kodimensionalen Blätterungen auf M .

Unser Ziel ist, für einen Lift \bar{f} von f (s. Bild)

$$\begin{array}{ccc}
 & & F_q(M) \\
 & \nearrow \bar{f} & \downarrow \pi_q \\
 X & \xrightarrow{f} & M
 \end{array}$$

auf kanonische Weise einen Unterbündelkeim $\bar{E}'(\bar{f})$ des trivial geblätterten Mikroidbündels ξ_f mit Faser \mathbb{R}^p und Kontrafaser \mathbb{R}^q zu konstruieren, wobei $p = m - q$.

Ist $f = id_M$, also $\bar{f} = \mathcal{F}$ eine Blätterung auf M , würde man intuitiv

$$E'(\mathcal{F}) = \{ (x, y) \in M \times M \mid \exists \text{ Blatt } L \in \mathcal{F} \text{ mit } x, y \in L \}$$

ansetzen. Diese Definition beinhaltet tatsächlich auch den eigentlichen mathematischen Kern, bereitet aber bei Einschränkung auf offene Umgebungen des Schnittes technische Schwierigkeiten. Deswegen ist eine subtilere Vorgehensweise vonnöten:

Die Idee ist, einen Keimrepräsentanten $E'(\bar{f})$ als geeignete Vereinigung

$$E'(\bar{f}) = \bigcup_{U, \mathcal{F}_V} E'_{U, \mathcal{F}_V}(\bar{f})$$

zu schreiben. Hierbei sind

- (1) $U \subset X$ offen und bogenzusammenhängend, $V \subset M$ offen,
- (2) \mathcal{F}_V eine kartesische Blätterung auf V ,
- (3) $f(\bar{U}) \subset V^3$,
- (4) $\bar{f}(x) = \text{Keim von } \mathcal{F}_V \text{ in } f(x) \text{ für alle } x \in \bar{U} \text{ und}$

$$E'_{U, \mathcal{F}_V}(\bar{f}) := \{ (x, y) \in U \times V \mid \exists \text{ Blatt } L \in \mathcal{F}_V \text{ mit } f(x), y \in L \}.$$

Jedes Paar $(U \times V, E'_{U, \mathcal{F}_V}(\bar{f}))$ kann trivialisiert werden: Da \mathcal{F}_V kartesisch ist, existiert eine kartesische Blätterkarte $\varphi : (V, \mathcal{F}_V) \xrightarrow{\cong} (\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p, \mathcal{F}_{n,q})$, die eine Trivialisierung

$$(\star) \quad h = id \times \varphi : U \times V \longrightarrow U \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p$$

stiftet. Evidenterweise ist $graph f|_U \subset E'_{U, \mathcal{F}_V}(\bar{f})$, also $i(U) \subset E'_{U, \mathcal{F}_V}(\bar{f})$. Falls sich $E'_{U, \mathcal{F}_V}(\bar{f})$ als $E'(\bar{f}) \cap U \times V$ schreiben ließe, würde daher h mit $j := h \circ i|_U$ die Bedingung (ii) aus 2.5.5 erfüllen, d.h.

$$h(E'(\bar{f}) \cap U \times V) = h(E'_{U, \mathcal{F}_V}(\bar{f})) = j_{U, \mathbb{R}^q} \times \mathbb{R}^p.$$

³⁾Mit der schwächeren Bedingung $f(U) \subset V$ würde es im Beweis Schwierigkeiten geben.

2.6.1 Nun zur technischen Umsetzung dieser Idee. Sei $P(\bar{f})$ die Menge aller Paare (U, \mathcal{F}_V) , so daß U, V und \mathcal{F}_V die obigen Bedingungen (1)-(4) erfüllen. Für jedes $(U, \mathcal{F}_V) = p \in P(\bar{f})$ definieren wir

$$E'_p(\bar{f}) := E'_{U, \mathcal{F}_V}(\bar{f})$$

wie oben. Jedes $p \in P(\bar{f})$ induziert also ein $U_p \subset X$, ein $V_p \subset M$ und eine kartesische Blätterung $\mathcal{F}_p := \mathcal{F}_{V_p}$ auf V_p . Insbesondere induziert eine Familie $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ aus $P(\bar{f})$ Familien $(U_\lambda), (V_\lambda)$ und (\mathcal{F}_λ) .

Sei $\mathcal{P}(\bar{f})$ die Menge aller $\Lambda \subset P(\bar{f})$, so daß die induzierte Familie $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Überdeckung von X und $(\bar{U}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine lokal endliche Überdeckung von X ist.

LEMMA. $\mathcal{P}(\bar{f}) \neq \emptyset$.

BEWEIS: Entscheidend ist die Parakompaktheit von X und zwar folgendermaßen: Sei $x \in X$ beliebig. $\bar{f}(x) \in F_q(M)$ ist ein Blätterkeim in $f(x)$, so daß eine offene Umgebung $V_x \subset M$ von $f(x)$ und eine Blätterung \mathcal{F}_x auf V_x existieren mit

$$\bar{f}(x) = \text{Keim von } \mathcal{F}_x \text{ in } f(x).$$

Unter Ausnutzung der Stetigkeit von f und \bar{f} können wir o.E. annehmen, daß \mathcal{F}_x kartesisch ist und eine offene Umgebung U_x von x existiert mit $f(U_x) \subset V_x$ und

$$\bar{f}(x') = \text{Keim von } \mathcal{F}_x \text{ in } f(x') \text{ für alle } x' \in U_x.$$

Weil X parakompakt ist, existiert unter Berücksichtigung des Schrumpfungssatzes eine offene, lokal endliche Verfeinerungsüberdeckung $(U'_i)_{i \in I}$ der Überdeckung (U_x) mit Verfeinerungsabbildung $z : I \rightarrow X$, so daß (\bar{U}'_i) ebenfalls lokal endlich und eine Verfeinerung von (U_x) mit derselben Verfeinerungsabbildung z ist.

Für jedes $i \in I$ ist $(U'_i, \mathcal{F}_{z(i)}) \in P(\bar{f})$, was eine Abbildung $b : I \rightarrow P(\bar{f})$ induziert. Sei $\Lambda := b(I)$. Dann sind die induzierten Überdeckungen $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ und $(\bar{U}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ebenfalls lokal endlich. △

2.6.2 Für jedes $\Lambda \in \mathcal{P}(\bar{f})$ sei

$$E'_\Lambda(\bar{f}) := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} E'_\lambda(\bar{f}).$$

Um einzusehen, daß jedes solche $E'_\Lambda(\bar{f})$ ein Unterbündel von ξ_f ist, brauchen wir noch ein vorbereitendes Lemma.

LEMMA. (a): Ist $(U, \mathcal{F}_V) \in P(\bar{f})$ und $U' \subset U$ offen, dann ist auch $(U', \mathcal{F}_V) \in P(\bar{f})$, und es gilt $E'_{U', \mathcal{F}_V}(\bar{f}) = E'_{U, \mathcal{F}_V}(\bar{f}) \cap U' \times V$.

(b): Seien $(U, \mathcal{F}_V), (U', \mathcal{F}_{V'}) \in P(\bar{f})$, $V \subset V'$ $\mathcal{F}_{V'}$ -regulär und $\mathcal{F}_{V'}|_V = \mathcal{F}_V$. Dann ist

$$E'_{U', \mathcal{F}_{V'}}(\bar{f}) \cap U \times V = E'_{U, \mathcal{F}_V}(\bar{f}) \cap (U \cap U') \times V.$$

BEWEIS: Für (a) muß man sich nur die jeweiligen Definitionen nochmal vergegenwärtigen.

(b) folgt mit (a) und unter Beachtung der Voraussetzungen in (b) aus der folgenden Gleichungskette:

$$\begin{aligned}
E'_{U', \mathcal{F}_{V'}}(\bar{f}) \cap U \times V &= \{ (x, m) \in (U \cap U') \times V \mid \exists L \in \mathcal{F}_{V'} \text{ mit } f(x), m \in L \} \\
&= \{ (x, m) \in (U \cap U') \times V \mid \exists L \in \mathcal{F}_{V'}|_V \text{ mit } f(x), m \in L \} \\
&= \{ (x, m) \in (U \cap U') \times V \mid \exists L \in \mathcal{F}_V \text{ mit } f(x), m \in L \} \\
&= E'_{U \cap U', \mathcal{F}_V}(\bar{f}) \cap U \times V. \quad \triangle
\end{aligned}$$

FOLGERUNG. Für jedes $\Lambda \in \mathcal{P}(\bar{f})$ ist $E'_\Lambda(\bar{f})$ ein Unterbündel des geblätterten Mikroidbündels ξ_f mit Faser \mathbb{R}^p und Kontrafaser \mathbb{R}^q . Alle diese $E'_\Lambda(\bar{f})$ induzieren den gleichen Unterbündelkeim $\bar{E}'(\bar{f})$, so daß auf diese Weise jedem stetigen Lift $\bar{f} : X \rightarrow F_q(M)$ von $f : X \rightarrow M$ über $\pi_q : F_q(M) \rightarrow M$ kanonisch ein Unterbündelkeim $\bar{E}'(\bar{f})$ von ξ_f zugeordnet ist.

BEWEIS: Aus $i(U_\lambda) \subset E'_\lambda(\bar{f})$ für alle $\lambda \in \Lambda$ folgt sofort $i(X) \subset E'_\Lambda(\bar{f})$, so daß also $E'_\Lambda(\bar{f})$ den Schnitt von ξ_f enthält.

Zur lokalen Trivialisierungsbedingung: Sei $x \in X$ fest.

Da (\bar{U}_λ) eine lokal endliche Überdeckung von X ist, existieren eine offene Umgebung U von x und nur endlich viele Indizes $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ mit $U \cap \bar{U}_{\lambda_i} \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, k$. Dabei kann U so gewählt werden, daß

$$x \in \bar{U}_{\lambda_i} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, k.$$

Somit ist $f(x) \in V_{\lambda_i}$ für alle i . Die Blätterungen \mathcal{F}_{λ_i} sind nach Voraussetzung kartesisch und besitzen in $f(x)$ alle denselben Keim. Daher gibt es nach Lemma 1.3.3 eine offene Umgebung V von $f(x)$, so daß $V \subset V_{\lambda_i}$, \mathcal{F}_{λ_i} -regulär und

$$\mathcal{F}_{\lambda_i}|_V = \mathcal{F}_{\lambda_j}|_V =: \mathcal{F}|_V = \text{kartesisch für alle } i, j.$$

Wegen der Stetigkeit von f kann U o.E. so gewählt werden, daß

$$U \subset U_{\lambda_i}, \text{ falls } x \in U_{\lambda_i},$$

und $f(\bar{U}) \subset V$. Also ist $p := (U, \mathcal{F}_V)$ ein Element von $P(\bar{f})$.

Anwendung des vorigen Lemmas liefert uns die Gleichung

$$E'_{\lambda_i}(\bar{f}) \cap U \times V = E'_{U, \mathcal{F}_V}(\bar{f}) \cap (U \cap U_{\lambda_i}) \times V = E'_{U, \mathcal{F}_V}$$

für alle $i = 1, \dots, k$. Das bedeutet aber

$$E'_\Lambda(\bar{f}) \cap U \times V = E'_{U, \mathcal{F}_V},$$

woraus - wie wir uns bereits vorher überlegt haben - die gewünschte Existenz der Trivialisierung folgt.

Unabhängigkeit von $\Lambda \in \mathcal{P}(\bar{f})$: Aus der letzten Gleichung folgt sofort die Keimäquivalenz von $E'_\Lambda(\bar{f})$ und $E'_{\tilde{\Lambda}}(\bar{f})$ für $\Lambda \subset \tilde{\Lambda}$. $\mathcal{P}(\bar{f})$ ist aber abgeschlossen bzgl. endlicher Vereinigungen der Λ 's. \triangle

2.6.3 Nun wollen wir den vorigen Unterabschnitt auf parametrisierte Bündelblätterungen übertragen.

Wie in 1.7.3 sei $\pi_F : B_F(M) \rightarrow M$ die Bündelgarbe über M mit der kompakten „Faser“ F , wobei wir $\dim F =: p \leq m$ und $q := m - p$ setzen. X , $f : X \rightarrow M$ und ξ_f seien wie vorher.

Unser Ziel ist, für einen Lift \bar{f} von f (s. Bild)

$$\begin{array}{ccc}
 & & B_F(M) \\
 & \nearrow \bar{f} & \downarrow \pi_F \\
 X & \xrightarrow{f} & M
 \end{array}$$

auf kanonische Weise ein Unterbündel $E'(\bar{f})$ des trivial geblätterten Mikroidbündels ξ_f mit *globaler* Faser F und Kontrafaser \mathbb{R}^q zu konstruieren.

Bis auf wenige Änderungen geht man hierfür genauso wie bei parametrisierten Blätterungen vor und übernimmt natürlich auch alle entsprechenden Bezeichnungen. Wir befassen uns nun mit jenen Änderungen.

Wie im vorigen Unterabschnitt werden zunächst die Mengen $E'_{U, \mathcal{F}_V}(\bar{f})$ definiert. Jetzt ist allerdings V eine offene, triviale Tubenblätterung von einem geeigneten $F \cong L \in \mathbf{L}(F; M)$ und \mathcal{F}_V eine triviale Tubenblätterung auf V . Die restlichen Bedingungen (3), (4) und die Definition von $E'_{U, \mathcal{F}_V}(\bar{f})$ bleiben unverändert.

Die Trivialisierung von $(U \times V, E'_{U, \mathcal{F}_V}(\bar{f}))$ hat natürlich eine andere Gestalt: Da \mathcal{F}_V keine kartesische Blätterung, sondern eine triviale Tubenblätterung ist, existiert ein Isomorphismus $\varphi : V \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^q \times F$. Bezeichnet \mathcal{G} die durch die Projektion $\mathbb{R}^q \times F \rightarrow \mathbb{R}^q$ definierte Blätterung, so haben wir einen blättertremen Isomorphismus $\varphi : (V, \mathcal{F}_V) \xrightarrow{\cong} (\mathbb{R}^q \times F, \mathcal{G})$, der die gewünschte Trivialisierung

$$h = id \times \varphi : U \times V \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{R}^q \times F$$

liefert.

Danach argumentiert man ganz genau so wie in 2.6.1 und 2.6.2, wobei man im Beweis von Folgerung 2.6.2 statt Lemma 1.3.3 natürlich Lemma 1.7.4 verwendet. Aber für den Nachweis, daß $E'_\Lambda(\bar{f})$ ein Unterbündel von ξ_f mit globaler Faser F ist und die Gleichheit

$$E'_\Lambda(\bar{f}) = E'_{\tilde{\Lambda}}(\bar{f})$$

gilt, müssen wir noch zusätzlich zeigen, daß die vom Tupel (U, \mathcal{F}_V) induzierte offene Umgebung $U \times V$ von $i(X)$ vertikal bzgl. $E'_\Lambda(\bar{f})$ ist, wozu wir das Kriterium (ii) in Lemma + Bezeichnung 2.4.3 verwenden:

Für ein festes $x \in X$ waren ja die Umgebung U von x und $V \subset M$ so gewählt, daß es nur endlich viele Indizes $\lambda, \dots, \lambda_k \in \Lambda$ mit $U \cap U_{\lambda_i} \neq \emptyset$ gibt, $V \subset V_{\lambda_i}$ $\mathcal{F}_{V_{\lambda_i}}$ -regulär ist, und $\mathcal{F}_{V_{\lambda_i}}|_V = \mathcal{F}_V$ gilt. Seien nun $(x', y_0), (x', y_1) \in E'_\Lambda(\bar{f})$ mit $(x', y_0) \in U \times V$. Zu zeigen ist $y_1 \in V$. Wegen der Identität

$$E'_\Lambda(\bar{f}) \cap U \times V = E'_{U, \mathcal{F}_V}(\bar{f})$$

haben wir zunächst $(x', y_0) \in E'_{U, \mathcal{F}_V}(\bar{f})$. Daher existiert ein Blatt $L \in \mathcal{F}_V$ mit $f(x'), y_0 \in L$. Ist $i \in \{1, \dots, k\}$ mit $(x', y_1) \in E'_{\lambda_i}(\bar{f})$, so gibt es ein Blatt $L_i \in \mathcal{F}_{V_{\lambda_i}}$ mit $f(x'), y_1 \in L_i$. Nun war aber $f(x') \subset L \subset V$, so daß V von L_i getroffen wird. Dies impliziert jedoch $L_i \subset V$ und damit erst recht $y_1 \in V$.

Somit wissen wir, daß $E'_\Lambda(\bar{f})$ ein Unterbündel von ξ_f mit globaler Faser F und Kontrafaser \mathbb{R}^q ist. Von der letzten Gleichung ausgehend, die wir jetzt besser als

$$E'_\Lambda(\bar{f}) \cap U_x \times V_x = E'_{U_x, \mathcal{F}_{V_x}}(\bar{f})$$

schreiben für alle $x \in X$, erhalten wir für $\Lambda \subset \tilde{\Lambda}$ und alle $x \in X$ die Beziehung

$$E'_\Lambda(\bar{f}) \cap U_x \times V_x = E'_{U_x, \mathcal{F}_{V_x}}(\bar{f}) = E'_{\tilde{\Lambda}}(\bar{f}) \cap U_x \times V_x.$$

Jedes $U_x \times V_x$ ist vertikal bzgl. $E'_\Lambda(\bar{f})$ und $E'_{\tilde{\Lambda}}(\bar{f})$. Nach Korollar 2.4.3 ist dann auch $W := \bigcup_x U_x \times V_x$ vertikal bzgl. $E'_\Lambda(\bar{f})$ und $E'_{\tilde{\Lambda}}(\bar{f})$. W ist außerdem eine offene Umgebung des Schnittes von ξ_f , so daß nach Lemma 2.4.3 $E'_\Lambda(\bar{f})$ und $E'_{\tilde{\Lambda}}(\bar{f})$ in W enthalten sind. Dies bedeutet $E'_\Lambda(\bar{f}) \cap W = E'_\Lambda(\bar{f}) \cap W = E'_{\tilde{\Lambda}}(\bar{f}) \cap W = E'_{\tilde{\Lambda}}(\bar{f})$. Zusammenfassend haben wir somit die

FOLGERUNG. *Jedem stetigen Lift $\bar{f} : X \rightarrow B_F(M)$ von $f : X \rightarrow M$ über $\pi_F : B_F(M) \rightarrow M$ ist auf kanonische Weise ein Unterbündel $\bar{E}'(\bar{f})$ von ξ_f mit globaler Faser F und Kontrafaser \mathbb{R}^q zugeordnet. \triangle*

2.6.4 Der nächste Schritt ist die Umkehrung unserer Konstruktion, d.h. jedem Unterbündelkeim \bar{E}' des geblätterten Mikroidbündels ξ_f mit Faser \mathbb{R}^p und Kontrafaser \mathbb{R}^q soll in kanonischer Weise eine parametrisierte Blätterung der Kodimension q mit Basisabbildung $f : X \rightarrow M$ derart zugeordnet werden, daß beide Konstruktionen invers zueinander sind.

Die grundlegende Idee ist folgende: Die Fasern der Bündelprojektion $X \times M \rightarrow X$ bilden eine bgzsh-Zerlegung \mathcal{F} auf $X \times M$ und induzieren durch Einschränkung eine bgzsh-Zerlegung $\mathcal{F}_{E'}$ auf E' . Nun kommt es darauf an, zu jedem $x \in X$ eine geeignete, eben eine besonders schöne, Umgebung \tilde{V} von $i(x)$ derart zu finden, daß die eingeschränkte bgzsh-Zerlegung $\mathcal{F}|_{E' \cap \tilde{V}}$ mittels der Exponentialabbildung $\exp : X \times M \rightarrow M$ auf eine lokale Blätterung um $f(x)$ projiziert werden kann. Damit dies gewährleistet ist, verlangen

wir, daß f offen ist. Der induzierte Blätterungskeim in $f(x)$ muß natürlich unabhängig von der Wahl der schönen Umgebung \tilde{V} sein.

Die Hauptaufgabe besteht aber eher darin, schöne Umgebungen überhaupt zu finden. Wir werden solche Umgebungen als schön bezeichnen, die eine Produkttrivialisierung wie in (\star) besitzen. Ihre Existenz hängt vor allem an der Blättertreue der lokalen Trivialisierungen bzgl. der Standardzerlegung von $E(\xi_f)$.

BEZEICHNUNG. Eine Umgebung \tilde{V} von $i(x)$ werde *schön* genannt, wenn sie vergleichsweise wie in (\star) eine produktartige Unterbündeltrivialisierung besitzt, i.e. von der Form $\tilde{V} = U \times V$ ist mit offenen Umgebungen U von x , V von $f(x)$, und wenn ein Isomorphismus $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p$ existiert, so daß für

$$h := id \times \varphi : U \times V \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p$$

$h(E' \cap \tilde{V}) = j_{U, \mathbb{R}^q} \times \mathbb{R}^p$ gilt, wobei $j = h \circ i|_U$ sei.

BEMERKUNG. Sei $id \times \varphi$ solch eine Trivialisierung der schönen Umgebung $\tilde{V} = U \times V$. Dann erhalten wir mit der kartesischen Blätterung $\mathcal{F}_V := \varphi^* \mathcal{F}_{m,q}$ die lokale Darstellung

$$E' \cap U \times V = \{ (x, m) \in U \times V \mid \exists \text{ Blatt } L \in \mathcal{F}_V \text{ mit } f(x), m \in L \},$$

so daß $E' \cap U \times V$ durch \mathcal{F}_V festgelegt ist.

Zur Herleitung der Produktartigkeit ein einfaches, vorbereitendes Lemma:

LEMMA. X_0, X_1, Y_0, Y_1 seien CAT-Räume und $h : X_0 \times X_1 \rightarrow Y_0 \times Y_1$ eine offene CAT-Einbettung, die durch die Standardprojektionen jeweils zu CAT-Abbildungen $h_i : X_i \hookrightarrow Y_i$, $i = 0, 1$ faktorisiert. Dann sind h_0, h_1 offene Einbettungen, und h hat die Form $h = h_0 \times h_1$.

BEWEIS: $h_0 \times h_1$ faktorisiert ebenso wie h zu h_0 bzw. h_1 . Da nach Voraussetzung $p_i \circ h = h_i \circ p_i$ gilt, sind dann aber die $p_i \circ h$ eindeutig durch die h_i bestimmt und damit auch h , so daß $h = h_0 \times h_1$ gilt. Die Injektivität von h impliziert die Injektivität der h_i . Die Offenheit der h_i folgt aus der Epimorphie der Standardprojektionen $X_0 \times X_1 \rightarrow X_i$, der Offenheit von h und der Offenheit der Standardprojektionen $Y_0 \times Y_1 \rightarrow Y_i$. \triangle

FOLGERUNG. Sei $x \in X$. Jede Umgebung von $i(x)$ enthält eine schöne Umgebung von $i(x)$.

BEWEIS: Im folgenden verwenden wir mehrmals das Verkleinerungsargument wie in 2.5.5 als Analogon zu Bemerkung 2.4.1 erläutert.

Sei W eine Umgebung von $i(x)$. Gemäß der Unterbündeleigenschaft von E' und diesem Verkleinerungsargument können wir zunächst von irgendeiner lokalen Unterbündeltrivialisierung

$$h : W' \longrightarrow U \times U_{\mathbb{R}^q} \times U_{\mathbb{R}^p}$$

einer offenen Umgebung $W' \subset W$ um $i(x)$ ausgehen. Wie gewohnt bezeichne $j = h \circ i$ den Schnitt der rechten Seite. $U_{\mathbb{R}^q}$ und $U_{\mathbb{R}^p}$ enthalten jeweils Umgebungen, die isomorph zu \mathbb{R}^q bzw. \mathbb{R}^p sind, so daß h nach geeignetem Einschränken des Bild- und Urbildbereichs und entsprechender Verkleinerung von U o.E. die Gestalt $h : W' \rightarrow U \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p$ hat und gemäß unserem Verkleinerungsargument wieder eine lokale Unterbündeltrivialisierung ist (O.B.d.A. U bogenzusammenhängend, da X lokal bogenzusammenhängend). Die Verkettung von h^{-1} mit der offenen Einbettung $W' \hookrightarrow X \times M$ ergibt eine offene CAT-Einbettung

$$g : U \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p \hookrightarrow X \times M$$

mit Bild W' , die sowohl faser- als auch blättertreu ist.

Somit erfüllt g die Voraussetzungen des vorigen Lemmas. Insbesondere ist das Bild von g eine Produktumgebung von $i(x)$, also von der Form $W' = U' \times V$ mit $U' \subset U$. Wegen der Fasertreue von g gilt aber $U' = U$. Ebenso ist g^{-1} produktartig, d.h. es existiert ein Isomorphismus

$$\varphi : V \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p,$$

so daß

$$id \times \varphi : U \times V \longrightarrow U \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p$$

mit

$$h|_{U \times V} : U \times V \rightarrow U \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p$$

übereinstimmt. △

2.6.5 Ist $\tilde{V} = U \times V$ eine schöne Umgebung von $i(x)$ mit offenen Umgebungen U von x , V von $f(x)$, und einem Isomorphismus $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p$, so daß für

$$h := id \times \varphi : U \times V \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p$$

$h(E' \cap \tilde{V}) = j_{U, \mathbb{R}^q} \times \mathbb{R}^p$ gilt, so können wir ganz direkt $\bar{f}(x) \in F_q(M)$ durch

$$\bar{f}(x) := \text{Keim von } \varphi^* \mathcal{F}_{m,q} \text{ in } f(x)$$

definieren, wodurch aber die Wohldefiniertheit noch nicht sofort abgesichert ist. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten: Man nehme irgendeine andere schöne Trivialisierung um $i(x)$ und vergleiche sie mit der ersteren mittels einer Übergangsfunktion wie in 3.4.1, 3.4.3, um mit der Offenheit von f die Wohldefiniertheit zu bekommen. Die andere Möglichkeit, die wir hier favorisieren, besteht darin, gleich von vornherein einen "koordinatenunabhängigen" Standpunkt einzunehmen. Wie bereits erwähnt bilden die Fasern der Bündelprojektion $X \times M \rightarrow X$ eine bgzsh-Zerlegung von $X \times M$, die wir in diesem Unterabschnitt mit \mathcal{F} bezeichnen.

LEMMA. Sei $f : X \rightarrow M$ offen und \tilde{V} eine schöne Umgebung von $i(x)$. Dann ist

$$\exp(\mathcal{F}|_{E' \cap \tilde{V}}) := \{ \exp(L) \mid L \in \mathcal{F}|_{E' \cap \tilde{V}} \text{ Blatt} \}$$

eine lokale, bgzsh-Zerlegung, ja sogar eine lokale Blätterung um $f(x)$ der Kodimension q . Modulo Keimäquivalenz in $f(x)$ ist diese Blätterung unabhängig von der Wahl der schönen Umgebung wohldefiniert. Auf diese Weise wird jedem Unterbündelkeim des geblätterten Mikroidbündels ξ_f mit Faser \mathbb{R}^p und Kontrafaser \mathbb{R}^q eine parametrisierte Blätterung der Kodimension q mit Basisabbildung $f : X \rightarrow M$ zugeordnet.

BEWEIS: Man kann i.a. natürlich keine Bildzerlegung definieren, aber in der speziellen Situation der Existenz schöner Umgebungen ist es möglich.

Mit den üblichen Notationen sei

$$h = id \times \varphi : U \times V \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p$$

eine Unterbündeltrivialisierung der schönen Umgebung $\tilde{V} = U \times V$. Transportieren wir die Situation via h auf die rechte Seite, so entspricht der Blätterprojektion von $\mathcal{F}|_{E' \cap \tilde{V}}$ die Projektion

$$j_{U, \mathbb{R}^q}(U) \times \mathbb{R}^p \rightarrow j_{U, \mathbb{R}^q}(U)$$

und der auf $E' \cap \tilde{V}$ eingeschränkten Exponentialabbildung die Abbildung

$$j_{U, \mathbb{R}^q}(U) \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p, \quad (u, r_q, r_p) \mapsto (r_q, r_p).$$

Daran sieht man, daß $\exp(\mathcal{F}|_{E' \cap \tilde{V}})$ eine bgzsh-Zerlegung auf einer Teilmenge $V' \subset V$ ist. Bezeichnet $j_{\mathbb{R}^q}$ die Projektion von j auf die \mathbb{R}^q -Koordinate, so gilt

$$\varphi(V') = j_{\mathbb{R}^q}(U) \times \mathbb{R}^p.$$

Jetzt greift die Offenheit von $f: f|_U$ entspricht der Projektion von j auf $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p$. Da die Projektion $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ offen ist, folgt daraus die Offenheit von $j_{\mathbb{R}^q}$, d.h. V' ist eine offene Umgebung von $f(x)$ und $\exp(\mathcal{F}|_{E' \cap \tilde{V}})$ daher eine lokale Blätterung um $f(x)$. Wir setzen

$$\bar{f}(x) := \text{Keim von } \exp(\mathcal{F}|_{E' \cap \tilde{V}}) \text{ in } f(x).$$

Zu zeigen ist die Wohldefiniertheit von $\bar{f}(x)$: Sei \tilde{V}' eine andere schöne Umgebung von $i(x)$. Nach Folgerung 2.6.4 enthält $\tilde{V} \cap \tilde{V}'$ eine schöne Umgebung \tilde{V}'' . Daher können wir uns o.B.d.A. auf den Fall $\tilde{V}' \subset \tilde{V}$ beschränken.

Wegen der Kontravarianz des Einschränkens ist $\mathcal{F}|_{E' \cap \tilde{V}'}$ die Einschränkung von $\mathcal{F}|_{E' \cap \tilde{V}}$ auf $E' \cap \tilde{V}'$. Also gilt

$$\exp(\mathcal{F}|_{E' \cap \tilde{V}'}) \leq \exp(\mathcal{F}|_{E' \cap \tilde{V}})|_{\exp(E' \cap \tilde{V}')}.$$

Wegen gleicher Kodimension muß lt. Lemma 1.3.1 dann auch die Gleichheit der beiden Blätterungen auf $\exp(E' \cap \tilde{V}')$ gelten, so daß insbesondere die Keime gleich sind.

Da die schönen Umgebungen von $i(x)$ nach Folgerung 2.6.4 eine Umgebungsbasis bilden, hängt $\bar{f}(x)$ aufgrund der Wohldefiniertheit nur von dem Unterbündelkeim von E' ab.

Bleibt nur noch die Stetigkeit von \bar{f} zu zeigen: Per Definition ist eine schöne Umgebung $\tilde{V} = U \times V$ von $i(x)$ automatisch auch eine schöne Umgebung von $i(x')$ für alle $x' \in U$. \triangle

BEMERKUNG. Als Beiproduct bekommen wir außerdem die Übereinstimmung zwischen der Definition von $\bar{f}(x)$ aus dem Lemma und der Definition von $\bar{f}(x)$ aus der Einleitung in diesem Unterabschnitt, was manchmal ganz angenehm sein kann.

2.6.6 LEMMA. M^m sei eine zusammenhängende CAT-Mannigfaltigkeit, $0 \leq q \leq m$, X ein parakompakter, bogenzusammenhängender, lokal bogenzusammenhängender CAT-Raum und $f : X \rightarrow M$ eine offene CAT-Abbildung. Dann gibt es eine kanonische, bijektive Korrespondenz zwischen den parametrisierten, q -kodimensionalen CAT-Blätterungen von M mit Basisabbildung f und den Unterbündelkeimen des geblätterten CAT-Mikroïdbündels ξ_f mit Faser \mathbb{R}^{m-q} und Kontrafaser \mathbb{R}^q .

BEWEIS: Wir brauchen nur noch zu zeigen, daß unsere beiden kanonischen Zuordnungen invers zueinander sind.

Starten wir mit einer parametrisierten Blätterung \bar{f} . Im Beweis von Folgerung 2.6.2 hatten wir gesehen, daß zu jedem $x \in X$ eine schöne Umgebung $U \times V$ von $i(x)$ existiert, die von einem $(U, \mathcal{F}_V) \in P(\bar{f})$ induziert ist. Wegen

$$\exp(\mathcal{F}|_{E'_{U, \mathcal{F}_V}}) = \mathcal{F}_V|_{\exp(E'_{U, \mathcal{F}_V})}$$

sind wir aber fertig.

Gehen wir umgekehrt von einem Unterbündel E' aus, bilden gemäß vorigem Lemma den zugehörigen Lift $\bar{f} = \bar{f}(E')$ und gehen zu $E'_\Lambda(\bar{f})$ mit $\Lambda \in \mathcal{P}(\bar{f})$ über, so müssen wir die Keimäquivalenz von E' und $E'_\Lambda(\bar{f})$ nachweisen. Wir wissen bereits, daß beide Unterbündel den gleichen Lift \bar{f} induzieren. Mit der Abkürzung $E'' := E'_\Lambda(\bar{f})$ gilt also

$$\bar{f}(E') = \bar{f}(E'') = \bar{f}.$$

Sei $x \in X$ beliebig. Wegen Folgerung 2.6.4 existieren jeweils schöne Unterbündeltrivialisierungen von E' bzw. E'' mit entsprechenden, schönen Umgebungen $U' \times V'$ bzw. $U'' \times V''$ von $i(x)$. $\mathcal{F}_{V'}$ bzw. $\mathcal{F}_{V''}$ seien die lt. Bemerkung 2.6.4 induzierten kartesischen Blätterungen auf V' bzw. V'' . Diese besitzen nach Voraussetzung denselben Keim in $f(x)$. Daher ermöglicht uns Lemma 1.3.3 die Verkleinerung von V' und V'' zu einer gemeinsamen Umgebung V von $f(x)$ mit gemeinsamer, eingeschränkter, kartesischer Blätterung \mathcal{F}_V . Wählen wir eine Umgebung $U \subset U' \cap U''$ mit $f(U) \subset V$, bekommen wir unter Beachtung von Bemerkung 2.6.4 und Lemma 1.3.3 eine ähnliche Gleichungskette wie im Beweis von Lemma 2.6.2:

$$\begin{aligned} E' \cap U \times V &= (E' \cap U' \times V') \cap U \times V \\ &= \{ (x, m) \in U \times V \mid \exists L \in \mathcal{F}_{V'} \text{ mit } f(x), m \in L \} \\ &= \{ (x, m) \in U \times V \mid \exists L \in \mathcal{F}_{V'}|_V \text{ mit } f(x), m \in L \} \\ &= \{ (x, m) \in U \times V \mid \exists L \in \mathcal{F}_V \text{ mit } f(x), m \in L \} \end{aligned}$$

Für E'' gilt die analoge Gleichungskette, woraus sofort die Gleichheit von $E' \cap U \times V$ und $E'' \cap U \times V$ folgt. Da auf diese Weise zu jedem $x \in X$ eine Umgebung W_x von $i(x)$ mit $E' \cap W_x = E'' \cap W_x$ existiert, folgt mit der Schnittumgebung $W := \bigcup_x W_x$, daß

$$E' \cap W = E'' \cap W.$$

Daher repräsentieren E' und E'' denselben Unterbündelkeim von ξ_f . △

Das Bisherige wollen wir wieder auf parametrisierte Bündelblätterungen übertragen. Dazu müssen wir die Bezeichnung 2.6.4 dahingehend ändern, daß \tilde{V} zusätzlich noch vertikal bzgl. E' sei, und \mathbb{R}^p durch F ersetzt werden muß.

Der Beweis für die Existenz schöner Umgebungen kann wortwörtlich übernommen werden, wobei natürlich das entsprechende Verkleinerungsargument für Unterbündel mit globaler Faser (s. 2.5.6 und Bemerkung 2.4.3) verwendet wird. Auch die Definition von $\bar{f}(E')$ wird analog getroffen, wobei dann $\exp(\mathcal{F}_{E' \cap \tilde{V}})$ eine triviale Tubenblätterung ist, und der „Keim von $\exp(\mathcal{F}_{E' \cap \tilde{V}})$ in $f(x)$ “ die Äquivalenzklasse von $\exp(\mathcal{F}_{E' \cap \tilde{V}})$ wie bei der Definition der Bündelgarbe $B_F(M)$ in 1.7.3 meint.

Im Beweis zum analogen Lemma 2.6.6 tritt jedoch folgende Vereinfachung auf: Um die Implikation

$$\bar{f}(E') = \bar{f}(E'') \Rightarrow E' = E''$$

nachzuweisen, genügt es wegen der Vertikalität der schönen Umgebungen die Implikation

$$\bar{f}(E') = \bar{f}(E'') \Rightarrow E' \cap p^{-1}(x) = E'' \cap p^{-1}(x) \text{ für alle } x \in X$$

auszunutzen (vgl. Beweis von Lemma 2.4.3).

Von nun an beschränken wir uns auf den Fall $f = id_M$, also auf gewöhnliche Blätterungen bzw. Bündelblätterungen. Wir wollen nun herausfinden, wie sich die Operation von $\text{Aut}(M)$ auf den Schnitten von $\pi_q : F_q(M) \rightarrow M$ bzw. $\pi_F : B_F(M) \rightarrow M$ auf die entsprechenden Unterbündelkeime von $\tau(M)$ bzw. Unterbündel von $\tau(M)$ mit globaler Faser F auswirkt.

Jeder Automorphismus $\varphi \in \text{Aut}(M)$ induziert den faser- und blättertreen Tangentialautomorphismus

$$\tau(\varphi) : \tau(M) \xrightarrow{\cong} \tau(M),$$

so daß $\text{Aut}(M)$ in dieser Weise auf dem geblätterten Tangentialmikroïdbündel operiert. Mittels

$$\varphi[E'] := [\tau(\varphi)(E')]$$

operiert $\text{Aut}(M)$ und jede Untergruppe $G \subset \text{Aut}(M)$ auch auf den Unterbündelkeimen von $\tau(M)$ mit festgehaltener Faser und Kontrafaser. Entsprechendes gilt für Unterbündel von $\tau(M)$ mit globaler Faser. Die Orbits dieser G -Operation nennen wir daher die G -Klassen jener Unterbündelkeime bzw. Unterbündel.

Sei nun \mathcal{F} eine Blätterung der Kodimension q auf M und $[E']$ der zu \mathcal{F} gehörige Unterbündelkeim von $\tau(M)$. Wir wollen einsehen, wieso für einen Automorphismus $g : M \xrightarrow{\cong} M$ die Blätterung $g_*\mathcal{F}$ zum Unterbündelkeim $g[E']$ korrespondiert. Sei dazu

$x \in M$ und $\tilde{V} = U \times V$ eine schöne Umgebung von $i(g^{-1}(x))$ für das Unterbündel E' , so daß daher ein Isomorphismus $\varphi : V \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p$ existiert. $\mathcal{F}_V := \varphi^* \mathcal{F}_{m,q}$ ist eine Blätterung auf V , deren Keim in $g^{-1}(x)$ lt. Bemerkung 2.6.5 mit dem Keim von \mathcal{F} in $g^{-1}(x)$ übereinstimmt. Somit ist $\tau(g)(\tilde{V}) = g(U) \times g(V)$ wegen

$$g(U) \times g(V) \xrightarrow{id \times g^{-1}} g(U) \times V \xrightarrow{id \times \varphi} g(U) \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p$$

eine schöne Umgebung von $i(x)$ für das Unterbündel gE' . Mit $V' := g(V)$ ist daher nach Bemerkung 2.6.5 der zu gE' gehörige Blätterungskeim in x durch

$$\mathcal{F}_{V'} := (\varphi \circ g^{-1})^* \mathcal{F}_{m,q} = (g^{-1})^* \varphi^* \mathcal{F}_{m,q} = (g^{-1})^* \mathcal{F}_V = g_* \mathcal{F}_V$$

gegeben, was zu beweisen war. Bei Bündelblätterungen argumentieren wir analog.

Wir fassen diesen Abschnitt wie folgt zusammen:

SATZ. M^m sei eine zusammenhängende CAT-Mannigfaltigkeit, $0 \leq q \leq m$, F eine geschlossene CAT-Mannigfaltigkeit und $G \subset \text{Aut}^{\text{CAT}}(M)$ eine Untergruppe. Dann gilt:

- (1) Es gibt eine kanonische, bijektive Korrespondenz zwischen den G -Klassen der q -kodimensionalen CAT-Blätterungen von M und den G -Klassen der Unterbündelkeime des geblätterten Tangentialmikroïdbündels $\tau(M)$ mit Faser \mathbb{R}^{m-q} und Kontrafaser \mathbb{R}^q .
- (2) Falls $\mathbf{L}(F; M) \neq \emptyset$, gibt es eine kanonische, bijektive Korrespondenz zwischen den G -Klassen der CAT-Bündelblätterungen von M mit Faser F und den G -Klassen der Unterbündel des geblätterten Tangentialmikroïdbündels $\tau(M)$ mit globaler Faser F und Kontrafaser \mathbb{R}^k , wobei $k := m - \dim F$. △

KOROLLAR. M^m sei eine zusammenhängende CAT-Mannigfaltigkeit und $0 \leq q \leq m$. Dann gibt es eine kanonische, bijektive Korrespondenz zwischen den q -kodimensionalen CAT-Blätterungen von M und den Unterbündelkeimen des geblätterten Tangentialmikroïdbündels $\tau(M)$ mit Faser \mathbb{R}^{m-q} und Kontrafaser \mathbb{R}^q . △

Kapitel 3

Gruppoid-Strukturen

Gruppoid-Strukturen sind das Bindeglied zwischen Blätterungen und ihren gesuchten, klassifizierenden Abbildungen. Man kann sogar ganz direkt jeder Blätterung eine geliftete Gruppoidstruktur zuordnen, ohne den „Umweg“ über geblätterte Mikroidbündel. Aber es wäre zu schade, die bijektive Korrespondenz zwischen Haefliger-Strukturen und geblätterten Mikroidbündeln unerwähnt zu lassen.

Hierfür geht man prinzipiell analog wie bei Prinzipalbündeln vor, so daß—wie bei diesen—Mikroidbündel zu Kozykeln korrespondieren *sollten*, i.e. Systemen von Übergangsfunktionen mit Werten in einem Gruppoiden (anstelle einer Gruppe). Tatsächlich kann diese Korrespondenz aber nur für geblätterte Mikroidbündel verwirklicht werden, weil es anscheinend unmöglich ist, die Menge aller Keime lokaler, stetiger Abbildungen mit einer Art kompakt offenen Topologie zu versehen. Da aber andererseits Mikroidbündel sehr wohl als Kozykel aufgefaßt werden können, unterliegen jener Einschränkung nur die *ungeblätterten* Mikroidbündel mit Faser $\neq \mathbb{R}^n$, die aber in der Praxis für uns noch keine Rolle spielen.

Noch ein anderer Punkt ist zu bemerken: Was die Übergangsfunktionen geblätterter Mikroidbündel angeht, so sind nicht etwa diskrete Gruppoide das Pendant zu diskreten Gruppen als Wertebereich von Übergangsfunktionen geblätterter Faserbündel, sondern stattdessen Gruppoide mit *étale*-Topologie. Dabei besteht Kompatibilität zwischen Gruppen- und Gruppoidbegriff, denn diskrete Gruppen sind dasselbe wie *étale*-Gruppoide mit einpunktigen Einheiten.

Dieses Kapitel gliedert sich in die Definition von Gruppoiden und topologischen Gruppoiden mit Beispielen, dann in die Definition von Gruppoid-Kozykeln und Strukturen, und geht auf die o.g. Korrespondenz zwischen geblätterten Mikroidbündeln und Haefliger-Strukturen mit Verallgemeinerung auf Unterbündel (diejenigen mit globaler Faser ausgenommen) ein. Vorher ordnen wir jeder m -dimensionalen CAT-Mannigfaltigkeit M die kanonische Γ_m^{CAT} -Struktur σ_M zu und jeder CAT-Blätterung \mathcal{F} der Kodimension q auf M die kanonische $\Gamma_{\{m,q\}}^{\text{CAT}}$ -Struktur $\sigma_{\mathcal{F}}$, die ein Lift von σ_M ist.

3.1 Gruppoide

Ein Gruppoid ist allgemeiner als eine Gruppe, da jedes Element einen „Anfang“ und ein „Ende“ besitzt, und zwei Elemente nur dann miteinander multipliziert werden können, wenn das Ende des einen Elementes mit dem Anfang des anderen Elementes übereinstimmt. Hier die exakte

3.1.1 DEFINITION. Ein Gruppoid ist eine kleine Kategorie, so daß jeder Morphismus ein Isomorphismus ist. Ein Gruppoidhomomorphismus sei ein kovarianter Funktor zwischen zwei Gruppoiden. Gruppoide und ihre Homomorphismen bilden eine Kategorie.

Die o.g. partielle Multiplikation ist also durch Verkettung von Morphismen gegeben.

Sind A, B Objekte einer Kategorie \mathcal{G} und $f : A \rightarrow B$ ein Morphismus, so bezeichne

$$s(f) := A \text{ die Quelle (= source = Urbild = Definitionsbereich)}$$

und

$$r(f) := B \text{ das Bild (= range = Bildbereich = Ziel)}$$

von f . Liegt \mathcal{G} als kleine Kategorie vor, werden somit Mengenabbildungen

$$s : \mathcal{G} \longrightarrow \text{Ob}(\mathcal{G}) \text{ und } r : \mathcal{G} \longrightarrow \text{Ob}(\mathcal{G})$$

induziert. Bei kleinen Kategorien \mathcal{G} bezeichnet man $\text{Ob}(\mathcal{G})$ auch kürzer mit B, U oder noch besser mit \mathcal{G}^0 und nennt dies die **Einheiten** oder Identitäten von \mathcal{G} .

Weitere Bezeichnungen: Es sei Γ ein Gruppoid. Identifiziert man jede Einheit $x \in \Gamma^0$ mit ihrem identischen Morphismus id_x , erhält man die kanonische Einheiteneinbettung

$$\Delta : \Gamma^0 \rightarrow \Gamma$$

auch **Diagonale** oder Identitätenabbildung genannt. Da zu jedem $u \in \Gamma$ die Inverse u^{-1} existiert, liefert die Zuordnung $u \mapsto u^{-1}$ die Inversionsabbildung

$$i : \Gamma \longrightarrow \Gamma,$$

die natürlich eine Involution ist. Mit

$$\Gamma \times_{\Gamma^0} \Gamma := \{ (u, v) \in \Gamma \times \Gamma \mid r(v) = s(u) \}$$

ist die Multiplikation (= Verkettung) von Gruppoidelementen als Abbildung

$$m : \Gamma \times_{\Gamma^0} \Gamma \longrightarrow \Gamma, \quad (u, v) \mapsto uv$$

gegeben. Ferner seien für alle Einheiten $x, y \in \Gamma^0$

$$- \Gamma_x := \{ u \in \Gamma \mid s(u) = x \},$$

- $\Gamma^y := \{ u \in \Gamma \mid r(u) = y \}$,
- $\Gamma_x^y := \Gamma_x \cap \Gamma^y (= \text{Mor}(x, y))$.

Γ_x^x ist eine Gruppe für alle $x \in \Gamma^0$, die als „Holonomiegruppe“ oder „Standgruppe“ interpretiert werden kann (s. Beispiele [4] und [6] weiter unten).

Die Abbildungen Δ, s, r, i, m genügen folgenden Bedingungen:

- (1) $s \circ \Delta = r \circ \Delta = id_{\Gamma^0}$.
- (2) i ist eine Involution mit $r = s \circ i$ ($\iff s = r \circ i$).
- (3) m ist assoziativ, d.h. (uv) und $(uv)w$ sind genau dann definiert, wenn (vw) und $u(vw)$ definiert sind, wobei in diesem Falle $(uv)w = u(vw)$ gilt.
- (4) $s(uv) = s(v)$ und $r(uv) = r(u)$ für alle $(u, v) \in \Gamma \times_{\Gamma^0} \Gamma$.
- (5) Existenz neutraler Elemente: $u\Delta(s(u)) = u$, $\Delta(r(u))u = u$ für alle $u \in \Gamma$.
- (6) Existenz inverser Elemente: $u^{-1}u = \Delta(s(u))$ und $uu^{-1} = \Delta(r(u))$ für alle $u \in \Gamma$.

Geht man umgekehrt von Mengen Γ, Γ^0 mit Abbildungen Δ, s, r, i, m aus, die obigen Bedingungen genügen, erhält man eine neue, äquivalente Definition eines Gruppoiden von mehr algebraischem Charakter. Weil die Bedingungen (1)-(6) ausschließlich in Form von Diagrammen formuliert werden können, bietet die zweite Definition gegenüber der ersten den Vorteil der Verallgemeinerung auf beliebige Kategorien, die Pullbacks besitzen. Aber dafür ist die erste Definition nicht nur einfacher, sondern verdeutlicht auch besser den wesentlichen mathematischen und intuitiven Gehalt des Gruppoidbegriffes.

Werden die Eigenschaften (2) und (6) ausgelassen, erhält man eine äquivalente Definition von kleinen Kategorien.

Als nächstes definieren wir topologische Gruppoide, wobei wir die allgemeinere Definition in [Haefl]¹⁾ gegenüber der spezielleren in [Ren] bevorzugen, weil jene für unsere Zwecke völlig ausreicht und außerdem mit der kategoriellen Definition kompatibel ist. Ein **topologischer Gruppoid** sei ein mit einer Topologie versehener Gruppoid Γ , so daß m, i, s, r (bzgl. der Teilraumtopologie $\Gamma^0 \subset \Gamma$) stetig sind, wobei $\Gamma \times_{\Gamma^0} \Gamma$ natürlich als topologischer Teilraum von $\Gamma \times \Gamma$ aufgefaßt wird. Äquivalent dazu braucht auf dem Gruppoiden nur eine Topologie gegeben zu sein, so daß m und i stetig sind. Versieht man die Einheiten Γ^0 mit der Teilraumtopologie, so folgt automatisch auch die Stetigkeit von s und r , denn gemäß Eigenschaft (6) läßt sich beispielsweise s als Verkettung $u \mapsto (u^{-1}, u) \mapsto m(u^{-1}, u)$ schreiben. Legt man die zweite Gruppoiddefinition zugrunde, verlangt man einfach die Stetigkeit aller Abbildungen Δ, s, r, i, m .

Eine **topologische Kategorie** sei eine kleine Kategorie Γ mit einer Topologie, so daß s, r, m stetig seien, wobei $\Gamma^0 \subset \Gamma$ die Unterraumtopologie trage (oder es sei alternativ Γ^0 ein topologischer Raum, so daß zusätzlich auch Δ stetig sei).

¹⁾Die folgende Definition ist allerdings etwas strenger als die in [Haefl].

Die Morphismen zwischen topologischen Gruppoïden sind natürlich die **stetigen Gruppoïdhomomorphismen**, also diejenigen Gruppoïdhomomorphismen, die zudem stetige Abbildungen sind. Analog sind stetige Morphismen zwischen topologischen Kategorien definiert, die wir **stetige Kategoriemorphismen** nennen.

Ein **Untergrupoïd** eines Gruppoïden Γ sei natürlich eine Unterkategorie $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$, die wieder ein Gruppoïd ist, wobei im topologischen Fall $\tilde{\Gamma}$ stets die Teilraumtopologie trage. So kann man einen (mengentheoretischen) Untergrupoïden $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$ eines topologischen Gruppoïden Γ auf natürliche Weise durch seine Teilraumtopologie zu einem topologischen Gruppoïden machen. Dieses Verfahren wenden wir bei einigen der untenstehenden Beispiele an. Wir treffen nun folgende

KONVENTION. Außer wenn nichts anderes gesagt wird, soll ein Untergrupoïd $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$ stets dieselben Einheiten wie Γ besitzen, i.e. $\tilde{\Gamma}^0 = \Gamma^0$.

Die in dieser Arbeit wichtigsten Gruppoïde sind **étale-Gruppoïde**, d.h. topologische Gruppoïde, deren source und range Abbildungen s, r étale-Abbildungen sind, also lokale Homöomorphismen (oder äquivalent dazu sind s und r Garben). Genauso werden auch **étale-Kategorien** über die étale-Eigenschaft der Quell- und Zielabbildungen s, r definiert. Daher ist ein étale-Gruppoïd dasselbe wie ein topologischer Gruppoïd, der eine étale-Kategorie darstellt. Wegen der étale-Eigenschaft der Inversion ist ein topologischer Gruppoïd Γ genau dann ein étale-Gruppoïd, wenn die Quellabbildung $s : \Gamma \rightarrow \Gamma^0$ étale ist.

Ein stetiger Kategoriemorphismus $\varphi : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ zwischen étale-Kategorien $\tilde{\Gamma}, \Gamma$ heiÙe ein **étale-Kategoriemorphismus**, wenn φ im Sinne einer stetigen Abbildung auÙerdem ein lokaler Homöomorphismus ist. Einen stetigen Gruppoïdhomomorphismus, der zudem ein étale-Kategoriemorphismus ist, nennen wir kürzer einen **étale-Gruppoïdhomomorphismus**. Die konventionelle Bedeutung von étale-Gruppoïden für die Blätterungstheorie zeigt sich bekanntlich in [Est, Haef, B-N, Connes, Moer].

Es folgen einige typische Beispiele von Gruppoïden.

BEISPIELE

- [1] Die Gruppen sind genau diejenigen Gruppoïde, deren Einheiten einelementig sind. Topologische Gruppen sind analog charakterisiert.
- [2] Ein schönes, anschauliches Beispiel eines Gruppoïden ist durch den Fundamentalgrupoïden $\pi(X)$ eines topologischen Raumes X gegeben. Seine Elemente sind die Wegehomotopieklassen mit beliebigen Anfangs- und Endpunkten in X mit der durch das Aneinanderhängen von Wegen induzierten Multiplikation. Die Einheiten von $\pi(X)$ sind mit X identisch ($\pi(X)$ ist jedoch kein topologischer Gruppoïd). Genaue Definition und Details in [Spa, S. 47,48].
- [3] Jede Äquivalenzrelation $R \subset X \times X$ kann als Gruppoïd aufgefaÙt werden: Am besten eignet sich hierfür die objektfreie Definition einer Kategorie. Jedes Paar $(x, y) \in R$

sei ein Morphismus. $[(x, y), (w, z)]$ sei zusammensetzbar, wenn $y = w$ gilt, wobei natürlich

$$(x, y)(y, z) := (x, z)$$

gesetzt wird. Jede Identität ist von der Gestalt (x, x) , so daß X mittels der „echten“ Diagonalen $\Delta(x) = (x, x)$ den Einheiten von R entspricht. Allgemein induziert jeder Gruppoid Γ mit Einheiten B die Abbildung $r \times s : \Gamma \rightarrow B \times B$, so daß deren Bild $=: R$ eine Äquivalenzrelation ist und $r \times s : \Gamma \rightarrow R$ einen Gruppoidhomomorphismus darstellt. Ist dieser ein Isomorphismus, wird Γ ein **prinzipaler** Gruppoid genannt. Γ ist genau dann prinzipial, wenn jede Gruppe Γ_x^x trivial ist.

- [4] Auch jede Gruppenoperation $G \times X \rightarrow X$ läßt sich als Gruppoid auffassen: Die Morphismenmenge ist einfach $\Gamma = G \times X$. Je zwei Elemente (g, y) und (h, x) werden als zusammensetzbar erklärt, wenn $y = hx$ gilt, und ihr Produkt lautet dann

$$(g, y)(h, x) := (gh, x).$$

Die Identitäten von Γ sind von der Form $(1, x)$ und korrespondieren daher zu X . Aus dieser Definition von Γ folgt, daß die Diagonale durch $x \mapsto (1, x)$, die Quell- und Zielabbildungen durch $s(g, x) = x$, $r(g, x) = gx$, und die Inverse von (g, x) durch (g^{-1}, gx) gegeben sind. Ferner ist Γ_x^x nichts anderes als die Isotropiegruppe G_x von x . Falls G stetig auf X operiert, ist $G \times X$ ein topologischer Gruppoid.

Interessanterweise enthält der Gruppoid $G \times X$ die gesamte Information von X , von G und der Operation von G auf X , i.e. sind $G \times X$ und $H \times Y$ als Gruppoide isomorph, existieren Isomorphismen $f : X \xrightarrow{\cong} Y$ und $\varphi : G \xrightarrow{\cong} H$, so daß f äquivariant ist, d.h. $f(gx) = \varphi(g)f(x)$ für alle $x \in X, g \in G$.

- [5] Einer der wichtigsten Gruppoide ist der Tangenten-Gruppoid (siehe [Connes]).
- [6] Jeder C^∞ -Blätterung \mathcal{F} ist der **Holonomiegruppoid** oder auch Graph $G(\mathcal{F})$ zugeordnet, der sowohl die Zerlegungsstruktur als auch die gesamte Holonomie von \mathcal{F} enthält. Seine Elemente sind Tripel

$$(x, y, [\alpha]),$$

wobei $x, y \in L$ im selben Blatt $L \in \mathcal{F}$ liegen, α ein Weg in L von x nach y ist, und $[\alpha]$ die von α induzierte Holonomieklassse bezeichnet (die nur von der Homotopieklasse von α in $\pi(L)$ abhängt). Die Verknüpfung ist durch

$$(x, y, [\alpha])(y, z, [\beta]) = (x, z, [\alpha\beta])$$

gegeben und die Einheiten durch $\{(x, x, [0])\} \equiv X$. $G_x^x(\mathcal{F})$ entspricht der üblichen Holonomiegruppe des Blattes L in $x \in L$.

- [7] Nun folgen typische Beispiele für étale-Gruppoide. Es sei F ein CAT-Raum. Ein lokaler Homöomorphismus von F sei ein CAT-Homöomorphismus

$$f : U \xrightarrow{\cong} V$$

mit offenen Mengen $U, V \subset F$. Für jedes $x \in U$ wird f ein lokaler Homöomorphismus um x genannt. Ein weiterer lokaler Homöomorphismus $g : U' \rightarrow V'$ um x sei

keimäquivalent zu f , falls eine offene Umgebung $W \subset U \cap U'$ von x existiert, auf der f und g gleich sind. f_x bezeichne dann den **Keim**, d.h. die Äquivalenzklasse von f in x . Für jeden Keim f_x ist $f_x(x) := f(x)$ wohldefiniert.

Wir definieren den Gruppoiden Γ_F als die Menge aller solchen Keime lokaler Homöomorphismen von F . Zwei Keime g_y und f_x können genau dann verkettet werden, wenn die Bedingung $y = f(x)$ erfüllt ist. Die Einheiten bzgl. dieser Verkettung sind die Identitätskeime id_x , wodurch die Diagonale die Form $x \mapsto id_x$ erhält. Somit bekommen wir $s(f_x) = x$, $r(f_x) = f_x(x)$ als source- und range-Abbildungen. Jeder lokale Homöomorphismus $f : U \rightarrow V$ induziert eine kanonische Menge

$$U_f = \{ f_x \mid x \in U \}.$$

Die Menge all dieser U_f definiert die Basis einer Topologie von Γ_F , bzgl. derer $s : \Gamma_F \rightarrow F$ und $r : \Gamma_F \rightarrow F$ étale-Abbildungen sind. Damit ist Γ_F als étale-Gruppoid definiert. Wir nennen Γ_F den **Gruppoiden der Keime lokaler Homöomorphismen von F**. Soll die spezielle CAT-Kategorie hervorgehoben werden, schreiben wir Γ_F^{CAT} .

- [8] Im Spezialfall $F = \mathbb{R}^q$ sind einige Abkürzungen angebracht: Wird nichts anderes gesagt, sei der \mathbb{R}^q mit seiner kanonischen differenzierbaren Struktur versehen. Wir setzen

$$\Gamma_q := \Gamma_{\mathbb{R}^q}^{\text{DIFF}}$$

und $\Gamma_q^{\text{PL}} := \Gamma_{\mathbb{R}^q}^{\text{PL}}$ sowie $\Gamma_q^{\text{TOP}} := \Gamma_{\mathbb{R}^q}^{\text{TOP}}$. Γ_q heie auch der q -te **Haefliger-Gruppoid**.

- [9] Sei \mathcal{F} eine CAT-Blätterung auf einer CAT-Mannigfaltigkeit M . In den beiden folgenden Beispielen definieren wir für \mathcal{F} zwei Arten von Untergruppoiden von Γ_M .

Das erste Beispiel ist $\Gamma_{\{\mathcal{F}\}}$. Dieser Untergruppoid besteht aus den Keimen *gewisser* lokaler Homöomorphismen von M und zwar der *blättertreen*, lokalen CAT-Homöomorphismen, i.e.

$$f : (U, \mathcal{F}|_U) \xrightarrow{\cong} (V, \mathcal{F}|_V),$$

wobei f^{-1} ebenfalls blättertreu sei. Mit der Teilraumtopologie ist $\Gamma_{\{\mathcal{F}\}}$ sogar ein étale-Gruppoid. Zur Hervorhebung der CAT-Struktur schreiben wir manchmal auch $\Gamma_{\{\mathcal{F}\}}^{\text{CAT}}$. Im Spezialfall $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{n,q}$ bieten sich die analogen Abkürzungen $\Gamma_{\{n,q\}} := \Gamma_{\{F_{n,q}\}}^{\text{DIFF}}$, $\Gamma_{\{n,q\}}^{\text{PL}} := \Gamma_{\{\mathcal{F}_{n,q}\}}^{\text{PL}}$ und $\Gamma_{\{n,q\}}^{\text{TOP}} := \Gamma_{\{\mathcal{F}_{n,q}\}}^{\text{TOP}}$ an.

Natürlich kann man $\Gamma_{\{F\}}$ nicht nur für Blätterungen, sondern allgemeiner für jede bgzsh-Zerlegung \mathcal{F} auf einem CAT-Raum M definieren. In der Praxis kommen wir aber mit Blätterungen aus.

Für je zwei bogenzusammenhängende CAT-Räume F', R' sei \mathcal{F} die durch die Fasern der Projektion $R' \times F' \rightarrow R'$ gegebene bgzsh-Zerlegung auf $R' \times F'$. Wir setzen $\Gamma_{\{R',F'\}} := \Gamma_{\{\mathcal{F}\}}$ und schreiben manchmal auch deutlicher $\Gamma_{\{R',F'\}}^{\text{CAT}}$.

- [10] Durch eine leichte Verallgemeinerung der Abbildungskeime aus vorigem Beispiel erhält man einen Untergruppoiden $\Gamma_{\mathcal{F}} \subset \Gamma_M$ mit $\Gamma_{\{\mathcal{F}\}} \subset \Gamma_{\mathcal{F}}$ wie folgt: Sei $f : U \rightarrow V$ ein lokaler CAT-Homöomorphismus von M , $x \in U$, $L_x \in \mathcal{F}|_U$ das Blatt aus $\mathcal{F}|_U$ durch x und $L_y \in \mathcal{F}|_V$ das Blatt aus $\mathcal{F}|_V$ durch $y := f(x)$. f heie nun **punktblättertreu** in x , falls

$$f(L_x) = L_y$$

gilt. Ein lokaler Homöomorphismus $f : U \rightarrow V$ von M ist demzufolge genau dann blättertreu, wenn er punktblättertreu in *jeder* $x \in U$ ist. Für ein bestimmtes $x \in U$ braucht daher ein lokaler Homöomorphismus $f : U \rightarrow V$, der punktblättertreu in x ist, noch lange nicht blättertreu zu sein. Einen Keim $f_x \in \Gamma_M$ in x nennen wir punktblättertreu, falls er einen in x punktblättertreuen Repräsentanten besitzt. $\Gamma_{\mathcal{F}}$ sei nun definiert als derjenige Untergruppoid von Γ_M , der von den punktblättertreuen Keimen lokaler Homöomorphismen von M gebildet wird. Im Unterschied zu $\Gamma_{\{\mathcal{F}\}}$ ist aber $\Gamma_{\mathcal{F}}$ mit der Teilraumtopologie kein étale-Gruppoid mehr. Auch hier kann $\Gamma_{\mathcal{F}}$ allgemeiner für bgzsh-Zerlegungen \mathcal{F} definiert werden.

Für den Spezialfall $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{n,q}$ verwenden wir die analogen Abkürzungen $\Gamma_{n,q} := \Gamma_{\mathcal{F}_{n,q}}^{\text{DIFF}}, \Gamma_{n,q}^{\text{PL}} := \Gamma_{\mathcal{F}_{n,q}}^{\text{PL}}$ und $\Gamma_{n,q}^{\text{TOP}} := \Gamma_{\mathcal{F}_{n,q}}^{\text{TOP}}$.

Analog wird auch die Notation $\Gamma_{R',F'}$ für CAT-Räume F', R' übernommen.

- [11] Die bisherigen Gruppoide eignen sich zwar zur Beschreibung von Blätterungen und geblättern Mikroidbündeln, aber nicht zur Beschreibung von Unterbündeln mit globaler Faser. Zu diesem Zweck definieren wir für jede CAT-Blätterung \mathcal{F} auf einer CAT-Mannigfaltigkeit M den étale-Gruppoiden $\Gamma\{\mathcal{F}\}$, den wir als „globalen Gruppoiden der Blätterung \mathcal{F} “ bezeichnen, und im nächsten Beispiel dessen allgemeineres Pendant $\Gamma(\mathcal{F})$. Allerdings können wir $\Gamma\{\mathcal{F}\}$ nicht mehr als Untergruppoiden von Γ_M auffassen, da die Keimrelation strenger definiert werden muß.

Die Einheiten von $\Gamma\{\mathcal{F}\}$ sind M . Seien $x, y \in M$ mit den eindeutigen Blättern $L_x \in \mathcal{F}$ durch x bzw. $L_y \in \mathcal{F}$ durch y und

$$f : (U, \mathcal{F}|_U) \xrightarrow{\cong} (V, \mathcal{F}|_V)$$

ein lokaler, blättertreuer CAT-Homöomorphismus mit $f(x) = y$, wobei—und das ist der entscheidende Unterschied zu den Beispielen [9] und [10]— U und V nicht nur offene Umgebungen von x bzw. y , sondern sogar *gesättigte*, offene Umgebungen von L_x bzw. L_y seien²⁾. Daher nennen wir f einen lokalen, gesättigten, blättertreuen Homöomorphismus um x . Die Keimäquivalenz solcher lokalen Abbildungen um x sei durch Einschränkung auf gesättigte, offene Umgebungen von L_x erklärt, und f_x bezeichne den Keim von f in x , so daß $f_x(x) := f(x) = y$ wieder wohldefiniert ist. Die Morphismenmenge $\text{Mor}(x, y)$ sei nun die Menge aller Keime f_x mit $f_x(x) = y$, wodurch $\Gamma\{\mathcal{F}\}$ zunächst als Gruppoid ohne Topologie gegeben ist.

Jeder lokale, gesättigte, blättertreue CAT-Homöomorphismus $f : (U, \mathcal{F}|_U) \xrightarrow{\cong} (V, \mathcal{F}|_V)$ induziert die Menge

$$U_f = \{ f_x \in \Gamma\{\mathcal{F}\} \mid x \in U \}.$$

Diese Mengen eignen sich aber noch nicht ganz als topologische Basis, weil dann die Quellabbildung s unstetig wäre. Wir erhalten daher die richtige Topologie von $\Gamma\{\mathcal{F}\}$, wenn wir als größere Basis alle Mengen der Form

$$s^{-1}(W) \cap U_f \quad \text{mit } W \subset M \text{ offen}$$

²⁾ $W \subset M$ heißt gesättigt, wenn jedes Blatt, das W trifft, ganz in W liegt.

zulassen, wodurch $\Gamma\{\mathcal{F}\}$ zum étale-Gruppoiden wird. Wie schon vorher sei analog die Schreibweise $\Gamma\{\mathcal{F}\}^{\text{CAT}}$ eingeführt.

Da jeder lokale, gesättigte, blättertreue Homöomorphismus insbesondere auch ein lokaler, blättertreuer Homöomorphismus ist, wird ein stetiger, auf den Einheiten M stationärer Gruppoidhomomorphismus

$$\{\mathcal{F}_{\mathcal{F}}\} : \Gamma\{\mathcal{F}\} \longrightarrow \Gamma_{\{\mathcal{F}\}}$$

induziert, der i.a. weder injektiv noch surjektiv zu sein braucht. $\{\mathcal{F}_{\mathcal{F}}\}$ ist aber immerhin noch eine étale-Abbildung.

Auch hier kann $\Gamma\{\mathcal{F}\}$ allgemeiner für bgzsh-Zerlegungen \mathcal{F} definiert werden. Für die von CAT-Räumen F', R' durch die Projektion $R' \times F' \rightarrow R'$ induzierte bgzsh-Zerlegung \mathcal{F} verwenden wir die abkürzende Notation $\Gamma\{R', F'\}$, und ebenso analog sind die Bezeichnungen $\Gamma\{n, q\} := \Gamma\{\mathcal{F}_{n,q}\}^{\text{DIFF}}$, $\Gamma\{n, q\}^{\text{PL}} := \Gamma\{\mathcal{F}_{n,q}\}^{\text{PL}}$ und $\Gamma\{n, q\}^{\text{TOP}} := \Gamma\{\mathcal{F}_{n,q}\}^{\text{TOP}}$ getroffen.

- [12] Die Verallgemeinerung von $\Gamma\{\mathcal{F}\}$ zu $\Gamma(\mathcal{F})$ erklärt sich jetzt fast von selbst: Mit den Bezeichnungen des vorigen Beispiels brauchen die lokalen, gesättigten Homöomorphismen

$$f : (U, \mathcal{F}|_U) \xrightarrow{\cong} (V, \mathcal{F}|_V)$$

nicht mehr blättertreu zu sein, sondern nur noch der Bedingung

$$f(L_x) = L_y$$

zu genügen. Definition der Keimrelation und Topologisierung erfolgen analog wie im vorigen Beispiel. $\Gamma(\mathcal{F})$ ist aber kein étale-Gruppoid. Ebenso wird entsprechend ein stetiger Gruppoidhomomorphismus

$$(\mathcal{F}_{\mathcal{F}}) : \Gamma(\mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma_{\mathcal{F}}$$

induziert, der jedoch nicht étale ist. Wiederum braucht \mathcal{F} für die Definition von $\Gamma(\mathcal{F})$ nur eine bgzsh-Zerlegung zu sein.

Auch die Bezeichnungen $\Gamma(R', F')$, $\Gamma(n, q) := \Gamma(\mathcal{F}_{n,q})^{\text{DIFF}}$, $\Gamma(n, q)^{\text{PL}} := \Gamma(\mathcal{F}_{n,q})^{\text{PL}}$ und $\Gamma(n, q)^{\text{TOP}} := \Gamma(\mathcal{F}_{n,q})^{\text{TOP}}$ bedürfen inzwischen keiner weiteren Erläuterung. Es sei aber noch erwähnt, daß $\Gamma\{\mathcal{F}\} \subset \Gamma(\mathcal{F})$ ein Untergruppoid mit der induzierten Teilraumtopologie ist.

3.1.2 Topologische Kategorien lassen sich für $\text{CAT} = \text{TOP}, \text{DIFF}, \text{PL}$ zu CAT-Kategorien verfeinern: Eine **CAT-Kategorie** werde als kleine Kategorie Γ mit CAT-Strukturen auf Γ und Γ^0 definiert, so daß s, r, m, Δ CAT-Abbildungen sind. Insbesondere ist dann $\Gamma^0 \subset \Gamma$ ein CAT-Unterraum.

CAT-Gruppoide werden analog definiert, wobei natürlich auch die Inversion i eine CAT-Abbildung sein muß.

Ein **CAT-Kategoriomorphismus** ist ein stetiger Kategoriomorphismus $f : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ zwischen CAT-Kategorien $\tilde{\Gamma}, \Gamma$, der zusätzlich noch eine CAT-Abbildung ist.

Da ein DIFF-Raum automatisch eine C^∞ -Mannigfaltigkeit darstellt, ist jede DIFF-Kategorie eine sog. DIFF-Mannigfaltigkeitskategorie. Dieser Begriff wird nun auch für $CAT = PL, TOP$ definiert: Eine **CAT-Mannigfaltigkeitskategorie** sei eine CAT-Kategorie Γ , so daß Γ und Γ^0 zusätzlich noch CAT-Mannigfaltigkeiten sind. **CAT-Mannigfaltigkeitsgruppoiden** werden genauso definiert.

Die Definitionen einer **étale-CAT-Kategorie** und **étale-CAT-Mannigfaltigkeitskategorie** sowie eines **étale-CAT-Gruppoiden** und eines **étale-CAT-Mannigfaltigkeitsgruppoiden** brauchen sicher nicht im Detail ausgeführt zu werden.

Diese Definitionen sind aber noch zu eng, weil gerade die wichtigsten Gruppoide eine nicht Hausdorff-Topologie tragen. Zur geeigneten Begriffserweiterung muß man daher allgemeine CAT-Räume und allgemeine CAT-Abbildungen zugrunde legen. Für $CAT = TOP$ ist natürlich keine Verallgemeinerung nötig, und für $CAT = DIFF$ braucht man nur nicht separierte DIFF-Mannigfaltigkeiten zuzulassen, wobei diese allgemeinen DIFF-Mannigfaltigkeiten wie üblich via DIFF-Atlanten definiert werden ohne jede Zusatzbedingungen an die Topologie.

Was aber ein **allgemeiner PL-Raum** sein soll, bedarf schon eher einer genaueren Ausführung.

Hierzu legen wir die Definition von PL-Räumen und PL-Abbildungen aus [Hud] zugrunde, und definieren einen allgemeinen PL-Raum wie bei Mannigfaltigkeiten über PL-Atlanten. Die Definition im einzelnen: X sei ein topologischer Raum, $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X , $(P_i)_{i \in I}$ eine Familie von PL-Räumen und

$$\varphi_i : U_i \xrightarrow{\approx} P_i$$

für jedes $i \in I$ ein Homöomorphismus, so daß alle Kartenwechsel

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} |_{\varphi_i(U_i \cap U_j)}$$

PL-Abbildungen sind. Dann heißt die Familie $(\varphi_i)_{i \in I}$ ein **PL-Atlas** von X . Analog wie bei Mannigfaltigkeiten definiert man Verträglichkeit von PL-Atlanten, so daß eine **allgemeine PL-Struktur** von X als ein maximaler PL-Atlas von X oder dazu äquivalent als eine Äquivalenzklasse von PL-Atlanten von X definiert wird. X zusammen mit einer allgemeinen PL-Struktur wird dann ein allgemeiner PL-Raum genannt.

Mit dem Dimensionsbegriff für PL-Räume erhält man einen Dimensionsbegriff für allgemeine PL-Räume.

Allgemeine PL-Abbildungen werden genauso definiert, wie man es von C^∞ -Abbildungen kennt.

Damit sind nun auch allgemeine CAT-Gruppoide, allgemeine étale-CAT-Gruppoide, usw. definiert. Weil aber, wie schon bemerkt, Gruppoide natürlicherweise nicht Hausdorffsch sind, treffen wir folgende

KONVENTION. Wenn nichts anderes bestimmt wird, ist mit einem CAT-Gruppoiden, einer étale-CAT-Mannigfaltigkeitskategorie usw. stets ein allgemeiner CAT-Gruppoid, eine allgemeine étale-CAT-Mannigfaltigkeitskategorie usw. gemeint.

BEISPIEL. Die Gruppoide Γ_n^{PL} und $\Gamma_{\{n,q\}}^{\text{PL}}$ sind beide n -dimensionale, étale-PL-Mannigfaltigkeitsgrupoide.

3.1.3 Zu jeder étale-CAT-Kategorie Γ mit Einheiten X kann man wie folgt einen kanonischen étale-CAT-Kategoriemorphismus $\varphi : \Gamma \rightarrow \Gamma_X$ definieren:

Da die source- und target-Abbildungen $s, r : \Gamma \rightarrow X$ beide étale-CAT sind, existieren zu jedem $\gamma \in \Gamma$ offene Umgebungen $V \subset \Gamma$ von γ , $U_s \subset X$ von $s(\gamma)$ und $U_r \subset X$ von $r(\gamma)$, so daß

$$s|_V : V \xrightarrow{\cong} U_s \quad \text{und} \quad r|_V : V \xrightarrow{\cong} U_r$$

CAT-Homöomorphismen sind. Daher können wir einfach

$$\varphi(\gamma) := \text{Keim von } U_s \xrightarrow{s^{-1}} V \xrightarrow{r} U_r \text{ in } s(\gamma)$$

setzen. Daran sieht man sofort, daß $\varphi : \Gamma \rightarrow \Gamma_X$ wohldefiniert, stetig und étale-CAT ist. Außerdem bildet φ Einheiten wieder auf Einheiten ab. Was etwas mehr Mühe bereitet, ist der Nachweis der Homomorphieeigenschaft von φ . Dafür brauchen wir die

Behauptung: *Die Multiplikation $m : \Gamma \times_X \Gamma \rightarrow \Gamma$ ist eine étale-CAT-Abbildung.*

Beweis: Seien $\gamma', \gamma \in \Gamma$ zwei Elemente, die sich multiplizieren lassen, d.h. $s(\gamma') = r(\gamma)$, so daß also $(\gamma', \gamma) \in \Gamma \times_X \Gamma$ gilt. Wie bei der Definition von φ wählen wir zu γ bzw. γ' offene Umgebungen V, U_s, U_r bzw. V', U'_s, U'_r mit den Eigenschaften wie oben. O.E. kann man durch eventuelles Verkleinern $U_r = U'_s$ annehmen. Nun ist die Einschränkung der Abbildung $s \circ m$ auf $V' \times V \cap \Gamma \times_X \Gamma$ dasselbe wie die Einschränkung von $V' \times V \rightarrow V \xrightarrow{s} U_s$ auf $V' \times V \cap \Gamma \times_X \Gamma$. An der Form der letzteren Abbildung erkennt man, daß U_s im Bild liegt, womit die Offenheit von $s \circ m$ und damit von m erwiesen ist.

Wir kürzen $m(V' \times V \cap \Gamma \times_X \Gamma)$ mit \tilde{V} ab. O.E. seien V und V' so klein gewählt, daß $s(\tilde{V}) = U_s$ und $s|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \xrightarrow{\cong} U_s$ gilt. Daher ist

$$m : V' \times V \cap \Gamma \times_X \Gamma \longrightarrow \tilde{V}$$

genau dann ein CAT-Homöomorphismus, wenn

$$s \circ m|_{V' \times V \cap \Gamma \times_X \Gamma} = V' \times V \cap \Gamma \times_X \Gamma \longrightarrow V$$

einer ist, was man mit einem Graphenargument sieht: $V' \times V \cap \Gamma \times_X \Gamma$ ist nämlich der Graph von $V \xrightarrow{r} U_r = U'_s \xrightarrow{s^{-1}} V'$. △

Mit diesem Beweis haben wir die Homomorphie von φ schon implizit gezeigt, denn

$$V' \times V \cap \Gamma \times_X \Gamma \xrightarrow{\cong} \tilde{V} \xrightarrow{\cong} U_s$$

ist dasselbe wie

$$V' \times V \cap \Gamma \times_X \Gamma \xrightarrow{\cong} V \xrightarrow{\cong} U_s,$$

und analoges gilt für r . Außerdem haben wir die Kommutativität

$$V' \times V \cap \Gamma \times_X \Gamma \xrightarrow{\cong} V \xrightarrow{\cong} U_r = V' \times V \cap \Gamma \times_X \Gamma \xrightarrow{\cong} V' \xrightarrow{\cong} U'_s,$$

die somit die Beziehung

$$V \xrightarrow{\cong} \Gamma \times_X \Gamma \xrightarrow{\cong} V' = V \xrightarrow{\cong} U_r = U'_s \xrightarrow{\cong} V'$$

impliziert. Setzt man alles zusammen, so folgt, daß $\varphi(\gamma')\varphi(\gamma)$ der Keim von $U_s \xrightarrow{\cong} \tilde{V} \xrightarrow{\cong} U'_r$ ist.

3.2 Gruppoid-Strukturen

Die Einführung der Γ -Strukturen für topologische Gruppoide Γ geht auf HAEFLIGER [Haefl-D] zurück. Im folgenden werden wir Γ aber nur als topologische Kategorie voraussetzen, da dies alles ist, was wir tatsächlich benötigen.

Wegen der fehlenden Inversion bei topologischen Kategorien Γ kann man Γ -Strukturen aber nicht analog wie in [Haefl-D] als Kohomologie mit Werten in einer Garbe von topologischen Kategorien definieren. Dies ist auch gar nicht nötig, da solche Γ -Strukturen auf ganz elementare Weise definiert werden können, die für Gruppoid-Strukturen mit der Definition aus [Haefl-D] kompatibel ist.

3.2.1 Wie bei Gruppoiden schreiben wir das Produkt zweier zusammensetzbarer Elemente $u, v \in \Gamma$ einer topologischen Kategorie Γ als uv .

Seien $X \in \mathbf{Top}$ ein topologischer Raum, Γ eine topologische Kategorie, $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X und $\gamma_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \Gamma$ stetige Abbildungen für alle $i, j \in I$ ³⁾. Gilt für alle $i, j, k \in I$ die sogenannte **Kozykelbedingung**

$$\gamma_{ik} = \gamma_{ij}\gamma_{jk}$$

auf $U_i \cap U_j \cap U_k$ (d.h. falls $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$, ist für jedes $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$ das Produkt $\gamma_{ij}(x)\gamma_{jk}(x)$ definiert, und es gilt die Gleichung $\gamma_{ik}(x) = \gamma_{ij}(x)\gamma_{jk}(x)$), so heißt $\gamma := ((U_i)_{i \in I}, (\gamma_{ij})_{i, j \in I}) =: ((U_i), (\gamma_{ij}))$ ein **Γ -Kozykel** von X zur Überdeckung (U_i) . Die Menge⁴⁾ der Γ -Kozykel von X wird mit

$$Z^1(X; \Gamma)$$

bezeichnet. Der Kozykelbedingung zufolge gelten für alle $i, j \in I$ die drei Gleichungen

$$\gamma_{ii} = \gamma_{ii}\gamma_{ii}, \quad \gamma_{ij} = \gamma_{ii}\gamma_{ij} \quad \text{und} \quad \gamma_{ji} = \gamma_{ji}\gamma_{ii}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $r \circ \gamma_{ii} = s \circ \gamma_{ii}$ und aus den beiden anderen, daß sich jedes

(\star) γ_{ii} wie ein neutrales Element bzgl. der Familie (γ_{ij}) verhält.

Deswegen brauchen die γ_{ii} aber keine neutralen Elemente oder gar Einheiten in Γ zu sein! Aber bei topologischen Gruppoiden Γ ist jedes γ_{ii} tatsächlich eine Einheit, da die erste Gleichung wegen der Invertierbarkeit der Gruppoidenlemente nach γ_{ii} aufgelöst werden kann.

Sei $\gamma = (\gamma_{ij})_{i, j \in I}$ ein Γ -Kozykel zur Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ und $\bar{\gamma} = (\bar{\gamma}_{kl})_{k, l \in L}$ ein Γ -Kozykel zur Überdeckung $(V_l)_{l \in L}$. Dann heißen γ und $\bar{\gamma}$ **indexisomorph**, wenn eine Bijektion $\varphi : I \xrightarrow{\cong} L$ mit

$$V_{\varphi(i)} = U_i \quad \text{und} \quad \bar{\gamma}_{\varphi(i)\varphi(j)} = \gamma_{ij} \quad \text{für alle } i, j \in I$$

³⁾Falls $U_i \cap U_j = \emptyset$, sei γ_{ij} die leere Abbildung.

⁴⁾Dies ist nicht ganz korrekt, da die Überdeckungen von X keine Menge bilden, aber man kann sich auf sog. *eigentliche Überdeckungen* (d.h. Teilmengen von PPX) beschränken. Für die Resultate der Arbeit genügen ohnehin Γ -Kozykel zu abzählbaren Überdeckungen.

existiert. „Indexisomorph“ stiftet eine Äquivalenzrelation auf $Z^1(X; \Gamma)$.

Eine andere natürliche Operation stellt das Einschränken von Kozykeln auf Teilüberdeckungen dar: Ist $\gamma = ((U_i)_{i \in I}, (\gamma_{ij}))$ ein Γ -Kozykel zur Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ und $(U_j)_{j \in J}$ mit $J \subset I$ eine Teilüberdeckung von X , dann läßt sich γ auf $(U_j)_{j \in J}$ einschränken. Das eingeschränkte Kozykel schreiben wir einfach als $\gamma|_J$ und bezeichnen es als ein **Unterkozykel** von γ .

Als nächstes definieren wir eine Teilordnung \leq auf $Z^1(X; \Gamma)$ wie folgt: Für je zwei Γ -Kozykel γ^0 und γ^1 gelte

$$\gamma^0 \leq \gamma^1$$

genau dann, wenn γ^0 indexisomorph zu einem Unterkozykel von γ^1 ist.

Es gibt verschiedene, zueinander äquivalente Definitionen der Kohomologierelation von Γ -Kozykeln. Wir wählen folgende allgemeine und *zugleich* befriedigende⁵⁾ Definition: Je zwei Γ -Kozykel γ^0 und γ^1 von X seien **kohomolog**, i.Z.

$$\gamma^0 \sim \gamma^1,$$

genau dann, wenn ein Γ -Kozykel γ von X mit $\gamma^0 \leq \gamma$ und $\gamma^1 \leq \gamma$ existiert.

LEMMA. *Auf einem topologischen Raum X seien gemäß folgender Tabelle*

Γ -Kozykel	Überdeckung
γ	$(U_l)_{l \in L}$
γ^0	$(V_i)_{i \in I}$
γ^1	$(V_j)_{j \in J}$

Γ -Kozykel $\gamma^0, \gamma^1, \gamma$ mit $\gamma \leq \gamma^0, \gamma \leq \gamma^1$ gegeben. Dann existiert ein Γ -Kozykel $\bar{\gamma}$ zur Vereinigungsüberdeckung $(V_i) \dot{\cup} (V_j)$ mit $\bar{\gamma}|_{(V_i)_{i \in I}} = \gamma^0$ und $\bar{\gamma}|_{(V_j)_{j \in J}} = \gamma^1$.

BEWEIS: Da unser gesuchtes Γ -Kozykel $\bar{\gamma}$ auf der Vereinigungsüberdeckung $(V_\mu)_\mu \in M$ mit $M = I \dot{\cup} J$ definiert sein soll, setzen wir als erstes

$$\bar{\gamma}|_I := \gamma^0 \quad \text{und} \quad \bar{\gamma}|_J := \gamma^1.$$

Es steht noch die Definition von $\bar{\gamma}_{ij}$ und $\bar{\gamma}_{ji}$ für alle Paare $(i, j) \in I \times J$ aus.

Da $\gamma \leq \gamma^0, \gamma^1$ gilt, ist γ jeweils indexisomorph zu einem Unterkozykel von γ^0 bzw. γ^1 , so daß wir in den folgenden Definitionen und Rechnungen zur Vereinfachung der Schreibweise die Indexmenge L via gegebener Einbettungen stets als Teilmengen von I bzw. J auffassen.

Sei $x \in V_i \cap V_j$. Wegen der Überdeckungseigenschaft von $(U_l)_{l \in L}$ existiert ein $l \in L$ mit $x \in U_l$. Mit der Festsetzung

$$\bar{\gamma}_{ij}(x) := \gamma_{il}^0(x) \gamma_{lj}^1(x)$$

müssen wir noch dreierlei zeigen:

⁵⁾ Was manchmal auch nicht zusammentrifft.

- $\bar{\gamma}$ ist definiert.
- $\bar{\gamma}$ ist wohldefiniert.
- $\bar{\gamma}_{ij}$ ist stetig.
- $\bar{\gamma}$ genügt der Kozykelbedingung.

Definiert: $r(\gamma_{l_j}^1(x)) = s(\gamma_u(x)) = r(\gamma_u(x)) = s(\gamma_u^0(x))$.

Wohldefiniert: Sei ebenfalls $l' \in L$ mit $x \in U_{l'}$. Auf $V_i \cap V_j \cap U_l \cap U_{l'}$ gilt die folgende Gleichungskette, bei der wir außer $\gamma \leq \gamma^0, \gamma^1$ und der Kozykeleigenschaft von $\gamma, \gamma^0, \gamma^1$ noch die Neutralitätseigenschaft in (\star) ausnutzen.

$$\begin{aligned}
 \gamma_{il'}^0 \gamma_{l'j}^1 &= \gamma_{il'}^0 \gamma_{l'u}^0 \gamma_{ul}^1 \gamma_{lj}^1 \\
 &= \gamma_{il'}^0 \gamma_{ul}^1 \gamma_{l'j}^1 \\
 &= \gamma_{il}^0 \gamma_{ul}^1 \gamma_{lj}^1 \\
 &= (\gamma_{il}^0 \gamma_{ul}^0) \gamma_{lj}^1 \\
 &= \gamma_{il}^0 \gamma_{lj}^1
 \end{aligned}$$

Somit ist $\bar{\gamma}_{ij}$ wohldefiniert für alle i, j .

Stetigkeit: Da $V_i \cap V_j \cap U_l$ eine offene Umgebung von x ist, brauchen wir nur die Stetigkeit der Einschränkung von $\bar{\gamma}_{ij}$ auf $V_i \cap V_j \cap U_l$ zu zeigen. Diese folgt aber aufgrund der Wohldefiniertheit von $\bar{\gamma}$ aus der Stetigkeit von γ^0, γ^1 und der Stetigkeit der Multiplikation in Γ .

Kozykelbedingung: Seien $(i, j, k) \in M \times M \times M$. Es sind einige Fallunterscheidungen hinsichtlich der Verteilung der Indizes i, j, k auf I und J zu treffen. Trivial sind die Fälle, daß i, j, k entweder alle in I oder alle in J liegen, da ja γ^0 und γ^1 die Kozykelbedingung bereits erfüllen. Aus demselben Grund sind aber auch die Fälle erledigt, bei denen zwei aufeinanderfolgende Indizes von i, j, k in I oder J liegen. Lediglich für die Fälle $(i, j, k) \in I \times J \times I$ und $(i, j, k) \in J \times I \times J$ müssen wir etwas nachrechnen, was wir hier exemplarisch für den Fall $(i, j, k) \in I \times J \times I$ tun werden. Eingeschränkt auf $V_i \cap V_j \cap V_k \cap U_l$ erhalten wir folgende Gleichungskette:

$$\begin{aligned}
 \bar{\gamma}_{ij} \bar{\gamma}_{jk} &= (\gamma_{il}^0 \gamma_{lj}^1) (\gamma_{jl}^1 \gamma_{lk}^0) \\
 &= \gamma_{il}^0 \gamma_{lj}^1 \gamma_{lk}^0 \\
 &= \gamma_{il}^0 \gamma_{ul}^1 \gamma_{lk}^0 \\
 &= (\gamma_{il}^0 \gamma_{ul}^0) \gamma_{lk}^0 \\
 &= \gamma_{il}^0 \gamma_{lk}^0 \\
 &= \gamma_{ik}^0 \\
 &= \bar{\gamma}_{ik}
 \end{aligned}$$

Außerdem gilt offensichtlich $\gamma^0, \gamma^1 \leq \bar{\gamma}$. △

FOLGERUNG. „Kohomolog“ ist eine Äquivalenzrelation.

BEWEIS: Nur die Transitivität ist nicht offensichtlich. Es gelte $\gamma' \sim \gamma \sim \gamma''$, so daß Γ -Kozykel γ^0, γ^1 mit $\gamma^0 \geq \gamma', \gamma$ und $\gamma^1 \geq \gamma, \gamma''$ existieren. Daher brauchen wir nur ein Γ -Kozykel $\bar{\gamma}$ mit $\bar{\gamma} \geq \gamma^0, \gamma^1$ zu finden, was nach vorigem Lemma gesichert ist. \triangle

DEFINITION. Da „ \sim “ gemäß Folgerung eine Äquivalenzrelation darstellt, ist

$$H^1(X; \Gamma) := Z^1(X; \Gamma) / \sim$$

definiert. $H^1(X; \Gamma)$ wird auch die Menge der **Γ -Strukturen** von X genannt.

BEISPIEL. Ist γ ein Γ -Kozykel zur Überdeckung (U_i) , so induziert jede Verfeinerungsüberdeckung (V_j) von (U_i) mittels einer Verfeinerungsabbildung ein zu γ kohomologes Γ -Kozykel γ' , weil $\gamma \cup \gamma'$ ein Γ -Kozykel zur Überdeckung $(U_i) \cup (V_j)$ ist. γ und γ' repräsentieren also dieselbe Γ -Struktur.

Für jede topologische Kategorie Γ führen wir nun abzählbare und endliche Γ -Strukturen ein. Ein Γ -Kozykel γ von $X \in \mathbf{Top}$ zur Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ mit abzählbarer Indexmenge I , heiße ein **abzählbares** Γ -Kozykel. Sind zwei abzählbare Γ -Kozykel γ_0, γ_1 kohomolog, dann existiert ein abzählbares Γ -Kozykel γ mit $\gamma_0, \gamma_1 \leq \gamma$, d.h. die Menge

$$H^1(X; \Gamma, \mathbb{N})$$

der **abzählbaren Γ -Strukturen** von X ist definiert.

In analoger Weise definiert man die **endlichen Γ -Strukturen**

$$H^1(X; \Gamma, e)$$

von X .

Statt abzählbarer Γ -Strukturen sprechen wir auch von (Γ, \mathbb{N}) -Strukturen und statt endlicher Γ -Strukturen von (Γ, e) -Strukturen.

In diesem Zusammenhang führen wir für eine feste Menge Λ die (Γ, Λ) -Kozykel ein, das sind Γ -Kozykel zu Überdeckungen $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ mit Indexmenge Λ . Wir bezeichnen die Menge all dieser (Γ, Λ) -Kozykel mit $Z^1(X; \Gamma, \Lambda)$.

Γ -Strukturen verhalten sich funktoriell und das in zweierlei Hinsicht. Sei etwa $f : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ ein stetiger Kategoriemorphismus zwischen topologischen Kategorien Γ und Γ' , dann induziert f durch

$$f_* \gamma := ((U_i), (f \circ \gamma_{ij}))$$

eine Abbildung $f_* : Z^1(X; \Gamma) \rightarrow Z^1(X; \Gamma')$, die zu einer Abbildung

$$f_* : H^1(X; \Gamma) \longrightarrow H^1(X; \Gamma')$$

faktoriisiert, denn $f_* : Z^1(X; \Gamma) \rightarrow Z^1(X; \Gamma')$ respektiert Indexisomorphie und Unterkozykel. Für einen festen topologischen Raum X ist daher

$$H^1(X; \cdot) : \mathbf{Topologische\ Kategorien} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

ein kovarianter Funktor, der durch Einschränkung einen kovarianten Funktor

$$H^1(X; \cdot) : \mathbf{Topologische\ Gruppoide} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

liefert. Die Beschränkung auf CAT-Kategorien und CAT-Gruppoiden liefert entsprechende Funktoren

$$H^1(X; \cdot) : \mathbf{CAT-Kategorien} \longrightarrow \mathbf{Set}, \quad H^1(X; \cdot) : \mathbf{CAT-Gruppoiden} \longrightarrow \mathbf{Set}.$$

Charakteristischer ist aber die Funktorialität in der ersten Komponente. Wir halten dazu eine topologische Kategorie Γ fest. Sei $\gamma = ((V_i)_{i \in I}, (\gamma_{ij})_{i, j \in I})$ ein Γ -Kozykel auf dem topologischen Raum Y und $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung, mit der wir γ zu einem Γ -Kozykel $f^*\gamma$ von X zurückziehen wollen. Mit $U_i := f^{-1}(V_i)$ bekommen wir zunächst eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X und mit

$$f^*\gamma_{ij} := \gamma_{ij} \circ f|_{U_i \cap U_j}$$

das gewünschte Γ -Kozykel $f^*\gamma$ von X zur Überdeckung (U_i) . Damit induziert $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung

$$f^* : Z^1(Y; \Gamma) \longrightarrow Z^1(X; \Gamma),$$

so daß

$$Z^1(\cdot; \Gamma) : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

ein kontravarianter Funktor ist, d.h. $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. Weil f^* Indexisomorphie und Unterkozykel respektiert, faktorisiert $Z^1(\cdot; \Gamma)$ zu einem kontravarianten Funktor

$$H^1(\cdot; \Gamma) : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Set}.$$

Lassen wir beide Komponenten variabel, erhalten wir einen Bifunktor

$$H^1(\cdot; \cdot) : \mathbf{Top} \times \mathbf{Topologische\ Kategorien} \longrightarrow \mathbf{Set},$$

kontravariant in der ersten Komponente und kovariant in der zweiten Komponente. Aus der Bifunktorialität gewinnen wir insbesondere das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^1(X; \Gamma') & \xrightarrow{f^*} & H^1(Y; \Gamma') \\ \downarrow g_* & & \downarrow g_* \\ H^1(X; \Gamma) & \xrightarrow{f^*} & H^1(Y; \Gamma) \end{array}$$

wobei $g : \Gamma' \rightarrow \Gamma$ ein stetiger Kategoriemorphismus und $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung ist. Dadurch ist

$$g_* : H^1(\cdot; \Gamma') \longrightarrow H^1(\cdot; \Gamma)$$

als natürliche Transformation erwiesen.

Entsprechende Aussagen gelten vollkommen analog für die beiden Bifunktoren $H^1(\cdot; \cdot, \mathbb{N})$ und $H^1(\cdot; \cdot, e)$.

Außerdem gibt es die natürlichen Transformationen

$$H^1(\cdot; \Gamma, e) \longrightarrow H^1(\cdot; \Gamma, \mathbb{N}) \longrightarrow H^1(\cdot; \Gamma).$$

Definiert man Parakompaktheit wie in [tom] und berücksichtigt das Lemma auf Seite 142 in [Haefl], bekommt man das

KOROLLAR. (a) Für kompaktes $X \in \mathbf{Top}$ sind die natürlichen Abbildungen

$$H^1(X; \Gamma, e) \xrightarrow{\approx} H^1(X; \Gamma, \mathbb{N}) \xrightarrow{\approx} H^1(X; \Gamma)$$

Bijektionen.

(b) Für parakompaktes $X \in \mathbf{Top}$ ist die natürliche Abbildung

$$H^1(X; \Gamma, \mathbb{N}) \xrightarrow{\approx} H^1(X; \Gamma)$$

eine Bijektion. △

BEMERKUNG. Die Γ -Strukturen für topologische Gruppoide Γ wurden 1958 von HAEFLIGER in seiner Dissertation [Haefl-D] eingeführt. Eines seiner Ziele war die Identifikation von q -kodimensionalen DIFF-Blätterungen auf einer DIFF-Mannigfaltigkeit M mit submersiven Γ_q -Strukturen von M , wobei eine Γ_q -Struktur $s = [\gamma] \in H^1(M, \Gamma_q)$ submersiv genannt werde, wenn $\gamma_{ii} : U_i \rightarrow \mathbb{R}^q$ eine DIFF-Submersion ist für alle i (wohldefiniert). Dadurch wurde ein funktorieller Zugang für Blätterungen geschaffen. Bis jetzt bestand das Problem, submersive Γ_q -Strukturen homotopietheoretisch oder zumindest mit Hilfe klassifizierender Räume zu charakterisieren. Wir lösen in dieser Arbeit das Problem durch einen anderen funktoriellen Zugang zu Blätterungen, der tatsächlich ihre Charakterisierung mittels klassifizierender Abbildungen zulässt.

HAEFLIGER führte zudem die microfibrés feuilletés (vgl. [Haefl-T, S. 187]) ein, die in etwa unseren geblätterten Mikroidbündeln mit Faser \mathbb{R}^q entsprechen. Diese microfibrés feuilletés verwendete er allerdings nicht zur Beschreibung von Blätterungen (z.B. wie bei uns mittels Unterbündeln), sondern benutzte sie dafür, um jede Γ_q -Struktur als Pullback einer Blätterung darzustellen.

Ein anderes Problem ist die fehlende Homotopieinvarianz des Funktors $H^1(\cdot; \Gamma)$. Man löst es einfach „mit Gewalt“, indem man auf $H^1(X; \Gamma)$ die Homotopierelation

$$\sigma_0 \simeq \sigma_1 : \iff \exists \sigma \in H^1(X \times I, \Gamma) \text{ mit } \sigma|_{X_0} = \sigma_0, \sigma|_{X_1} = \sigma_1$$

erklärt und sie dann ausdividiert.

$$\Gamma(X) := H^1(X, \Gamma) / \simeq$$

heißt die Menge der **Γ -Konkordanzklassen** von X . Für $\Gamma = G = \text{TOP}$ -Gruppe und X parakompakt gilt tatsächlich

$$G(X) = H^1(X, G) = \{G\text{-Prinzipalbündel von } X\} / \cong.$$

Für Gruppoide ist die 1. Gleichung i.a. falsch!

Mit Hilfe des Satzes von BROWN oder ganz konkret mit der Milnor-Konstruktion (s. [Haefl-T, Haefl]) bewies HAEFLIGER 1970 den

SATZ. *Zu jedem topologischen Gruppoiden Γ existiert ein klassifizierender Raum $B\Gamma \in \mathbf{Top}$ und eine universelle Γ -Struktur ω auf $B\Gamma$, so daß die natürliche Transformation*

$$[X, B\Gamma] \xrightarrow{\cong} \Gamma(X), \quad [f] \mapsto [f^*(\omega)],$$

ein Isomorphismus ist für alle parakompakten X .

Bemerkenswert in diesem Zusammenhang ist auch der Klassifikationssatz von HAEFLIGER für die integrierbaren Homotopieklassen der Blätterungen auf einer *offenen* DIFF-Mannigfaltigkeit M , der aus seinen Arbeiten und dem Transversalitätssatz von GROMOV-PHILLIPS (s. [Grom, Phil, Haefl, Haefl-T]) folgt und z.B. folgende Gestalt hat:

SATZ. *Sei $\pi : B\Gamma_q \times BGl_{m-q} \rightarrow BGl_m$ die Faserung o.B.d.A. homotopieäquivalent zur Abbildung $B\Gamma_q \times BGl_{m-q} \xrightarrow{\nu \times id} BGl_q \times BGl_{m-q} \xrightarrow{\oplus} BGl_m$ und M^m eine offene DIFF-Mannigfaltigkeit mit der klassifizierenden Abbildung $\tau : M \rightarrow BGl_m$ des Tangentialbündels von M . Dann korrespondieren die integrierbaren Homotopieklassen der q -kodimensionalen DIFF-Blätterungen auf M bijektiv zu den Faserhomotopieklassen der Lifts von τ über π .*

Leider ist es aber wegen der Offenheit von M nicht möglich, von diesen integrierbaren Homotopieklassen auf die Isotopieklassen von Blätterungen zu schließen, umgekehrt aber schon. Nur bei geschlossenen Mannigfaltigkeiten sind integrierbare Homotopieklassen mit Isotopieklassen identisch; aber für diese gibt es keine solche Klassifikation integrierbarer Homotopieklassen, sondern nur eine Klassifikation der Konkordanzklassen von Blätterungen (s. [Thurs]), die wiederum keine *hinreichenden* Rückschlüsse auf ihre Isotopieklassen erlauben...

3.2.2 Für topologische Gruppoide gibt es noch eine andere, äquivalente Definition von Gruppoid-Strukturen, die der Garbenkohomologie entspringt.

Dazu seien Γ ein topologischer Gruppoid, X ein topologischer Raum und $(U_i)_{i \in I}$ eine feste, offene Überdeckung von X .

Zwei Γ -Kozykel γ, γ' von X zur Überdeckung (U_i) seien äquivalent, wenn zu jedem $i \in I$ eine stetige Abbildung $g_i : U_i \rightarrow \Gamma$ existiert mit

$$\gamma'_{ij} = g_i \gamma_{ij} g_j^{-1}$$

auf $U_i \cap U_j$ für alle i, j . Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf allen Γ -Kozykeln von X zur Überdeckung (U_i) . Die Menge dieser Äquivalenzklassen werde mit $H^1((U_i); \Gamma)$ bezeichnet.

Je zwei äquivalente Γ -Kozykel γ, γ' sind auch im Sinne von 3.2.1 kohomolog: Man setzt $I' := I$, $U_{i'} := U_i$ und definiert das Γ -Kozykel $\bar{\gamma}$ zur Überdeckung $(U_{i'}) \dot{\cup} (U_i)$ durch $\bar{\gamma}|_{(U_i)} := \gamma$, $\bar{\gamma}|_{(U_{i'})} := \gamma'$, sowie

$$\bar{\gamma}_{i'j} := g_i \gamma_{ij} \quad \text{und} \quad \bar{\gamma}_{ij'} := \gamma_{ij} g_j^{-1}$$

für die gemischten Indizes. Man rechnet nach (vgl. auch Beweis von Lemma 3.2.1), daß $\bar{\gamma}$ der Kozykelbedingung genügt. Wegen $\gamma, \gamma' \leq \bar{\gamma}$ sind γ und γ' kohomolog.

Wie bei der Garbenkohomologie üblich geht man zu Verfeinerungen von Überdeckungen über, wodurch ein induktives System induziert wird: Sei $(V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Verfeinerung von (U_i) und $r : \Lambda \rightarrow I$ eine Verfeinerungsabbildung für (V_λ) . Dann ist für jedes Γ -Kozykel γ auf X zur Überdeckung (U_i) das verfeinerte Kozykel durch

$$\gamma_{\lambda\mu} := \gamma_{r(\lambda)r(\mu)}|_{V_\lambda \cap V_\mu}$$

definiert. Ist $\tilde{r} : \Lambda \rightarrow I$ eine andere Verfeinerungsabbildung für (V_λ) , dann stiften die

$$g_\lambda := \gamma_{\tilde{r}(\lambda)r(\lambda)}|_{V_\lambda}$$

eine Äquivalenz der beiden durch \tilde{r} und r verfeinerten Γ -Kozykel von γ , wodurch eine Abbildung

$$H^1((U_i); \Gamma) \longrightarrow H^1((V_\lambda); \Gamma)$$

wohldefiniert ist. Diese letzteren Abbildungen definieren bekanntlich ein induktives System⁶⁾, dessen induktiver Limes als $H^1(X; \Gamma)$ geschrieben wird. Die surjektive Abbildung

$$Z^1(X; \Gamma) \longrightarrow H^1(X; \Gamma)$$

definiert also eine Äquivalenzrelation auf $Z^1(X; \Gamma)$, die mit der Kohomologierelation aus 3.2.1 identisch sein soll, was nun bewiesen wird:

Nach Beispiel 3.2.1 ist ein verfeinertes Gruppoid-Kozykel zum ursprünglichen kohomolog, so daß die eben definierte Äquivalenzrelation feiner als Kohomologie ist und wir noch die Umkehrung zeigen müssen:

Seien γ, γ' zwei Γ -Kozykel zu Überdeckungen (U_i) , bzw. $(U_{i'})$ und $\bar{\gamma}$ ein weiteres Γ -Kozykel zur Überdeckung $(U_i) \dot{\cup} (U_{i'})$ mit $\bar{\gamma}|_{(U_i)} = \gamma$ und $\bar{\gamma}|_{(U_{i'})} = \gamma'$. Wir wählen irgendeine gemeinsame Verfeinerung $(V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ von (U_i) und $(U_{i'})$ (z.B. alle Durchschnitte $U_i \cap U_{i'}$) mit zwei Verfeinerungsabbildungen $r : \Lambda \rightarrow I$ bzw. $r' : \Lambda \rightarrow I'$. Nun gilt aber

$$\gamma_{\lambda\mu} = \gamma_{r(\lambda)r(\mu)}|_{V_\lambda \cap V_\mu} = \bar{\gamma}_{r(\lambda)r(\mu)}|_{V_\lambda \cap V_\mu}.$$

Für γ' bekommt man eine analoge Gleichung mit r' . Daher sind die Verfeinerungen von γ und γ' nur zwei Verfeinerungen von $\bar{\gamma}$ bzgl. verschiedener Verfeinerungsabbildungen und somit nach obigen Ausführungen in $H^1((V_\lambda); \Gamma)$ gleich. Dies ist der Beweis von

LEMMA. *Es seien Γ ein topologischer Gruppoid, X ein topologischer Raum und γ, γ' zwei Γ -Kozykel von X . Dann sind γ und γ' genau dann kohomolog (im Sinne von 3.2.1), wenn sich γ und γ' zu Γ -Kozykeln verfeinern lassen, die auf derselben Überdeckung (V_λ) definiert sind und in $H^1((V_\lambda); \Gamma)$ dieselbe Klasse repräsentieren. \triangle*

⁶⁾Zur Vermeidung mengentheoretischer Schwierigkeiten muß man eigentlich mit Mengen von Überdeckungen arbeiten, z.B. mit sog. eigentlichen Überdeckungen, die eine Teilmenge von $P(P(X))$ sind, oder mit über X indizierten Überdeckungen.

3.3 Étale-Kozykel

In diesem Abschnitt bezeichne Γ stets eine étale-CAT-Kategorie mit den source- und range Abbildungen $s, r : \Gamma \rightarrow \Gamma^0$.

3.3.1 LEMMA. *Sei $\gamma = (\gamma_{ij})$ ein Γ -Kozykel von X zur Überdeckung (U_i) und $x \in U_i \cap U_j$. Dann unterscheiden sich je zwei der Γ -Elemente $\gamma_{ii}(x), \gamma_{ij}(x), \gamma_{jj}(x)$ jeweils um einen lokalen CAT-Homöomorphismus von Γ , d.h. beispielsweise existiert ein um $\gamma_{jj}(x)$ definierter lokaler CAT-Homöomorphismus δ von Γ und eine offene Umgebung $U \subset U_i \cap U_j$ von x , so daß $\delta \circ \gamma_{jj}|_U$ definiert ist und $\gamma_{ij}|_U = \delta \circ \gamma_{jj}|_U$ gilt.*

BEWEIS: Weil Γ als étale-CAT-Kategorie vorausgesetzt wird, ist s nahe $\gamma_{ij}(x)$ und nahe $\gamma_{jj}(x)$ eine offene CAT-Einbettung. Daher existieren offene Umgebungen $V \subset \Gamma$ von $\gamma_{jj}(x)$, $\tilde{V} \subset \Gamma$ von $\gamma_{ij}(x)$ und $W \subset \Gamma$ von $s(\gamma_{jj}(x)) = s(\gamma_{ij}(x))$, so daß

$$s|_V : V \xrightarrow{\cong} W, \quad s|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \xrightarrow{\cong} W$$

CAT-Homöomorphismen sind. Folglich ist $\delta := (s|_{\tilde{V}})^{-1} \circ s|_V$ ein lokaler CAT-Homöomorphismus von V nach \tilde{V} .

Wir wählen nun eine offene Umgebung $U \subset U_i \cap U_j$ von x so klein, daß $\gamma_{jj}(U) \subset V$ und $\gamma_{ij}(U) \subset \tilde{V}$ gilt. Beachten wir noch die aus der Kozykelbedingung resultierende Beziehung $s \circ \gamma_{ij} = s \circ \gamma_{jj}|_{U_i \cap U_j}$, erhalten wir die Gleichungskette

$$\begin{aligned} \gamma_{ij}|_U &= (s|_{\tilde{V}}^{-1} \circ s|_V) \circ \gamma_{ij}|_U \\ &= s|_{\tilde{V}}^{-1} \circ (s|_V \circ \gamma_{ij}|_U) \\ &= s|_{\tilde{V}}^{-1} \circ (s \circ \gamma_{ij})|_U \\ &= s|_{\tilde{V}}^{-1} \circ (s \circ \gamma_{jj})|_U \\ &= s|_{\tilde{V}}^{-1} \circ (s|_V \circ \gamma_{jj})|_U \\ &= (s|_{\tilde{V}}^{-1} \circ s|_V) \circ \gamma_{jj}|_U \\ &= \delta \circ \gamma_{jj}|_U. \end{aligned}$$

Bzgl. der Zweierkombination γ_{ij}, γ_{ii} verfährt man analog. Daraus ergibt sich die Aussage auch für die Kombination γ_{ii}, γ_{jj} . △

Für einen CAT-Raum X nennen wir ein Γ -Kozykel γ von X zur Überdeckung (U_i) ein **étale-CAT- Γ -Kozykel** von X , falls $\gamma_{ii} : U_i \rightarrow \Gamma$ für jedes i eine étale-CAT-Abbildung ist, i.e. γ_{ii} ist ein lokaler CAT-Homöomorphismus. Mit obigem Lemma sieht man, daß äquivalenterweise auch eine Teilüberdeckung von (U_i) genügt. Daraus ergibt sich sofort die

FOLGERUNG. *Für je zwei kohomologe Γ -Kozykel γ, γ' gilt:*

$$\gamma \text{ étale-CAT} \iff \gamma' \text{ étale-CAT} \quad \triangle$$

Aufgrund dessen ist die Bezeichnung **étale-CAT- Γ -Struktur** wohldefiniert und gerechtfertigt. Im Fall $\text{CAT} = \text{TOP}$ sprechen wir einfacher von **étale- Γ -Strukturen**.

KOROLLAR. Seien $\varphi : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ ein étale-CAT-Kategoriemorphismus und σ eine étale-CAT- Γ -Struktur auf X . Dann ist auch jeder Lift von σ über φ , d.h. jede $\tilde{\Gamma}$ -Struktur $\tilde{\sigma}$ von X mit $H^1(\varphi)(\tilde{\sigma}) = \sigma$, étale-CAT. \triangle

3.3.2 Seien F ein CAT-Raum, $\Gamma \subset \Gamma_F^{\text{CAT}}$ ein offener Untergruppoid (mit nicht notwendig denselben Einheiten) und γ ein étale-CAT- Γ -Kozykel von X zur Überdeckung (U_i) .

Wegen der étale-Eigenschaft von γ gibt es zu jedem $x \in U_i \cap V_j$ eine offene Umgebung $U \subset U_i \cap V_j$ von x , so daß $\gamma_{ii}|_U$ und $\gamma_{jj}|_U$ offene CAT-Einbettungen nach F sind. Wie man der Definition von Γ_F^{CAT} in Beispiel [7] aus 3.1.1 direkt ansieht, gilt somit die Gleichung

$$(\star) \quad \gamma_{ij}(x) := \text{Keim von } \gamma_{ii} \circ (\gamma_{jj})^{-1} \text{ in } x.$$

Sei X ein CAT-Raum, der lokal CAT-isomorph zu F ist. Dann existieren eine offene Überdeckung (U_i) von X mit CAT-Isomorphismen $\varphi_i : U_i \xrightarrow{\cong} V_i$, $V_i \subset F$ offen, so daß die Kartenwechsel

$$\varphi_i(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}} \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

CAT-Isomorphismen sind. Wie üblich nennen wir $((U_i), (\varphi_i))$ einen **Atlas von X** bzgl. F .

Die Keime dieser Kartenwechsel definieren ein étale-CAT- Γ_F^{CAT} -Kozykel und damit eine étale-CAT- Γ_F^{CAT} -Struktur σ_X von X . Je zwei solche Atlanten von X bzgl. F vereinigen sich zu einem Atlas von X bzgl. F . Weil sich aber Teilatlanten in Unterkozykel übersetzen, ist damit σ_X unabhängig von der Wahl des Atlanten wohldefiniert. Unter geeigneten Bedingungen an X (z.B. X parakompakt, kompakt) ist σ_X eine abzählbare oder endliche Γ_F^{CAT} -Struktur von X . Wir nennen σ_X die **kanonische Γ_F^{CAT} -Struktur** von X .

Man beachte insbesondere den Fall $X = M =$ unberandete CAT-Mannigfaltigkeit M^m und $F = \mathbb{R}^m$.

LEMMA. Ist F lokal CAT-isomorph zu X , dann existiert genau eine étale-CAT- Γ_F^{CAT} -Struktur auf X , nämlich σ_X .

BEWEIS: Nur die Eindeutigkeit muß noch gezeigt werden. Seien dazu γ und γ' zwei étale-CAT- Γ_F^{CAT} -Kozykel von X zu Überdeckungen (U_i) bzw. (V'_j) . Um ein Γ_F^{CAT} -Kozykel $\bar{\gamma}$ zur Überdeckung $(U_i) \dot{\cup} (V'_j)$ gewinnen zu können, das γ und γ' als Unterkozykel enthält, brauchen wir nur die Übergänge $\bar{\gamma}_{ij}(x)$ für $x \in U_i \cap V'_j$ zu definieren:

Wegen der étale-Eigenschaft von γ und γ' gibt es zu jedem $x \in U_i \cap V'_j$ eine offene Umgebung $U \subset U_i \cap V'_j$ von x , so daß $\gamma_{ii}|_U$ und $\gamma'_{jj}|_U$ offene CAT-Einbettungen nach F sind. Daher können wir

$$\bar{\gamma}_{ij}(x) := \text{Keim von } \gamma_{ii} \circ (\gamma'_{jj})^{-1} \text{ in } x$$

setzen. Weil aber nach Gleichung (\star) γ und γ' ebenfalls diese Kartenwechsel-Form haben, gilt somit die Kozykelbedingung für $\bar{\gamma}$ mit $\gamma, \gamma' \leq \bar{\gamma}$, was die Kohomologie von γ und γ' beweist. \triangle

Für jede topologische Kategorie Γ und $X \in \mathbf{Top}$ operieren die topologischen Automorphismen $\text{Aut}X := \text{Aut}^{\text{TOP}}X$ von links auf $H^1(X; \Gamma)$ vermöge

$$g\sigma = (g^{-1})^*\sigma$$

für alle $g \in \text{Aut}X$ (vgl. 3.4.2 und 5.5.1). Liegt Γ als étale-Kategorie vor, respektiert diese Operation étale- Γ -Kozykel.

Allgemein bezeichne

$$\text{Aut}_\sigma X$$

für jede Γ -Struktur σ von X den Stabilisator von $\text{Aut}^{\text{TOP}}X$ in σ .

FOLGERUNG. (a) Sei Γ ein étale-CAT-Gruppoid und σ eine étale-CAT- Γ -Struktur auf dem CAT-Raum X . Dann gilt

$$\text{Aut}_\sigma X \subset \text{Aut}^{\text{CAT}}X.$$

(b) Für jede étale-CAT- Γ_F^{CAT} -Struktur σ von X gilt

$$\text{Aut}_\sigma X = \text{Aut}^{\text{CAT}}X.$$

BEWEIS: Sei $g \in \text{Aut}^{\text{TOP}}X$ mit $g^*\sigma = \sigma$. Für jedes Γ -Kozykel γ von X zur Überdeckung (U_i) , das σ repräsentiert, ist dann $g^*\gamma$ wegen Folgerung 3.3.1 ein étale-CAT- Γ -Kozykel. Seien nun $x \in X$ und i beliebig mit $x \in g^{-1}(U_i)$. Da nach Voraussetzung γ_{ii} nahe $g(x)$ eine étale-CAT-Abbildung ist und $\gamma_{ii} \circ g$ nahe x ebenso, wie gerade gezeigt, so ist auch g nahe x eine étale-CAT-Abbildung, was $g \in \text{Aut}^{\text{CAT}}X$ bedeutet.

Teil (b) ergibt sich sofort aus Teil (a) und der Beziehung $\text{Aut}^{\text{CAT}}X \subset \text{Aut}_\sigma X$, die wegen Lemma 3.3.2 gilt. \triangle

BEMERKUNG. Ohne Beweis sei hier erwähnt, daß für jede TOP-Mannigfaltigkeit M^m die étale- Γ_m^{CAT} -Strukturen auf M bijektiv den CAT-Mannigfaltigkeitsstrukturen von M entsprechen.

3.3.3 In 1.3.4 wurde für jede CAT-Mannigfaltigkeit M^m die Menge

$$\text{Fol}_q^{\text{CAT}}(M)$$

der CAT-Blätterungen auf M der Kodimension q definiert. Lokal ist eine solche Blätterung \mathcal{F} nach der Standardblätterung $\mathcal{F}_{m,q}$ des \mathbb{R}^m modelliert. Daher definieren die Keime der Kartenwechsel von Blätterkarten analog wie in 3.3.2 eine $\Gamma_{\{m,q\}}^{\text{CAT}}$ -Struktur $\sigma_{\mathcal{F}}$ von M ,

die von der Gruppoidinklusion $\Gamma_{\{m,q\}}^{\text{CAT}} \hookrightarrow \Gamma_m^{\text{CAT}}$ auf die kanonische Γ_m^{CAT} -Struktur σ_M abgebildet wird.

Umgekehrt ist jede $\Gamma_{\{m,q\}}^{\text{CAT}}$ -Struktur $\tilde{\sigma}$, die σ_M liftet, wegen Korollar 3.3.1 eine étale-CAT- $\Gamma_{\{m,q\}}^{\text{CAT}}$ -Struktur und liefert in jedem Punkt $x \in M$ einen wohldefinierten CAT-Blätterungskern \mathcal{F}_x in x , so daß $\tilde{\sigma}$ auf diese Weise einen stetigen Schnitt in die Blätterungsgarbe $F_q(M)$ induziert, der gemäß Satz 1.6.2 (4) zu einer CAT-Blätterung $\mathcal{F}(\tilde{\sigma})$ korrespondiert.

Die Gleichung $\mathcal{F}(\sigma_{\mathcal{F}}) = \mathcal{F}$ ist unmittelbar einzusehen. Sei umgekehrt γ ein étale-CAT- $\Gamma_{\{m,q\}}^{\text{CAT}}$ -Kozykel zur Überdeckung (U_i) , das $\tilde{\sigma}$ repräsentiert, und $(V_\lambda, \varphi_\lambda)$ ein Blätteratlas für die CAT-Blätterung $\mathcal{F}(\tilde{\sigma})$. Ganz analog wie im Beweis von Lemma 3.3.2 vereint man diese beiden $\Gamma_{\{m,q\}}^{\text{CAT}}$ -Kozykel mittels

$$\bar{\gamma}_{\lambda i} := \varphi_\lambda \circ \gamma_{ii}^{-1}$$

zu einem $\Gamma_{\{m,q\}}^{\text{CAT}}$ -Kozykel $\bar{\gamma}$ auf der Vereinigungsüberdeckung $(U_i) \dot{\cup} (V_\lambda)$, so daß schließlich auch $\sigma_{\mathcal{F}(\tilde{\sigma})} = \tilde{\sigma}$ gilt, d.h. jene beiden Zuordnungen sind zueinander invers und bzgl. der Operation von $\text{Aut}^{\text{CAT}}(M)$ äquivariant. Somit haben wir den

SATZ. *Es gibt für jede randlose CAT-Mannigfaltigkeit M^m und jede Untergruppe $G \subset \text{Aut}^{\text{CAT}}(M)$ eine kanonische bijektive Korrespondenz*

$$\text{Fol}_q^{\text{CAT}}(M)/G = \left\{ \text{Lifts von } \sigma_M \text{ bzgl. } \Gamma_{\{m,q\}}^{\text{CAT}} \hookrightarrow \Gamma_m^{\text{CAT}} \right\} / G. \quad \triangle$$

3.4 Geblätterte Mikroidbündel = Γ -Strukturen

Es soll jedem *geblätterten* CAT-Mikroidbündel $\xi = (p : E \rightarrow X, s : X \rightarrow E)$ über dem CAT-Raum X mit Faser F (s. 2.5.2), zugehöriger bgzsh-Zerlegung $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\xi)$ und Schnitt $s : X \rightarrow E^7)$ auf funktorielle Weise eine Γ_F -Struktur

$$\sigma(\xi) \in H^1(X; \Gamma_F)$$

zugeordnet werden. Danach ist es dann ein leichtes, dies auf Unterbündel (auch mit globaler Faser) zu übertragen.

Hier eine kleine Skizze der Konstruktion: Man geht natürlich von einem System faser-, schnitt- und blättertreuer lokaler CAT-Trivialisierungen

$$h_i : V_i \xrightarrow{\cong} U_i \times U_{F,i}$$

aus, so daß $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X , $(V_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung des Schnittes $s(X)$ und $(U_{F,i})_{i \in I}$ eine Familie offener Teilmengen von F ist, betrachtet die

⁷⁾ Um Verwechslungen mit den Indizes von Überdeckungen zu vermeiden, ist hier das Symbol s für den Schnitt angebrachter als unsere übliche Bezeichnung i .

Übergangsfunktionen dieses Systems und konstruiert daraus ein Γ_F -Kozykel, welches daher noch von den h_i abhängt. Aber man sieht dann sofort, daß ein anderes System lokaler Trivialisierungen dieselbe Γ_F -Struktur liefert.

3.4.1 Was wir als erstes einsehen müssen, ist die Beziehung

$$p(V_i \cap V_j) = U_i \cap U_j \quad \text{für alle } i, j \in I.$$

Wegen $p(V_i) = U_i$ für alle i hat man sofort $p(V_i \cap V_j) \subset U_i \cap U_j$. Nach Voraussetzung gilt $s(U_i) \subset V_i$ für jedes i und damit auch $s(U_i \cap U_j) \subset V_i \cap V_j$. Die Inklusion $U_i \cap U_j \subset p(V_i \cap V_j)$ folgt nun aus der Gleichung $(p \circ s)(U_i \cap U_j) = U_i \cap U_j$.

Für jedes Paar (i, j) sei

$$W_{ji} := h_i(V_i \cap V_j) \subset U_i \times U_{F,i} =: W_i.$$

Wenn wir die Schnitte der lokalen Trivialisierungen $W_i = U_i \times U_{F,i}$ mit s_i bezeichnen, ist W_{ji} entweder leer oder eine offene Umgebung von $s_i(U_i \cap U_j) \subset (U_i \cap U_j) \times U_{F,i}$. Die Übergangsfunktionen zwischen den W_{ji} sind durch

$$g_{ji} := h_j \circ (h_i|_{V_i \cap V_j})^{-1} : W_{ji} \xrightarrow{\cong} V_i \cap V_j \xrightarrow{\cong} W_{ij}$$

gegeben. Das System $g := ((W_i), (g_{ji}))$ besitzt folgende Eigenschaften:

- (1) $W_{ii} = W_i$ und $g_{ii} = id_{W_i}$ für alle $i \in I$.
- (2) Für alle $i, j, k \in I$ gilt $g_{ji}(W_{ji} \cap W_{ki}) \subset W_{kj}$ und auf $W_{jk} \cap W_{ik}$ gilt die Kozykelbedingung

$$g_{ij} \circ g_{jk} = g_{ik}.$$

Ist $(W_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume mit Unterräumen $W_{ji} \subset W_i$ und stetigen Abbildungen $g_{ji} : W_{ji} \rightarrow W_{ij}$, so daß obige Bedingungen erfüllt sind, nennt man $g := ((W_i), (g_{ji}))$ ein (topologisches) **Klebedatum** (vgl. [tom, Seite 8]). Klebedaten können natürlich nicht nur in der topologischen Kategorie, sondern auch in allen anderen Kategorien definiert werden, die endliche Durchschnitte besitzen. Kozykelbedingung und Eigenschaft (1) eines Klebedatums implizieren automatisch, daß jedes g_{ji} ein Isomorphismus ist.

Unser konkretes Klebedatum ist über die lokalen Trivialisierungen h_i definiert worden, so daß alle g_{ji} nicht nur stetige, sondern sogar blätter-, schnitt- und faserentreue CAT-Abbildungen sind. Hierbei fassen wir die $(U_i \cap U_j) \times U_{F,i}$ und damit die W_{ji} als geblätterte Mikroidbündel über $U_i \cap U_j$ auf (Lemma 2.3.3 gilt lt. 2.5.3 auch im geblätterten Fall).

Inzwischen sind wir soweit, das Γ_F -Kozykel $\gamma = \gamma(\xi)$ konstruieren zu können. Die Überdeckung von X haben wir bereits, nämlich $(U_i)_{i \in I}$, und ebenso die $\gamma_{ii} : U_i \rightarrow F$, indem wir einfach

$$\gamma_{ii} := s_{F,i} : U_i \rightarrow U_{F,i} \subset F$$

setzen, wobei $s_{F,i}$ die Projektion von s_i auf die zweite Komponente $U_{F,i}$ bezeichne, so daß s_i daher die Darstellung $s_i = \text{graph } s_{F,i}$ besitzt. Nun zur Definition der $\gamma_{ji} : U_j \cap U_i \rightarrow \Gamma_F$: Sei

$x \in U_i \cap U_j$ beliebig, aber im folgenden fest. Nach Konstruktion (insbesondere Schnitttreue) gilt

$$g_{ji}(x, \gamma_{ii}(x)) = (x, \gamma_{jj}(x)).$$

Sei $U \subset U_i \cap U_j$ die offene Bogenkomponente⁸⁾ von $U_i \cap U_j$, die x enthält. Ferner wählen wir eine bogenzusammenhängende Umgebung $\tilde{U}_i \subset U$ von x und eine Umgebung $\tilde{U}_{F,i} \subset U_{F,i}$ von $\gamma_{ii}(x)$ mit

$$\tilde{U}_i \times \tilde{U}_{F,i} \subset W_{ji} \quad \text{und} \quad g_{ji} : \tilde{U}_i \times \tilde{U}_{F,i} \longrightarrow W_{ij} \hookrightarrow U \times U_{j,F}$$

offene, faser-, schnitt- und blättertreue CAT-Einbettung. Fassen wir $\tilde{U}_i \times \tilde{U}_{F,i}$ als trivial geblättert Mikroidbündel auf, dann ist dessen Standardzerlegung die Einschränkung der Zerlegung von W_{ji} . Somit ist $g_{ji} : \tilde{U}_i \times \tilde{U}_{F,i} \hookrightarrow U \times U_{j,F}$ ein blätter- und fasertrouer CAT-Morphismus zwischen trivial geblätterten Mikroidbündeln und daher das Lemma 2.6.4 anwendbar, welches die Produktartigkeit von $g_{ji} : \tilde{U}_i \times \tilde{U}_{F,i} \hookrightarrow U \times U_{F,j}$ impliziert. Deswegen können wir auf die Existenz einer offenen CAT-Einbettung $\tilde{\gamma}_{ji} : \tilde{U}_{F,i} \hookrightarrow F$ mit

$$g_{ji} = (\tilde{U}_i \hookrightarrow U) \times \tilde{\gamma}_{ji} : \tilde{U}_i \times \tilde{U}_{F,i} \hookrightarrow U \times U_{F,j}$$

schließen. Dann ist $\tilde{\gamma}_{ji} : \tilde{U}_{F,i} \xrightarrow{\cong} \tilde{\gamma}_{ji}(\tilde{U}_{F,i})$ ein lokaler CAT-Homöomorphismus von F und

$$\gamma_{ji}(x) := \text{Keim von } \tilde{\gamma}_{ji} \text{ in } \gamma_{ii}(x)$$

definiert. Wir müssen uns vor allem über die Wohldefiniertheit von $\gamma_{ji}(x)$ klarwerden: $\tilde{\gamma}_{ji}$ ist eindeutig von $g_{ji} : \tilde{U}_i \times \tilde{U}_{F,i} \hookrightarrow U \times U_{F,j}$ bestimmt, so daß der Keim von g_{ji} in $(x, \gamma_{ii}(x))$ auch den Keim von $\tilde{\gamma}_{ji}$ in $\gamma_{ii}(x)$ eindeutig festlegt.

Die Wohldefiniertheit zieht direkt die Stetigkeit von $x \mapsto \gamma_{ji}(x)$ auf \tilde{U}_i und damit auf ganz $U_i \cap U_j$ nach sich. Die Kozykeleigenschaft von (γ_{ij}) ist natürlich durch die Kozykeleigenschaft von (g_{ij}) bedingt. Also ist $\gamma := ((U_i), (\gamma_{ij}))$ ein Γ_F -Kozykel von X zur Überdeckung (U_i) .

Zwei beliebige Atlanten von ξ kann man vereinigen. So sieht man sofort, daß das zugeordnete Γ_F -Kozykel des Vereinigungsatlanten die Γ_F -Kozykel der beiden Teilatlanten als Unterkozykel enthält. Daher ist die Γ_F -Struktur von ξ kanonisch definiert. Gemäß obiger Konstruktion haben wir also für jeden CAT-Raum X eine kanonische Abbildung

$$\sigma_X : \{\text{geblätterte CAT-Mikroidbündel über } X \text{ mit Faser } F\} \longrightarrow H^1(X; \Gamma_F).$$

LEMMA. $\sigma := \{\sigma_X\}$ ist eine natürliche Transformation.

BEWEIS: Die Natürlichkeit von σ ist zur Gleichung

$$\sigma(f^* \eta) = f^* \sigma(\eta)$$

äquivalent, wobei η ein geblättert CAT-Mikroidbündel über dem CAT-Raum Y mit Faser F ist und $f : X \rightarrow Y$ eine CAT-Abbildung. Da die Γ_F -Struktur von $f^* \eta$ über einen

⁸⁾Wie in Definition 2.5.2 vorausgesetzt muß X lokal bogenzusammenhängend sein.

beliebigen Atlas definiert ist, braucht man sich nur zu vergegenwärtigen, wie Atlanten von η durch f zurückgezogen werden.

Wir starten also mit einem Atlas $\{h_i : V_i \rightarrow U_i \times U_{F,i}\}$ von η und übernehmen alle früheren Bezeichnungen zur Konstruktion des Γ_F -Kozykels $\gamma(\{h_i\})$ und damit der Γ_F -Struktur $\sigma(\eta)$. Wie dem Beweis der Pullbackkonstruktion in 2.5.3 zu entnehmen ist, dürfen wir nicht die induzierte Überdeckung $(U'_i := f^{-1}U_i)$ nehmen, sondern müssen eigentlich mit den Bogenkomponenten der U'_i arbeiten. Um aber das Verständnis nicht unnötig zu erschweren, werden wir erstmal so tun⁹⁾, als ob alle U'_i bogenzusammenhängend seien. Lt. 2.5.3 sind mit $V'_i = f^*E \cap (U'_i \times V_i)$ die lokalen Trivialisierungen $h'_i : V'_i \rightarrow U'_i \times U_{F,i}$ durch

$$(u', v) \mapsto (u', h_i(v)) = (u', f(u'), u_F) \mapsto (u', u_F)$$

gegeben. Der von h'_i transportierte Schnitt ist von der Form

$$u' \mapsto (u', s_{F,i}(fu')) = (u', \gamma_{ii}(fu'))$$

(s. 2.3.3). Bezeichnet $\gamma' := \gamma(\{h'_i\})$ das zugeordnete Γ_F -Kozykel, gilt daher $\gamma'_{ii} = f^*\gamma_{ii}$. Zur Bestimmung der γ'_{ji} schauen wir uns in der Nähe eines festen $(x, \gamma_{ii}(x))$ die entsprechenden Übergangsfunktionen g'_{ji} an, die von der Gestalt

$$(u', u_F) \mapsto (u', fu', u_F) \mapsto (u', g_{ji}(fu', u_F)) = (u', fu', \tilde{\gamma}_{ji}(u_F)) \mapsto (u', \tilde{\gamma}_{ji}(u_F))$$

sind, wobei o.E. g_{ji} bereits produktartig sei. Damit haben wir die eindeutige Produktzerlegung von g'_{ji} bestimmt und erhalten die gewünschte Beziehung

$$\gamma'_{ji}(x) = \text{Keim von } \tilde{\gamma}_{ji} \text{ in } \gamma_{ii}(fx) = \gamma_{ji}(fx) = (f^*\gamma_{ji})(x).$$

Nehmen wir statt (U'_i) die korrekte Verfeinerungsüberdeckung der Bogenkomponenten der U'_i , dann stimmt γ' mit demjenigen Kozykel überein, welches aus $f^*\gamma$ durch Verfeinerung nach Beispiel 3.2.1 resultiert. γ' und $f^*\gamma$ repräsentieren also dieselbe Γ_F -Struktur. \triangle

Für gewöhnliche Faserbündel gibt es bekanntlich den Begriff der Strukturgruppe, die ein grobes Maß für die Komplexität der Übergangsfunktionen darstellt. Daher bezeichnen wir Γ_F analog als **Strukturgruppoiden** eines geblätternen CAT-Mikroidbündels ξ über X mit Faser F . Können die von den Übergangsfunktionen g_{ij} von ξ induzierten γ_{ij} mit Werten in einem topologischen Untergruppoiden $\Gamma \subset \Gamma_F$ ¹⁰⁾ gewählt werden, gebrauchen wir die Sprechweisen, daß ξ den Strukturgruppoiden Γ besitzt, und daß der Strukturgruppoid Γ_F zu Γ reduziert werden kann. In diesem Fall liegt $\sigma(\xi)$ im Bild der von der Inklusion $\Gamma \subset \Gamma_F$ induzierten Abbildung $H^1(X; \Gamma) \rightarrow H^1(X; \Gamma_F)$. Allgemeiner sei Γ irgendein topologischer Gruppoid und $g : \Gamma \rightarrow \Gamma_F$ ein stetiger Gruppoidhomomorphismus. g_* bezeichne die induzierte Abbildung $H^1(X; \Gamma) \rightarrow H^1(X; \Gamma_F)$.

SPRECHWEISE. Der Strukturgruppoid Γ_F von ξ läßt sich zu g (oder einfacher zu Γ , falls g bekannt ist) reduzieren, wenn $\sigma(\xi)$ im Bild von g_* liegt.

⁹⁾Nicht mit o.B.d.A. zu verwechseln!

¹⁰⁾Gemäß unserer Konvention mit denselben Einheiten F .

In Anlehnung an Prinzipalbündel bezeichnen wir für jeden CAT-Raum X mit

$$k_{\Gamma_F}(X)$$

die Menge der Tripelisomorphieklassen von geblätternen Mikroidbündeln über X mit Faser F . In Anbetracht von Folgerung 2.5.2 gilt

$$k_{\Gamma_F}(X) = k_{\Gamma_{F'}}(X)$$

für jeden zu F lokal isomorphen CAT-Raum F' .

Die Bezeichnung $k_{\Gamma_F}(X)$ ist ein Spezialfall der allgemeineren Notation

$$k_g(X) \quad \text{oder kürzer} \quad k_{\Gamma}(X),$$

wobei $g : \Gamma \rightarrow \Gamma_F$ wie vorhin ein stetiger Gruppoidhomomorphismus sei. Dabei ist $k_g(X)$ die Menge der Tripelisomorphieklassen von denjenigen geblätternen Mikroidbündeln über X mit Faser F , deren Strukturgruppoid Γ_F zu g reduziert werden kann. Daß dies überhaupt eine korrekte Definition darstellt, sieht man folgendermaßen:

Weil es nur auf die Keime der Übergangsfunktionen ankommt, besitzt z.B. jede offene Umgebung W des Schnittes eines geblätternen Mikroidbündels ξ dieselbe Γ_F -Struktur wie ξ selbst. Betrachten wir andererseits CAT-Tripelpräisomorphismen, also schnitt-, blätter- und faser-treue CAT-Isomorphismen $\tilde{\varphi} : E \xrightarrow{\cong} \tilde{E}$ zwischen Totalräumen E, \tilde{E} ¹¹⁾ von geblätternen CAT-Mikroidbündeln $\xi, \tilde{\xi}$ über X mit Faser F : Ein Atlas $\{h_i\}$ von $\tilde{\xi}$ induziert den Atlas $\{h_i \circ \tilde{\varphi}\}$ von ξ , woraus sofort die Gleichheit $\sigma(\xi) = \sigma(\tilde{\xi})$ ersichtlich wird. Aus diesen beiden Beobachtungen folgt mit Korollar 2.3.3, daß σ durch die Isomorphieklassen faktorisiert.

Daher ist allgemeiner als $k_{\Gamma_F}(X)$ auch $k_g(X)$ für jeden CAT-Raum X und jeden topologischen Gruppoidhomomorphismus $g : \Gamma \rightarrow \Gamma_F$ definiert. Via Pullback ist wegen 2.3.5 und letztem Diagramm

$$k_g(\cdot) : \mathbf{CAT}\text{-Räume} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

sogar als kontravarianter Funktor gegeben.

Wie bereits erwähnt und benutzt faktorisiert σ durch die Isomorphieklassen. Da nach 2.3.5 Pullback Isomorphieklassen respektiert, hat die Natürlichkeit von σ lt. obigem Lemma auch die Natürlichkeit von

$$\sigma : k_{\Gamma_F}(\cdot) \longrightarrow H^1(\cdot; \Gamma_F)$$

und allgemeiner die Natürlichkeit von

$$\sigma : k_g(\cdot) \longrightarrow H^1(\cdot; \Gamma_F)$$

zur Folge.

FOLGERUNG. *Sei ξ ein geblätternes CAT-Mikroidbündel über dem CAT-Raum X , $\tilde{\xi}$ ein geblätternes CAT-Mikroidbündel über X und $[\varphi, \tilde{\varphi}] : \xi \xrightarrow{\cong} \tilde{\xi}$ ein Isomorphismus (in der Kategorie der geblätternen CAT-Mikroidbündel). Dann gilt*

$$\sigma(\xi) = \varphi^* \sigma(\tilde{\xi}) = \sigma(\varphi^* \tilde{\xi}).$$

¹¹⁾Das Arbeiten o.B.d.A. mit E, \tilde{E} ist wegen Korollar 2.3.3 gerechtfertigt, das wie in 2.5.3 bemerkt auch im geblätternen Fall gilt.

BEWEIS: Die zweite Gleichung resultiert aus der Natürlichkeit von σ , so daß wir nur $\sigma(\xi) = \sigma(\varphi^*\tilde{\xi})$ zu zeigen brauchen. Der lt. 2.5.3 kanonische Mikroidbündelmorphismus $[\varphi, \tilde{\varphi}] : \varphi^*\tilde{\xi} \rightarrow \tilde{\xi}$ ist aufgrund der Funktorialität des Pullbacks ein blättertreuer CAT-Mikroidbündelisomorphismus. Daher ist

$$\psi := [\varphi, \tilde{\varphi}]^{-1} \circ [\varphi, \tilde{\varphi}] = [id_X, \tilde{\varphi}^{-1} \circ \tilde{\varphi}] : \xi \longrightarrow \varphi^*\tilde{\xi}$$

ein blättertreuer CAT-Tripelisomorphismus. \triangle

KOROLLAR. *Ist ξ ein geblättertes CAT-Mikroidbündel über X und $[\varphi, \tilde{\varphi}] : \xi \xrightarrow{\cong} \xi$ ein geblätterter CAT-Mikroidbündelisomorphismus, dann gilt $\varphi^*\sigma(\xi) = \sigma(\xi)$. \triangle*

3.4.2 Für jeden CAT-Raum X und jeden CAT-Raum F operiert $\text{Aut}^{\text{CAT}}(X)$ von links kanonisch auf $k_{\Gamma_F}(X)$ (oder allgemeiner auf $k_{\Gamma}(X)$) mittels

$$\varphi[\xi] := (\varphi^{-1})^*[\xi].$$

Für jeden topologischen Raum X und jeden topologischen Gruppoiden Γ operiert $\text{Aut}^{\text{TOP}}(X)$ von links in analoger Weise kanonisch auf $H^1(X; \Gamma)$ mittels

$$\varphi \cdot s := (\varphi^{-1})^*s.$$

Man rechnet sofort nach, daß

$$\sigma : k_{\Gamma_F}(X) \longrightarrow H^1(X; \Gamma_F)$$

bzgl. dieser beiden Operationen äquivariant ist ($\text{Aut}^{\text{CAT}}(X) \subset \text{Aut}^{\text{TOP}}(X)$).

Wir wollen nun die Standgruppen der Operation von $\text{Aut}^{\text{CAT}}(X)$ auf $k_{\Gamma_F}(X)$ bestimmen. Für jede Isomorphieklasse $[\xi] \in k_{\Gamma_F}(X)$ sei dazu

$$\begin{aligned} \text{Aut}_{[\xi]}(X) := \{ \varphi \in \text{Aut}^{\text{CAT}}(X) \mid \exists \text{geblätterter} \\ \text{CAT-Mikroidbündelisomorphismus } \xi \xrightarrow{\cong} \xi \\ \text{mit Basisabbildung } \varphi \}. \end{aligned}$$

Diese Definition ist unabhängig vom Repräsentanten ξ .

LEMMA. $(\text{Aut}^{\text{CAT}}(X))_{[\xi]} = \text{Aut}_{[\xi]}(X)$.

BEWEIS: Ist φ ein Element der Isotropiegruppe $(\text{Aut}^{\text{CAT}}(X))_{[\xi]}$, dann setzt sich der Tripelisomorphismus $\xi \cong (\varphi^{-1})^*\xi$ mit dem Pullbackisomorphismus $(\varphi^{-1})^*\xi \cong \xi$ zu einem Isomorphismus $\xi \cong \xi$ mit Basisabbildung φ^{-1} zusammen; also gilt $(\text{Aut}(X))_{[\xi]} \subset \text{Aut}_{[\xi]}(X)$.

Sei umgekehrt $\varphi \in \text{Aut}_{[\xi]}(X)$. Wie im Beweis von Folgerung 3.4.1 können wir dann einen Tripelisomorphismus $\xi \cong (\varphi^{-1})^*\xi$ konstruieren. Daher haben wir auch $\text{Aut}_{[\xi]}(X) \subset (\text{Aut}^{\text{CAT}}(X))_{[\xi]}$. \triangle

FOLGERUNG. *Für jeden lokal bogenzusammenhängenden CAT-Raum X und jeden zu X lokal isomorphen CAT-Raum F operiert $\text{Aut}^{\text{CAT}}(X)$ trivial auf $\tau(X)$ und $\sigma(\tau(X)) = \sigma_X$, i.e. $\text{Aut}_{[\tau(X)]}(X) = \text{Aut}^{\text{CAT}}(X)$ etwa im ersten Fall.* \triangle

3.4.3 Der vorige Unterabschnitt soll nun auf Unterbündel übertragen werden.

Sei also $E' \subset E(\xi)$ ein Unterbündel des geblätternen CAT-Mikroïdbündels ξ über dem CAT-Raum X mit Faser F' und Kontrafaser R' , wobei F' und R' ebenfalls CAT-Räume seien. Was lt. 2.5.5 lokal trivialisiert wird, ist nicht E' selbst, sondern das Paar (ξ, E') , so daß erst recht auch ξ lokal trivialisiert wird. Da die entsprechenden Übergangsfunktionen die Faser F' von E' respektieren, liegt die induzierte σ -Struktur nicht nur in $H^1(X; \Gamma_{R' \times F'})$, sondern sogar in $H^1(X; \Gamma_{R', F'})$, wie der Definition des Untergruppoiden $\Gamma_{R', F'} \subset \Gamma_{R' \times F'}$ aus Beispiel [10] in 3.1.1 sofort zu entnehmen ist. Wir schreiben

$$\sigma(\xi, E') \in H^1(X; \Gamma_{R', F'}).$$

Daran sehen wir, daß bereits die Existenz eines Unterbündels von ξ mit Faser F' und Kontrafaser R' eine Reduktion des Strukturgruppoiden $\Gamma_{R' \times F'}$ von ξ zu $\Gamma_{R', F'}$ erzwingt.

In 2.5.3 hatten wir die Kategorie der geblätternen CAT-Mikroïdbündel definiert. Alle dafür erforderlichen Argumente eignen sich auch zur analogen Definition einer Kategorie mit Paaren (ξ, E') als Objekte, wobei E' ein beliebiges Unterbündel eines beliebigen geblätternen CAT-Mikroïdbündels ξ ist. Analog zu vorigem Unterabschnitt sehen wir ein, daß $\sigma(\xi, E')$ nur von der Tripelisomorphieklasse $[\xi, E']$ von (ξ, E') abhängt. Für jeden CAT-Raum X und für CAT-Räume F', R' sei

$$k_{\Gamma_{R', F'}}^2(X)$$

die Menge aller CAT-Tripelisomorphieklassen $[\xi, E']$ von Paaren (ξ, E') , wobei ξ ein geblätternes CAT-Mikroïdbündel über X und E' ein Unterbündel von ξ mit Faser F' und Kontrafaser R' ist. Via Pullback (s. Lemma 2.4.1, 2.5.5, 2.3.5 und Bemerkung 2.5.3) ist

$$k_{\Gamma_{R', F'}}^2(\cdot) : \mathbf{CAT}\text{-Räume} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

ganz analog zu 3.4.1 als kontravarianter Funktor gegeben. Mit der analogen Begründung wie in Unterabschnitt 3.4.1 stellt

$$\sigma : k_{\Gamma_{R', F'}}^2(\cdot) \longrightarrow H^1(\cdot; \Gamma_{R', F'})$$

eine natürliche Transformation dar.

Die Zuordnung $(\xi, E') \mapsto \xi$ definiert eine Abbildung $k_{\Gamma_{R', F'}}^2(X) \rightarrow k_{\Gamma_{R' \times F'}}(X)$, die wegen Lemma 2.4.1 und 2.5.5 sich mit Pullback verträgt und daher eine natürliche Transformation

$$k_{\Gamma_{R', F'}}^2(\cdot) \longrightarrow k_{\Gamma_{R' \times F'}}(\cdot)$$

darstellt. Übergangsfunktionen eines Paares (ξ, E') induzieren Übergangsfunktionen von ξ , deren assoziierte Gruppoid-Struktur man auch dadurch erhält, indem man $\sigma(\xi, E') \in H^1(X; \Gamma_{R', F'})$ mittels der von dem Gruppoidhomomorphismus $\Gamma_{R', F'} \hookrightarrow \Gamma_{R' \times F'}$ induzierten Transformation $H^1(\cdot; \Gamma_{R', F'}) \rightarrow H^1(\cdot; \Gamma_{R' \times F'})$ entsprechend nach $H^1(X; \Gamma_{R' \times F'})$ abbildet. Mit anderen Worten haben wir das folgende, kommutative Diagramm von natürlichen Transformationen:

$$\begin{array}{ccc} k_{\Gamma_{R', F'}}^2(\cdot) & \xrightarrow{\sigma} & H^1(\cdot; \Gamma_{R', F'}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ k_{\Gamma_{R' \times F'}}(\cdot) & \xrightarrow{\sigma} & H^1(\cdot; \Gamma_{R' \times F'}) \end{array}$$

Ist E' ein schnittoffenes Unterbündel von ξ bekommen wir sogar eine Strukturgruppoidreduktion $\sigma(\xi, E') \in H^1(X; \Gamma_{\{R', F'\}})$.

Um die Übergangsfunktionen von einem Unterbündel E' eines geblätterten Mikroidbündels ξ mit *kompakter*, globaler Faser F' und (nicht notwendig kompakter) Kontrafaser R' zu bestimmen, müssen wir ein wenig ins Detail gehen. Seien hierzu V_i und V_j zwei in $E(\xi)$ offene und bzgl. E' vertikale Mengen, die jeweils globale Unterbündeltrivialisierungen

$$h_i : V_i \longrightarrow U_i \times U_{R', i} \times F', \quad h_j : V_j \longrightarrow U_j \times U_{R', j} \times F'$$

besitzen. Dann ist $V_i \cap V_j$ nach Korollar 2.4.3 ebenfalls vertikal bzgl. E' . Wie im vorletzten Unterabschnitt setzen wir

$$W_{ji} := h_i(V_i \cap V_j) \subset U_i \times U_{R', i} \times F' =: W_i, \quad W_{ij} := h_j(V_i \cap V_j) \subset U_j \times U_{R', j} \times F' =: W_j.$$

s_i bezeichne den Schnitt von W_i und s_j den Schnitt von W_j . W_{ji} ist entweder leer oder eine offene Umgebung von $s_i(U_i \cap U_j) \subset (U_i \cap U_j) \times U_{R', i} \times F'$, entsprechendes gilt für W_{ij} .

Sei nun $x \in U_i \cap U_j$ beliebig aber fest und U die Bogenkomponente von $U_i \cap U_j$ mit $x \in U$. Wegen der Vertikalität von $V_i \cap V_j$ ¹²⁾ finden wir mit Hilfe eines Kompaktheitätsargumentes ganz analog wie in Bemerkung 2.4.3 eine produktartige Umgebung

$$\tilde{U}_i \times \tilde{U}_{R', i} \times F' \subset W_{ji}$$

von $h_i(s(x))$ mit $\tilde{U}_i \subset U$, $\tilde{U}_{R', i} \subset U_{R', i}$, $g_{ji}(\tilde{U}_i \times \tilde{U}_{R', i} \times F') \subset U \times U_{R', j} \times F'$, so daß

$$g_{ji} : \tilde{U}_i \times \tilde{U}_{R', i} \times F' \longrightarrow U \times U_{R', j} \times F'$$

eine faser-, schnitt-, blätter- und Unterbündeltreue Übergangsfunktion um x ist. Mit dem Lemma 2.6.4 und der Unterbündeltreue von g_{ji} erhalten wir also ein Kozykel und damit eine Gruppoid-Struktur

$$\sigma(\xi, E') \in H^1(X; \Gamma(R', F')).$$

¹²⁾Nur aus diesem Grunde wurde der Begriff „vertikal“ überhaupt eingeführt.

Können die globalen Unterbündeltrivialisierungen schnittoffen gewählt werden, bekommen wir sogar eine Reduktion zu

$$\sigma(\xi, E') \in H^1(X; \Gamma\{R', F'\}).$$

Auch hier gibt es eine entsprechende Kategorie von Paaren (ξ, E') , wobei zur Definition der Äquivalenzrelation von Paarprämorphismen die offenen Umgebungen W des Schnittes das Unterbündel E' enthalten müssen (s. Lemma 2.4.3). $[\xi, E']$ bezeichne die Tripelisomorphieklasse von (ξ, E') innerhalb dieser Paarkategorie. Dann faktorisiert σ wiederum durch diese Tripelisomorphieklassen. Bezeichnet

$$k_{\Gamma(R', F')}^2(X)$$

die Menge aller Tripelisomorphieklassen $[\xi, E']$, wobei ξ ein geblätternes CAT-Mikroïdbündel über X und E' ein Unterbündel von ξ mit globaler Faser F' und Kontrafaser R' ist, dann gibt es also eine analoge natürliche Transformation

$$\sigma : k_{\Gamma(R', F')}^2(\cdot) \longrightarrow H^1(\cdot; \Gamma(R', F')).$$

Für Unterbündel hatten wir in 2.4.2 den Begriff der Keimäquivalenz definiert. Im Gegensatz dazu erklären wir mittels obigem Begriff der Tripelisomorphie zwei Unterbündel E', E'' eines CAT-Mikroïdbündels ξ über X (geblättern oder nicht) als **tripeläquivalent**, falls $[\xi, E'] = [\xi, E'']$ gilt. Wegen Lemma 2.5.3 wundert es einen nicht, daß bei schnittoffenem ξ im Fall von Unterbündeln Tripeläquivalenz mit Keimäquivalenz übereinstimmt:

LEMMA. *Sei ξ ein schnittoffenes, geblätternes CAT-Mikroïdbündel über X . Dann gilt für je zwei Unterbündel E', E'' von ξ : $[E'] = [E''] \iff [\xi, E'] = [\xi, E'']$.*

BEWEIS: Ist E'' ein zweites Unterbündel von ξ mit $[E''] = [E']$, gilt natürlich $[\xi, E''] = [\xi, E']$. Es gelte umgekehrt lediglich $[\xi, E''] = [\xi, E']$, und $[E''] = [E']$ soll daraus folgen. Sei $[f] \in \text{Aut}(\xi)$ mit $[f] : [\xi, E''] \xrightarrow{\cong} [\xi, E']$. Nach Lemma 2.5.3 gilt aber $[f] = [id]$ und daher $[E''] = [E']$. △

BEMERKUNG. Für Unterbündel von ξ mit globaler Faser ist eine analoge Aussage i.a. falsch. Aber im Spezialfall von Bündelblätternungen ist sie richtig: Seien $\xi = \tau(M)$, E', E'' zwei Unterbündel von $\tau(M)$ mit globaler Faser F und Kontrafaser \mathbb{R}^q , wobei $q = \dim M - \dim F$ und $\mathbf{L}(F; M) \neq \emptyset$. E' und E'' entsprechen dann Bündelblätternungen \mathcal{F}' bzw. \mathcal{F}'' auf M mit Faser F . Gilt $[\tau(M), E'] = [\tau(M), E'']$ im stärkeren Sinne, dann auch im schwächeren Sinne (E', E'' sind natürlich auch Unterbündel von $\tau(M)$ mit Faser F und Kontrafaser \mathbb{R}^q). Nach obigem Lemma und Korollar 2.6.6 folgt daraus $\mathcal{F}' = \mathcal{F}''$ und somit nach Satz 2.6.6 auch $E' = E''$.

Ein beliebiges, geblätternes CAT-Mikroïdbündel ξ über X werde im weiteren festgehalten, wobei $[\xi]$ die CAT-Tripelisomorphieklasse von ξ bezeichnet. Wir führen nun folgende Notationen ein:

$$k_{\Gamma R', F'}[\xi]$$

sei die Menge aller CAT-Tripelisomorphieklassen $[\tilde{\xi}, \tilde{E}']$, wobei $\tilde{\xi}$ ein geblättertes CAT-Mikroidbündel über X und \tilde{E}' ein Unterbündel von $\tilde{\xi}$ mit Faser F' und Kontrafaser R' sei, so daß $[\tilde{\xi}] = [\xi]$ gilt. Oder äquivalent dazu ist $k_{\Gamma_{R',F'}}[\xi]$ die Menge aller Tripeläquivalenzklassen von Unterbündeln von ξ mit Faser F' und Kontrafaser R' . Somit ist $k_{\Gamma_{R',F'}}[\xi]$ eine Teilmenge von $k_{\Gamma_{R',F'}}^2(X)$. Im Unterschied dazu sei

$$k_{\Gamma_{R',F'}}(\xi)$$

die Menge aller Unterbündelkeime $[E']$ von ξ mit Faser F' und Kontrafaser R' . Und schließlich definieren wir

$$k_{\Gamma(R',F')}(\xi)$$

als die Menge aller Unterbündel von ξ mit globaler Faser F' und Kontrafaser R' .

Analog wie in 3.4.1 bezeichnen wir $\Gamma_{R',F'}$ als den Strukturgruppoiden von $[\xi, E']$. Können die Übergangsfunktionen von (ξ, E') sogar in $\Gamma_{\{R',F'\}}$ gewählt werden, liegt eine Reduktion des Strukturgruppoiden zu $\Gamma_{\{R',F'\}}$ vor. So bezeichnet

$$k_{\Gamma_{\{R',F'\}}}[\xi]$$

die Menge aller Tripeläquivalenzklassen der Unterbündel von ξ mit Faser F' , Kontrafaser R' und mit Strukturgruppoid $\Gamma_{\{R',F'\}}$. In diesem analogen Sinne sind auch

$$k_{\Gamma_{\{R',F'\}}}(\xi) \quad \text{und} \quad k_{\Gamma_{\{R',F'\}}}(\xi)$$

definiert. Ferner haben wir kanonische Abbildungen

$$k_{\Gamma_{\{R',F'\}}}(\xi) \rightarrow k_{\Gamma(R',F')}(\xi) \rightarrow k_{\Gamma_{R',F'}}(\xi) \rightarrow k_{\Gamma_{R',F'}}[\xi] \quad \text{und} \quad k_{\Gamma_{\{R',F'\}}}[\xi] \hookrightarrow k_{\Gamma_{R',F'}}[\xi]$$

sowie

$$k_{\Gamma_{\{R',F'\}}}(\xi) \rightarrow k_{\Gamma_{\{R',F'\}}}[\xi].$$

Lemma 3.4.3 impliziert sofort das

KOROLLAR. ξ sei ein schnittoffenes, geblättertes CAT-Mikroidbündel über X . Dann sind die kanonischen Abbildungen

$$k_{\Gamma_{R',F'}}(\xi) \xrightarrow{\cong} k_{\Gamma_{R',F'}}[\xi] \quad \text{und} \quad k_{\Gamma_{\{R',F'\}}}(\xi) \xrightarrow{\cong} k_{\Gamma_{\{R',F'\}}}[\xi]$$

Bijektionen.

\triangle

Wegen Warnung 2.4.3 ist ein analoges Korollar für Unterbündel mit globaler Faser i.a. falsch. Für Bündelblätterungen sind die Abbildungen des Korollars wegen letzter Bemerkung immerhin noch injektiv, aber nicht mehr surjektiv. Aus diesem Grunde können Bündelblätterungen nicht als geliftete Gruppoid-Strukturen interpretiert werden.

Als nächstes befassen wir uns mit den Automorphismenoperationen auf $k_{\Gamma_{R',F'}}[\xi]$. Wir erinnern uns, daß $\text{Aut}(X)$ via Inversion und Pullback auf $k_{\Gamma_F}(X)$ operiert und daß man (s. Lemma 2.4.1, 2.5.5) auch Unterbündel zurückziehen kann. Soll in dieser Weise eine

Untergruppe $G \subset \text{Aut}(X)$ kompatibel auf $k_{\Gamma_{R',F'}}[\xi]$ operieren, muß G dabei die Tripelisomorphieklasse $[\xi]$ des Oberbündels invariant lassen, d.h. G muß auf $[\xi]$ trivial operieren. Folglich ist $\text{Aut}_{[\xi]}(X)$ die maximale Untergruppe von $\text{Aut}(X)$, die via

$$\varphi[\xi, E'] := (\varphi^{-1})^*[\xi, E']$$

von links auf $k_{\Gamma_{R',F'}}[\xi]$ operiert. Andererseits kann man $\text{Aut}_{[\xi]}(X)$ auch ganz konkret auf $k_{\Gamma_{R',F'}}[\xi]$ wie folgt operieren lassen: Per Definition wird jedes $\varphi \in \text{Aut}_{[\xi]}(X)$ von einem Isomorphismus $[\bar{\varphi}] : \xi \xrightarrow{\cong} \xi$ überdeckt. Als Repräsentant sei $\bar{\varphi}$ auf einer offenen Umgebung W des Schnittes von ξ definiert und $\bar{\varphi} : W \hookrightarrow E(\xi)$ eine offene Einbettung. Nun setzen wir

$$\varphi[\xi, E'] := [\xi, \bar{\varphi}(E' \cap W)].$$

Ein anderer Repräsentant $\tilde{\varphi}$ von $[\bar{\varphi}]$ liefert denselben Unterbündelkeim wie $\bar{\varphi}(E' \cap W)$ und damit erst recht dieselbe Tripeläquivalenzklasse. Ist $[\tilde{\psi}] : \xi \rightarrow \xi$ irgendein anderer Isomorphismus, der φ überdeckt, so unterscheiden sich $[\tilde{\psi}]$ und $[\bar{\varphi}]$ um Verkettung mit einem Element aus $\text{Aut}(\xi)$, so daß insgesamt wieder dieselbe Tripeläquivalenzklasse herauskommt und $\varphi[\xi, E']$ somit wohldefiniert ist.

Diese beiden Operationen sind jedoch identisch: Zunächst induziert jedes $\varphi \in \text{Aut}_{[\xi]}(X)$ einen Prä-Paarisomorphismus $(\varphi, \bar{\varphi}) : (\xi, E') \xrightarrow{\cong} ((\varphi^{-1})^*\xi, (\varphi^{-1})^*E')$. Wegen Lemma 3.4.2 existiert ein Tripelisomorphismus $[\tilde{\psi}] : (\varphi^{-1})^*\xi \rightarrow \xi$. O.B.d.A. sei der Repräsentant $\tilde{\psi}$ auf dem ganzen Totalraum definiert. Mit $E'' := \tilde{\psi}((\varphi^{-1})^*E')$ ist $\tilde{\psi} : ((\varphi^{-1})^*\xi, (\varphi^{-1})^*E') \rightarrow (\xi, E'')$ ein Prä-Tripelpaarisomorphismus, so daß folglich

$$\varphi[\xi, E'] = [\xi, E''] \quad \text{und} \quad [\xi, E''] = [(\varphi^{-1})^*\xi, (\varphi^{-1})^*E'] = (\varphi^{-1})^*[\xi, E']$$

gilt. △

Daher wissen wir nun z.B., daß die sehr konkrete Operation aus 2.6.6 von $\text{Aut}(M)$ auf den Unterbündeln von $\tau(M)$ mit jener abstrakten Operation übereinstimmt.

Am besten läßt sich dieser Unterabschnitt in der Aussage zusammenfassen, daß für jedes geblätterte CAT-Mikroïdbündel ξ über X mit Faser $R' \times F'$ die kanonische Abbildung

$$\sigma : k_{\Gamma_{R',F'}}[\xi] \longrightarrow H^1(X; \Gamma_{R',F'})$$

äquivariant bzgl. der Operation von $\text{Aut}_{[\xi]}^{\text{CAT}}(X)$ ist.

3.4.4 Bisher wurde die natürliche Transformation σ nur beschrieben, aber nichts über deren Injektivität oder Surjektivität ausgesagt. Unter geeigneten Bedingungen an den Raum X stellt sich σ sogar als natürlicher Isomorphismus heraus und zwar für alle Varianten von σ . Ohne Beweis (der aber analog zum Beweis von Theorem 1 in [Haefl-D] geführt werden kann) geben wir diesbezüglich den folgenden Satz an:

SATZ. *X sei ein parakompakter, lokal kompakter, lokal bogenzusammenhängender CAT-Raum und F, R', F' lokal separierte CAT-Räume. Dann sind die natürlichen Transformationen*

$$\sigma : k_{\Gamma_F}(X) \xrightarrow{\cong} H^1(X; \Gamma_F), \quad \sigma : k_{\Gamma_{R',F'}}^2(X) \xrightarrow{\cong} H^1(X; \Gamma_{R',F'})$$

äquivariante Bijektionen.

Kapitel 4

Allgemeine projektive Systeme

Daß man zur direkten Liftklassifikation von gelifteten Gruppoid-Strukturen und infolgedessen von Blätterungen klassifizierende „Räume“ als Objekte einer geeigneten Oberkategorie von \mathbf{Top} wählen kann (und muß), ist eine der zentralen Einsichten dieser Arbeit. Aber nicht nur für die direkte, sondern auch für die abstrakte Klassifikation ist jene Oberkategorie als \mathbf{Top}^\star gegeben, das ist die Kategorie der allgemeinen projektiven Systeme topologischer Räume, die in diesem Kapitel definiert und studiert wird.

Seit [E-S] sind induktive und projektive Systeme bekanntlich nichts neues, aber leider sind diese traditionellen projektiven Systeme für unsere Vorhaben noch nicht allgemein genug, so daß wir zu einer allgemeineren Begriffsbildung gezwungen sind.

Vorher definieren wir allgemeine *induktive* Systeme, und zwar aus zwei Gründen: Zum einen sind diese Systeme einfacher als die allgemeinen projektiven Systeme gebaut, und ihr Definitionsprinzip läßt sich traditioneller darstellen, auch deswegen weil der Unterschied zu den herkömmlichen induktiven Systemen relativ gering ist. Das duale Definitionsprinzip liefert uns dann die allgemeinen projektiven Systeme.

Zum anderen sollen nicht nur die Gemeinsamkeiten, sondern vor allem auch die Unterschiede zwischen beiden Systemarten deutlich herausgestellt werden.

Eine andere Neuerung stellt der Begriff der relativen Injektivität dar, die zur Definition der ri-Kategorie \mathbf{Top}^\star_{ri} führt. Aufgrund der Allgemeinheit des Klassifikationsatzes 7.7.2 kann zwar auf die ri-Kategorie \mathbf{Top}^\star_{ri} verzichtet werden, aber andererseits trägt sie zu einer Transparenz der Methodik dieser Arbeit bei. Dies äußert sich z.B. darin, daß der Beweis vom ri-Klassifikationsatz 7.5.2 bis auf wenige Änderungen für Satz 7.7.2 übernommen werden kann. Das ri-Konzept bildet außerdem die ideale Vorbereitung für die variablen zahmen Strukturen aus dem 7. Kapitel.

Der 6. Abschnitt befaßt sich mit bestimmten schönen Eigenschaften projektiver \mathbf{Top} -Systeme, vornehmlich der Additivität, mit denen man sehr angenehm arbeiten kann, und die u.a. zu unserer abstrakten Klassifikation gelifteter étale-PL-Gruppoid-Strukturen beitragen.

Im 7. Abschnitt werden Vorschläge für eine in \mathbf{Top}^\star adäquate Definition von Serre-Faserungen und schwachen Homotopieäquivalenzen unterbreitet.

4.1 Allgemeine induktive Systeme

Unsere Definition allgemeiner induktiver Systeme soll vor allem ihr zugrunde liegendes Prinzip, daß es bei ihnen nämlich nur auf das cofinale Verhalten von Morphismen ankommt, deutlich hervorheben.

4.1.1 \mathcal{A} sei eine beliebige Kategorie, für die wir in diesem Abschnitt schrittweise die induktive Kategorie $\mathcal{A}^\blacktriangleright$ definieren werden.

I sei eine Menge mit einer reflexiven und transitiven Relation \leq , die aber nicht antisymmetrisch zu sein braucht, $(A_i)_{i \in I}$ eine Objektfamilie aus \mathcal{A} , und für alle $i, j \in I$ mit $i \leq j$ sei $\Phi_i^j \subset \text{Mor}(A_i, A_j)$ eine *nichtleere* Morphismenmenge, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (1) $id_{A_i} \in \Phi_i^i$ für alle $i \in I$.
- (2) $\Phi_j^k \circ \Phi_i^j \subset \Phi_i^k$ für alle $i \leq j \leq k$.
- (3) Sind $\varphi \in \Phi_i^j, \psi \in \Phi_i^k$, so existieren ein $l \geq j, k$ und $\varphi_j^l \in \Phi_j^l, \psi_k^l \in \Phi_k^l$, so daß $\varphi_j^l \circ \varphi = \psi_k^l \circ \psi$.

Ein solches System mit diesen Eigenschaften wollen wir mit $A^\blacktriangleright = ((\Phi_i^j), (A_i), I)$ bezeichnen und ein **allgemeines induktives System** aus \mathcal{A} oder auch **induktives \mathcal{A} -System** nennen. Falls die Indexmenge I bekannt ist oder keine Rolle spielt, schreiben wir kürzer $A^\blacktriangleright = ((\Phi_i^j), (A_i))$.

Ist zudem die Indexmenge I nach oben gerichtet, nennen wir A^\blacktriangleright ein **gerichtetes, allgemeines induktives \mathcal{A} -System**.

Die üblichen, aus der Literatur bekannten, induktiven Systeme sind genau die gerichteten, allgemeinen induktiven Systeme mit einelementigen Φ_i^j und teilgeordneter Indexmenge I .

Durch induktive Anwendung der Eigenschaft (3) ergibt sich unmittelbar die

FOLGERUNG. Sei $A^\blacktriangleright = ((\Phi_i^j), (A_i))$ ein allgemeines induktives System aus \mathcal{A} und $i \in I$. Sind $j_1, \dots, j_k \geq i$ Indizes aus I und $\varphi_1 \in \Phi_i^{j_1}, \dots, \varphi_k \in \Phi_i^{j_k}$, dann existieren ein $l \geq j_1, \dots, j_k$ und $\psi_1 \in \Phi_{j_1}^l, \dots, \psi_k \in \Phi_{j_k}^l$ mit

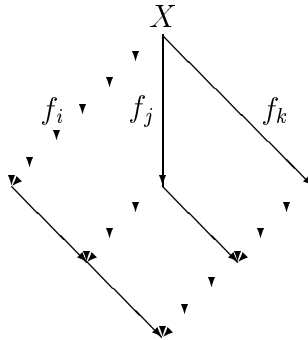
$$\psi_1 \circ \varphi_1 = \dots = \psi_k \circ \varphi_k. \quad \triangle$$

Bis jetzt sind also zunächst nur die Objekte von $\mathcal{A}^\blacktriangleright$ definiert. Die Definition der Morphismen von $\mathcal{A}^\blacktriangleright$ erfolgt zweistufig.

Mit den gleichen Bezeichnungen seien A^\blacktriangleright ein induktives \mathcal{A} -System, X ein Objekt aus \mathcal{A} und $f_i : X \rightarrow A_i, f_j : X \rightarrow A_j$ zwei Morphismen aus \mathcal{A} . Dann seien f_i und f_j **cofinal gleich**, wenn ein $k \geq i, j$ sowie Morphismen $\varphi_i^k \in \Phi_i^k, \varphi_j^k \in \Phi_j^k$ existieren mit

$$\varphi_i^k \circ f_i = \varphi_j^k \circ f_j.$$

Z.B. sind stets f_i und $\varphi \circ f_i$ cofinal gleich für alle $\varphi \in \Phi_i^j$ und $j \geq i$. Wie aus dem Diagramm



direkt abgelesen werden kann, stellt „cofinal gleich“ eine Äquivalenzrelation für solche Abbildungen $\{f : X \rightarrow A_i \text{ } \mathcal{A}\text{-Morphismus} \mid i \in I\}$ dar, die sich mit Verkettung verträgt: Für jeden \mathcal{A} -Morphismus $g : Y \rightarrow X$ und für je zwei cofinal gleiche \mathcal{A} -Morphismen $f_i : X \rightarrow A_i, f_j : X \rightarrow A_j$ sind auch $f_i \circ g : Y \rightarrow X \rightarrow A_i$ und $f_j \circ g : Y \rightarrow X \rightarrow A_j$ cofinal gleich.

Ein einfacher \mathcal{A}^\rightarrow -Morphismus

$$f : X \longrightarrow A^\rightarrow$$

sei per Definition eine Äquivalenzklasse aus $\{f : X \rightarrow A_i \text{ } \mathcal{A}\text{-Morphismus} \mid i \in I\}$ bzgl. der Äquivalenzrelation ‘cofinal gleich’. Die Verkettung von einem \mathcal{A} -Morphismus $g : Y \rightarrow X$ mit $f : X \rightarrow A^\rightarrow$ ergibt einen wohldefinierten, einfachen \mathcal{A}^\rightarrow -Morphismus

$$f \circ g : Y \longrightarrow A^\rightarrow.$$

BEISPIEL. Jedes Objekt A_i eines allgemeinen induktiven Systems $A^\rightarrow = ((\Phi_i^j), (A_i))$ induziert via $id_{A_i} : A_i \rightarrow A_i$ den kanonischen, einfachen \mathcal{A}^\rightarrow -Morphismus $\alpha_i : A_i \rightarrow A^\rightarrow$. Dabei gilt für jedes $\varphi \in \Phi_i^j$ mit $j \geq i$ die Verträglichkeitsbedingung

$$\alpha_j \circ \varphi = \alpha_i.$$

Seien A^\rightarrow und A'^\rightarrow zwei induktive \mathcal{A} -Systeme mit ihren jeweiligen Indexmengen I bzw. I' . Ein \mathcal{A}^\rightarrow -Morphismus $f^\rightarrow : A^\rightarrow \rightarrow A'^\rightarrow$ sei eine Familie $f^\rightarrow = (f_i)_{i \in I}$ kompatibler, einfacher \mathcal{A}^\rightarrow -Morphismen $f_i : A_i \rightarrow A'^\rightarrow$, d.h.

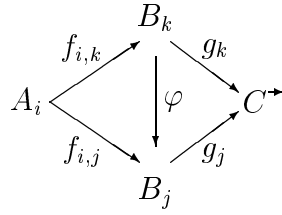
$$f_j \circ \varphi_i^j = f_i$$

für alle $\varphi_i^j \in \Phi_i^j$ mit $j \geq i$. f_i nennen wir die **i-te Komponente** von f^\rightarrow . Jeder Repräsentant eines f_i werde als **Repräsentant** von f^\rightarrow bezeichnet.

Als nächstes ist die Verkettung von \mathcal{A}^\rightarrow -Morphismen zu definieren und ihre Assoziativität zu zeigen. $A^\rightarrow, B^\rightarrow, C^\rightarrow$ seien induktive \mathcal{A} -Systeme mit jeweiligen Indexmengen I, J, L und $f^\rightarrow : A^\rightarrow \rightarrow B^\rightarrow, g^\rightarrow : B^\rightarrow \rightarrow C^\rightarrow$ zwei \mathcal{A}^\rightarrow -Morphismen. Wir wählen irgendeinen Repräsentanten $f_{i,j} : A_i \rightarrow B_j$ von f^\rightarrow und zeigen, daß

$$g_j \circ f_{i,j} : A_i \longrightarrow B_j \longrightarrow C^\rightarrow$$

eine wohldefinierte Komponente von $g^\rightarrow \circ f^\rightarrow$ ist: Sei $k \leq j$ und $\varphi \in \Phi_j^k$ mit $f_{i,j} = \varphi \circ f_{i,k}$. Dann ist die Gleichheit $g_j \circ f_{i,j} = g_k \circ f_{i,k}$ unmittelbar aus dem kommutativen Diagramm



abzulesen. Hinsichtlich der Assoziativität der Verkettung brauchen wir nur festzuhalten, daß diese letztendlich über die assoziative Verkettung von Repräsentanten aus \mathcal{A} , auch bei einfachen \mathcal{A}^\rightarrow -Morphismen, gegeben ist. Damit ist die für jede Kategorie \mathcal{A} die zugehörige induktive Kategorie \mathcal{A}^\rightarrow definiert.

BEZEICHNUNG. Um die Analogie zu stetigen Abbildungen hervorzuheben, nennen wir einen \mathbf{Top}^\rightarrow -Morphismus $f^\rightarrow : X^\rightarrow \rightarrow Y^\rightarrow$ auch schlichter eine **stetige Abbildung**.

Natürlich kann jedes Objekt $A \in \mathcal{A}$ auch als induktives \mathcal{A} -System aufgefaßt werden, indem man $I = \{A\}$ und $\Phi_A^A = \{id_A\}$ wählt. Auf diese Weise bekommen wir einen kovarianten Funktor

$$i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^\rightarrow.$$

LEMMA. i ist eine volle Einbettung von \mathcal{A} in \mathcal{A}^\rightarrow . △

4.1.2 Eine Teilmenge $J \subset I$ einer teilgeordneten Menge I heiße **cofinal** in I , wenn zu jedem $i \in I$ ein $j \in J$ mit $j \geq i$ existiert. Ist I nach oben gerichtet, dann auch J mit der vererbten Ordnung.

Ist $A^\rightarrow = ((\Phi_i^j), (A_i), I)$ ein induktives \mathcal{A} -System und $J \subset I$ cofinal, kann das System A^\rightarrow auf J eingeschränkt werden, i.e.

$$A^\rightarrow|_J := ((\Phi_i^j)_{i,j \in J}, (A_i)_{i \in J}, J).$$

Die Bedingungen (1)–(3) aus 4.1.1 sind problemlos zu verifizieren, und die id_{A_j} induzieren den Morphismus $A^\rightarrow|_J \rightarrow A^\rightarrow$.

LEMMA. $A^\rightarrow|_J \rightarrow A^\rightarrow$ ist ein \mathcal{A}^\rightarrow -Isomorphismus.

BEWEIS: Wir müssen eine Inverse $f^\rightarrow : A^\rightarrow \rightarrow A^\rightarrow|_J$ konstruieren: Da J cofinal in I ist, existiert zu jedem $i \in I$ ein $j \in J$ mit $j \geq i$ und wegen $\Phi_i^j \neq \emptyset$ ein $\varphi_i^j \in \Phi_i^j$. Wir setzen $f_i := [\varphi_i^j]$, was wohldefiniert ist, und $f^\rightarrow := (f_i)$. Nach Konstruktion ist f^\rightarrow eine Inverse von $A^\rightarrow|_J \rightarrow A^\rightarrow$. △

Dieses Lemma ist aus folgendem Grund von Nutzen: Manchmal ist ein \mathcal{A}^\rightarrow -Morphismus natürlicherweise nicht auf A^\rightarrow gegeben, sondern nur auf einer cofinalen Einschränkung $A^\rightarrow|_J$ von A^\rightarrow . Dieser induziert dann aber auf eindeutige Weise automatisch einen auf A^\rightarrow definierten Morphismus. Oder etwas salopper ausgedrückt: Alle Objekte und Morphismen von (und nach) \mathcal{A}^\rightarrow sind cofinal determiniert.

Für \mathcal{A}^\star -Morphismen können wir den Begriff der Monomorphie definieren: $f : X \rightarrow A^\star$ sei zunächst ein einfacher \mathcal{A}^\star -Morphismus. f heisse **monomorph** und somit ein **Monomorphismus**, falls f einen monomorphen Repräsentanten besitzt. Allgemeiner werde ein \mathcal{A}^\star -Morphismus $f^\star : A^\star \rightarrow B^\star$ mit den Komponenten $(f_i : A_i \rightarrow B^\star)$ ein Monomorphismus genannt, wenn jedes f_i ein Monomorphismus ist.

Speziell für die Kategorien \mathbf{Set}^\star und \mathbf{Top}^\star nennen wir monomorphe Morphismen stattdessen besser **injektiv**.

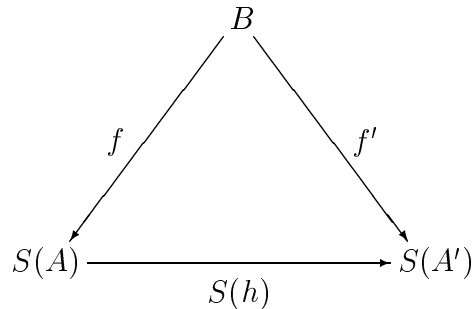
Für \mathbf{Top}^\star gibt es noch den schwächeren Begriff der **kompakten Injektivität**: Ein \mathbf{Top}^\star -Morphismus $f^\star : X^\star \rightarrow Y^\star$ werde kompakt injektiv genannt, wenn zu jeder stetigen Abbildung $g^\star : K \rightarrow X^\star$, wobei $K \in \mathbf{Top}$ kompakt, Repräsentanten $g : K \rightarrow X_i$ von g^\star und $f : X_i \rightarrow Y_j$ von f^\star existieren, so daß

$$f|_{\text{Bild } g} : \text{Bild } g \hookrightarrow Y_j$$

eine topologische Einbettung ist.

4.1.3 Nach der Definition der induktiven Kategorie \mathcal{A}^\star betrachten wir den Begriff des induktiven Limes aus folgender allgemeinen Perspektive:

Seien \mathcal{A}, \mathcal{B} beliebige Kategorien und $S : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein kovarianter Funktor. Für ein Objekt $B \in \mathcal{B}$ bezeichne $(B \downarrow S)$ wie auf Seite 48 in [McL] die Kategorie der Objekte S -unter B , i.e. die Objekte sind alle Paare (f, A) mit $A \in \mathcal{A}$ Objekt von \mathcal{A} und $f : B \rightarrow S(A)$ Morphismus aus \mathcal{B} , und die Morphismen sind alle \mathcal{A} -Morphismen $h : A \rightarrow A'$, so daß $f' = S(h) \circ f$ gilt (siehe Diagramm).



Existiert in der Kategorie $(B \downarrow S)$ ein initiales Objekt, ist dieses bis auf Isomorphie eindeutig. Insbesondere existiert dann ein modulo \mathcal{A} -Isomorphie eindeutiges Objekt

$$S\text{-}\varinjlim B \in \mathcal{A}$$

und ein \mathcal{B} -Morphismus $f : B \rightarrow S(S\text{-}\varinjlim B)$, so daß zu jedem Paar (f', A') genau ein \mathcal{A} -Morphismus $h : S\text{-}\varinjlim B \rightarrow A'$ mit $f' = S(h) \circ f$ existiert.

Wie die Schreibweise bereits andeutet, wollen wir $S\text{-}\varinjlim B$ den **induktiven S-Limes** von B nennen. Diese Bezeichnung ist insofern gerechtfertigt, als im Falle der vollen Kategorieeinbettung

$$S = i : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}^\star$$

aus Lemma 4.1.1 $i\text{-}\varinjlim A^\star$ tatsächlich mit dem traditionellen induktiven Limes $\varinjlim A_i$ von $A^\star = ((\varphi_i^j), (A_i))$ ¹⁾ übereinstimmt, wenn er überhaupt existiert. Zur Vereinfachung setzen wir im Falle der Existenz

$$\lim A^\star := i\text{-}\varinjlim A^\star$$

für jedes induktive \mathcal{A} -System A^\star und nennen $\lim A^\star$ den **induktiven Limes** von A^\star . Für ein Objekt $A \in \mathcal{A}$ gilt selbstverständlich stets $\lim A = A$.

Falls für jedes induktive \mathcal{A} -System A^\star der induktive Limes $\lim A^\star$ existiert, sagen wir, daß die Kategorie \mathcal{A} induktive Limites besitzt. So besitzen z.B. alle Kategorien **Set**, **Top**, **Top₀**, **Grp**, **Grpd**, **Ab**, **Cat** induktive Limites. Wir führen den Beweis exemplarisch für **Cat**:

$C^\star = ((\Phi_i^j), (C_i))$ sei ein allgemeines induktives System aus **Cat**. Indem wie üblich jedes Objekt von C_i mit seinem identischen Morphismus identifiziert wird, fassen wir C_i als eine Menge von Morphismen auf. Wir bilden innerhalb **Set** zunächst die disjunkte Vereinigung

$$\dot{\bigcup} C_i$$

und dividieren folgende Äquivalenzrelation aus: $f_i \sim f_j$ für $f_i \in C_i, f_j \in C_j$ genau dann, wenn ein $k \geq i, j$ sowie $\varphi_i^k \in \Phi_i^k, \varphi_j^k \in \Phi_j^k$ existieren mit

$$\varphi_i^k(f_i) = \varphi_j^k(f_j).$$

Damit ist $\lim C^\star$ zunächst als Menge von Äquivalenzklassen definiert. Ein Paar zweier solcher Äquivalenzklassen sei zusammensetzbar, wenn es ein Paar zusammensetzbarer Repräsentanten aus den jeweiligen Äquivalenzklassen gibt. Man prüft leicht nach, daß auf diese Weise die Komposition wohldefiniert ist, und $\lim C^\star$ den objektfreien Axiomen einer Kategorie in I.1. von [McL] genügt. Überdies bilden die **Cat**-Morphismen $C_i \rightarrow \lim C^\star$ per Konstruktion die Komponenten eines **Cat**⁺-Morphismus $F : C^\star \rightarrow \lim C^\star$, der die universelle Limeseigenschaft besitzt.

Wenn \mathcal{A} induktive Limites besitzt, kann man sich anhand des nächsten Diagramms

$$\begin{array}{ccc} A^\star & \xrightarrow{f^\star} & A'^\star \\ \downarrow & & \downarrow \\ \lim A^\star & \xrightarrow{\lim f^\star} & \lim A'^\star \end{array}$$

leicht davon überzeugen, daß sich der Übergang von induktiven \mathcal{A} -Systemen zu ihren induktiven Limiten als kovarianter Funktor

$$\lim : \mathcal{A}^\star \longrightarrow \mathcal{A}$$

auffassen läßt, und die Morphismen $A^\star \longrightarrow \lim A^\star$ als natürliche Transformation $id \longrightarrow \lim$.

¹⁾Hierbei sind alle $\Phi_i^j = \{\varphi_i^j\}$ einelementig.

FOLGERUNG. Die Kategorie \mathcal{A} besitze induktive Limes. Es sei folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A^\rightarrow & \xrightarrow{f^\rightarrow} & B^\rightarrow \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

in \mathcal{A}^\rightarrow gegeben, wobei $f : A \rightarrow B$ ein Morphismus aus \mathcal{A} sei. Dann ist auch das durch Limesbildung induzierte Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \lim A^\rightarrow & \xrightarrow{\lim f^\rightarrow} & \lim B^\rightarrow \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

kommutativ.

BEWEIS: Folgt sofort aus der Funktorialität von \lim . △

4.1.4 Jeder kovariante Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ zwischen beliebigen Kategorien induziert, wie wir gleich sehen werden, kanonisch einen kovarianten Funktor

$$F^\rightarrow : \mathcal{A}^\rightarrow \longrightarrow \mathcal{B}^\rightarrow$$

mit $F^\rightarrow(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ und $F^\rightarrow \circ i = F$.

Denn zunächst transformiert F jedes induktive \mathcal{A} -System offensichtlich in ein induktives \mathcal{B} -System, und F respektiert außerdem cofinal gleiche Morphismen. Daher ist F^\rightarrow für einfache \mathcal{A}^\rightarrow -Morphismen und wegen Verkettungsverträglichkeit schließlich für alle \mathcal{A}^\rightarrow -Morphismen definiert.

Besitzt \mathcal{B} zudem induktive Limes, liefert die Verkettung von F^\rightarrow mit dem Limesfunktor $\lim : \mathcal{B}^\rightarrow \rightarrow \mathcal{B}$ einen kovarianten Funktor

$$F := \lim \circ F^\rightarrow : \mathcal{A}^\rightarrow \longrightarrow \mathcal{B},$$

den wir, wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, wieder mit F bezeichnen, ansonsten mit $\lim F^\rightarrow$. In diesem Sinne ist auch die Schreibweise

$$F(A^\rightarrow)$$

für jedes induktive \mathcal{A} -System A^\rightarrow zu verstehen.

BEISPIELE

[1] Der Homotopiegruppenfunktork

$$\pi_q : \mathbf{Top}_0 \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

ist für jedes $q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ definiert und induziert somit Funktoren

$$\pi_q^\star : \mathbf{Top}_0^\star \longrightarrow \mathbf{Ab}^\star, \quad \pi_q : \mathbf{Top}_0^\star \longrightarrow \mathbf{Ab}.$$

Ist (X^\star, x_0^\star) ein induktives System punktierter topologischer Räume mit „Basispunkt“ x_0^\star , nennen wir daher

$$\pi_q(X^\star, x_0^\star)$$

die q -te Homotopiegruppe von X^\star in x_0^\star . Für $q = 0, 1$ sind entsprechend $\pi_0^\star : \mathbf{Top}_0^\star \longrightarrow \mathbf{Set}_0^\star$ und $\pi_0 : \mathbf{Top}_0^\star \longrightarrow \mathbf{Set}_0$ bzw. $\pi_1^\star : \mathbf{Top}_0^\star \longrightarrow \mathbf{Grp}^\star$ und $\pi_1 : \mathbf{Top}_0^\star \longrightarrow \mathbf{Grp}$ definiert.

[2] Für jeden kommutativen, unitalen Ring R und jedes $n \in \mathbb{N}_0$ induziert der n -te Homologiefunktork

$$H_n(\cdot; R) : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Mod}_R$$

mit Koeffizienten in R Funktoren

$$H_n^\star(\cdot; R) : \mathbf{Top}^\star \longrightarrow \mathbf{Mod}_R^\star \quad \text{und} \quad \lim H_n^\star(\cdot; R) : \mathbf{Top}^\star \longrightarrow \mathbf{Mod}_R.$$

[3] Allgemein sei auf einer Kategorie \mathcal{A} ein kategorieller Homotopiebegriff²⁾ \simeq definiert, der somit die zu \mathcal{A} zugehörige Homotopiekategorie $\mathbf{Ho}\text{-}\mathcal{A}$ und den kovarianten Funktork

$$\mathbf{Ho} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{Ho}\text{-}\mathcal{A}$$

induziert. Dieser induziert wiederum den Funktork

$$\mathbf{Ho}^\star : \mathcal{A}^\star \longrightarrow (\mathbf{Ho}\text{-}\mathcal{A})^\star,$$

der schließlich durch

$$f_0^\star \simeq f_1^\star : \iff \mathbf{Ho}^\star(f_0)^\star = \mathbf{Ho}^\star(f_1)^\star$$

einen kategoriellen Homotopiebegriff auf \mathcal{A}^\star definiert mit zugehöriger Homotopiekategorie $\mathbf{Ho}\text{-}(\mathcal{A}^\star)$.

4.1.5 Unser Ziel ist eine konkretere Beschreibung der Homotopie auf \mathcal{A} aus dem vorigen Beispiel. Seien dafür $f^\star, f'^\star : X \rightarrow B^\star$ zwei einfache \mathcal{A}^\star -Morphismen mit $f^\star \simeq f'^\star$ in \mathcal{A}^\star . Wie man sich überlegen kann, ist dies aber äquivalent dazu, daß es geeignete Repräsentanten $f : X \rightarrow B_i$ von f^\star und $f' : X \rightarrow B_i$ von f'^\star gibt mit $f \simeq f'$ in \mathcal{A} .

²⁾Das ist eine auf jeder Morphismenmenge $\mathbf{Mor}(A, B)$ gegebene Äquivalenzrelation, die verträglich gegenüber Verkettung ist.

Daher sind zwei \mathcal{A}^\rightarrow -Morphismen $f^\rightarrow : A^\rightarrow \rightarrow B^\rightarrow$ und $g^\rightarrow : A^\rightarrow \rightarrow B^\rightarrow$ genau dann homotop, wenn jede Komponente f_i von f^\rightarrow zu der Komponente g_i von g^\rightarrow im obigen konkreten Sinne homotop ist.

Nimmt man für **Top** den Standardhomotopiebegriff, so bezeichnen wir für je zwei induktive **Top**-Systeme $X^\rightarrow, Y^\rightarrow$ mit

$$[X^\rightarrow, Y^\rightarrow]$$

die Menge der Homotopieklassen aller stetigen Abbildungen $X^\rightarrow \rightarrow Y^\rightarrow$.

Wie in **Top** steht $[f^\rightarrow]$ für die Homotopieklasse einer stetigen Abbildung $f^\rightarrow : X^\rightarrow \rightarrow Y^\rightarrow$.

In einer Formulierung mittels Homotopieabbildungen sind zwei einfache **Top** $^\rightarrow$ -Morphismen $f_0, f_1 : X \rightarrow Y^\rightarrow$ mit $X \in \mathbf{Top}$ genau dann homotop, wenn es eine stetige Abbildung $H : X \times I \rightarrow Y^\rightarrow$ gibt mit

$$H|_{X \times 0} = f_0 \quad \text{und} \quad H|_{X \times 1} = f_1.$$

Ferner sind zwei **Top** $^\rightarrow$ -Morphismen $f^\rightarrow : X^\rightarrow \rightarrow Y^\rightarrow$ und $g^\rightarrow : X^\rightarrow \rightarrow Y^\rightarrow$ mit jeweiligen Komponenten (f_i) bzw. (g_i) genau dann homotop, wenn f_i und g_i im letzteren Sinne einfacher **Top** $^\rightarrow$ -Morphismen homotop sind für alle i .

4.1.6 Sobald der Begriff der stetigen Abbildung in **Top** $^\rightarrow$ verträglich mit **Top** geklärt ist, kann man ganz analog wie in **Top** einen Homologiefunktor

$$H_n : \mathbf{Top}^\rightarrow \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

definieren. Ohne weitere Angabe sei hierbei der Standardkoeffizientenring stets \mathbb{Z} .

Für jedes Objekt X^\rightarrow aus **Top** $^\rightarrow$ sei

$$S(X^\rightarrow) := \{ \sigma : \nabla(n) \rightarrow X^\rightarrow \text{ stetig} \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$$

der ss. Komplex aller singulären Simplizes von X^\rightarrow (vgl. [La]). $\nabla(n)$ bezeichnet hierbei das affine, n -dimensionale Standardsimplex. Wie in **Top** ist

$$S : \mathbf{Top}^\rightarrow \longrightarrow \text{ss. Komplexe}$$

ein kovarianter Funktor. Auf der Kategorie der ss. Komplexe ist Homologie mit beliebigem Koeffizientenbereich R definiert, so daß wir

$$H_n(X^\rightarrow; R) := H_n(S(X^\rightarrow); R)$$

setzen. Für $R = \mathbb{Z}$ schreiben wir $H_n(X^\rightarrow) := H_n(X^\rightarrow; \mathbb{Z})$.

Andererseits gibt es nach Beispiel [2] aus 4.1.4 einen Homologiefunktor $\lim H_n^\rightarrow(\cdot) : \mathbf{Top}^\rightarrow \longrightarrow \mathbf{Mod}_R$, so daß sich natürlich sofort die Frage nach der Existenz einer natürlichen Isomorphie zwischen diesen beiden Funktoren aufdrängt. Zunächst induzieren die Komponentenmorphismen $X_i \rightarrow X^\rightarrow$ eine natürliche Transformation

$$\lim H_n^\rightarrow(X^\rightarrow) \longrightarrow H_n(X^\rightarrow),$$

die sich möglichst als Isomorphismus herausstellen sollte. Um dies zu beweisen, benötigt man aber die äußere Systemeigenschaft der *schönen Additivität*, die in 4.2.1 definiert ist und beispielsweise für *schöne* induktive **Top**-Systeme (s. Definition 4.2.3) gegeben ist. So sind etwa traditionelle induktive **Top**-Systeme schön.

LEMMA. *Werden die Funktoren $\lim H_n^\star(\cdot)$ und $H_n(\cdot)$ auf die volle Unterkategorie der schön additiven induktiven **Top**-Systeme eingeschränkt, liefert die obige natürliche Transformation einen natürlichen Isomorphismus $\lim H_n^\star(\cdot) \xrightarrow{\cong} H_n(\cdot)$.*

BEWEIS: Wir führen hier nur einen deskriptiven Beweis. Essentiell ist die Möglichkeit, einfache **Top** * -Morphismen, die auf Unterpolyedern eines kompakten Polyeders P kompatibel definiert sind, eindeutig zu einem auf P definierten **Top** * -Morphismus vereinigen zu können, was eben gerade durch die schöne Additivität gewährleistet wird.

Um die Surjektivität obiger Transformation zu bekommen, kann man folgendermaßen argumentieren: Die in einem n -Zykel auftretenden singulären Simplexe aus $S_n(X^\star)$ lassen sich stets zu einer auf einer (notfalls semisimplizialen) Pseudomannigfaltigkeit definierten Abbildung $f : P \rightarrow X^\star$ zusammenkleben, d.h. es existiert eine orientierte Pseudomannigfaltigkeit P mit Triangulierung $|K| = P$ und für jedes n -Simplex $\sigma \in K$ eine Abbildung $f_\sigma : |\sigma| \rightarrow X^\star$, so daß diese f_σ wieder das Kettenzykel induzieren und sich nun eindeutig zu einer stetigen Abbildung $f : |K| \rightarrow X^\star$ vereinigen lassen. Daher liefert ein Repräsentant $f_i : P \rightarrow X_i$ und damit eine Homologiekategorie aus $H_n(X_i)$ die vorgegebene Homologiekategorie aus $H_n(X^\star)$. Die Injektivität beweist man ähnlich, wofür berandete Pseudomannigfaltigkeiten gebraucht werden, und eine Abbildung auf dem Rand bereits vorgegeben ist. △

4.2 Schöne induktive Systeme

In diesem Abschnitt gehen wir der Frage nach, unter welchen zusätzlichen Bedingungen an induktive **Top**-Systeme endliche Vereinigungen von einfachen **Top** * -Morphismen existieren. Gerade in dieser Hinsicht offenbart sich ein grundlegender Unterschied zwischen induktiven und projektiven **Top**-Systemen, den man mit der zweiten Bemerkung in 4.3.1 begründen kann.

4.2.1 \mathcal{A} sei eine Kategorie mit endlichen Koprodukten, die wir als disjunkte Vereinigungen schreiben. Ein induktives \mathcal{A} -System A^\star heiße **disjunkt additiv**, wenn zu je zwei einfachen \mathcal{A}^\star -Morphismen $f_0 : B_0 \rightarrow A^\star$ und $f_1 : B_1 \rightarrow A^\star$ mit Objekten $B_0, B_1 \in \mathcal{A}$ ein einfacher \mathcal{A}^\star -Morphismus $f : B_0 \dot{\cup} B_1 \rightarrow A^\star$ mit $f|_{B_0} = f_0$ und $f|_{B_1} = f_1$ existiert. Ist dabei f stets eindeutig durch f_0 und f_1 festgelegt, nennen wir A^\star **schön disjunkt additiv**.

Für $\mathcal{A} = \mathbf{Top}$ bietet sich noch folgende Verschärfung an: Ein induktives **Top**-System X^\star heiße **additiv**, wenn zu beliebig gegebenen topologischen Räumen P, P_0, P_1 mit $P = P_0 \cup P_1$, so daß $P_0, P_1 \subset P$ beide in P abgeschlossen sind, und **Top** * -Morphismen $f_0 :$

$P_0 \rightarrow X^\star$, $f_1 : P_1 \rightarrow X^\star$ mit $f_0|_{P_0 \cap P_1} = f_1|_{P_0 \cap P_1}$ ein **Top** * -Morphismus $f : P \rightarrow X^\star$ existiert, so daß $f|_{P_0} = f_0$ und $f|_{P_1} = f_1$ gilt. Ist dabei f stets eindeutig durch f_0 und f_1 festgelegt, nennen wir X^\star **schön additiv**.

Mit 4.1.1 sieht man unmittelbar die Existenz endlicher, disjunkter Vereinigungen in gerichtete, induktive Systeme ein:

LEMMA. *A sei eine Kategorie mit endlichen Koprudukten. Dann ist jedes gerichtete, induktive \mathcal{A} -System disjunkt additiv.* \triangle

4.2.2 Für gerichtete, induktive **Top**-Systeme kann man das letzte Lemma verschärfen.

LEMMA. *Jedes gerichtete, induktive **Top**-System X^\star ist additiv.*

BEWEIS: Im Fall $P_0 \cap P_1 = \emptyset$, können wir Lemma 4.2.1 direkt anwenden. O.B.d.A. gelte daher $P_0 \cap P_1 \neq \emptyset$.

I sei die Indexmenge von X^\star , und $X_i, i \in I$ seien die Komponenten von X^\star . Repräsentieren wir f_0, f_1 jeweils durch **Top**-Morphismen

$$f_{0,i} : P_0 \longrightarrow X_i \quad \text{und} \quad f_{1,j} : P_1 \longrightarrow X_j,$$

so sind $f_{0,i}|_{P_0 \cap P_1}, f_{1,j}|_{P_0 \cap P_1}$ nach Voraussetzung cofinal gleich, so daß es einen Index $k \geq i, j$, Systemmorphismen $\varphi_0 : X_i \rightarrow X_k$ und $\varphi_1 : X_j \rightarrow X_k$ sowie eine stetige Abbildung $s : P_0 \cap P_1 \rightarrow X_k$ gibt mit

$$\varphi_0 \circ f_{0,i}|_{P_0 \cap P_1} = s \quad \text{und} \quad \varphi_1 \circ f_{1,j}|_{P_0 \cap P_1} = s.$$

Daher lassen sich $\varphi_0 \circ f_{0,i}$ und $\varphi_1 \circ f_{1,j}$ zu einer Abbildung $f_k : P \longrightarrow X_k$ zusammensetzen, die wegen der Abgeschlossenheit von P_0, P_1 stetig ist und den gesuchten **Top** * -Morphismus $f : P \rightarrow X^\star$ induziert. \triangle

4.2.3 Bis hierhin haben wir eine hinreichende *interne* Systemeigenschaft für die Existenz sowohl disjunkter als auch nicht disjunkter Vereinigungen von **Top** * -Morphismen verwendet. Nun fragen wir nach der Eindeutigkeit, zunächst im Fall disjunkter Vereinigungen, und führen zu diesem Zwecke die *Coequalizer-Bedingung* und nachfolgend die *schönen* induktiven Systeme ein:

Ein allgemeines induktives System $A^\star = ((\Phi_i^j), (A_i))$ aus einer Kategorie \mathcal{A} genüge der **Coequalizer-Bedingung**, wenn zu je zwei Systemmorphismen $\varphi, \varphi' \in \Phi_i^j$ ein $k \geq j$ und ein $\psi \in \Phi_j^k$ mit $\psi \circ \varphi = \psi \circ \varphi'$ existieren.

Genügt ein System $A^\star = ((\Phi_i^j), (A_i), I)$ (welches nicht als induktiv vorausgesetzt werde) mit nach oben gerichteter Indexmenge I der Coequalizer-Bedingung, so ist A^\star dann automatisch auch ein gerichtetes induktives \mathcal{A} -System. Traditionelle induktive Systeme genügen beispielsweise der Coequalizer-Bedingung.

DEFINITION. Ein induktives \mathcal{A} -System $A^\blacktriangleright = ((\Phi_i^j), (A_i), I)$, \mathcal{A} beliebige Kategorie, heie **schön**, wenn es gerichtet ist und der Coequalizer-Bedingung genügt.

LEMMA. *Wie vorher sei \mathcal{A} eine Kategorie mit endlichen Koproducten. Dann ist jedes schöne induktive \mathcal{A} -System schön disjunkt additiv.*

BEWEIS: Wegen Lemma 4.2.1 braucht nur noch die Eindeutigkeit von Vereinigungsmorphismen nachgewiesen zu werden.

Dazu seien A^\blacktriangleright ein schönes, induktives System aus \mathcal{A} , $f_1 : Y_1 \rightarrow A^\blacktriangleright$ und $f_2 : Y_2 \rightarrow A^\blacktriangleright$ zwei einfache $\mathcal{A}^\blacktriangleright$ -Morphismen, $f^\blacktriangleright : Y_1 \dot{\cup} Y_2 \rightarrow A^\blacktriangleright$ und $f'^\blacktriangleright : Y_1 \dot{\cup} Y_2 \rightarrow A^\blacktriangleright$ zwei $\mathcal{A}^\blacktriangleright$ -Morphismen mit $f^\blacktriangleright|_{Y_i} = f_i^\blacktriangleright$ und $f'^\blacktriangleright|_{Y_i} = f_i^\blacktriangleright$ für $i = 1, 2$.

Im ersten Schritt finden wir jeweils Repräsentanten von f^\blacktriangleright und f'^\blacktriangleright , die auf Y_1 übereinstimmen. Im zweiten Schritt gewinnen wir Übereinstimmung auch auf Y_2 und damit auf ganz $Y_1 \dot{\cup} Y_2$.

Wir wählen zunächst irgendwelche Repräsentanten $f : Y_1 \dot{\cup} Y_2 \rightarrow A_i$ von f^\blacktriangleright und $f' : Y_1 \dot{\cup} Y_2 \rightarrow A_{i'}$ von f'^\blacktriangleright . Weil $f|_{Y_1}$ und $f'|_{Y_1}$ cofinal gleich sind, existieren ein $j \geq i, i'$, Systemmorphis­men $\varphi : A_i \rightarrow A_j$, $\varphi' : A_{i'} \rightarrow A_j$ und ein \mathcal{A} -Morphismus $\bar{f}_1 : Y_1 \rightarrow A_j$ mit

$$\varphi \circ f|_{Y_1} = \bar{f}_1 \quad \text{und} \quad \varphi' \circ f'|_{Y_1} = \bar{f}_1.$$

Dann sind $\bar{f} := \varphi \circ f$ bzw. $\bar{f}' := \varphi' \circ f'$ Repräsentanten von f^\blacktriangleright bzw. f'^\blacktriangleright , die auf Y_1 übereinstimmen.

O.B.d.A. gibt es also Repräsentanten $f : Y_1 \dot{\cup} Y_2 \rightarrow A_i$ von f^\blacktriangleright und $f' : Y_1 \dot{\cup} Y_2 \rightarrow A_i$ von f'^\blacktriangleright mit $f|_{Y_1} = f'|_{Y_1}$. Da $f|_{Y_2}$ und $f'|_{Y_2}$ cofinal gleich sind, existieren ein $j \geq i$, Systemmorphis­men φ, φ' aus Φ_i^j und ein \mathcal{A} -Morphismus $\bar{f}_2 : Y_2 \rightarrow A_j$ mit $\varphi \circ f|_{Y_2} = \bar{f}_2$ und $\varphi' \circ f'|_{Y_2} = \bar{f}_2$.

Da A^\blacktriangleright der Coequalizer-Bedingung genügt, seien φ und φ' o.E. so gewählt, daß $\varphi \circ f|_{Y_1} = \varphi' \circ f'|_{Y_1}$ gelte. Somit sind $\varphi \circ f$ und $\varphi' \circ f'$ gleich. △

4.2.4 Wir beantworten nun die Frage der Eindeutigkeit von Vereinigungsmorphismen für die Kategorie $\mathbf{Top}^\blacktriangleright$ im Falle nicht notwendig disjunkter Vereinigungen.

LEMMA. *Jedes schöne induktive \mathbf{Top} -System ist schön additiv.*

BEWEIS: Man führt denselben Beweis wie für Lemma 4.2.3, bei dem die Disjunktheit der Vereinigung keine Rolle spielt. △

4.3 Allgemeine projektive Systeme

Die Bezeichnung ‘projektiv’ legt die Annahme nahe, daß allgemeine projektive Systeme dual zu allgemeinen induktiven Systemen definiert seien. Dies trifft jedoch nur für die

Objekte zu. Die Morphismen werden dagegen analog definiert. Man könnte auch sagen: Die inneren Strukturen sind dual und die äußeren analog definiert.

Von daher ist die Existenz prinzipieller Unterschiede zwischen beiden Systemarten nicht sehr verwunderlich. So lassen sich alle jene natürlichen Gegebenheiten des vorigen Abschnitts wie cofinale Einschränkung, Limes und „Funktorererbung“ (in 4.1.4) nicht ohne weiteres und teilweise nur mit Zusatzbedingungen im projektiven Fall definieren.

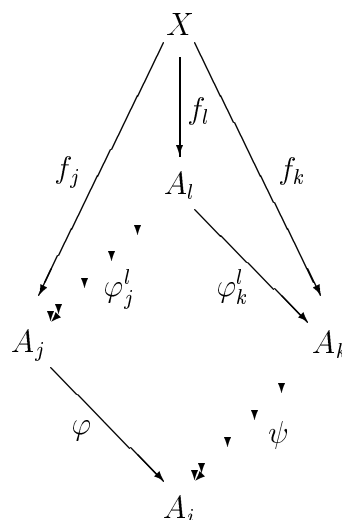
Wir versuchen dennoch, möglichst analog zu vorigem Abschnitt zu verfahren. Daß sich dabei der Wortlaut quasi wiederholt, ist natürlich voll beabsichtigt, um nicht die Analogie zu verwischen.

4.3.1 Unsere Definition allgemeiner projektiver Systeme soll vor allem ihr zugrunde liegendes Prinzip, daß es bei ihnen nämlich nur auf das cofinale Verhalten von Morphismen ankommt, deutlich hervorheben.

\mathcal{A} sei eine beliebige Kategorie, für die wir in diesem Abschnitt schrittweise die projektive Kategorie \mathcal{A}^* definieren werden.

I sei wie in 4.1.1 eine Menge mit einer reflexiven, transitiven, nicht notwendig antisymmetrischen Relation \leq , $(A_i)_{i \in I}$ eine Objektfamilie aus \mathcal{A} , und für alle $i, j \in I$ mit $i \leq j$ sei $\Phi_i^j \subset \text{Mor}(A_j, A_i)$ eine *nichtleere* Morphismenmenge, so daß folgende Bedingungen erfüllt seien:

- (1) $id_{A_i} \in \Phi_i^i$ für alle $i \in I$.
- (2) $\Phi_i^j \circ \Phi_j^k \subset \Phi_i^k$ für alle $i \leq j \leq k$.
- (3) Es gilt **Vollständigkeit**, die durchaus der universellen Eigenschaft des Pullbacks gleicht, jedoch nicht ganz so stark ist. Wir ersparen uns anstrengende Definitionserklärungen und verweisen stattdessen auf das folgende, kommutative Diagramm,



in dem die Existenz der \mathcal{A} -Morphismen f_j, f_k sowie $\varphi \in \Phi_i^j, \psi \in \Phi_i^k$ vorausgesetzt, und die Existenz der $\varphi_j^l \in \Phi_j^l, \varphi_k^l \in \Phi_k^l$ sowie von $f_l : X \rightarrow A_l$ gefordert wird. Hierbei können also A_l und φ_j^l, φ_k^l durchaus von f_i, f_k, φ, ψ abhängen.

Bedingung (3) ist gewissermaßen das „Analogon“ zur Bedingung (3) in 4.1.1.

Ein System mit diesen Eigenschaften wollen wir mit $A^\star = ((\Phi_i^j), (A_i), I)$ bezeichnen und ein **allgemeines projektives System** aus \mathcal{A} oder auch **projektives \mathcal{A} -System** nennen. Falls die Indexmenge I bekannt ist oder keine Rolle spielt, schreiben wir kürzer $A^\star = ((\Phi_i^j), (A_i))$.

Ein System $A^\star = ((\Phi_i^j), (A_i))$, das nur (1) und (2) erfüllt, nennen wir ein **unvollständiges**, allgemeines projektives System. Unvollständigkeit wird also stets erwähnt, Vollständigkeit dagegen stillschweigend vorausgesetzt.

Ist die Indexmenge I zudem nach oben gerichtet, nennen wir A^\star ein **gerichtetes, allgemeines projektives \mathcal{A} -System**.

Die üblichen, aus der Literatur bekannten, projektiven Systeme sind genau die evtl. unvollständigen, gerichteten, allgemeinen projektiven Systeme mit einelementigen Φ_i^j und teilgeordneter Indexmenge I . Die Eigenschaft (3) ist bei diesen auch nicht erforderlich, da die bisherigen Morphismen in der Literatur anders als bei uns definiert sind (s. [E-S]).

BEMERKUNG. Die Vollständigkeitseigenschaft (3) ist durchaus nicht essentiell, sondern soll nur die Transitivität der Relation ‘cofinal gleich’ (s. unten) garantieren. Bei einem unvollständigen System nimmt man eben die von ‘cofinal gleich’ erzeugte Äquivalenzrelation.

Durch induktive Anwendung von (3) ergibt sich unmittelbar die

FOLGERUNG. Sei $A^\star = ((\Phi_i^j), (A_i))$ ein allgemeines projektives System aus \mathcal{A} , X ein \mathcal{A} -Objekt und $i \in I$. Sind $j_1, \dots, j_k \geq i$ und $\varphi_1 \in \Phi_i^{j_1}, \dots, \varphi_k \in \Phi_i^{j_k}$ sowie $f_1 : X \rightarrow A_{j_1}, \dots, f_k : X \rightarrow A_{j_k}$ Morphismen aus \mathcal{A} mit

$$\varphi_1 \circ f_1 = \dots = \varphi_k \circ f_k,$$

dann existieren $\psi_1 \in \Phi_i^l, \dots, \psi_k \in \Phi_i^l$ mit $l \geq j_1, \dots, j_k$ sowie ein \mathcal{A} -Morphismus $f_l : X \rightarrow A_l$, so daß

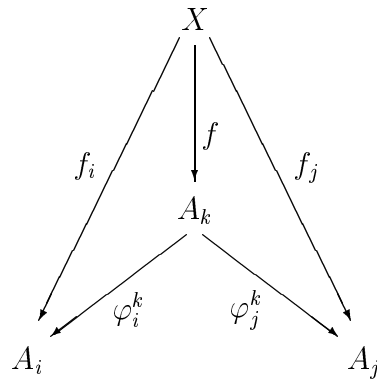
$$\psi_1 \circ f_l = f_1, \dots, \psi_k \circ f_l = f_k. \quad \triangle$$

Bis jetzt sind nur die Objekte von \mathcal{A}^\star definiert. Die Definition der Morphismen von \mathcal{A}^\star erfolgt zweistufig.

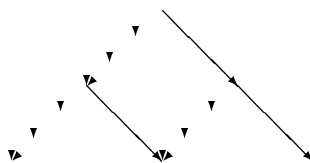
Mit den gleichen Bezeichnungen seien A^\star ein projektives \mathcal{A} -System, X ein Objekt aus \mathcal{A} und $f_i : X \rightarrow A_i, f_j : X \rightarrow A_j$ zwei \mathcal{A} -Morphismen. Dann seien f_i und f_j **cofinal gleich**, wenn ein $k \geq i, j$ sowie Morphismen $\varphi_i^k \in \Phi_i^k, \varphi_j^k \in \Phi_j^k, f : X \rightarrow A_k$ existieren mit

$$\varphi_i^k \circ f = f_i \quad \text{und} \quad \varphi_j^k \circ f = f_j.$$

Hier eine Veranschaulichung der Definition:



Z.B. sind stets f_j und $\varphi \circ f_j$ cofinal gleich für alle $\varphi \in \Phi_i^j$ mit $j \geq i$. Wie aus dem Diagramm,



das nur die Situation in A^\star berücksichtigt, schematisch abgelesen werden kann, stellt „cofinal gleich“ eine Äquivalenzrelation für solche Abbildungen $\{f : X \rightarrow A_i \mid \mathcal{A}\text{-Morphismus} \mid i \in I\}$ dar, die sich mit Verkettung verträgt: Für jeden \mathcal{A} -Morphismus $g : Y \rightarrow X$ und für je zwei cofinal gleiche \mathcal{A} -Morphismen $f_i : X \rightarrow A_i, f_j : X \rightarrow A_j$ sind auch $f_i \circ g : Y \rightarrow X \rightarrow A_i$ und $f_j \circ g : Y \rightarrow X \rightarrow A_j$ cofinal gleich.

BEMERKUNG. Damit zwei Morphismen cofinal gleich sind, müssen sie sich also zu einem gemeinsamen Morphismus *liften* lassen, wohingegen im induktiven Fall nur eine gemeinsame *Verkettung* gebraucht wird. Liften ist i.a. nicht möglich, Verkettungen jedoch immer, und darin liegt der prinzipielle Unterschied zwischen allgemeinen induktiven und projektiven Systemen. Daher muß zur Gewährleistung der Vollständigkeit (Bedingung (3)) die Lيفةigenschaft per definitionem eingefordert werden.

Ein einfacher \mathcal{A}^\star -Morphismus

$$f : X \longrightarrow A^\star$$

sei per Definition eine Äquivalenzklasse aus $\{f : X \rightarrow A_i \mid \mathcal{A}\text{-Morphismus} \mid i \in I\}$ bzgl. der Äquivalenzrelation ‘cofinal gleich’. Die Verkettung von einem \mathcal{A} -Morphismus $g : Y \rightarrow X$ mit $f : X \rightarrow A^\star$ ergibt einen wohldefinierten, einfachen \mathcal{A}^\star -Morphismus

$$f \circ g : Y \longrightarrow A^\star.$$

BEISPIEL. Jedes Objekt A_i eines allgemeinen projektiven Systems $A^\star = ((\Phi_i^j), (A_i))$ induziert via $id_{A_i} : A_i \rightarrow A_i$ den kanonischen, einfachen \mathcal{A}^\star -Morphismus $\alpha_i : A_i \rightarrow A^\star$. Dabei gilt für jedes $\varphi \in \Phi_i^j$ mit $j \geq i$ die Verträglichkeitsbedingung

$$\alpha_i \circ \varphi = \alpha_j.$$

Seien A^\star und A'^\star zwei projektive \mathcal{A} -Systeme mit ihren jeweiligen Indexmengen I bzw. I' . Ein \mathcal{A}^\star -Morphismus $f^\star : A^\star \rightarrow A'^\star$ sei eine Familie $f^\star = (f_i)_{i \in I}$ kompatibler, einfacher \mathcal{A}^\star -Morphismen $f_i : A_i \rightarrow A'_i$, d.h.

$$f_i \circ \varphi_i^j = f_j$$

für alle $\varphi_i^j \in \Phi_i^j$ mit $j \geq i$. f_i nennen wir die i -te **Komponente** von f^\star . Jeder Repräsentant eines f_i werde als **Repräsentant** von f^\star bezeichnet.

Als nächstes ist die Verkettung von \mathcal{A}^\star -Morphismen zu definieren und ihre Assoziativität zu zeigen. $A^\star, B^\star, C^\star$ seien projektive \mathcal{A} -Systeme mit jeweiligen Indexmengen I, J, L und $f^\star : A^\star \rightarrow B^\star, g^\star : B^\star \rightarrow C^\star$ zwei \mathcal{A}^\star -Morphismen. Wir wählen einen Repräsentanten $f_{i,j} : A_i \rightarrow B_j$ von f^\star und zeigen, daß

$$g_j \circ f_{i,j} : A_i \longrightarrow B_j \longrightarrow C^\star$$

eine wohldefinierte Komponente von $g^\star \circ f^\star$ ist: Sei $k \geq j$ und $\varphi \in \Phi_j^k$ mit $f_{i,j} = \varphi \circ f_{i,k}$. Dann ist die Gleichheit $g_j \circ f_{i,j} = g_k \circ f_{i,k}$ unmittelbar aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & B_k & & \\ & f_{i,k} \nearrow & \downarrow \varphi & \searrow g_k & \\ A_i & & & & C^\star \\ & f_{i,j} \searrow & \downarrow g_j & \nearrow & \\ & & B_j & & \end{array}$$

abzulesen. Hinsichtlich der Assoziativität der Verkettung brauchen wir nur festzuhalten, daß diese letztendlich über die assoziative Verkettung von Repräsentanten aus \mathcal{A} , auch bei einfachen \mathcal{A}^\star -Morphismen, gegeben ist. Damit ist für jede Kategorie \mathcal{A} die zugehörige Kategorie \mathcal{A}^\star vollständig definiert.

BEZEICHNUNG. Um die Analogie zu stetigen Abbildungen hervorzuheben, nennen wir einen **Top *** -Morphismus $f^\star : X^\star \rightarrow Y^\star$ auch schlichter eine stetige Abbildung.

Natürlich kann jedes Objekt $A \in \mathcal{A}$ auch als projektives \mathcal{A} -System aufgefaßt werden, indem man $I = \{A\}$ und $\Phi_A^A = \{id_A\}$ wählt. Auf diese Weise bekommen wir einen kovarianten Funktor

$$i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^\star.$$

LEMMA. i ist eine volle Einbettung von \mathcal{A} in \mathcal{A}^\star . △

4.3.2 Sei $A^\star = ((\Phi_i^j), (A_i), I)$ ein projektives \mathcal{A} -System und $J \subset I$ cofinal. Man kann nun zwar genau wie in 4.1.2 $A^\star|_J := ((\Phi_i^j)_{i,j \in J}, (A_i)_{i \in J}, J)$ bilden, aber dieses System ist i.a. nicht mehr vollständig, es sei denn, A^\star erfüllt die sog. **Schnittbedingung**:

Jeder Morphismus $\varphi \in \Phi_i^j$ besitzt einen Schnitt, d.h. eine Rechtsinverse.

Allgemeiner und äquivalent dazu ist die Bedingung, daß jeder Morphismus $f : X \rightarrow A_i$ einen Lift $\bar{f} : X \rightarrow A_j$ bzgl. beliebigem $\varphi \in \Phi_i^j$ besitzt.

FOLGERUNG. *Genügt A^\star der Schnittbedingung, ist $A^\star|_J$ ein projektives \mathcal{A} -System.*

BEWEIS: Man nutzt zunächst die Vollständigkeit in A^\star aus und liftet dann mittels der Schnittbedingung den gemeinsamen Lift zu einem Morphismus mit einem range A_j für ein geeignetes $j \in J$. △

Wie in 4.1.2 induzieren die id_{A_j} den Morphismus $A^\star|_J \rightarrow A^\star$.

LEMMA. *$A^\star|_J \rightarrow A^\star$ ist ein \mathcal{A}^\star -Isomorphismus.*

BEWEIS: Wir müssen eine Inverse $f^\star : A^\star \rightarrow A^\star|_J$ konstruieren: Da J cofinal in I ist, existiert zu jedem $i \in I$ ein $j \in J$ mit $j \geq i$ und wegen $\Phi_i^j \neq \emptyset$ ein $\varphi_i^j \in \Phi_i^j$. Die Schnittbedingung sichert uns die Existenz eines Schnittes $s_i^j : A_i \rightarrow A_j$ von φ_i^j . Wir setzen $f_i := [s_i^j] : A_i \rightarrow A^\star|_J$ und leiten die Wohldefiniertheit aus der Vollständigkeit von $A^\star|_J$ ab. Nach Konstruktion ist f^\star eine Inverse von $A^\star|_J \rightarrow A^\star$. △

Dieses Lemma ist aus folgendem Grund von Nutzen: Manchmal ist ein \mathcal{A}^\star -Morphismus natürlicherweise nicht auf A^\star gegeben, sondern nur auf einer cofinalen Einschränkung $A^\star|_J$ von A^\star . Dieser induziert dann aber auf eindeutige Weise automatisch einen auf A^\star definierten Morphismus. Oder etwas salopper ausgedrückt: Falls A^\star die Schnittbedingung erfüllt, sind alle Objekte und Morphismen von (und nach) \mathcal{A}^\star cofinal determiniert.

Ganz analog wie in 4.1.2 definieren wir **monomorphe \mathcal{A}^\star -Morphismen** und nennen monomorphe **Top * -** und **Set * -Morphismen** stattdessen auch **injektiv**.

Für **Top *** gibt es noch den schwächeren Begriff der **kompakten Injektivität**: Ein **Top * -Morphismus** $f^\star : X^\star \rightarrow Y^\star$ werde kompakt injektiv genannt, wenn zu jeder stetigen Abbildung $g^\star : K \rightarrow X^\star$, wobei $K \in \mathbf{Top}$ kompakt, Repräsentanten $g : K \rightarrow X_i$ von g^\star und $f : X_i \rightarrow Y_j$ von f^\star existieren, so daß

$$f|_{\text{Bild } g} : \text{Bild } g \hookrightarrow Y_j$$

eine topologische Einbettung ist.

BEMERKUNG. Unsere projektiven Systeme $A^\star \in \mathcal{A}^\star$ lassen sich am besten noch mit den Pro-Objekten von \mathcal{A} vergleichen, die z.B. bekanntlich zur Definition der bivarianten periodischen zyklischen Kohomologie verwendet werden. Die Objekte von Pro- \mathcal{A} sind traditionelle, über \mathbb{N} indizierte, projektive Systeme (A_n) aus \mathcal{A} , wobei die Morphismenmengen durch

$$\text{Mor}((A_m), (B_n)) := \varprojlim_n \varinjlim_m \text{Mor}(A_m, B_n)$$

definiert sind. Daher sind die Morphismen von $\text{Pro-}\mathcal{A}$ durch ihr cofinales Verhalten sowohl auf der linken als auch der rechten Seite bestimmt. Auch bei den allgemeinen projektiven Systemen dieser Arbeit ist ja nur die Cofinalität ausschlaggebend. Es gibt jedoch—ganz abgesehen von der speziellen Gestalt der Systeme und der Vollständigkeit, die man aber nach Bemerkung 4.3.1 auch entbehren könnte—zwei Unterschiede: ein Pro-Morphismus muß einen Repräsentanten in *jede* Komponente des Zielsystems besitzen, was wir nicht verlangen, denn sonst wäre unsere Konstruktion der Zähmungssysteme in 7.2.1 zum Scheitern verurteilt. Andererseits braucht ein Pro-Morphismus auf dem Definitionssystem nur cofinal definiert zu sein, was wir aber nicht verlangen können, wenn die Verkettung von \mathcal{A}^\leftarrow -Morphismen definiert sein soll. . .

4.3.3 Für *herkömmliche* projektive Systeme gibt es den Begriff des projektiven Limes, der in allen „Standardkategorien“ existiert. Zu dessen Definition arbeitet man aber mit einer ganz anderen Morphismenart $X \rightarrow \mathcal{A}^\leftarrow$ als bei uns, nämlich mit solchen, bei denen für jedes i eine Komponente $X \rightarrow A_i$ gegeben ist. Die Existenz könnten wir auch mittels einer zusätzlichen Schnittbedingung gewinnen, aber das eigentliche Problem liegt in der Eindeutigkeit, die man i.a. nur dann erhält, wenn alle Φ_i^j einelementig sind. So kommen wir zu dem Schluß:

Selbst für Standardkategorien \mathcal{A} existiert der projektive Limes $\varprojlim \mathcal{A}^\leftarrow$ im zu 4.1.3 dualen Sinne i.a. nicht. Hiervon ausgenommen sind die traditionellen, *vollständigen*, projektiven Systeme mit Schnittbedingung, wobei dann $\varprojlim \mathcal{A}^\leftarrow$ mit dem üblichen projektiven Limes übereinstimmt.

Daher mag es um so mehr überraschen, daß in *einigen* Standardkategorien stattdessen der *induktive* Limes $\varinjlim \mathcal{A}^\leftarrow \in \mathcal{A}$ existiert, was an der Vollständigkeit liegt. Wir erinnern daran, daß der induktive Limes von \mathcal{A}^\leftarrow ein \mathcal{A}^\leftarrow -Morphismus $p^\leftarrow : \mathcal{A}^\leftarrow \rightarrow \varinjlim \mathcal{A}^\leftarrow$ mit $\varinjlim \mathcal{A}^\leftarrow \in \mathcal{A}$ ist, der die universelle Eigenschaft wie im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim \mathcal{A}^\leftarrow & \xrightarrow{u} & B \\ \uparrow p^\leftarrow & \nearrow f^\leftarrow & \\ \mathcal{A}^\leftarrow & & \end{array}$$

besitzt: B ist ein Objekt aus \mathcal{A} , $f^\leftarrow : \mathcal{A}^\leftarrow \rightarrow B$ ein gegebener \mathcal{A}^\leftarrow -Morphismus, und der \mathcal{A} -Morphismus $u : \varinjlim \mathcal{A}^\leftarrow \rightarrow B$ soll eindeutig existieren. Für ein Objekt $A \in \mathcal{A}$ gilt selbstverständlich stets $\varinjlim A = A$.

Falls für jedes projektive \mathcal{A} -System \mathcal{A}^\leftarrow der induktive Limes $\varinjlim \mathcal{A}^\leftarrow$ existiert, sagen wir, daß die Kategorie \mathcal{A}^\leftarrow induktive Limese besitzt. So besitzen z.B. die Kategorien \mathbf{Set}^\leftarrow , \mathbf{Top}^\leftarrow , $\mathbf{Top}_0^\leftarrow$ induktive Limese, aber \mathbf{Grp}^\leftarrow und \mathbf{Ab}^\leftarrow nicht, oder nur dann, wenn man eine noch stärkere Schnittbedingung an die Systeme fordert, die aber für \mathbf{Grpd}^\leftarrow und \mathbf{Cat}^\leftarrow auch nichts mehr bewirkt. Wir führen den Beweis exemplarisch für \mathbf{Set}^\leftarrow :

$X^\leftarrow = ((\Phi_i^j), (X_i))$ sei ein allgemeines projektives System aus **Set**. Wir bilden innerhalb **Set** zunächst die disjunkte Vereinigung

$$\dot{\bigcup} X_i$$

und dividieren folgende Äquivalenzrelation aus: $x_i \sim x_j$ für $x_i \in X_i, x_j \in X_j$ genau dann, wenn ein $k \geq i, j$ sowie $\varphi_i^k \in \Phi_i^k, \varphi_j^k \in \Phi_j^k$ und ein $x_k \in X_k$ existieren mit

$$x_i = \varphi_i^k(x_k) \quad \text{und} \quad x_j = \varphi_j^k(x_k).$$

Damit ist $\varinjlim X^\leftarrow$ als Menge von Äquivalenzklassen definiert. Überdies bilden die **Set**-Morphismen $X_i \rightarrow \varinjlim X^\leftarrow$ per Konstruktion die Komponenten eines **Set** $^\leftarrow$ -Morphismus $F : X^\leftarrow \rightarrow \varinjlim X^\leftarrow$, der die universelle Limeseigenschaft besitzt.

Wenn \mathcal{A}^\leftarrow induktive Limites besitzt, kann man sich anhand des nächsten Diagramms

$$\begin{array}{ccc} A^\leftarrow & \xrightarrow{f^\leftarrow} & A'^\leftarrow \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varinjlim A^\leftarrow & \xrightarrow{\varinjlim f^\leftarrow} & \varinjlim A'^\leftarrow \end{array}$$

leicht davon überzeugen, daß sich der Übergang von projektiven \mathcal{A} -Systemen zu ihren induktiven Limiten als kovarianter Funktor

$$\varinjlim : \mathcal{A}^\leftarrow \longrightarrow \mathcal{A}$$

auffassen läßt und die Morphismen $A^\leftarrow \longrightarrow \varinjlim A^\leftarrow$ als natürliche Transformation $id \longrightarrow \varinjlim$.

FOLGERUNG. Die Kategorie \mathcal{A}^\leftarrow besitze induktive Limites. Es sei folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A^\leftarrow & \xrightarrow{f^\leftarrow} & B^\leftarrow \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

in \mathcal{A}^\leftarrow gegeben, wobei $f : A \rightarrow B$ ein Morphismus aus \mathcal{A} sei. Dann ist auch das durch Limesbildung induzierte Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \varinjlim A^\star & \xrightarrow{\varinjlim f^\star} & \varinjlim B^\star \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 A & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}$$

kommutativ.

BEWEIS: Folgt sofort aus der Funktorialität von \varinjlim . △

4.3.4 Wir wenden uns nun der Frage zu, ob ein kovarianter Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ zwischen beliebigen Kategorien einen kovarianten Funktor $F^\star : \mathcal{A}^\star \rightarrow \mathcal{B}^\star$ mit $F^\star(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ und $F^\star \circ i = F$ induziert.

Zunächst transformiert F offensichtlich jedes projektive \mathcal{A} -System in ein i.a. *unvollständiges*, projektives \mathcal{B} -System.

Wenn man sich also auf i.a. *unvollständige*, allgemeine projektive Systeme beschränkt, induziert F tatsächlich ganz analog zu 4.1.4 einen kovarianten Funktor

$$\text{unvollständig-}F^\star : \text{unvollständig-}\mathcal{A}^\star \longrightarrow \text{unvollständig-}\mathcal{B}^\star,$$

bzw.

$$\text{unvollständig-}F^\star : \mathcal{A}^\star \longrightarrow \text{unvollständig-}\mathcal{B}^\star.$$

Besitzen beide Kategorien \mathcal{A}, \mathcal{B} Pullbacks, so bietet es sich an, diese evtl. unvollständigen Systeme zu *vervollständigen*. Diese kanonische Vervollständigungstechnik werde hier nur angedeutet:

Allgemein sei \mathcal{A} eine Kategorie, die Pullbacks besitze, und $A^\star = ((\Phi_i^j), (A_i), I)$ ein evtl. unvollständiges, allgemeines projektives \mathcal{A} -System. Sind $\varphi_0 \in \Phi_i^{j_0}$ und $\varphi_1 \in \Phi_i^{j_1}$ beliebige Systemmorphisme von A^\star , die der Vollständigkeitsbedingung nicht genügen, werde der Pullback von φ_0 und φ_1 gebildet und dem System A^\star hinzugefügt. Man verfähre so mit allen solchen unvollständigen Paaren aus A^\star und erhält auf diese Weise ein Obersystem A_1^\star von A^\star , welches jedoch i.a. wiederum nicht vollständig ist! Daher wendet man die gleiche Prozedur auf A_1^\star an und bekommt ein Obersystem A_2^\star von A_1^\star . Wiederholt man diese Konstruktion induktiv ad infinitum, erhält man eine unendliche Folge

$$A^\star \subset A_1^\star \subset A_2^\star \subset A_3^\star \dots,$$

so daß $A_\infty^\star := \bigcup_i A_i^\star$ ein vollständiges projektives \mathcal{A} -System darstellt, eben die gesuchte Vervollständigung von A^\star .

Durch Ausnutzen der universellen Eigenschaft eines Pullbacks bzw. der partiellen Vollständigkeit eines Systems stellt sich die Vervollständigung als kovarianter Funktor

$$\cdot_\infty : \text{unvollständig-}\mathcal{A}^\star \longrightarrow A^\star$$

heraus.

Fassen wir zusammen: Sind \mathcal{A}, \mathcal{B} Kategorien, so daß \mathcal{B} Pullbacks besitzt, liefert die Verkettung von unvollständig- $F^\star : \mathcal{A}^\star \longrightarrow$ unvollständig- \mathcal{B}^\star mit \cdot_∞ einen Funktor

$$F^\star : \mathcal{A}^\star \longrightarrow \mathcal{B}^\star.$$

4.3.5 Auf \mathbf{Top}^\star kann man einen natürlichen Homotopiebegriff definieren.

Wir beginnen zunächst mit einem topologischen Raum $X \in \mathbf{Top}$ und einem projektiven \mathbf{Top} -System Y^\star . Zwei einfache \mathbf{Top}^\star -Morphismen $f_0, f_1 : X \rightarrow Y^\star$ heißen **streng homotop**, wenn es eine stetige Abbildung $H : X \times I \rightarrow Y^\star$ gibt mit

$$H|_{X \times 0} = f_0 \quad \text{und} \quad H|_{X \times 1} = f_1.$$

„Streng homotop“ ist eine reflexive und symmetrische, aber im Gegensatz zu 4.1.5 keine transitive Relation und daher keine Äquivalenzrelation. Die von ‘streng homotop’ erzeugte Äquivalenzrelation nennen wir **„homotop“**.

Zwei \mathbf{Top}^\star -Morphismen $f^\star : X^\star \rightarrow Y^\star$ und $g^\star : X^\star \rightarrow Y^\star$ mit jeweiligen Komponenten (f_i) bzw. (g_i) werden **homotop** genannt,

$$f^\star \simeq g^\star$$

geschrieben, wenn f_i und g_i im Sinne einfacher \mathbf{Top}^\star -Morphismen homotop sind für alle i . Man überzeugt sich von der Verträglichkeit dieser Äquivalenzrelation gegenüber Verkettung, so daß ‘homotop’ einen kategoriellen Homotopiebegriff auf \mathbf{Top}^\star definiert. Wie bei gewöhnlichen topologischen Räumen bezeichnen wir die Menge der Homotopieklassen aller stetigen Abbildungen $X^\star \longrightarrow Y^\star$ mit

$$[X^\star, Y^\star]$$

und die Homotopieklassse eines \mathbf{Top}^\star -Morphismus $f^\star : X^\star \rightarrow Y^\star$ mit $[f^\star]$.

4.3.6 Sobald der Begriff der stetigen Abbildung in \mathbf{Top}^\star verträglich mit \mathbf{Top} geklärt ist, kann man ganz analog wie in \mathbf{Top} einen Homologiefunktor

$$H_n : \mathbf{Top}^\star \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

definieren. Ohne weitere Angabe sei hierbei der Standardkoeffizientenring stets \mathbb{Z} .

Für jedes Objekt X^\star aus \mathbf{Top}^\star sei

$$S(X^\star) := \{ \sigma : \nabla(n) \rightarrow X^\star \text{ stetig} \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$$

der ss. Komplex aller singulären Simplizes von X^\star (vgl. [La]). $\nabla(n)$ bezeichnet hierbei das affine, n -dimensionale Standardsimplex. Wie in \mathbf{Top} ist

$$S : \mathbf{Top}^\star \longrightarrow \text{ss. Komplexe}$$

ein kovarianter Funktor. Auf der Kategorie der ss. Komplexe ist Homologie mit beliebigem Koeffizientenbereich R definiert, so daß wir

$$H_n(X^\star; R) := H_n(S(X^\star); R)$$

setzen. Für $R = \mathbb{Z}$ schreiben wir $H_n(X^\star) := H_n(X^\star; \mathbb{Z})$.

4.4 Relative Injektivität

Injektivität stellt einer der ältesten, fundamentalen Begriffe der Mathematik dar, den wir nun im wahrsten Sinne des Wortes relativieren, um die Kategorie $\mathbf{Top}^{\leftarrow}_{ri}$ zu definieren, die uns den Weg zur abstrakten Klassifikation ebnet.

4.4.1 DEFINITION. In \mathbf{Top} sei das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ A & & B \end{array}$$

gegeben. Dann heie (α, β) **injektiv relativ f** , wenn fur je zwei Punkte $x_0, x_1 \in X$ mit $(\beta \circ f)(x_0) = (\beta \circ f)(x_1)$ stets $f(x_0) = f(x_1)$ oder $\alpha(x_0) = \alpha(x_1)$ folgt.

Sind nur $f : X \rightarrow Y$ und $\beta : Y \rightarrow B$ gegeben, so heißt β injektiv relativ f , falls (id_X, β) injektiv relativ f ist. Demnach ist β genau dann injektiv relativ f , falls $\beta|_{\text{Bild } f} : \text{Bild } f \rightarrow B$ injektiv ist.

BEISPIELE

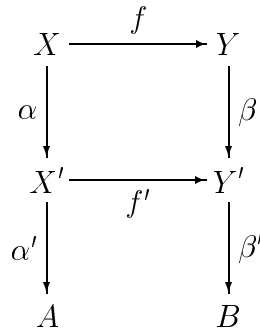
- [1] $\beta : X \rightarrow B$ ist genau dann injektiv, wenn β injektiv relativ id_X ist.
- [2] Ein injektives $\beta : Y \rightarrow B$ ist stets injektiv relativ zu jeder stetigen Abbildung $f : X \rightarrow Y$.
- [3] Fur jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist (id_X, id_Y) injektiv relativ f .
- [4] Fur jedes stetige $\varphi : X \rightarrow A$ ist (φ, φ) injektiv relativ id_X .
- [5] In dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{f_0} & Y_0 \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ X_1 & \xrightarrow{f_1} & Y_1 \end{array}$$

sei f_1 injektiv. Dann ist (φ, ψ) injektiv relativ f_0 .

- [6] Seien $p : X \rightarrow \tilde{X}$, $f : \tilde{X} \rightarrow Y$ und $\beta : Y \rightarrow B$ stetig mit β injektiv relativ $f \circ p$ und p surjektiv. Dann ist β auch injektiv relativ f .
- [7] Sind $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\beta} B$ stetig mit $\beta \circ f$ injektiv, so ist β injektiv relativ f .

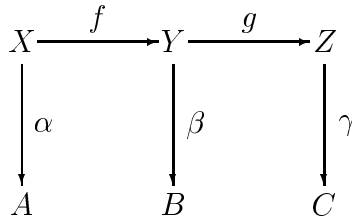
FOLGERUNG. (a): Es sei



ein kommutatives Diagramm in **Top**.

- (i) Ist (α, β) injektiv relativ f und (α', β') injektiv relativ f' , so ist $(\alpha' \circ \alpha, \beta' \circ \beta)$ injektiv relativ f .
- (ii) Ist α surjektiv und $(\alpha' \circ \alpha, \beta' \circ \beta)$ injektiv relativ f , dann ist auch (α', β') injektiv relativ f' .

(b): In **Top** seien die Abbildungen



gegeben. Ist (α, β) injektiv relativ f und (β, γ) injektiv relativ g , so ist (α, γ) injektiv relativ $g \circ f$.

BEWEIS: (a) ist etwas „schwieriger“ als (b) zu beweisen. Zu (i): Seien $x_0, x_1 \in X$ mit $(\beta' \circ \beta \circ f)(x_0) = (\beta' \circ \beta \circ f)(x_1)$ und $f(x_0) \neq f(x_1)$.

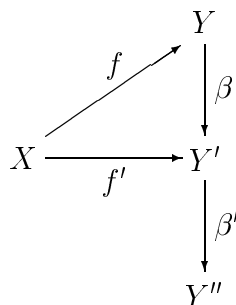
1. Fall: $(\beta \circ f)(x_0) = (\beta \circ f)(x_1)$. Dann haben wir $\alpha(x_0) = \alpha(x_1)$ und somit $(\alpha' \circ \alpha)(x_0) = (\alpha' \circ \alpha)(x_1)$.
2. Fall: $(\beta \circ f)(x_0) \neq (\beta \circ f)(x_1)$. Dann gilt $(\beta' \circ f' \circ \alpha)(x_0) = (\beta' \circ f' \circ \alpha)(x_1)$ und daher $(\alpha' \circ \alpha)(x_0) = (\alpha' \circ \alpha)(x_1)$.

Für den Beweis von (ii) reicht eine Betrachtung des gegebenen Diagramms.

Dasselbe gilt für den Beweis von (b).

△

KOROLLAR. (a): Mit den Bezeichnungen des kommutativen **Top**-Diagramms



sei β injektiv relativ f und β' injektiv relativ f' . Dann ist $\beta' \circ \beta$ injektiv relativ f . Ist umgekehrt $\beta' \circ \beta$ injektiv relativ f , dann ist β' injektiv relativ f' .

(b): Sind $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{\beta} B$ stetige Abbildungen mit β injektiv relativ g , so ist β auch injektiv relativ $g \circ f$. \triangle

LEMMA. $f : X \rightarrow Y$ und $\beta : Y \rightarrow B$ seien stetig. Dann sind äquivalent:

(1) β ist injektiv relativ f .

(2) Es existiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 p \downarrow & \nearrow F & \downarrow \beta \\
 \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & B
 \end{array}$$

mit p identifizierend und \tilde{f} injektiv.

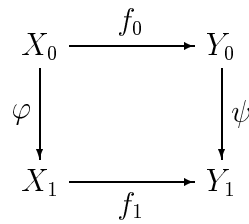
(3) Faktorisiert $\beta \circ f$ durch eine gegebene, identifizierende Abbildung $p : X \rightarrow \tilde{X}$ zu einer stetigen Abbildung $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow B$, so faktorisiert auch f durch p zu einer stetigen Abbildung $F : \tilde{X} \rightarrow Y$ mit $\beta \circ F = \tilde{f}$, wobei β injektiv relativ F ist.

BEWEIS: Sei β injektiv relativ f . Dann faktorisiert $\beta \circ f$ durch eine identifizierende Surjektion $p : X \rightarrow \tilde{X}$ zu einer injektiven, stetigen Abbildung $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow B$. Seien $x_0, x_1 \in X$ mit $p(x_0) = p(x_1)$. Dies zieht die Gleichung $(\beta \circ f)(x_0) = (\beta \circ f)(x_1)$ nach sich und damit auch die Gleichheit $f(x_0) = f(x_1)$, so daß f durch p zu $F : \tilde{X} \rightarrow Y$ faktorisiert. Die Surjektivität von p impliziert zudem die Kommutativität $\beta \circ F = \tilde{f}$. Damit ist (1) \Rightarrow (2) gezeigt. Um (3) aus (1) zu bekommen, argumentiert man genauso und beachtet noch Beispiel [6].

Sei nun (2) vorausgesetzt. Nach Beispiel [7] ist dann β injektiv relativ F und nach Teil (b) des vorigen Korollars auch injektiv relativ $f = F \circ p$. (1) folgt sofort aus (3) mit $p = id_X$. \triangle

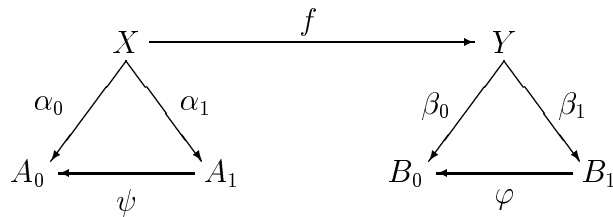
4.4.2 Für die weitere Vorbereitung zur Definition der Kategorie $\mathbf{Top}^{\leftarrow r_i}$ benötigen wir noch ein mehrteiliges Lemma, das man durch „Diagrammschau“ beweist.

LEMMA. (a): Für jedes kommutative **Top**-Diagramm



gilt: (φ, ψ) injektiv relativ $f_0 \iff (f_0, f_1)$ injektiv relativ φ .

(b): Sind in dem gegebenen, kommutativen Diagramm



ψ injektiv relativ α_1 und φ injektiv relativ β_1 , so gilt die Äquivalenz

$$\begin{aligned}
 & (\alpha_i, \beta_j) \text{ injektiv relativ } f \quad \forall i, j = 0, 1 \\
 \iff & \exists i, j = 0, 1 \text{ mit } (\alpha_i, \beta_j) \text{ injektiv relativ } f.
 \end{aligned}
 \qquad \triangle$$

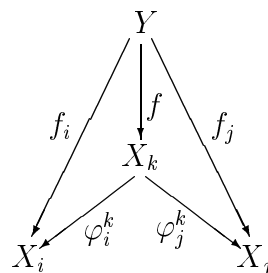
4.5 Die ri-Kategorie

Die Objekte dieser Kategorie³⁾ sind dieselben wie die Objekte aus $\mathbf{Top}^\blacktriangleright$, also allgemeine projektive \mathbf{Top} -Systeme. Nur die Morphismen sind etwas differenzierter definiert. Dabei versuchen wir auch sprachlich möglichst analog zu 4.3.1 vorzugehen.

4.5.1 Mit den gleichen Bezeichnungen seien $X^\blacktriangleright = ((\Phi_i^j), (X_i), I)$ ein projektives \mathbf{Top} -System, Y ein Objekt aus \mathbf{Top} und $f_i : Y \rightarrow X_i, f_j : Y \rightarrow X_j$ zwei Morphismen aus \mathbf{Top} . Dann seien f_i und f_j **ri-cofinal gleich**, wenn ein $k \geq i, j$ sowie Morphismen $\varphi_i^k \in \Phi_i^k, \varphi_j^k \in \Phi_j^k, f : Y \rightarrow X_k$ existieren mit

$$\varphi_i^k \circ f = f_i \quad \text{und} \quad \varphi_j^k \circ f = f_j$$

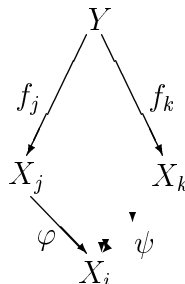
und φ_i^k injektiv relativ f_i, φ_j^k injektiv relativ f_j . Hier eine Veranschaulichung der Definition:



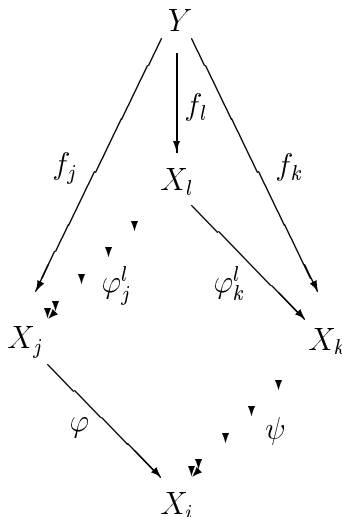
³⁾‘ri’ steht für ‘relative Injektivität’.

LEMMA. „*ri-cofinal gleich*“ ist eine Äquivalenzrelation auf $\{f : Y \rightarrow X_i \text{ stetig} \mid i \in I\}$.

BEWEIS: Nur die Transitivität ist nicht selbstverständlich. Betrachten wir zunächst ein kommutatives Diagramm,

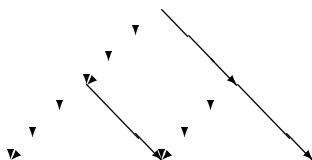


in dem φ injektiv relativ f_j und ψ injektiv relativ f_k sei. Gesucht ist eine Diagramm-ergänzung,



so daß auch φ_j^l und φ_k^l injektiv relativ f_l sind: Angenommen, $\varphi \circ f_j = \psi \circ f_k =: f_i : Y \rightarrow X_i$ ist injektiv. Dann sind f_j, f_k ebenfalls injektiv, und wegen der Vollständigkeit von X^{\rightarrow} existiert überhaupt eine Diagramm-ergänzung. Wegen Beispiel [7] in 4.4.1 sind φ_j^l und φ_k^l beide injektiv relativ f_l . Im allgemeinen Fall lassen wir $f_i : Y \rightarrow X_i$ durch eine identifizierende Abbildung $\pi : Y \rightarrow \tilde{Y}$ zu einer Injektion $\tilde{f}_i : \tilde{Y} \rightarrow X_i$ faktorisieren. Wegen Lemma 4.4.1 (3) faktorisieren dann auch f_j und f_k zu $\tilde{f}_j : \tilde{Y} \rightarrow X_j$ bzw. $\tilde{f}_k : \tilde{Y} \rightarrow X_k$, womit die Situation des ersten Falles vorliegt. Verkettet man die Morphismen der diesbezüglichen Diagramm-ergänzung mit $\pi : Y \rightarrow \tilde{Y}$, so erhält man wegen Lemma 4.4.1 die gesuchte Diagramm-ergänzung.

Für die Beweisargumentation der Transitivität orientieren wir uns am schematischen Diagramm



und berücksichtigen obiges Argument sowie Korollar 4.4.1 (a). △

Diese Äquivalenzrelation „ri-cofinal gleich“ verträgt sich mit Verkettung: Für jeden **Top**-Morphismus $g : Z \rightarrow Y$ und für je zwei ri-cofinal gleiche **Top**-Morphismen $f_i : Y \rightarrow X_i, f_j : Y \rightarrow X_j$ sind nach Korollar 4.4.1 (b) auch $f_i \circ g : Z \rightarrow Y \rightarrow X_i$ und $f_j \circ g : Z \rightarrow Y \rightarrow X_j$ ri-cofinal gleich.

Sei wie vorher Y ein topologischer Raum und X^\star ein projektives **Top**-System mit den Komponenten $X_i, i \in I$. Ein **einfacher Top_{ri}^\star -Morphismus**

$$f : Y \longrightarrow X^\star$$

sei per Definition eine Äquivalenzklasse aus $\{f : Y \rightarrow X_i \text{ Top-Morphismus} \mid i \in I\}$ bzgl. der Äquivalenzrelation ‘ri-cofinal gleich’. Repräsentanten $f_i : Y \rightarrow X_i$ von $f : Y \rightarrow X^\star$ nennen wir auch **einfache ri-Repräsentanten** von f . Die Verkettung von einem **Top**-Morphismus $g : Z \rightarrow Y$ mit $f : Y \rightarrow X^\star$ ergibt einen wohldefinierten, einfachen **Top_{ri}^\star -Morphismus**

$$f \circ g : Z \longrightarrow X^\star.$$

Jeder einfache **Top_{ri}^\star -Morphismus** induziert kanonisch einen **Top^\star -Morphismus**.

DEFINITION. Seien $X^\star = ((\Phi_i^j), X_i, I)$ und $X'^\star = ((\Phi'_i{}^j), X'_i, I')$ zwei projektive **Top**-Systeme. Ein **Top_{ri}^\star -Morphismus**

$$f^\star : X^\star \rightarrow X'^\star$$

sei eine Familie $f^\star = (f_i)_{i \in I}$ einfacher **Top_{ri}^\star -Morphismen** $f_i : X_i \rightarrow X'^\star$ mit den Bedingungen:

- (1) Zu jedem $\varphi \in \Phi_i^j$ existieren ri-Repräsentanten $f_{i,k} : X_i \rightarrow X'_k$ von f_i und $f_{j,l} : X_j \rightarrow X'_l$ von f_j sowie ein $\psi \in \Phi'_k{}^l$, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X_j & \xrightarrow{f_{j,l}} & X'_l \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ X_i & \xrightarrow{f_{i,k}} & X'_k \end{array}$$

kommutiert.

- (2) Zu jedem $\varphi \in \Phi_i^j$ existieren ri-Repräsentanten $f_{i,k} : X_i \rightarrow X'_k$ von f_i und $f_{j,l} : X_j \rightarrow X'_l$ von f_j , so daß $(f_{j,l}, f_{i,k})$ injektiv relativ φ ist.

Jeder einfache ri-Repräsentant einer Komponente f_i heie ein **ri-Repräsentant** von f^\star .

BEMERKUNG. Wegen Lemma 4.4.2 (b) kann man Bedingung (2) äquivalent für jeweils alle ri-Repräsentanten von f_i und f_j verlangen.

Die Identitäten id_{X_i} eines allgemeinen projektiven topologischen Systems X^\star induzieren wegen Beispiel [3] in 4.4.1 den Identitätsmorphismus $id^\star : X^\star \rightarrow X^\star$, der somit den einfachsten Typ eines \mathbf{Top}_{ri}^\star -Morphismus darstellt.

Als nächstes ist die Verkettung von \mathbf{Top}_{ri}^\star -Morphismen zu definieren und ihre Assoziativität zu zeigen. Wir definieren zunächst Verkettungen der Form

$$A \xrightarrow{\alpha} X^\star \xrightarrow{f^\star} Y^\star.$$

f^\star bestehe wieder aus den Komponenten (f_i) . Wir wissen bereits, daß für einen festen, einfachen ri-Repräsentanten $\alpha_i : A \rightarrow X_i$ von α die Verkettung

$$A \xrightarrow{\alpha_i} X_i \xrightarrow{f_i} Y^\star$$

wohldefiniert ist. Seien nun $\alpha_i : A \rightarrow X_i, \alpha_j : A \rightarrow X_j$ zwei ri-Repräsentanten von α und $\varphi \in \Phi_i^j$, so daß $\varphi \circ \alpha_j = \alpha_i$ gilt und φ injektiv relativ α_j ist. Lt. Bedingung (1) bekommen wir ein kommutatives Diagramm,

$$\begin{array}{ccc} & X_j & \xrightarrow{f_{j,l}} Y_l \\ \alpha_j \swarrow & \downarrow \varphi & \downarrow \psi \\ A & & \\ \alpha_i \searrow & X_i & \xrightarrow{f_{i,k}} Y_k \end{array}$$

in dem $f_{i,k} : X_i \rightarrow Y_k$ ein ri-Repräsentant von f_i und $f_{j,l} : X_j \rightarrow Y_l$ ein ri-Repräsentant von f_j ist. Wegen Lemma 4.4.2 (b) (bzw. letzte Bemerkung) ist $(f_{j,l}, f_{i,k})$ injektiv relativ φ , so daß nach Teil (a) dieses Lemmas (φ, ψ) injektiv relativ $f_{j,l}$ ist. Aber wegen Folgerung 4.4.1 (b) ist dann auch ψ injektiv relativ $f_{j,l} \circ \alpha_j$. Damit ist die Verkettung $f^\star \circ \alpha : A \rightarrow Y^\star$ durch die Verkettung von ri-Repräsentanten gegeben und wohldefiniert.

Allgemein seien $X^\star, Y^\star, Z^\star$ projektive \mathbf{Top} -Systeme mit jeweiligen Indextmengen I, J, L und $(f_i) = f^\star : X^\star \rightarrow Y^\star, (g_j) = g^\star : Y^\star \rightarrow Z^\star$ zwei \mathbf{Top}_{ri}^\star -Morphismen. Wir müssen nachweisen, daß die Familie $(g^\star \circ f_i : X_i \rightarrow Y^\star \rightarrow Z^\star)_{i \in I}$ die Bedingungen (1) und (2) aus Definition 4.5.1 erfüllt: (1) folgt sofort und (2) mit Berücksichtigung von Folgerung 4.4.1 (a).

Auf diese Weise ist die Komposition von \mathbf{Top}_{ri}^\star -Morphismen via ri-Repräsentanten gegeben und wohldefiniert, was infolgedessen auch deren Assoziativität belegt. Auf die Existenz von Identitätsmorphismen haben wir bereits hingewiesen, so daß insgesamt die Kategorie \mathbf{Top}_{ri}^\star definiert ist. Außerdem haben wir einen Funktor $\mathbf{Top}_{ri}^\star \rightarrow \mathbf{Top}^\star$. \mathbf{Top}_{ri}^\star -Morphismen nennen wir oft auch nur **ri-Morphismen**.

Natürlich kann jeder topologische Raum X auch als Objekt aus \mathbf{Top}_{ri}^\star aufgefaßt werden, indem man $I = \{X\}$ und $\Phi_X^X = \{id_X\}$ wählt. Auf diese Weise bekommen wir einen kovarianten Funktor

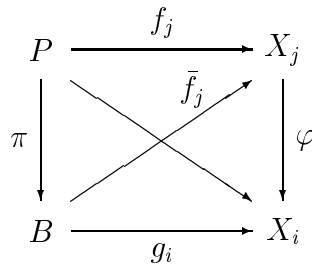
$$i : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}_{ri}^\star.$$

FOLGERUNG. i ist eine volle Einbettung von \mathbf{Top} in \mathbf{Top}_{ri}^* . △

4.5.2 In \mathbf{Top}_{ri}^* gilt folgende Faktorisierungseigenschaft, die sich im 7. Kapitel als hilfreich erweisen wird.

LEMMA. $\pi : P \rightarrow B$ sei eine identifizierende Abbildung aus \mathbf{Top} , $X^* \in \mathbf{Top}_{ri}^*$ und $f^* : P \rightarrow X^*$ ein \mathbf{Top}_{ri}^* -Morphismus. Dann existiert höchstens ein \mathbf{Top}_{ri}^* -Morphismus $g^* : B \rightarrow X^*$ mit $f^* = g^* \circ \pi$. Existiert die Faktorisierung g^* von f^* , so faktorisiert jeder ri -Repräsentant von f^* durch π .

BEWEIS: Wir brauchen nur Lemma 4.4.1 (3) anzuwenden, wozu wir uns die Argumentation an dem Diagramm



veranschaulichen, wobei $\varphi \in \Phi_i^j$ ein geeigneter Systemmorphismus sei. Nehmen wir an, solch ein $g^* : B \rightarrow X^*$ existiert. Dann gibt es notwendigerweise mindestens einen ri -Repräsentanten von f^* , der durch π faktorisiert. Wir sehen aber, daß sogar jeder ri -Repräsentant von f^* durchfaktoriert: Wenn f_j faktorisiert, dann logischerweise auch $\varphi \circ f_j$. Das Umgekehrte folgt aber sofort aus Lemma 4.4.1 (3), das auch die ri -cofinale Gleichheit von g_i und \bar{f}_j und damit die Eindeutigkeit von g^* liefert, denn die einzelnen Faktorisierungen aller Repräsentanten von f^* sind eindeutig, da π nach Voraussetzung identifizierend ist. △

BEMERKUNG. In \mathbf{Top}^* geht diese Eindeutigkeit der Faktorisierung verloren! Was das für Konsequenzen hat, wird in der Bemerkung 7.3.2 erläutert.

4.5.3 Analog wie für \mathbf{Top}^* -Morphismen kann man auch **injektive** ri -Morphismen über die Existenz eines injektiven ri -Repräsentanten definieren. Aus Lemma 4.4.1 ergibt sich aber sofort, daß für einen ri -Morphismus f^* entweder alle ri -Repräsentanten von f^* injektiv sind oder aber überhaupt keiner:

LEMMA. X^* sei ein Objekt aus \mathbf{Top}_{ri}^* , Y ein topologischer Raum und $f^* : Y \rightarrow X^*$ ein einfacher \mathbf{Top}_{ri}^* -Morphismus. Dann sind äquivalent

- (i) Es existiert ein injektiver, einfacher ri -Repräsentant von f^* .

(ii) Jeder einfache ri-Repräsentant von f^\star ist injektiv. △

FOLGERUNG. $f^\star : X^\star \rightarrow Y^\star$ und $g^\star : Y^\star \rightarrow Z^\star$ seien zwei \mathbf{Top}_{ri}^\star -Morphismen. Dann gilt:

(a) f^\star, g^\star injektiv $\Rightarrow g^\star \circ f^\star$ injektiv.

(b) $g^\star \circ f^\star$ injektiv $\Rightarrow f^\star$ injektiv. △

4.5.4 Ebenso kann auch **kompakte Injektivität** wörtlich wie in 4.3.2 definiert werden, wobei man natürlich ri-Repräsentanten zu nehmen hat. Kompakt injektive ri-Morphismen haben folgende interessante Eigenschaft:

LEMMA. Sei $\pi^\star : E^\star \rightarrow B^\star$ ein kompakt injektiver \mathbf{Top}_{ri}^\star -Morphismus, $p : X \rightarrow Y$ eine identifizierende Abbildung zwischen kompakten Räumen X, Y und $f^\star : X \rightarrow E^\star$ ein \mathbf{Top}_{ri}^\star -Morphismus, so daß $\pi^\star \circ f^\star$ durch p faktorisiert. Dann faktorisiert auch f^\star durch p , und zwar zu einem ri-Morphismus, der die Faktorisierung von $\pi^\star \circ f^\star$ liftet.

BEWEIS: Da π^\star kompakt injektiv ist, existieren ri-Repräsentanten f von f^\star und π von π^\star , so daß die Verkettung $\pi \circ f$ definiert und $\pi|_{f(X)}$ eine topologische Einbettung ist. Wegen Lemma 4.5.2 faktorisiert $\pi \circ f$ durch p , somit auch f und daher natürlich f^\star . Mit Lemma 4.5.2 ergibt sich die restliche Aussage. △

4.5.5 Auch der Homotopiebegriff für \mathbf{Top}^\star aus 4.3.5 besitzt ein Analogon für \mathbf{Top}_{ri}^\star : ‘Streng homotop’ wird ganz analog definiert, wobei die Homotopie $H : X \times I \rightarrow Y^\star$ natürlich ein ri-Morphismus sein muß, und ‘homotop’ ist dann die von ‘streng homotop’ erzeugte Äquivalenzrelation, womit die Homotopie von einfachen ri-Morphismen erklärt ist. Homotopie von allgemeinen \mathbf{Top}_{ri}^\star -Morphismen wird dann ganz analog wie in 4.3.5 definiert, wobei die Bezeichnungen $[X^\star, Y^\star]$ und $[f^\star]$ im ri-Fall ebenfalls verwendet werden.

4.6 Schöne projektive Systeme

In diesem Abschnitt gehen wir der Frage nach, unter welchen zusätzlichen Bedingungen an projektive \mathbf{Top} -Systeme endliche Vereinigungen von einfachen \mathbf{Top}^\star -Morphismen existieren. Hierfür sind natürlich ganz andere interne Systemeigenschaften als im induktiven Fall maßgebend. Als wichtigste wären die schöne Serre-Faserungseigenschaft und die Schnittbedingung zu nennen.

4.6.1 Fast vollkommen analog wie in 4.2.1 definieren wir die Begriffe ‘disjunkt additiv’, ‘schön disjunkt additiv’, ‘additiv’ und ‘schön additiv’: \mathcal{A} sei eine Kategorie mit endlichen Koprodukten, die wir als disjunkte Vereinigungen schreiben. Ein projektives \mathcal{A} -System A^\star heiße **disjunkt additiv**, wenn zu je zwei einfachen \mathcal{A}^\star -Morphismen $f_0 : B_0 \rightarrow A^\star$ und

$f_1 : B_1 \rightarrow A^\star$ mit Objekten $B_0, B_1 \in \mathcal{A}$ ein einfacher \mathcal{A}^\star -Morphismus $f : B_0 \dot{\cup} B_1 \rightarrow A^\star$ mit $f|_{B_0} = f_0$ und $f|_{B_1} = f_1$ existiert. Ist dabei f stets eindeutig durch f_0 und f_1 festgelegt, nennen wir A^\star **schön disjunkt additiv**.

Für $\mathcal{A} = \mathbf{Top}$ bietet sich noch folgende Verschärfung an: Ein projektives \mathbf{Top} -System X^\star heie **additiv**, wenn zu beliebig gegebenen Polyedern P, P_0, P_1 mit $P = P_0 \cup P_1$, so daß $P_0, P_1 \subset P$ beide Unterpolyeder von P sind, und \mathbf{Top}^\star -Morphismen $f_0 : P_0 \rightarrow X^\star$, $f_1 : P_1 \rightarrow X^\star$ mit $f_0|_{P_0 \cap P_1} = f_1|_{P_0 \cap P_1}$ ein \mathbf{Top}^\star -Morphismus $f : P \rightarrow X^\star$ existiert, so daß $f|_{P_0} = f_0$ und $f|_{P_1} = f_1$ gilt. Ist dabei f stets eindeutig durch f_0 und f_1 festgelegt, nennen wir X^\star **schön additiv**.

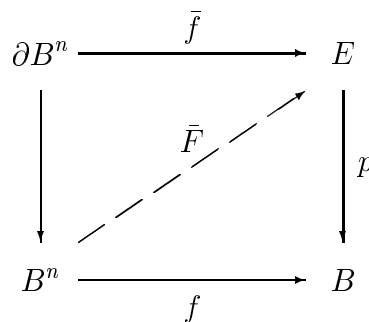
LEMMA. *\mathcal{A} sei eine Kategorie mit endlichen Koprodukten. Dann ist jedes projektive \mathcal{A} -System mit nach oben gerichteter Indexmenge, das die Schnittbedingung erfüllt, disjunkt additiv.*

BEWEIS: Sei A^\star solch ein System mit Indexmenge I und Komponenten $A_i, i \in I$. Repräsentieren wir zwei gegebene einfache \mathcal{A}^\star -Morphismen $f_0 : B_0 \rightarrow A^\star$, $f_1 : B_1 \rightarrow A^\star$ jeweils durch \mathcal{A} -Morphismen

$$f_{0,i} : B_0 \longrightarrow A_i \quad \text{und} \quad f_{1,j} : B_1 \longrightarrow A_j,$$

so gibt es zunächst einen Index $k \geq i, j$. Wegen der Schnittbedingung können dann f_0, f_1 sogar durch Morphismen $f_{0,k} : B_0 \rightarrow A_k$ bzw. $f_{1,k} : B_1 \rightarrow A_k$ repräsentiert werden. Da in \mathcal{A} nach Voraussetzung die Existenz endlicher, disjunkter Summen gesichert ist, gibt es einen Vereinigungsmorphismus $f_k : B_0 \dot{\cup} B_1 \rightarrow A_k$, der $f_{0,k}$ bzw. $f_{1,k}$ fortsetzt und einen \mathcal{A}^\star -Morphismus $f : B_0 \dot{\cup} B_1 \rightarrow A^\star$ mit $f|_{B_0} = f_0$ und $f|_{B_1} = f_1$ induziert. \triangle

4.6.2 Wir führen nun den Begriff der **schönen Serre-Faserung** ein: Eine stetige Abbildung $p : E \rightarrow B$ werde schöne Serre-Faserung genannt, wenn sie eine Serre-Faserung mit schwach zusammenziehbarer Faser⁴⁾ ist. Dies ist bekanntlich dazu quivalent, daß es zu beliebigen, gegebenen, stetigen Abbildungen $f : B^n \rightarrow B$ und $\bar{f} : \partial B^n \rightarrow E$ mit $n \geq 1$ und $p \circ \bar{f} = f|_{\partial B^n}$, wobei B^n die n -dimensionale Vollkugel im \mathbb{R}^n bezeichne, eine stetige Abbildung $\bar{F} : B^n \rightarrow E$ existiert, die das Diagramm



⁴⁾D.h. alle Homotopiegruppen der Faser verschwinden.

kommutativ ergänzt, wobei $\partial B^n \rightarrow B^n$ für die Inklusion $\partial B^n \subset B^n$ steht. Wir wählen diese Form der Definition, weil sie sich am besten auf andere allgemeine Kategorien und Situationen übertragen läßt. Äquivalent dazu kann man $(B^n, \partial B^n)$ durch ein beliebiges Paar (X, A) von CW-Komplexen oder Polyedern ersetzen.

BEZEICHNUNG. Ein projektives **Top**-System X^\star mit Systemmorphismen (Φ_i^j) heie **schön Serre-fasernd**, wenn jeder Systemmorphismus $\varphi \in \Phi_i^j$ eine schöne Serre-Faserung ist.

LEMMA. Gegeben seien ein projektives **Top**-System X^\star mit den Eigenschaften:

- Die Indexmenge von X^\star ist nach oben gerichtet,
- X^\star erfüllt die Schnittbedingung,
- X^\star ist schön Serre-fasernd.

Dann ist X^\star additiv.

BEWEIS: Wir versuchen, den Wortlaut im Beweis von Lemma 4.6.1 weitestgehend zu wiederholen. Im Fall $P_0 \cap P_1 = \emptyset$, können wir Lemma 4.6.1 direkt anwenden. O.B.d.A. gelte daher $P_0 \cap P_1 \neq \emptyset$.

I sei die Indexmenge von X^\star , und X_i , $i \in I$, seien die Komponenten von X^\star . Repräsentieren wir f_0, f_1 jeweils durch **Top**-Morphismen

$$f_{0,i} : P_0 \rightarrow X_i \quad \text{und} \quad f_{1,j} : P_1 \rightarrow X_j,$$

so sind $f_{0,i}|_{P_0 \cap P_1}$, $f_{1,j}|_{P_0 \cap P_1}$ nach Voraussetzung cofinal gleich, so daß es einen Index $k \geq i, j$, Systemmorphismen $\varphi_0 : X_k \rightarrow X_i$ und $\varphi_1 : X_k \rightarrow X_j$ sowie eine stetige Abbildung $s : P_0 \cap P_1 \rightarrow X_k$ gibt mit

$$\varphi_0 \circ s = f_{0,i}|_{P_0 \cap P_1} \quad \text{und} \quad \varphi_1 \circ s = f_{1,j}|_{P_0 \cap P_1}.$$

Nutzt man aus, daß φ_0, φ_1 beide schöne Serre-Faserungen sind, erhält man stetige Lifts $f_{0,k} : P_0 \rightarrow X_k$ von $f_{0,i}$ und $f_{1,k} : P_1 \rightarrow X_k$ von $f_{1,j}$, die jeweils s fortsetzen, so daß $f_{0,k}$ und $f_{1,k}$ auf $P_0 \cap P_1$ gleich sind und sich daher zu einer stetigen Abbildung $f_k : P \rightarrow X_k$ zusammensetzen, die $f_{0,k}$ bzw. $f_{1,k}$ fortsetzt und den **Top**[⋆]-Morphismus $f : P \rightarrow X^\star$ induziert. △

Im achten Kapitel benötigen wir die

FOLGERUNG. Seien X^\star ein schön Serre-faserndes System aus **Top**[⋆], P, \bar{P} kompakte Polyeder, $B \subset \bar{P}$ kompaktes Unterpolyeder und $\pi : P \rightarrow \bar{P}$ eine identifizierende Abbildung mit

- $\pi^{-1}(B) =: Q$ kompaktes Unterpolyeder von P ,
- $\pi|_{P-Q}$ injektiv.

Ist $F : P \rightarrow X^\star$ stetig, so daß $F|_Q : Q \rightarrow X^\star$ durch $\pi|_Q : Q \rightarrow B$ zu einer stetigen Abbildung $\bar{f} : B \rightarrow X^\star$ faktorisiert, dann faktorisiert $F : P \rightarrow X^\star$ durch $\pi : P \rightarrow \bar{P}$ zu einer stetigen Abbildung $\bar{F} : \bar{P} \rightarrow X^\star$ mit $\bar{F}|_B = \bar{f}$.

BEWEIS: Wir nehmen zunächst irgendwelche Repräsentanten $F_j : P \rightarrow X_j$ von F und $\bar{f}_i : B \rightarrow X_i$ von \bar{f} . Weil $\bar{f}_i \circ \pi|_Q$ und $F_j|_Q$ cofinal gleich sind, existieren ein $k \geq i, j$, Systemmorphismen $\varphi_i^k : X_k \rightarrow X_i$, $\varphi_j^k : X_k \rightarrow X_j$ von X^\star und ein stetiges $G : Q \rightarrow X_k$ mit

$$\varphi_i^k \circ G = \bar{f}_i \circ \pi|_Q \quad \text{und} \quad \varphi_j^k \circ G = F_j|_Q.$$

Weil X^\star schön Serre-fasernd und G ein Teillift von F_j über φ_j^k ist, läßt sich G zu einem Lift

$$F_k : P \longrightarrow X_k$$

von F_j fortsetzen. Wegen $F_k|_Q = G$ erhält man mit $F_i := \varphi_i^k \circ F_k$ die Beziehung

$$\bar{f}_i \circ \pi|_Q = \varphi_i^k \circ F_k|_Q = F_i|_Q,$$

so daß F_i ein Repräsentant von F ist, der aufgrund der Voraussetzungen an π zu einer stetigen Abbildung $\bar{F}_i : \bar{P} \rightarrow X_i$ mit $\bar{F}_i|_B = \bar{f}_i$ faktorisiert. Für den von \bar{F}_i induzierten **Top *** -Morphismus $\bar{F} : \bar{P} \rightarrow X^\star$ gilt somit $\bar{F}|_B = \bar{f}$ und $\bar{F} \circ \pi = F$. \square

4.6.3 Bis hierhin haben wir hinreichende *interne* Systemeigenschaften für die Existenz sowohl disjunkter als auch nicht disjunkter Vereinigungen von **Top *** -Morphismen verwendet. Nun fragen wir nach der Eindeutigkeit, zunächst im Fall disjunkter Vereinigungen, und führen zu diesem Zwecke die *guten* projektiven Systeme ein, wofür wir vorher Schnittpaare definieren müssen:

Ein Paar (φ, φ') zweier Systemmorphismen $\varphi, \varphi' \in \Phi_i^j$ eines projektiven \mathcal{A} -Systems $A^\star = ((\Phi_i^j), (A_i), I)$, \mathcal{A} beliebige Kategorie, heie ein **Schnittpaar**, wenn φ und φ' einen gemeinsamen Schnitt $s : A_i \rightarrow A_j$ besitzen.

DEFINITION. Ein projektives \mathcal{A} -System $A^\star = ((\Phi_i^j), (X_i), I)$, \mathcal{A} beliebige Kategorie, heie **gut**, wenn es den folgenden Bedingungen genügt:

- I ist nach oben gerichtet,
- A^\star erfüllt die Schnittbedingung,
- Sind $f : Y \rightarrow A_i, f' : Y \rightarrow A_i$ cofinal gleich, so existiert für ein geeignetes $j \geq i$ ein Schnittpaar (φ, φ') aus Φ_i^j und ein \mathcal{A}^\star -Morphismus $\bar{f} : Y \rightarrow A_j$ mit $f = \varphi \circ \bar{f}$ und $f' = \varphi' \circ \bar{f}$.

LEMMA. *Wie vorher sei \mathcal{A} eine Kategorie mit endlichen Koproducten. Dann ist jedes gute projektive \mathcal{A} -System schön disjunkt additiv.*

BEWEIS: Wegen Lemma 4.6.1 braucht nur noch die Eindeutigkeit von Vereinigungsmorphismen nachgewiesen zu werden.

Dazu seien A^\star ein gutes, projektives System aus \mathcal{A} , $f_1 : Y_1 \rightarrow A^\star$ und $f_2 : Y_2 \rightarrow A^\star$ zwei einfache \mathcal{A}^\star -Morphismen, $f^\star : Y_1 \dot{\cup} Y_2 \rightarrow A^\star$ und $f'^\star : Y_1 \dot{\cup} Y_2 \rightarrow A^\star$ zwei \mathcal{A}^\star -Morphismen mit $f^\star|_{Y_i} = f_i^\star$ und $f'^\star|_{Y_i} = f_i'^\star$ für $i = 1, 2$.

Im ersten Schritt finden wir jeweils Repräsentanten von f^\star und f'^\star , die auf Y_1 übereinstimmen. Im zweiten Schritt gewinnen wir Übereinstimmung auch auf Y_2 und damit auf ganz $Y_1 \dot{\cup} Y_2$.

Wir wählen zunächst irgendwelche Repräsentanten $f : Y_1 \dot{\cup} Y_2 \rightarrow A_i$ von f^\star und $f' : Y_1 \dot{\cup} Y_2 \rightarrow A_{i'}$ von f'^\star . Weil $f|_{Y_1}$ und $f'|_{Y_1}$ cofinal gleich sind, existieren ein $j \geq i, i'$, Systemmorphismen $\varphi : A_j \rightarrow A_i$, $\varphi' : A_j \rightarrow A_{i'}$ und ein \mathcal{A} -Morphismus $\bar{f}_1 : Y_1 \rightarrow A_j$ mit

$$\varphi \circ \bar{f}_1 = f|_{Y_1} \quad \text{und} \quad \varphi' \circ \bar{f}_1 = f'|_{Y_1}.$$

Weil A^\star der Schnittbedingung genügt, läßt sich $f|_{Y_2}$ zu einem \mathcal{A} -Morphismus $\bar{f}_2 : Y_2 \rightarrow A_j$ liften und $f'|_{Y_2}$ zu einem \mathcal{A} -Morphismus $\bar{f}'_2 : Y_2 \rightarrow A_{j'}$, so daß $\varphi \circ \bar{f}_2 = f|_{Y_2}$ und $\varphi' \circ \bar{f}'_2 = f'|_{Y_2}$ gilt. Nun vereinigen wir \bar{f}_1 und \bar{f}_2 disjunkt zu \bar{f} und \bar{f}_1, \bar{f}'_2 entsprechend disjunkt zu \bar{f}' . Dann sind \bar{f} bzw. \bar{f}' Repräsentanten von f^\star bzw. f'^\star , die auf Y_1 übereinstimmen.

O.B.d.A. gibt es also Repräsentanten $f : Y_1 \dot{\cup} Y_2 \rightarrow A_i$ von f^\star und $f' : Y_1 \dot{\cup} Y_2 \rightarrow A_{i'}$ von f'^\star mit $f|_{Y_1} = f'|_{Y_1}$. Da $f|_{Y_2}$ und $f'|_{Y_2}$ cofinal gleich sind, und A^\star nach Voraussetzung gut ist, existieren ein $j \geq i$, ein Schnittpaar (φ, φ') aus Φ_i^j und ein \mathcal{A} -Morphismus $\bar{f}_2 : Y_2 \rightarrow A_j$ mit $\varphi \circ \bar{f}_2 = f|_{Y_2}$ und $\varphi' \circ \bar{f}_2 = f'|_{Y_2}$. Als Schnittpaar besitzen φ, φ' einen gemeinsamen Schnitt, so daß ein gemeinsamer Lift $\bar{f}_1 : Y_1 \rightarrow A_j$ von $f|_{Y_1} = f'|_{Y_1}$ existiert. Setzen wir $\bar{f} := \bar{f}_1 \dot{\cup} \bar{f}_2$, gilt daher $\varphi \circ \bar{f} = f$ und $\varphi' \circ \bar{f} = f'$, was die cofinale Gleichheit von f und f' bestätigt. \triangle

Insbesondere besagt dieses Lemma, daß endliche, disjunkte Vereinigungen von Morphismen $f_i^\star : P_i \rightarrow X^\star$ für gutes X^\star wohldefiniert sind, indem man irgendwelche Repräsentanten $f_i : P_i \rightarrow X_k$ nimmt und diese disjunkt zu einem Repräsentanten von $\dot{\cup} f_i^\star$ vereinigt, so daß letztere Notation überhaupt berechtigt ist.

4.6.4 Wir beantworten nun die Frage der Eindeutigkeit von Vereinigungsmorphismen im Falle nicht notwendig disjunkter Vereinigungen. Wie schon bei Lemma 4.6.2 spielen hierfür schöne Serre-Faserungen eine wichtige Rolle. Dies führt zur Definition der schönen projektiven **Top**-Systeme, wozu wir vorher noch folgenden neuen Begriff benötigen:

Ein Paar (φ, φ') zweier Systemmorphismen $\varphi, \varphi' \in \Phi_i^j$ eines projektiven \mathcal{A} -Systems $A^\star = ((\Phi_i^j), (A_i), I)$, \mathcal{A} beliebige Kategorie, heie ein **determinierendes Paar**, wenn zweierlei gilt:

- (1) (φ, φ') ist ein Schnittpaar,

- (2) Sind $f : B \rightarrow A_j$ und $g : B \rightarrow A_j$ zwei \mathcal{A} -Morphismen mit $\varphi \circ f = \varphi \circ g$ und $\varphi' \circ f = \varphi' \circ g$, so gilt $f = g$.

DEFINITION. Ein projektives **Top**-System $X^\blacktriangleright = ((\Phi_i^j), (X_i), I)$ sei **schön**, wenn es den folgenden Bedingungen genügt:

- I ist nach oben gerichtet,
- X^\blacktriangleright erfüllt die Schnittbedingung,
- X^\blacktriangleright ist schön Serre-fasernd,
- Sind $f : Y \rightarrow X_i, f' : Y \rightarrow X_i$ cofinal gleich, so existiert für ein geeignetes $j \geq i$ ein determinierendes Paar (φ, φ') aus Φ_i^j und ein stetiges $\bar{f} : Y \rightarrow X_j$ mit $f = \varphi \circ \bar{f}$ und $f' = \varphi' \circ \bar{f}$.

LEMMA. Jedes schöne projektive **Top**-System ist schön additiv.

BEWEIS: Sei X^\blacktriangleright ein schönes projektives **Top**-System, P ein Polyeder mit Unterpolyedern P_1, P_2 , die P überdecken, und $f^\blacktriangleright : P \rightarrow X^\blacktriangleright, f'^\blacktriangleright : P \rightarrow X^\blacktriangleright$ stetig mit $f^\blacktriangleright|_{P_i} = f'^\blacktriangleright|_{P_i}$ für $i = 1, 2$.

Im ersten Schritt finden wir jeweils Repräsentanten von f^\blacktriangleright und f'^\blacktriangleright , die auf P_1 übereinstimmen. Im zweiten Schritt gewinnen wir Übereinstimmung auch auf P_2 und damit auf ganz P .

Wir wählen zunächst irgendwelche Repräsentanten $f : P \rightarrow X_i$ von f^\blacktriangleright und $f' : P \rightarrow X_{i'}$ von f'^\blacktriangleright . Weil $f|_{P_1}$ und $f'|_{P_1}$ cofinal gleich sind, existieren ein $j \geq i, i'$, Systemmorphismen $\varphi : X_j \rightarrow X_i, \varphi' : X_j \rightarrow X_{i'}$ und eine stetige Abbildung $\bar{f}_1 : P_1 \rightarrow X_j$ mit

$$\varphi \circ \bar{f}_1 = f|_{P_1} \quad \text{und} \quad \varphi' \circ \bar{f}_1 = f'|_{P_1}.$$

Indem wir ausnutzen, daß φ, φ' schöne Serre-Faserungen sind, und \bar{f}_1 jeweils als Teillift von f über φ bzw. als Teillift von f' über φ' auffassen, setzen wir \bar{f}_1 jeweils zu einem Lift \bar{f} von f über φ bzw. zu einem Lift \bar{f}' von f' über φ' fort. Daher sind \bar{f} und \bar{f}' Repräsentanten von f^\blacktriangleright bzw. f'^\blacktriangleright , die auf P_1 übereinstimmen, was wir ja im ersten Schritt angestrebt haben.

O.B.d.A. gibt es also Repräsentanten $f : P \rightarrow X_i$ von f^\blacktriangleright und $f' : P \rightarrow X_i$ von f'^\blacktriangleright mit $f|_{P_1} = f'|_{P_1}$. Da $f|_{P_2}$ und $f'|_{P_2}$ cofinal gleich sind, und X^\blacktriangleright nach Voraussetzung schön ist, existieren ein $j \geq i$, ein determinierendes Paar (φ, φ') aus Φ_i^j und ein stetiges $\bar{f}_2 : P_2 \rightarrow X_j$ mit $\varphi \circ \bar{f}_2 = f|_{P_2}$ und $\varphi' \circ \bar{f}_2 = f'|_{P_2}$. Als determinierendes Paar besitzen φ, φ' einen gemeinsamen Lift $\bar{f}_1 : P_1 \rightarrow X_j$ von $f|_{P_1} = f'|_{P_1}$. Daraus ergeben sich die Gleichungen

$$\varphi \circ \bar{f}_1|_{P_1 \cap P_2} = f|_{P_1 \cap P_2} = \varphi \circ \bar{f}_2|_{P_1 \cap P_2}$$

und

$$\varphi' \circ \bar{f}_1|_{P_1 \cap P_2} = f'|_{P_1 \cap P_2} = \varphi' \circ \bar{f}_2|_{P_1 \cap P_2},$$

so daß $\bar{f}_1|_{P_1 \cap P_2} = \bar{f}_2|_{P_1 \cap P_2}$ gelten muß. Daher vereinigen sich \bar{f}_1 und \bar{f}_2 zu einem $\bar{f} = \bar{f}_1 \cup \bar{f}_2 : P \rightarrow X_j$, das sowohl einen Repräsentanten von f als auch einen Repräsentanten von f' darstellt, was $f^\blacktriangleright = f'^\blacktriangleright$ beweist. \triangle

4.6.5 Alle Begriffe für $\mathbf{Top}^\blacktriangleright$ aus 4.6.1 wie **disjunkt additiv**, **schön disjunkt additiv**, **additiv** und **schön additiv** lassen sich vollkommen analog auch für $\mathbf{Top}^\blacktriangleright_{ri}$ definieren, indem man stets mit ri-Morphismen arbeitet.

Inwieweit sich diese feudalen Eigenschaften im ri-Fall von internen Systemeigenschaften ableiten lassen, ist jedoch eine ganz andere Frage, die wir nun gleich beantworten werden.

Da Liften durch einen Schnitt den gleichen ri-Repräsentanten liefert, gilt Lemma 4.6.1 analog für die Kategorie $\mathbf{Top}^\blacktriangleright_{ri}$.

Ebenso gilt auch Lemma 4.6.2 analog für solche Systeme, aber die Voraussetzung, daß jeder Systemmorphismus von X^\blacktriangleright eine schöne Serre-Faserung sei, muß modifiziert werden, indem man jenen Faserungsbegriff der relativen Injektivität wie folgt anpaßt:

Eine stetige Abbildung $p : E \rightarrow B$ wird eine **schöne ri-Serre-Faserung** genannt, wenn p wortwörtlich die gleiche Eigenschaft wie in 4.6.4 erfüllt, nur mit den Zusätzen, daß

- als Voraussetzung p injektiv relativ \bar{f} sei,
- und der Lift \bar{F} so beschaffen ist, daß p auch injektiv relativ \bar{F} sei.

Damit ist klar, wie ein **ri-schönes projektives Top-System** definiert ist, aber leider nützt uns das nicht viel:

LEMMA. *Lemma 4.6.1 gilt analog in $\mathbf{Top}^\blacktriangleright_{ri}$. Ersetzt man „schöne Serre-Faserung“ durch „ri-schöne Serre-Faserung“, so gilt Lemma 4.6.2 wortwörtlich auch in $\mathbf{Top}^\blacktriangleright_{ri}$. Dagegen gibt es keine analogen Lemmata 4.6.3 und 4.6.4 für ri-schöne Systeme, auch dann nicht, wenn die Systemmorphismen schöne Serre-Faserungen sind.* \triangle

BEMERKUNG. *Letztere Aussage bedarf einiger Kommentierung. Wichtig ist für uns zu verstehen, woran die Analogie scheitert. Die grundlegende Schwierigkeit zeigt sich deutlich im zweiten Schritt des Beweises von Lemma 4.6.4: Die zusammengesetzte Abbildung $\bar{f} = \bar{f}_1 \cup \bar{f}_2$ ist zwar ein Repräsentant von f und f' , aber eben i.a. kein ri-Repräsentant mehr.*

4.7 Serre-Faserungen und schwache Homotopieäquivalenzen

Die Definitionen dieser beiden Begriffe in \mathbf{Top} sind allgemein bekannt und bereiten auch keinerlei Schwierigkeiten. Ihre direkte Übertragung auf die Kategorien $\mathbf{Top}^\blacktriangleright$ und $\mathbf{Top}^\blacktriangleright_{ri}$ erweist sich allerdings als unangemessen oder nicht realisierbar.

So versteht man beispielsweise unter einer schwachen Homotopieäquivalenz in \mathbf{Top} eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$, die auf der Ebene aller Homotopiegruppen einen Isomorphismus induziert.

Diese Definition läßt sich jedoch nicht auf \mathbf{Top}^\star übertragen, weil für Systeme aus \mathbf{Top}^\star i.a. keine Homotopiegruppen definiert werden können, wenn man sich nicht auf schöne projektive Systeme beschränken will.

Schwache Homotopieäquivalenz kann man aber äquivalent auch anders beschreiben, so daß in dieser Form eine analoge Definition für \mathbf{Top}^\star ermöglicht wird.

Ohne Beweis sei hier erwähnt, daß additive \mathbf{Top} -Systeme bis auf schwache Homotopieäquivalenz eine Art CW-Substitution besitzen, die ein gerichtetes, *induktives PL*-System darstellt bzw. formal genau sogar als ein Objekt aus $(\mathbf{PL}^\star)^\star$ aufgefaßt werden muß. Diese Substitute genügen aber i.a. *nicht* der Coequalizer-Bedingung (s. auch Anmerkung 8.3.4).

Wie man in \mathbf{Top}^\star oder \mathbf{Top}^\star in geeigneter Weise Serre-Faserungen definieren kann, scheint dagegen viel klarer zu sein.

4.7.1 Stellvertretend für alle Kategorien \mathbf{Top}^\star , \mathbf{Top}^\star_{ri} , \mathbf{Top}^\star usw. definieren wir Serre-Faserungen für \mathbf{Top}^\star . Für schöne projektive \mathbf{Top} -Systeme ist die untenstehende Definition zu der analog aus \mathbf{Top} übernommenen äquivalent.

DEFINITION. Ein \mathbf{Top}^\star -Morphismus $p^\star : E^\star \rightarrow B^\star$ heiße eine **Serre-Faserung**, wenn für jedes kompakte Polyeder X mit Unterpolyeder $A \subset X$ die folgende Hochhebungseigenschaft gilt: Sind $f : X \times I \rightarrow B^\star$ und $\tilde{f} : X \times 0 \cup A \times I \rightarrow E^\star$ stetig mit $p^\star \circ \tilde{f} = f|_{X \times 0 \cup A \times I}$, dann gibt es eine stetige Abbildung $\tilde{F} : X \times I \rightarrow E^\star$, die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 X \times 0 \cup A \times I & \xrightarrow{\tilde{f}} & E^\star \\
 \downarrow & \nearrow \tilde{F} & \downarrow p^\star \\
 X \times I & \xrightarrow{f} & B^\star
 \end{array}$$

kommutativ ergänzt.

4.7.2 Auch hinsichtlich schwacher Homotopieäquivalenzen genügt stellvertretend für alle o.g. Kategorien eine Definition für \mathbf{Top}^\star . Dazu muß vorher der Begriff der **strengen stationären Homotopie** geklärt werden:

Ein \mathbf{Top}^\star -Morphismus $H : X \times I \rightarrow Y^\star$ mit $X \in \mathbf{Top}$ werde eine strenge, stationäre Homotopie genannt, wenn mit den Abkürzungen

$$i_t : X \hookrightarrow X \times I, x \mapsto (x, t) \quad \text{und} \quad H_t := H|_{X \times t} \circ i_t : X \rightarrow Y^\star$$

$H_t = H_0$ für alle $t \in I$ gilt. Bei gegebenem Unterraum $A \subset X$ heißt ferner ein \mathbf{Top}^\star -Morphismus $H : X \times I \rightarrow Y^\star$ eine **strenge Homotopie stationär auf A** , falls $H|_{A \times I}$ eine strenge stationäre Homotopie ist. Wir gebrauchen dann die Sprechweise, „ H_0 ist streng homotop zu H_1 stationär auf A “. Die von „streng homotop stationär auf $A \subset X$ “ induzierte Äquivalenzrelation von \mathbf{Top}^\star -Morphismen $X \rightarrow Y^\star$ nennen wir **homotop stationär auf A** .

Die nun folgende Definition von ‘schwacher Homotopieäquivalenz’ sollte besser nicht zu endgültig, sondern eher als Vorschlag aufgenommen werden.

DEFINITION. Ein \mathbf{Top}^\star -Morphismus $f^\star : X^\star \rightarrow Y^\star$ werde eine **schwache Homotopieäquivalenz** genannt, wenn f^\star die folgende Eigenschaft besitzt: Sind

- P ein kompaktes Polyeder und $Q_1, \dots, Q_k \subset P$ eine endliche Familie *paarweiser disjunkter*, kompakter Unterpolyeder $Q_i \subset P$,
- $H : P \rightarrow Y^\star$ stetig,
- $g_i : Q_i \rightarrow X^\star$ stetig mit $f^\star \circ g_i = H|_{Q_i}$ für alle $i = 1, \dots, k$,

dann existiert eine stetige Abbildung $\bar{H} : P \rightarrow X^\star$, so daß

- $\bar{H}|_{Q_i} = g_i$ für alle $i = 1, \dots, k$,
- $f^\star \circ \bar{H}$ homotop zu H stationär auf $Q := \bigcup_i Q_i$

gilt. Ist diese Eigenschaft nur für $\dim P \leq n$ und $\dim Q_i \leq n - 1$ erfüllt, heiße f eine **schwache n -Homotopieäquivalenz**.

Aus dieser Definition ergibt sich auch der Beweis von

LEMMA. $f^\star : X^\star \rightarrow Y^\star$ und $g^\star : Y^\star \rightarrow Z^\star$ seien schwache n -Homotopieäquivalenzen in \mathbf{Top}^\star . Dann ist auch $g^\star \circ f^\star$ eine schwache n -Homotopieäquivalenz. \triangle

Für ein \mathbf{PL}^\star -Objekt $X^\star \in \mathbf{PL}^\star$, das sich wie in 7.4.3 erläutert als ein Objekt $X \in \mathbf{Top}^\star$ auffassen läßt, und einen \mathbf{Top}^\star -Morphismus $f^\star : X^\star \rightarrow Y^\star$ gibt es noch den Begriff der **schwachen \mathbf{PL} - n -Homotopieäquivalenz**, indem man in obiger Definition außer $\dim P \leq n, \dim Q_i \leq n - 1$ die $g_i : Q_i \rightarrow X^\star$ als \mathbf{PL}^\star -Morphismen voraussetzt und zusätzlich auch \bar{H} als \mathbf{P}^\star -Morphismus fordert.

Kapitel 5

Klassifizierende Räume

Wie man seit [Haefl-T, Haefl] weiß, gibt es für die *Homotopieklassen* der numerierbaren Γ -Strukturen,

$$\Gamma(X) := \text{num-}H^1(X; \Gamma) / \simeq$$

Γ topologischer Gruppoid, einen klassifizierenden Raum $B\Gamma$, der bis auf Homotopieäquivalenz eindeutig ist.

U.a. zeigen wir in diesem Kapitel, daß für die abzählbaren Γ -Strukturen selbst ($= H^1(X; \Gamma, \mathbb{N})$) i.a. *kein* klassifizierender Raum in \mathbf{Top} existieren kann. Stattdessen existiert aber in \mathbf{Top}^\star ein klassifizierendes Objekt $B^\star\Gamma$ für diese Strukturen, das bis auf \mathbf{Top}^\star -Isomorphie eindeutig ist. Zur mathematisch präzisen Formulierung dieses Sachverhaltes führen wir den Begriff des ‘klassifizierenden Objektes relativ zu einem Funktor’ und das Eindeutigkeitsprinzip ein. Daraus leiten wir die Existenz einer eindeutigen Fortsetzung des Funktors $H^1(\cdot; \Gamma, \mathbb{N})$ auf \mathbf{Top}^\star ab, so daß diese ein klassifizierendes Objekt besitzt.

Um $B^\star\Gamma$ geeignet definieren zu können, stellen wir eine eigene Alternative zur konkreten Milnor- oder Segal-Konstruktion (s. [Mi, Se]) vor, die den bis auf Homotopieäquivalenz eindeutigen, klassifizierenden Raum $B\Gamma$ für die Homotopieklassen der abzählbaren Γ -Strukturen liefert.

Das Kapitel enthält eine direkte Charakterisierung von Blätterungen und gelifteten Gruppoid-Strukturen in Form gelifteter, klassifizierender Abbildungen.

Im vorletzten Abschnitt stellt sich das System $B^\star\Gamma$ als additiv und schön disjunkt additiv heraus.

Auf die schwachen Homotopieäquivalenzen $B\Gamma \rightarrow B^\star\Gamma$ und $B_{\text{Milnor}}\Gamma \rightarrow B\Gamma$ gehen wir im letzten Abschnitt ein.

5.1 Das Yoneda-Lemma

Wir erinnern an einige Grundtatsachen, die durch das Yoneda-Lemma (s. [McL] oder [Schub, Satz 4.4.4]) gegeben und bekannt sind.

Sei \mathcal{A} eine Kategorie. Für je zwei Objekte $A, B \in \mathcal{A}$ bezeichne $\text{Mor}(A, B)$, oder auch nur (A, B) , die Menge aller \mathcal{A} -Morphismen $A \rightarrow B$. Sei

$$F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

ein kontravarianter¹⁾ Funktor. Es ist üblich und auch bequemer, $f^* : F(B) \rightarrow F(A)$ anstatt $F(f) : F(B) \rightarrow F(A)$ für jeden \mathcal{A} -Morphismus $f : A \rightarrow B$ zu schreiben.

Ein **darstellendes Objekt** für F ist ein Objekt $Y \in \mathcal{A}$, so daß die beiden Funktoren F und $\text{Mor}(\cdot, Y)$ natürlich äquivalent sind, d.h. es existiert ein natürlicher Isomorphismus

$$T : \text{Mor}(\cdot, Y) \xrightarrow{\cong} F.$$

Wir verwenden in dieser Arbeit auch den Begriff **klassifizierendes Objekt** synonym für darstellendes Objekt. Besitzt F ein darstellendes Objekt, heißt F **darstellbar** oder synonym auch **klassifizierbar**.

Ist $T : \text{Mor}(\cdot, Y) \xrightarrow{\cong} F$ eine natürliche Äquivalenz und $f : A \rightarrow Y$ ein Morphismus aus \mathcal{A} , dann nennt man f den **klassifizierenden Morphismus** für $T(f) \in F(A)$. Sind die Morphismen von \mathcal{A} als Abbildungen im üblichen Sinne (z.B. stetige, Mengenabbildungen etc.) gegeben, so spricht man stattdessen von **klassifizierenden Abbildungen**.

Das Yoneda-Lemma besagt ganz allgemein, daß für jedes Objekt $Y \in \mathcal{A}$ eine bijektive Korrespondenz zwischen der Menge *aller* natürlichen Transformationen $\{T : (\cdot, Y) \rightarrow F\}$ und $F(Y)$ besteht, die durch

$$T \mapsto T(id_Y)$$

gestiftet wird. Daraus folgt, daß zu jeder natürlichen Transformation $T : (\cdot, Y) \rightarrow F$ genau ein Element $u \in F(Y)$ existiert, nämlich $u = T(id_Y)$, so daß T von der Gestalt

$$f \mapsto f^*(u)$$

ist. Gehört u auf diese Weise zu einer natürlichen Transformation $(\cdot, Y) \rightarrow F$, nennt man u ein **universelles Element** für F .

Sind $Y_0, Y_1 \in \mathcal{A}$ zwei Objekte, und wendet man das Yoneda-Lemma auf die beiden Funktoren $(\cdot, Y_0), (\cdot, Y_1)$ an, so bekommt man eine bijektive Korrespondenz zwischen $\text{Mor}(Y_0, Y_1)$ und der Menge aller natürlichen Transformationen

$$\text{Mor}(\cdot, Y_0) \longrightarrow \text{Mor}(\cdot, Y_1),$$

die sich mit Verkettung verträgt: Korrespondieren natürliche Transformationen $T : (\cdot, Y_0) \rightarrow (\cdot, Y_1)$ und $T' : (\cdot, Y_1) \rightarrow (\cdot, Y_2)$ zu Morphismen $f : Y_0 \rightarrow Y_1$ und $f' : Y_1 \rightarrow Y_2$, so korrespondiert $T' \circ T : (\cdot, Y_0) \rightarrow (\cdot, Y_2)$ zu $f' \circ f : Y_0 \rightarrow Y_2$.

Es gibt außerdem eine Verträglichkeit mit universellen Elementen: Sei u_0 das universelle Element zu $T_0 : (\cdot, Y_0) \rightarrow F$, u_1 das universelle Element zu $T_1 : (\cdot, Y_1) \rightarrow F$ und $f : Y_0 \rightarrow Y_1$ das universelle Element zu $t : (\cdot, Y_0) \rightarrow (\cdot, Y_1)$, so daß die Gleichung

$$T_0 = T_1 \circ t$$

¹⁾Mittels Kategoriedualisierung gilt das Yoneda-Lemma ebenso für kovariante Funktoren. Die in dieser Arbeit zu klassifizierenden Funktoren sind jedoch alle kontravariant.

erfüllt ist. Dann gilt $u_0 = f^*(u_1)$.

Daraus folgt: Ist F klassifizierbar und Y ein klassifizierendes Objekt für F mit universellem Element $u \in F(Y)$, dann ist das Paar (Y, u) bis auf Isomorphie eindeutig, weshalb man auch von *dem* klassifizierenden Objekt und *dem* universellen Element spricht.

An dieser Stelle bietet es sich an, das **Eindeutigkeitsprinzip** einzuführen. Wie eben gerade ausgeführt, wissen wir: *Wenn* ein klassifizierendes Paar (Y, u) für F existiert, ist dieses (modulo Isomorphie) eindeutig. Das Phänomen der Eindeutigkeit taucht bekanntlich bei allen universellen Konstruktionen auf, etwa bei Produkten, Koprodukten, Limites, Pullbacks, Tensorprodukten, universellenden Einhüllenden etc. Allgemein und verbal formuliert besagt das Eindeutigkeitsprinzip:

Existenz impliziert Eindeutigkeit

Die für die Topologie relevanten (kontravarianten) Funktoren F sind i.a. auf einer topologischen Kategorie (z.B. **Top**, **CW-Komplexe**, **PL** o.ä.) definiert und außerdem homotopieinvariant. Wegen dieser Homotopieinvarianz faktorisiert F durch die entsprechende Homotopiekategorie (also **Top**/ \simeq , **CW-Komplexe**/ \simeq , **PL**/ \simeq usw.) zu \tilde{F} . Dann versteht man unter einem **klassifizierenden Raum** von F ein klassifizierendes Objekt für \tilde{F} .

5.1.1 SATZ. *Es sei Γ_q der Haefliger-Gruppoid (Beispiel [8] in 3.1.1). Dann gibt es in **Top** kein darstellendes Objekt für die (Γ_q, \mathbb{N}) -, (Γ_q, e) - oder Γ_q -Strukturen.*

BEWEIS: Angenommen, es gäbe einen darstellenden Raum B für $H^1(\cdot; \Gamma_q, \mathbb{N})$. Dann gibt es nach dem Yoneda-Lemma eine universelle, abzählbare Γ_q -Struktur ω von B .

Weil Γ_q ein étale-Gruppoid mit Einheiten \mathbb{R}^q ist, existiert für den offenen Einheitsball $E^q := \{x \in \mathbb{R}^q : |x| < 1\}$ eine offene Einbettung $\gamma : E^q \hookrightarrow \mathbb{R}^q = \Gamma_q^0$, so daß γ als étale- (Γ_q, \mathbb{N}) -Kozykel von E^q aufgefaßt werden kann und demnach die (Γ_q, \mathbb{N}) -Struktur σ induziert. Nach Annahme wird daher σ durch genau eine stetige Abbildung $f : E^q \rightarrow B$ mit $\sigma = f^*\omega$ klassifiziert.

Wäre f konstant, hätte f die Form $E^q \rightarrow \text{Punkt} \hookrightarrow B$, so daß $f^*\omega$ lt. Lemma 3.3.1 niemals eine étale- Γ_q -Struktur sein könnte. Also ist f nicht konstant, so daß Punkte $x, y \in E^q$ mit $f(x) \neq f(y)$ existieren.

Sei nun φ irgendein differenzierbarer Automorphismus von E^q mit $\varphi(x) = y$. Dann ist $f \circ \varphi$ die klassifizierende Abbildung für $\varphi^*\sigma$, wobei nach Folgerung 3.3.2 $\varphi^*\sigma = \sigma$ gelten muß, was äquivalent ist zu $f \circ \varphi = f$. Insbesondere gilt dann $f(x) = f(\varphi(x)) = f(y)$ im Widerspruch zu $f(x) \neq f(y)$.

Der Beweis für die endlichen oder üblichen Γ_q -Strukturen wird genauso geführt. △

5.2 Klassifizierendes Objekt relativ zu einem Funktor

Nach der Definition eines klassifizierenden Objektes relativ zu einem Funktor zeigen wir, daß für jede Kategorie \mathcal{A} die vollen Kategorieeinbettungen

$$\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}^\rightarrow, \quad \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}^\leftarrow$$

dem Eindeutigkeitsprinzip genügen.

5.2.1 Seien \mathcal{A}, \mathcal{B} Kategorien, $i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein kovarianter und $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Set}$ ein kontravarianter Funktor. F heie **schwach klassifizierbar relativ i** , wenn ein Objekt $Y \in \mathcal{B}$ existiert, so daß die Funktoren F und $\text{Mor}(\cdot, Y) \circ i$ natürlich äquivalent sind. Y heißt dann ein **schwach klassifizierendes Objekt** für F relativ i .

Ist Y zusätzlich eindeutig modulo \mathcal{B} -Isomorphie, nennen wir F **klassifizierbar relativ i** , und Y heie dann ein **klassifizierendes Objekt** für F relativ i . Ein klassifizierendes Objekt für $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Set}$ im herkömmlichen Sinne ist also dasselbe wie ein klassifizierendes Objekt für F relativ zum Identitätsfunktors $id : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$.

Der Unterschied zwischen schwach klassifizierbar und klassifizierbar gibt zur folgenden Definition Anlaß.

DEFINITION. Ein kovarianter Funktor $i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ genüge dem Eindeutigkeitsprinzip, wenn für *jeden* kontravarianten Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Set}$ gilt:

$$\begin{aligned} & F \text{ schwach klassifizierbar relativ } i \\ \implies & F \text{ klassifizierbar relativ } i \end{aligned}$$

Die Wahl des Buchstabens i soll daran erinnern, daß die Funktoren in dieser Arbeit, die dem Eindeutigkeitsprinzip genügen, Kategorieeinbettungen sind.

5.2.2 Es gibt einige Beispiele von Funktoren, die dem Eindeutigkeitsprinzip genügen. Wir betrachten hier aber nur die Kategorieeinbettungen $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}^\rightarrow$ und $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}^\leftarrow$ und beschränken uns exemplarisch auf $i : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}^\rightarrow$. Die Argumentation für $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}^\leftarrow$ ist vollkommen analog.

LEMMA. Sei \mathcal{A} eine Kategorie mit der vollen Kategorieeinbettung $i : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}^\rightarrow$ (s. Lemma 4.1.1), $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Set}$ ein kontravarianter Funktor und $\mathcal{A}^\rightarrow = ((\Phi_i^j), (A_i), I)$ ein allgemeines induktives System aus \mathcal{A} . Dann korrespondieren die natürlichen Transformationen

$$\text{Mor}(\cdot, \mathcal{A}^\rightarrow) \circ i \longrightarrow F$$

bijektiv zu Familien $u^\rightarrow := (u_i \in F(A_i))_{i \in I}$ mit $\varphi^*(u_j) = u_i$ für alle $\varphi \in \Phi_i^j$.

BEWEIS: Sei $T : \text{Mor}(\cdot, \mathcal{A}^\rightarrow) \circ i \longrightarrow F$ eine natürliche Transformation. Insbesondere ordnet T jedem kanonischen Morphismus $\alpha_i : A_i \rightarrow \mathcal{A}^\rightarrow$ (s. 4.1.1) ein Element $u_i =$

$T(\alpha_i) \in F(A_i)$ zu. Ist nun $X \in \mathcal{A}$ ein Objekt aus \mathcal{A} und $f_i : X \rightarrow A_i$ Repräsentant eines Morphismus $f^\blacktriangleright : X \rightarrow \mathcal{A}^\blacktriangleright$, so gilt

$$T(f^\blacktriangleright) = f_i^*(u_i)$$

wegen $f^\blacktriangleright = \alpha_i \circ f_i$ und der Natürlichkeit von T . Da für alle $\varphi \in \Phi_i^j$ die Gleichung $\alpha_i = \alpha_j \circ \varphi$ besteht, erhalten wir speziell die gewünschte Beziehung $\varphi^*(u_j) = u_i$, womit $u^\blacktriangleright := (u_i)_{i \in I}$ definiert ist.

Wir müssen noch eine dazu inverse Zuordnung definieren. Sei ein Familie $u^\blacktriangleright := (u_i \in F(A_i))_{i \in I}$ mit $\varphi^*(u_j) = u_i$ für alle $\varphi \in \Phi_i^j$ gegeben, die wie folgt eine natürliche Transformation T induziert: Ist $f_i : X \rightarrow A_i$ Repräsentant eines Morphismus $f^\blacktriangleright : X \rightarrow \mathcal{A}^\blacktriangleright$, und setzen wir $T(f^\blacktriangleright) := f_i^*(u_i)$, so ist $T(f^\blacktriangleright)$ wegen $(\varphi \circ f_i)^*(u_j) = f_i^*(\varphi^*(u_j)) = f_i^*(u_i)$ unabhängig vom Repräsentanten wohldefiniert. Die Natürlichkeit von T ergibt sich sofort aus der Kontravarianz von F . Weil $\alpha_i : A_i \rightarrow \mathcal{A}^\blacktriangleright$ durch id_{A_i} repräsentiert wird, gilt $T(\alpha_i) = id_{A_i}^*(u_i) = u_i$ für alle i . Die Inversionseigenschaft in der umgekehrten Richtung ergibt sich direkt aus $T(f^\blacktriangleright) := f_i^*(u_i)$. \triangle

KOROLLAR. *Eine natürliche Transformation $T : \text{Mor}(\cdot, \mathcal{A}^\blacktriangleright) \circ i \rightarrow F$ korrespondiere lt. vorigem Lemma zum System $u^\blacktriangleright = (u_i)$. Dann ist T genau dann eine natürliche Äquivalenz, wenn u^\blacktriangleright für jedes Objekt $X \in \mathcal{A}$ die beiden folgenden Eigenschaften besitzt:*

- (1) Zu jedem $v \in F(X)$ existiert ein $i \in I$ und ein \mathcal{A} -Morphismus $f : X \rightarrow A_i$ mit $v = f^*(u_i)$.
- (2) Je zwei \mathcal{A} -Morphismen $f : X \rightarrow A_i, g : X \rightarrow A_j$ mit $f^*(u_i) = g^*(u_j)$ sind cofinal gleich. \triangle

FOLGERUNG. (a): *Sei \mathcal{A} eine Kategorie. Dann genügen die vollen Kategorieeinkbettungen $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}^\blacktriangleright, \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}^\blacktriangleright$ beide dem Eindeutigkeitsprinzip.*

(b): *Sei $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Set}$ ein kontravarianter Funktor. Dann sind äquivalent:*

- (i) F ist schwach klassifizierbar relativ $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}^\blacktriangleright$.
- (ii) F besitzt eine klassifizierbare Fortsetzung $F^\blacktriangleright : \mathcal{A}^\blacktriangleright \rightarrow \mathbf{Set}$.

Gilt (i) oder (ii), ist F^\blacktriangleright bis auf natürliche Isomorphie eindeutig.

(c): *Sei $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Set}$ ein kontravarianter Funktor. Dann sind äquivalent:*

- (i) F ist schwach klassifizierbar relativ $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}^\blacktriangleright$.
- (ii) F besitzt eine klassifizierbare Fortsetzung $F^\blacktriangleright : \mathcal{A}^\blacktriangleright \rightarrow \mathbf{Set}$.

Gilt (i) oder (ii), ist F^\star bis auf natürliche Isomorphie eindeutig.

BEWEIS: Wie bereits erwähnt, verläuft der Beweis für $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}^\star$ ganz analog wie für $i : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}^\star$.

(a): Seien $A^\star = ((\Phi_i^j), (A_i), I)$ und $A'^\star = ((\Psi_i^j), (A'_i), I')$ jeweils zwei schwach klassifizierende Objekte für einen Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Set}$ relativ $i : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}^\star$. Dann liefern die natürlichen Äquivalenzen $(\cdot, A^\star) \circ i \rightarrow F$ und $(\cdot, A'^\star) \circ i \rightarrow F$ eine natürliche Äquivalenz

$$T : (\cdot, A^\star) \circ i \xrightarrow{\cong} (\cdot, A'^\star) \circ i,$$

mit der sich ein \mathcal{A}^\star -Morphismus $f^\star : A^\star \rightarrow A'^\star$ wie folgt konstruieren läßt: Wendet man T auf den kanonischen, einfachen \mathcal{A}^\star -Morphismus $\alpha_i : A_i \rightarrow A^\star$ aus Beispiel 4.1.1 an, so erhält man den einfachen \mathcal{A}^\star -Morphismus

$$f_i := T(\alpha_i) : A_i \rightarrow A'^\star$$

für jedes $i \in I$. Mit Ausnutzung der Natürlichkeit von T und der Kompatibilitätsbedingung $\alpha_j \circ \varphi = \alpha_i$ für jeden Systemmorphismus $\varphi \in \Phi_i^j$ bekommt man die Gleichungen

$$f_i = T(\alpha_i) = T(\alpha_j \circ \varphi) = T(\alpha_j) \circ \varphi = f_j \circ \varphi.$$

Daher stellt $f^\star := (f_i)$ ein \mathcal{A}^\star -Morphismus von A^\star nach A'^\star mit den Komponenten f_i dar. Wir zeigen nun, daß die von f^\star durch Verkettungen induzierte natürliche Transformation $(\cdot, A^\star) \circ i \rightarrow (\cdot, A'^\star) \circ i$ mit T übereinstimmt: Für jeden Repräsentanten $g_i : X \rightarrow A_i$ eines beliebigen, einfachen \mathcal{A}^\star -Morphismus $g : X \rightarrow A^\star$ gilt wegen der Natürlichkeit von T die Gleichungskette

$$T(g) = T(\alpha_i \circ g_i) = T(\alpha_i) \circ g_i = f_i \circ g_i = f^\star \circ \alpha_i \circ g_i = f^\star \circ g.$$

Ganz analog erhält man einen \mathcal{A}^\star -Morphismus $g^\star : A'^\star \rightarrow A^\star$, der die inverse Äquivalenz T^{-1} induziert. Somit sind $g^\star \circ f^\star : A^\star \rightarrow A^\star$ und $f^\star \circ g^\star : A'^\star \rightarrow A'^\star$ beide \mathcal{A}^\star -Morphismen, die jeweils die identische Transformation induzieren und daher nach dem Yoneda-Lemma jeweils die Identität selbst sind, d.h. f^\star und g^\star sind zueinander inverse \mathcal{A}^\star -Isomorphismen.

(b): (i) \Rightarrow (ii): Existenz von F^\star : Für jedes Objekt $A^\star = ((\Phi_i^j), (A_i), I)$ aus \mathcal{A}^\star definieren wir

$$F^\star(A^\star) := \{ (w_i)_{i \in I} \mid w_i \in F(A_i), \text{ s.d. } \varphi^*(w_j) = w_i \text{ für alle } \varphi \in \Phi_i^j \}.$$

Sei $f^\star : B^\star \rightarrow A^\star$ ein \mathcal{A}^\star -Morphismus mit den Komponenten $f_l : B_l \rightarrow A^\star$. Wegen der Kompatibilitätsbedingung $\varphi^*(w_j) = w_i$ in der Definition von $F^\star(A^\star)$ ist $v_l := f_{l,i}^*(w_i)$ unabhängig vom Repräsentanten $f_{l,i} : B_l \rightarrow A_i$ von f_l für alle l wohldefiniert. Aus dem gleichen Grunde ist dann auch $f^{\star\star}((w_i)) := (v_l)$ eine kompatible Familie. Wegen der Definition von $f^{\star\star}$ über Repräsentanten werden auch Verkettungen respektiert; also ist F^\star definiert. Außerdem ist es mit Korollar 5.2.2 nicht schwer einzusehen, daß ein klassifizierendes Objekt für F relativ $i : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}^\star$ auch ein klassifizierendes Objekt für F^\star ist.

(ii) \Rightarrow (i): Gibt es eine Fortsetzung F^\star mit klassifizierendem Objekt Y^\star , so ist F^\star natürlich isomorph zu (\cdot, Y^\star) . Dann ist auch $F = F^\star \circ i$ natürlich isomorph zu $(\cdot, Y^\star) \circ i$

und Y^\star daher ein klassifizierendes Objekt für F relativ i . Wie erwähnt, wird (c) ganz analog gezeigt. \triangle

BEMERKUNG. Die Folgerung eröffnet eine Möglichkeit, natürliche Isomorphie zwischen zwei Funktorfortsetzungen $F_0^\star, F_1^\star : \mathcal{A}^\star \rightarrow \mathbf{Set}$ eines Funktors $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Set}$ zu beweisen, indem man zeigt, daß F_0^\star und F_1^\star beide klassifizierbar sind (analog für \mathcal{A}^\star).

5.3 Eigene Konstruktion klassifizierender Räume

Γ sei eine topologische Kategorie und Λ eine Menge. Für den Funktor $Z^1(\cdot; \Gamma, \Lambda)$ aus 3.2.1 (also die (Γ, Λ) -Kozykel) konstruieren wir einen (bis auf Homöomorphie eindeutigen) klassifizierenden Raum $B(\Gamma, \Lambda)$. Weil die traditionellen Konstruktionen von SEGAL und MILNOR hierfür ungeeignet sind, müssen wir eine eigene Konstruktion vorstellen, die aber trotzdem von einfacher Gestalt ist.

5.3.1 Wir beginnen mit einer Art Kegelkonstruktion $\bar{C}X$ für jeden topologischen Raum X . Als Menge ist

$$\bar{C}X := X \dot{\cup} *$$

mit der Topologie

$$\{\bar{C}X\} \cup \{U \mid U \subset X \text{ offen}\}.$$

X ist damit offener, topologischer Unterraum von $\bar{C}X$. Die Topologisierung ist gerade so getroffen, daß $\bar{C}X$ folgende allgemeine **Kegeleigenschaft** besitzt:

Ist $U \subset Y$ offene Teilmenge eines topologischen Raumes Y und $f : U \rightarrow X$ stetig, so existiert genau eine stetige Fortsetzung $F : Y \rightarrow \bar{C}X$ von f mit $F^{-1}(X) = U$, nämlich

$$F(y) = \begin{cases} f(y), & \text{falls } y \in U \\ *, & \text{sonst} \end{cases}$$

Selbstverständlich gilt auch folgende Stetigkeitseigenschaft:

Ist $U \subset Y$ offene Teilmenge eines topologischen Raumes Y und $f : U \rightarrow \bar{C}X$ stetig, so ist auch die Fortsetzung $F : Y \rightarrow \bar{C}X$ von f mit

$$F(y) = \begin{cases} f(y), & \text{falls } y \in U \\ *, & \text{sonst} \end{cases}$$

stetig.

Für eine feste Menge Λ und eine topologische Kategorie Γ bilden wir den Raum

$$(\bar{C}\Gamma)^{\Lambda \times \Lambda}$$

mit der üblichen Produkttopologie. Ein Element aus $(\bar{C}\Gamma)^{\Lambda \times \Lambda}$ schreiben wir als (γ_{ij}) . Daher ist γ_{ij} die ij -Komponente von (γ_{ij}) .

DEFINITION. $B(\Gamma, \Lambda)$ sei durch folgende Eigenschaften als topologischer Unterraum von $(\bar{C}\Gamma)^{\Lambda \times \Lambda}$ definiert:

- (1) $(\gamma_{ij}) \in B(\Gamma, \Lambda) \Rightarrow \exists i \in \Lambda$ mit $\gamma_{ii} \neq *$.
- (2) Für alle $\lambda, \mu \in \Lambda$ und jedes $(\gamma_{ij}) \in B(\Gamma, \Lambda)$ gilt:
 $\gamma_{\lambda\mu} \neq * \iff \gamma_{\lambda\lambda} \neq *$ und $\gamma_{\mu\mu} \neq *$.
- (3) Jedes $(\gamma_{ij}) \in B(\Gamma, \Lambda)$ erfüllt die Kozykelbedingung: Sind $i, j, k \in \Lambda$, $(\gamma_{ij}) \in B(\Gamma, \Lambda)$ mit $\gamma_{ij} \neq *$, $\gamma_{jk} \neq *$, dann ist $\gamma_{ij}\gamma_{jk}$ definiert, und es gilt $\gamma_{ik} = \gamma_{ij}\gamma_{jk}$.

Als nächstes definieren wir das universelle (Γ, Λ) -Kozykel ω auf $B(\Gamma, \Lambda)$:

Für jedes $i \in \Lambda$ sei

$$U_i := \{(\gamma_{\lambda\mu}) \in B(\Gamma, \Lambda) \mid \gamma_{ii} \neq *\}.$$

Nach Eigenschaft (1) obiger Definition ist $(U_i)_{i \in \Lambda}$ eine offene Überdeckung von $B(\Gamma, \Lambda)$. Für jedes Paar $(i, j) \in \Lambda \times \Lambda$ sei $\omega_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \Gamma$ unter Beachtung von Eigenschaft (2) definiert als die Einschränkung (auf $U_i \cap U_j$) der Projektion auf die ij -Komponente. Wegen Eigenschaft (3) erfüllt $\omega := ((U_i), (\omega_{ij}))$ automatisch die Kozykelbedingung, so daß ω ein (Γ, Λ) -Kozykel auf $B(\Gamma, \Lambda)$ ist.

SATZ. $B(\Gamma, \Lambda)$ ist das klassifizierende Objekt für $Z^1(\cdot; \Gamma, \Lambda) : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ mit universellem Element ω .

BEWEIS: Sei X ein topologischer Raum und $\gamma = ((V_i)_{i \in \Lambda}, (\gamma_{ij})_{i, j \in \Lambda})$ ein (Γ, Λ) -Kozykel auf X zur offenen Überdeckung (V_i) . Zu zeigen ist die Existenz genau einer stetigen Abbildung

$$f : X \longrightarrow B(\Gamma, \Lambda)$$

mit $\gamma = f^*\omega$. Für jedes Paar $(i, j) \in \Lambda \times \Lambda$ sei

$$f_{ij} : X \longrightarrow \bar{C}\Gamma$$

gemäß der Kegeleigenschaft von $\bar{C}\Gamma$ die eindeutige, stetige Fortsetzung von $\gamma_{ij} : V_i \cap V_j \rightarrow \Gamma$ mit $f_{ij}^{-1}(\Gamma) = V_i \cap V_j$. Das Produkt der f_{ij} über alle Paare (i, j) definiert eine stetige Abbildung

$$f : X \longrightarrow (\bar{C}\Gamma)^{\Lambda \times \Lambda},$$

wobei $f(X) \subset B(\Gamma, \Lambda)$ gelten soll: Sei $x \in X$ beliebig. Da X von (V_i) überdeckt wird, gibt es einen Index i mit $x \in V_i$, so daß $f_{ii}(x) = \gamma_{ii}(x) \neq *$ und damit $f(x) \in U_i$ gilt. Daß $f(x)$ die Eigenschaft (2) aus der Definition erfüllt, sieht man mit

$$f_{ij}(x) \neq * \iff x \in V_i \cap V_j \iff f_{ii}(x) \neq * \text{ und } f_{jj}(x) \neq *.$$

Weil γ der Kozykelbedingung genügt, folgt wegen der Äquivalenz

$$f_{ij}(x) \neq * \text{ und } f_{jk}(x) \neq * \iff x \in V_i \cap V_j \cap V_k$$

auch die Eigenschaft (3) für $f(x)$, d.h. f ist eine stetige Abbildung

$$f : X \longrightarrow B(\Gamma, \Lambda).$$

Behauptung: $\gamma = f^*\omega$.

Beweis: Mit der Gleichung

$$(\star) \quad f^{-1}(U_i) = \{x \in X \mid (f(x))_{ii} = f_{ii}(x) \neq *\} = f_{ii}^{-1}(\Gamma)$$

und der Konstruktionsbedingung $f_{ii}^{-1}(\Gamma) = V_i$ für alle i erhalten wir $f^{-1}(U_i) = V_i$. Ferner gilt

$$f^*\omega_{ij} = \omega_{ij} \circ (f|_{V_i \cap V_j}) = f_{ij}|_{V_i \cap V_j} = \gamma_{ij}$$

und daher $\gamma = f^*\omega$.

Zur Eindeutigkeit von f : Sei $f : X \rightarrow B(\Gamma, \Lambda)$ irgendeine stetige Abbildung mit $\gamma = f^*\omega$. Mit f_{ij} bezeichnen wir die ij -Komponente von f . Dann gilt zunächst $V_i = f^{-1}(U_i) = f_{ii}^{-1}(\Gamma)$ (Gleichung (\star)), d.h. $x \in V_i \iff f_{ii}(x) \neq *$. Nun greift die Eigenschaft (2) von $B(\Gamma, \Lambda)$:

$$x \in V_i \cap V_j \iff f_{ii}(x) \neq * \text{ und } f_{jj}(x) \neq * \iff f_{ij}(x) \neq *.$$

Daher ist f_{ij} eindeutig durch $V_i \cap V_j$ und

$$f_{ij}|_{V_i \cap V_j} = f^*\omega_{ij} = \gamma_{ij}$$

festgelegt, also durch γ . △

Wie wir uns gleich überlegen werden, verhält sich $B(\Gamma, \Lambda)$ bei festem Λ funktoriell in der Γ -Komponente: Ein stetiger Kategoriemorphismus

$$\varphi : \Gamma_0 \longrightarrow \Gamma_1$$

(also ein stetiger Funktor) zwischen topologischen Kategorien Γ_0, Γ_1 induziert eine stetige Abbildung $\bar{\varphi} : \bar{C}\Gamma_0 \rightarrow \bar{C}\Gamma_1$ und diese wiederum eine stetige Abbildung

$$\bar{\varphi}^{\Lambda \times \Lambda} : (\bar{C}\Gamma_0)^{\Lambda \times \Lambda} \longrightarrow (\bar{C}\Gamma_1)^{\Lambda \times \Lambda}.$$

Behauptung: $\bar{\varphi}^{\Lambda \times \Lambda} : (B(\Gamma_0, \Lambda)) \subset B(\Gamma_1, \Lambda)$.

Beweis: Nach Definition hat $\bar{\varphi}^{\Lambda \times \Lambda}$ die Form

$$\bar{\varphi}^{\Lambda \times \Lambda}((\gamma_{ij})) = (\bar{\varphi}(\gamma_{ij})),$$

so daß für jedes $(\gamma_{ij}) \in B(\Gamma_0, \Lambda)$ wegen der Äquivalenz $\gamma \neq * \iff \bar{\varphi}(\gamma) \neq *$ die Eigenschaften (1),(2) (in letzter Definition) auch für $\bar{\varphi}^{\Lambda \times \Lambda}((\gamma_{ij}))$ erfüllt sind. Aufgrund der Funktorialität von φ gilt aber Eigenschaft (3) ebenfalls.

FOLGERUNG. Für jede feste Menge Λ ist $B(\cdot, \Lambda)$ ein kovarianter Funktor

$$B(\cdot, \Lambda) : \mathbf{Topologische\ Kategorien} \longrightarrow \mathbf{Top.}$$

Die induzierte, stetige Abbildung $B(\varphi, \Lambda) : B(\Gamma_0, \Lambda) \rightarrow B(\Gamma_1, \Lambda)$ eines stetigen Kategoriemorphismus $\varphi : \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_1$ verträgt sich dabei mit den natürlichen Isomorphismen aus Satz 5.3.1, d.h. das Diagramm von natürlichen Transformationen

$$\begin{array}{ccc} (\cdot, B(\Gamma_0, \Lambda)) & \xrightarrow{\cong} & Z^1(\cdot; \Gamma_0, \Lambda) \\ \varphi_* \downarrow & & \downarrow Z^1(\varphi, \Lambda) \\ (\cdot, B(\Gamma_1, \Lambda)) & \xrightarrow{\cong} & Z^1(\cdot; \Gamma_1, \Lambda) \end{array}$$

ist kommutativ, wobei φ_* die von $B(\varphi, \Lambda) : B(\Gamma_0, \Lambda) \rightarrow B(\Gamma_1, \Lambda)$ induzierte natürliche Transformation $(\cdot, B(\Gamma_0, \Lambda)) \rightarrow (\cdot, B(\Gamma_1, \Lambda))$ bezeichne.

BEWEIS: $B(\varphi, \Lambda)$ wird als $\bar{\varphi}^{\Lambda \times \Lambda}|_{B(\Gamma_0, \Lambda)} : B(\Gamma_0, \Lambda) \rightarrow B(\Gamma_1, \Lambda)$ definiert (s. obige Behauptung), womit $B(\cdot, \Lambda)$ evidenterweise funktoriell ist.

Zur Kommutativität des Diagramms: Mit ω_i , $i = 0, 1$, bezeichnen wir das universelle (Γ_i, Λ) -Kozykel auf $B(\Gamma_i, \Lambda)$. Mittels der einfachen Definition der universellen Kozykel über Komponentenprojektion sieht man ganz direkt die Beziehung

$$Z^1(\varphi, \Lambda)(\omega_0) = B(\varphi, \Lambda)^*(\omega_1).$$

Ist $f : X \rightarrow B(\Gamma, \Lambda)$ stetig, so erhalten wir damit und unter Ausnutzung der Natürlichkeit von $Z^1(\varphi, \Lambda)$ die Gleichungskette

$$\begin{aligned} Z^1(\varphi, \Lambda)(f^*\omega_0) &= f^*(Z^1(\varphi, \Lambda)\omega_0) \\ &= f^*(B(\varphi, \Lambda)^*\omega_1) \\ &= (B(\varphi, \Lambda) \circ f)^*\omega_1, \end{aligned}$$

mit der die Kommutativität des Diagramms bewiesen ist. △

5.3.2 Es sollte noch herausgearbeitet werden, wieso es für eine feste, topologische Kategorie Γ *keinen* Funktor $B(\Gamma, \cdot)$ gibt.

Beginnen wir mit einfachen, allgemeinen Sachverhalten. X sei ein topologischer Raum und $f : \Lambda \rightarrow \tilde{\Lambda}$ eine Mengenabbildung. Dann induziert f eine stetige Abbildung²⁾

$$f^* : X^{\tilde{\Lambda}} \longrightarrow X^{\Lambda}$$

²⁾Diese Konstruktion ist allgemein in allen Kategorien möglich, die Produkte besitzen.

von der konkreten Gestalt $(x_b)_{b \in \tilde{\Lambda}} \mapsto (y_a)_{a \in \Lambda}$ mit $y_a = x_{f(a)}$ für alle $a \in \Lambda$. Hier liegt also ein kontravarianter Funktor vor.

Jede Mengenabbildung $f : \Lambda \rightarrow \tilde{\Lambda}$ induziert die Mengenabbildung $f \times f : \Lambda \times \Lambda \rightarrow \tilde{\Lambda} \times \tilde{\Lambda}$ und diese dann

$$(f \times f)^* : X^{\tilde{\Lambda} \times \tilde{\Lambda}} \longrightarrow X^{\Lambda \times \Lambda}$$

von der konkreten Form $(x_{bb'}) \mapsto (y_{aa'})$ mit

$$(\star) \quad y_{aa'} = x_{f(a)f(a')}.$$

Auch dieser Übergang ist ein kontravarianter Funktor $\mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Top}$.

Wir wenden letzteres auf $X = \bar{C}\Gamma$ an, wodurch wir für jede Mengenabbildung $f : \Lambda \rightarrow \tilde{\Lambda}$ eine stetige Abbildung

$$(f \times f)^* : (\bar{C}\Gamma)^{\tilde{\Lambda} \times \tilde{\Lambda}} \longrightarrow (\bar{C}\Gamma)^{\Lambda \times \Lambda}$$

bekommen. Wie man an (\star) erkennen kann, erfüllt jedes $(f \times f)^*(\gamma_{ij})$ mit $(\gamma_{ij}) \in B(\Gamma, \tilde{\Lambda})$ die Eigenschaften (2) und (3) aus Definition 5.3.1, aber i.a. nicht (1), da f nicht surjektiv zu sein braucht. Wir halten daher fest:

Jede *surjektive* Mengenabbildung $f : \Lambda \rightarrow \tilde{\Lambda}$ induziert eine stetige Abbildung $B(\Gamma, \tilde{\Lambda}) \rightarrow B(\Gamma, \Lambda)$.

Wir müssen aber mit Injektionen $\Lambda \hookrightarrow \tilde{\Lambda}$ arbeiten, worauf wir im nächsten Abschnitt noch näher eingehen.

5.4 Das klassifizierende System

Anknüpfend an 5.3.2 definieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ den Raum $B_n(\Gamma, \Lambda)$ (wobei $B_0(\Gamma, \Lambda) = B(\Gamma, \Lambda)$), interpretieren diesen als klassifizierendes Objekt für spezielle Γ -Kozykel und konstruieren danach $B^\star(\Gamma, \Lambda) \in \mathbf{Top}^\star$. $B^\star\Gamma := B^\star(\Gamma, \mathbb{N})$ erweist sich dann als klassifizierendes Objekt für die abzählbaren Γ -Strukturen $H^1(\cdot; \Gamma, \mathbb{N})$.

5.4.1 Wie bereits vorher sei Γ eine topologische Kategorie und Λ eine Menge. Als Vorbereitung zur Konstruktion von $B_n(\Gamma, \Lambda)$ definieren wir einen kovarianten Funktor

$$\cdot_\Lambda : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{ss-Top},$$

der jedem topologischen Raum X einen ss. Raum X_Λ zuordnet.

Wie bei [La] sei für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$[n] := \{0, \dots, n\}$$

mit der natürlichen Ordnung versehen. Ferner setzen wir

$$\Lambda_n := \Lambda \times [n].$$

Für jeden topologischen Raum X sei

$$X_{\Lambda,n} := X^{\Lambda_n \times \Lambda_n}$$

mit der Produkttopologie. Eine monotone Abbildung $\alpha : [m] \rightarrow [n]$ induziert die Abbildung $id_{\Lambda} \times \alpha =: \alpha_* : \Lambda_m \rightarrow \Lambda_n$, infolge dessen die Abbildung $\alpha_* \times \alpha_* : \Lambda_m \times \Lambda_m \rightarrow \Lambda_n \times \Lambda_n$ und diese wie in 5.3.2 die stetige Abbildung

$$\alpha^* := (\alpha_* \times \alpha_*)^* : X_{\Lambda,n} \longrightarrow X_{\Lambda,m},$$

womit der ss. Raum X_{Λ} vollständig definiert ist. Auf die Funktorialität von \cdot_{Λ} soll hier nicht näher eingegangen werden, da sie ohnehin relativ leicht einzusehen ist.

Für eine monotone Injektion $\alpha : [m] \hookrightarrow [n]$ ist die induzierte Abbildung $\alpha^* : X_{\Lambda,n} \longrightarrow X_{\Lambda,m}$ dasselbe wie die Projektion von $X_{\Lambda,n}$ auf das Teilprodukt mit den Komponenten $\Lambda_m \times \Lambda_m$.

Wir wenden uns nun der Konstruktion von $B_n(\Gamma, \Lambda)$ zu und vergegenwärtigen uns zuerst die Beziehungen

$$\Lambda_0 = \Lambda, (\bar{C}\Gamma)_{\Lambda,0} = (\bar{C}\Gamma)^{\Lambda \times \Lambda}, B(\Gamma, \Lambda_n) \subset (\bar{C}\Gamma)_{\Lambda,n},$$

und daß jede Abbildung $\alpha : [0] \rightarrow [n]$ eine stetige Abbildung

$$\alpha^* : (\bar{C}\Gamma)_{\Lambda,n} \longrightarrow (\bar{C}\Gamma)_{\Lambda,0}$$

induziert. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ setzen wir

$$B_n(\Gamma, \Lambda) := B(\Gamma, \Lambda_n) \cap \bigcap_{\alpha:[0] \rightarrow [n]} (\alpha^*)^{-1}(B(\Gamma, \Lambda)).$$

Weil, wie wir in 5.3.2 gesehen haben, höchstens nur die Eigenschaft (1) aus Definition 5.3.1 verletzt ist, kann man $B_n(\Gamma, \Lambda)$ auch ganz direkt durch

$$B_n(\Gamma, \Lambda) = \{ (\gamma_{ij}) \in B(\Gamma, \Lambda_n) \mid \forall i \in [n] \exists \lambda \in \Lambda \times \{i\} \text{ mit } \gamma_{\lambda\lambda} \neq * \}$$

beschreiben. Wem das sympathischer erscheint, mag diese direkte Form als Definition von $B_n(\Gamma, \Lambda)$ wählen. Die Definition von $B_n(\Gamma, \Lambda)$ ist gerade so getroffen, daß jede Abbildung $\alpha : [0] \rightarrow [n]$ eine stetige Abbildung

$$\alpha^* : B_n(\Gamma, \Lambda) \longrightarrow B_0(\Gamma, \Lambda) = B(\Gamma, \Lambda)$$

induziert.

Daraus ergibt sich auch sofort die klassifizierende Bedeutung von $B_n(\Gamma, \Lambda)$, nämlich, daß $B_n(\Gamma, \Lambda)$ das klassifizierende Objekt für solche (Γ, Λ_n) -Kozykel $\gamma = ((V_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda_n}, (\gamma_{ij})_{i,j \in \Lambda_n})$ ist, so daß $(V_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda \times \{i\}}$ für alle $i \in [n]$ eine offene Überdeckung (des betreffenden Raumes) liefert. Für jedes $i \in [n]$ ist daher die Einschränkung $\gamma|_{\Lambda \times \{i\}}$ definiert und stellt ein (Γ, Λ) -Kozykel dar. Ist $f : X \rightarrow B_n(\Gamma, \Lambda)$ die klassifizierende Abbildung für γ , und $\alpha : [0] \rightarrow [n]$ die eindeutige Abbildung mit $\alpha(0) = i$, so ist $\alpha^* \circ f$ die klassifizierende Abbildung für $\gamma|_{\Lambda \times \{i\}}$. Alle diese Einschränkungen von γ induzieren übrigens dieselbe Γ -Struktur.

5.4.2 Was uns noch zur Definition des projektiven **Top**-Systems $B^\bullet(\Gamma, \Lambda)$ fehlt, ist die Definition der Morphismenmenge $\Phi_n^m : B_m(\Gamma, \Lambda) \rightarrow B_n(\Gamma, \Lambda)$ und der Nachweis der Systemeigenschaften (1)–(3) in 4.3.1.

Für $m \geq n$ induziert jede injektive, monotone Abbildung $\alpha : [n] \hookrightarrow [m]$ eine stetige Abbildung $\alpha^* : (\bar{C}\Gamma)_{\Lambda, m} \rightarrow (\bar{C}\Gamma)_{\Lambda, n}$, die einfach durch die Projektion auf die Komponenten mit Paarindizes aus $\Lambda \times [n] \subset \Lambda \times [m]$ gegeben ist, wobei $[n]$ mit $\alpha([n])$ identifiziert wird. Weil es sowieso nur um den Erhalt der Eigenschaft (1) aus Definition 5.3.1 geht, folgt aus der direkten Beschreibung von $B_k(\Gamma, \Lambda)$, daß α^* durch Einschränken tatsächlich eine stetige Abbildung

$$\alpha^* : B_m(\Gamma, \Lambda) \longrightarrow B_n(\Gamma, \Lambda)$$

induziert. Daher können wir für $m \geq n$

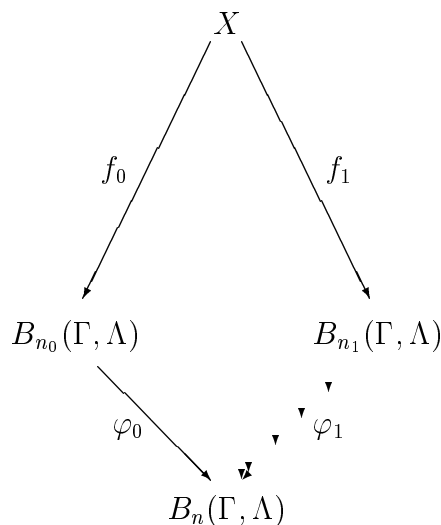
$$\Phi_n^m := \{ \alpha^* : B_m(\Gamma, \Lambda) \longrightarrow B_n(\Gamma, \Lambda) \mid \alpha : [n] \hookrightarrow [m] \text{ injektiv und monoton} \}$$

setzen, so daß nur noch die Eigenschaft (3) (Vollständigkeit) verifiziert werden muß. Vorher aber noch ein

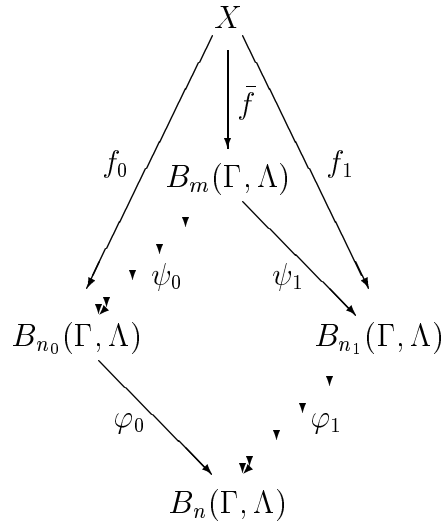
LEMMA. Sei X ein topologischer Raum, $f : X \rightarrow B_m(\Gamma, \Lambda)$ stetig und $\varphi : B_m(\Gamma, \Lambda) \rightarrow B_n(\Gamma, \Lambda)$ als Element von Φ_n^m von einer monotonen Einbettung $\alpha : [n] \hookrightarrow [m]$ induziert. Λ_n werde mittels $\alpha_* : \Lambda_n \hookrightarrow \Lambda_m$ als Teilmenge von Λ_m aufgefaßt. Entspricht f dem (Γ, Λ_m) -Kozykel γ_m auf X und $\varphi \circ f$ dem (Γ, Λ_n) -Kozykel γ_n , so ist $\gamma_n = \gamma_m|_{\Lambda_n}$.

BEWEIS: φ ist ja die Projektion auf Komponenten mit Indizes $\Lambda_n \times \Lambda_n$, d.h. die übrigen Komponenten werden einfach vergessen, was der klassifizierenden Abbildung von $\gamma_m|_{\Lambda_n}$ entspricht. △

Seien folgende Daten gegeben: ein topologischer Raum X , $n \leq n_0, n_1$, $\varphi_0 \in \Phi_n^{n_0}, \varphi_1 \in \Phi_n^{n_1}$ jeweils induziert von monotonen Einbettungen $\alpha_0 : [n] \hookrightarrow [n_0], \alpha_1 : [n] \hookrightarrow [n_1]$, sowie stetige Abbildungen $f_0 : X \rightarrow B_{n_0}(\Gamma, \Lambda), f_1 : X \rightarrow B_{n_1}(\Gamma, \Lambda)$ mit $\varphi_0 \circ f_0 = \varphi_1 \circ f_1 =: f$. Das kommutative Diagramm



veranschaulicht die Ausgangssituation. Gesucht ist eine Diagrammergänzung



mit $m \geq n_0, n_1$ und $\psi_0 \in \Phi_{n_0}^m, \psi_1 \in \Phi_{n_1}^m$.

Was man sich zuerst (z.B. induktiv) überlegt, ist die Existenz einer natürlichen Zahl $m \geq n_0, n_1$ und monotoner Einbettungen $\beta_0 : [n_0] \hookrightarrow [m], \beta_1 : [n_1] \hookrightarrow [m]$ mit

- $[m] = \beta_0([n_0]) \cup \beta_1([n_1]),$
- $\beta_0 \circ \alpha_0 = \beta_1 \circ \alpha_1.$

Diese Einbettungen induzieren dann entsprechende Einbettungen $\alpha_{0,*} : \Lambda_n \hookrightarrow \Lambda_{n_0}$, usw., so daß die analogen Bedingungen gelten. Betten wir alles in Λ_m ein, bekommen wir also die beiden Bedingungen

- $\Lambda_m = \Lambda_{n_0} \cup \Lambda_{n_1},$
- $\Lambda_{n_0} \cap \Lambda_{n_1} = \Lambda_n.$

Jetzt nutzen wir die klassifizierende Bedeutung von f_0, f_1, f aus: f_0 entspreche dem (Γ, Λ_{n_0}) -Kozykel γ_0 , f_1 dem (Γ, Λ_{n_1}) -Kozykel γ_1 und f dem (Γ, Λ_n) -Kozykel γ . Nach letztem Lemma gilt dann $\gamma \leq \gamma_0, \gamma_1$, so daß nach Lemma 3.2.1 ein (Γ, Λ_m) -Kozykel $\bar{\gamma}$ auf X existiert mit

$$\bar{\gamma}|_{\Lambda_{n_0}} = \gamma_0 \quad \text{und} \quad \bar{\gamma}|_{\Lambda_{n_1}} = \gamma_1.$$

Sei $\bar{f} : X \rightarrow B(\Gamma, \Lambda_m)$ die klassifizierende Abbildung für $\bar{\gamma}$. Weil für jedes $i \in [m]$ das eingeschränkte Kozykel $\bar{\gamma}|_{\Lambda \times \{i\}}$ definiert ist, bildet \bar{f} sogar nach $B_m(\Gamma, \Lambda) \subset B(\Gamma, \Lambda_m)$ ab. Sind $\psi_0 \in \Phi_{n_0}^m$ und $\psi_1 \in \Phi_{n_1}^m$ die von β_0 bzw. β_1 induzierten Abbildungen, erhalten wir daher (wieder wegen letztem Lemma) wie gewünscht die Identitäten $f_0 = \psi_0 \circ \bar{f}$ und $f_1 = \psi_1 \circ \bar{f}$. Dies ist der Beweis von

FOLGERUNG. *Mit den üblichen Voraussetzungen (Γ topologische Kategorie, Λ Menge) ist $B^\blacktriangleright(\Gamma, \Lambda) := ((\Phi_n^m), (B_n(\Gamma, \Lambda)), \mathbb{N}_0)$ ein allgemeines projektives topologisches System, also ein Objekt aus $\mathbf{Top}^\blacktriangleright$.* △

Wir spezialisieren uns nun auf den Fall $\Lambda = \mathbb{N}$ und verwenden die Abkürzungen

$$B\Gamma := B(\Gamma, \mathbb{N}), \quad B_n\Gamma := B_n(\Gamma, \mathbb{N}) \quad \text{sowie} \quad B^\blacktriangleright\Gamma := B^\blacktriangleright(\Gamma, \mathbb{N}).$$

SATZ. (A) Für jede topologische Kategorie Γ ist $B^\star\Gamma \in \mathbf{Top}^\star$ das klassifizierende Objekt für die abzählbaren Γ -Strukturen $H^1(\cdot; \Gamma, \mathbb{N}) : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ relativ zu $i : \mathbf{Top} \hookrightarrow \mathbf{Top}^\star$.

(B) $B^\star(\cdot)$ ist ein kovarianter Funktor

$$B^\star(\cdot) : \mathbf{Topologische\ Kategorien} \longrightarrow \mathbf{Top}^\star.$$

Der induzierte Morphismus $B^\star(\varphi) : B^\star\Gamma_0 \rightarrow B^\star\Gamma_1$ eines stetigen Kategoriemorphismus $\varphi : \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_1$ verträgt sich dabei mit den konkreten, natürlichen Isomorphismen (s. Beweis unten) aus Teil (A), d.h. das Diagramm von natürlichen Transformationen

$$\begin{array}{ccc} (\cdot, B^\star\Gamma_0) \circ i & \xrightarrow{\cong} & H^1(\cdot; \Gamma_0, \mathbb{N}) \\ \varphi_* \downarrow & & \downarrow H^1(\varphi, \mathbb{N}) \\ (\cdot, B^\star\Gamma_1) \circ i & \xrightarrow{\cong} & H^1(\cdot; \Gamma_1, \mathbb{N}) \end{array}$$

ist kommutativ, wobei φ_* die von $B^\star(\varphi) : B^\star\Gamma_0 \rightarrow B^\star\Gamma_1$ induzierte natürliche Transformation $(\cdot, B^\star\Gamma_0) \circ i \rightarrow (\cdot, B^\star\Gamma_1) \circ i$ bezeichne.

BEWEIS: Zum Beweis von Teil (A) müssen wir die natürliche Transformation

$$\mathbf{Mor}(\cdot, B^\star\Gamma) \circ i \longrightarrow H^1(\cdot; \Gamma, \mathbb{N})$$

erstmal definieren. Sei dazu $f : X \rightarrow B_m\Gamma$ stetig und $\varphi : B_m\Gamma \rightarrow B_n\Gamma$ von einer monotonen Einbettung $[n] \hookrightarrow [m]$ induziert. f klassifiziere das $(\Gamma, \mathbb{N} \times [m])$ -Kozykel γ_m und $\varphi \circ f$ das $(\Gamma, \mathbb{N} \times [n])$ -Kozykel γ_n . Dann sind γ_m, γ_n abzählbare Γ -Kozykel, weil jedes $\mathbb{N} \times [k]$ abzählbar ist. Wegen Lemma 5.4.2 gilt aber $\gamma_n \leq \gamma_m$, so daß γ_m und γ_n dieselbe (Γ, \mathbb{N}) -Struktur liefern. Daher induzieren je zwei Repräsentanten einer stetigen Abbildung $f^\star : X \rightarrow B^\star\Gamma$ dieselbe (Γ, \mathbb{N}) -Struktur, weshalb für jeden topologischen Raum X eine Abbildung $\mathbf{Mor}(X, B^\star\Gamma) \longrightarrow H^1(X; \Gamma, \mathbb{N})$ definiert ist.

Natürlichkeit: Aufgrund der Wohldefiniertheit kann man also stets einen Repräsentanten $f : X \rightarrow B\Gamma$ von $f^\star : X \rightarrow B^\star\Gamma$ wählen, wobei $\sigma(f^\star) := \sigma(f) := [\gamma = f^*\omega]$ mit dem universellen (Γ, \mathbb{N}) -Kozykel ω gilt. Die Natürlichkeit folgt daher direkt aus der Kontravarianz des Pullbacks.

Surjektivität: $B\Gamma$ klassifiziert $Z^1(\cdot; \Gamma, \mathbb{N})$.

Injektivität: $f_{0/1} : X \rightarrow B\Gamma$ seien klassifizierende Abbildungen für die jeweiligen Γ -Kozykel $\gamma_{0/1}$, die als kohomolog vorausgesetzt werden. Zu zeigen ist die cofinale Gleichheit von f_0 und f_1 . γ_0 sei auf der Überdeckung $(V_n^0)_{n \in \mathbb{N}}$ und γ_1 auf der Überdeckung $(V_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert. Die beiden möglichen Inklusionen $\alpha_{0/1} : [0] \rightarrow [1]$ induzieren die Einbettungen $\mathbb{N} = \mathbb{N} \times [0] \hookrightarrow \mathbb{N} \times [1]$ und somit die entsprechenden Abbildungen $\varphi_{0/1} : B_1\Gamma \rightarrow B\Gamma$ aus

Φ_0^1 . Da γ_0 und γ_1 kohomolog sind, existiert ein $(\Gamma, \mathbb{N} \times [1])$ -Kozykel γ zu einer Überdeckung $(V_n)_{n \in \mathbb{N} \times [1]}$ mit $\gamma|_{\mathbb{N} \times \{0\}} = \gamma_0$ und $\gamma|_{\mathbb{N} \times \{1\}} = \gamma_1$. Bezeichnet $f : X \rightarrow B_1\Gamma$ die klassifizierende Abbildung von γ , gilt wieder wegen Lemma 5.4.2 $f_0 = \varphi_0 \circ f$ und $f_1 = \varphi_1 \circ f$, d.h. f_0 und f_1 sind cofinal gleich.

Teil (B): Ganz analog wie im Kontext der Folgerung 5.3.1 zeigt man, daß ein stetiger Kategoriemorphismus $\varphi : \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_1$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ zunächst Abbildungen $B(\Gamma_0, \Lambda_n) \rightarrow B(\Gamma_1, \Lambda_n)$ induziert. Wegen ihrer komponentenweisen Gestalt ergeben ihre Einschränkungen sogar Abbildungen $B_n(\Gamma_0, \Lambda) \rightarrow B_n(\Gamma_1, \Lambda)$, die zudem mit den Systemmorphismen von $B^\blacktriangleright(\Gamma_0, \Lambda)$ und $B^\blacktriangleright(\Gamma_1, \Lambda)$ kommutieren, so daß insgesamt ein Morphismus $B^\blacktriangleright(\varphi, \Lambda) : B^\blacktriangleright(\Gamma_0, \Lambda) \rightarrow B^\blacktriangleright(\Gamma_1, \Lambda)$ induziert wird, womit der Funktor $B^\blacktriangleright(\cdot, \Lambda)$ definiert ist. Speziell für $\Lambda = \mathbb{N}$ setzen wir $B^\blacktriangleright(\cdot) := B^\blacktriangleright(\cdot, \mathbb{N})$.

Zum Diagramm: Das objektweise ausgewertete Diagramm ist ein Quotient des (objektweise ausgewerteten) Diagramms aus Folgerung 5.3.1. \triangle

Aus Folgerung 5.2.2 (c) ergibt sich sofort das

KOROLLAR. *Der Funktor*

$$H^1(\cdot; \Gamma, \mathbb{N}) : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

läßt sich zu einem klassifizierbaren, kontravarianten Funktor

$$H^{1\blacktriangleright}(\cdot; \Gamma, \mathbb{N}) : \mathbf{Top}^\blacktriangleright \longrightarrow \mathbf{Set}$$

fortsetzen, der bis auf natürliche Isomorphie eindeutig ist. \triangle

5.4.3 Für jede étale-Kategorie Γ sind in 3.3.1 die étale- Γ -Strukturen definiert worden. Ihre klassifizierenden Abbildungen $X \rightarrow B^\blacktriangleright\Gamma$ sind—was nicht selbstverständlich ist—injektiv, zumindest wenn X kompakt ist, was man folgendermaßen sieht:

Sei γ ein étale- Γ -Kozykel auf X zur Überdeckung (U_i) . Dann existiert zu jedem $x \in X$ ein Index i und eine offene Umgebung $U_x \subset U_i$ von x , so daß $\gamma_{ii}|_{U_x} : U_x \hookrightarrow \Gamma$ injektiv ist. (U_x) stellt nun eine Verfeinerungsüberdeckung von (U_i) dar, die man nun unter geeigneten Bedingungen an X (z.B. X kompakt oder X parakompakt und mit abzählbarer Basis oder X Lindelöf etc.) als abzählbare Überdeckung $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ annehmen kann. Verfeinert man daher γ über diese Überdeckung (U_n) , bleibt die Kohomologieklassse von γ unverändert.

Sei $f : X \rightarrow B\Gamma$ die klassifizierende Abbildung des verfeinerten (γ, \mathbb{N}) -Kozykels. Man nehme nun irgendwelche zwei Punkte $x, y \in X$. Gibt es $n \neq m$ mit $x \in U_n - U_m$ und $y \in U_m$, gilt sowieso $f(x) \neq f(y)$. Tritt dieser Fall nicht ein, gibt es nach Konstruktion des verfeinerten Kozykels ein U_n mit $x, y \in U_n$ und γ_{nn} injektiv. Nun ist aber γ_{nn} nichts anderes als die Verkettung von $f|_{U_n}$ mit der Projektion auf die (n, n) -Koordinate, so daß erst recht $f|_{U_n}$ injektiv ist und daher ebenfalls $f(x) \neq f(y)$ gilt. Das ist der Beweis von

FOLGERUNG. Seien Γ eine étale-Kategorie, $X \in \mathbf{Top}$ kompakt und $f : X \rightarrow B^{\star}\Gamma$ die klassifizierende Abbildung einer étale- Γ -Struktur σ von X . Dann ist f injektiv. \triangle

BEMERKUNG. Obwohl diese Injektivität wegen der Verwendung von \mathbf{P}^{\downarrow} -Polyedern für die abstrakte Klassifikation gelifteter étale-PL-Gruppoid-Strukturen noch keine Rolle spielt, könnte sie aber in einer ri-Version der Klassifikation für eine Kategorie mit Pushouts (z.B. **SIM**) durchaus wertvoll werden, wobei dann \mathbf{P}^{\downarrow} -Polyeder überflüssig wären.

5.5 Die direkte Charakterisierung

Da topologische Eigenschaften geometrischer Objekte unter entsprechenden Isomorphismen erhalten bleiben, will man auch nur ihre Isomorphieklassen bestimmen und nicht die Objekte selbst. Aber selbst die Isomorphieklassen können eine unüberschaubare Menge bilden, so daß man, um überhaupt eine sinnvolle Einteilung vornehmen zu können, zu noch größeren Klassen übergeht, z.B. Konkordanz- oder Kobordismusklassen (bei Blätterungen), die aber in der Regel immer noch überabzählbar sind!

Mittels Satz 5.4.2 lassen sich die Isomorphieklassen gelifteter Gruppoid-Strukturen auf parakompakten Räumen direkt mit Hilfe klassifizierender Räume beschreiben.

5.5.1 Seien $X \in \mathbf{Top}$ und $p^{\star} : E^{\star} \rightarrow B^{\star}$, $f : X \rightarrow B^{\star}$ zwei \mathbf{Top}^{\star} -Morphismen. Dann bezeichne

$$\{X, E^{\star}\}_f$$

die Menge aller stetigen Lifts $\bar{f} : X \rightarrow E^{\star}$ von f über p^{\star} . Für eine analoge Bezeichnung im ri-Fall müssen alle Morphismen natürlich ri sein. Für die anderen Kategorien \mathbf{Top} , \mathbf{Top}^{\star} etc. ist die Bezeichnung entsprechend definiert.

Die Gruppe $\text{Aut}X := \text{Aut}^{\text{TOP}}X$ aller Homöomorphismen $X \xrightarrow{\cong} X$ operiert von links auf den \mathbf{Top}^{\star} -Morphismen $X \rightarrow B^{\star}$ durch

$$g \cdot f := f \circ g^{-1}.$$

Mit $\text{Aut}_f X$ bezeichnen wir die Standgruppe dieser Operation.

Sei $\varphi : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ ein stetiger Kategoriemorphismus zwischen topologischen Kategorien $\tilde{\Gamma}$ und Γ . Dann induziert φ auf der Ebene der abzählbaren Kategorie-Strukturen eine Abbildung

$$H^1(\varphi, \mathbb{N}) : H^1(X; \tilde{\Gamma}, \mathbb{N}) \rightarrow H^1(X; \Gamma, \mathbb{N}).$$

Für eine gegebene (Γ, \mathbb{N}) -Struktur $\sigma \in H^1(X; \Gamma, \mathbb{N})$ nennen wir jedes Element $\tilde{\sigma} \in H^1(X; \tilde{\Gamma}, \mathbb{N})$ mit $H^1(\varphi, \mathbb{N})(\tilde{\sigma}) = \sigma$ einen **Lift** von σ über φ . Somit ist die Menge aller Lifts von σ über φ mit der Menge

$$H^1(\varphi, \mathbb{N})^{-1}(\sigma)$$

identisch. Sind $\tilde{\Gamma}$ und Γ als topologische Gruppoide gegeben, nennen wir Lifts von σ über φ auch **geliftete Gruppoid-Strukturen**. Ist φ ein étale-Gruppoidhomomorphismus,

sprechen wir von **gelifteten étale-Gruppoid-Strukturen**, und sind $\tilde{\Gamma}$ und Γ darüber hinaus étale-PL-Gruppoid-Strukturen, von **gelifteten étale-PL-Gruppoid-Strukturen**.

Wie in 3.4.2 operiert $\text{Aut}X$ für jede topologische Kategorie Γ auf $H^1(X; \Gamma, \mathbb{N})$, $H^1(X; \Gamma, e)$ und $H^1(X; \Gamma)$ durch

$$g\sigma := (g^{-1})^*\sigma,$$

so daß für jede Untergruppe $G \subset \text{Aut}X$ die **G-Klassen aller Lifts**

$$H^1(\varphi, \mathbb{N})^{-1}(\sigma)/G$$

definiert sind.

Aus der Definition der beiden Aktionen von $\text{Aut}X$ auf $H^1(X; \Gamma)$ und $(X, B^*\Gamma)$ folgt sofort, daß alle Abbildungen des kommutativen Diagramms in Teil (B) von Satz 5.4.2 äquivariant sind. In Verbindung mit Korollar 3.2.1, Folgerung 3.3.2 und Satz 3.3.3 ergeben sich aus Satz 5.4.2 die Beweise für untenstehende Resultate.

SATZ. (a) *Es seien $X \in \mathbf{Top}$ ein parakompakter Raum, $\varphi : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ ein stetiger Kategoriemorphismus von topologischen Kategorien und $\sigma \in H^1(X; \Gamma)$ eine Γ -Struktur. Bezeichnet $f_\sigma : X \rightarrow B^*\Gamma$ die klassifizierende Abbildung für σ und $\text{Aut}_\sigma X \subset \text{Aut}X$ den Stabilisator von $\text{Aut}X$ in σ , dann gibt es für jede Untergruppe $G \subset \text{Aut}_\sigma X$ bzgl. der induzierten Abbildung $B^*(\varphi) : B^*\tilde{\Gamma} \rightarrow B^*\Gamma$ eine kanonische Bijektion*

$$H^1(\varphi)^{-1}(\sigma)/G \xrightarrow{\cong} \{X, B^*\tilde{\Gamma}\}_{f_\sigma}/G.$$

(b) *Ohne irgendwelche Voraussetzungen an X können die gelifteten $(\tilde{\Gamma}, \mathbb{N})$ -Strukturen von $\sigma \in H^1(X; \Gamma, \mathbb{N})$ analog durch $\{X, B^*\tilde{\Gamma}\}_{f_\sigma}/G$ charakterisiert werden. \triangle*

FOLGERUNG. *Sei M^m eine geschlossene CAT-Mannigfaltigkeit mit ihrer lt. 3.3.2 kanonischen Γ_m^{CAT} -Struktur σ_M , die gemäß Satz 5.4.2 durch die Abbildung*

$$f_M : M \rightarrow B^*\Gamma_m^{\text{CAT}}$$

klassifiziert werde. Bzgl. der von der Gruppoidinklusion $i : \Gamma_{\{m,q\}}^{\text{CAT}} \hookrightarrow \Gamma_m^{\text{CAT}}$ induzierten Abbildung $B^\Gamma_{\{m,q\}}^{\text{CAT}} \rightarrow B^*\Gamma_m^{\text{CAT}}$ gibt es eine kanonische Bijektion*

$$\text{Fol}_q^{\text{CAT}}(M)/\cong \xrightarrow{\cong} \{M, B^*\Gamma_{\{m,q\}}^{\text{CAT}}\}_{f_M}/\text{Aut}^{\text{CAT}}(M) \quad \triangle$$

5.6 Schöne Eigenschaften

Auch wenn sich zur Klassifikation abzählbarer Γ -Strukturen das allgemeine projektive System $B^*\Gamma$ nicht vermeiden läßt, so besitzt es dafür die wertvolle Eigenschaft der *Additivität*.

5.6.1 Wie vorher sei Γ eine topologische Kategorie. Der feudale Charakter von $B^\star(\Gamma, \Lambda)$ beginnt sich schon bei der Indexmenge $I = \mathbb{N}_0$ zu zeigen, die total geordnet ist und damit insbesondere nach oben gerichtet. Ferner haben wir das

LEMMA. $B^\star(\Gamma, \Lambda)$ ist ein gutes projektives **Top-System**.

BEWEIS: Sei $\varphi : B_m(\Gamma, \Lambda) \rightarrow B_n(\Gamma, \Lambda)$ wie in 5.4.2 von einer monotonen Inklusion $\alpha : [n] \hookrightarrow [m]$ induziert. Dann gibt es eine surjektive, monotone Abbildung $\beta : [m] \rightarrow [n]$ mit $\beta \circ \alpha = id_{[n]}$, die eine Abbildung $\beta^* : (\bar{C}\Gamma)^{\Lambda_n \times \Lambda_n} \rightarrow (\bar{C}\Gamma)^{\Lambda_m \times \Lambda_m}$ induziert, deren Wirkung, sprachlich ausgedrückt, sozusagen im Kopieren von Koordinaten besteht. Daran sieht man auch am besten, daß $B_n(\Gamma, \Lambda)$ von β^* nach $B(\Gamma, \Lambda_m)$ und daher auch nach $B_m(\Gamma, \Lambda)$ abgebildet wird. Via Kontravarianz liefert die Gleichung $\beta \circ \alpha = id_{[n]}$ schließlich die Schnitteigenschaft von $\beta^*|_{B_n(\Gamma, \Lambda)}$, so daß $B^\star(\Gamma, \Lambda)$ der Schnittbedingung genügt.

Im weiteren seien $f, f' : X \rightarrow B_n(\Gamma, \Lambda)$ zwei cofinal gleiche, stetige Abbildungen. Gesucht sind ein $m \geq n$, ein Schnittpaar (φ, φ') und ein $\bar{f} : X \rightarrow B_m(\Gamma, \Lambda)$ mit $\varphi \circ \bar{f} = f$ und $\varphi' \circ \bar{f} = f'$.

Dazu wählen wir ein $m \geq n$, zwei monotone Einbettungen $\alpha, \alpha' : [n] \hookrightarrow [m]$ und eine monotone Surjektion $\beta : [m] \rightarrow [n]$ mit

- $[m] = \alpha([n]) \dot{\cup} \alpha'([n])$,
- $\beta \circ \alpha = \beta \circ \alpha' = id_{[n]}$.

Über Kontravarianz liefern α, α' Systemmorphismen $\varphi, \varphi' : B_m(\Gamma, \Lambda) \rightarrow B_n(\Gamma, \Lambda)$ und β einen gemeinsamen Schnitt $s : B_n(\Gamma, \Lambda) \rightarrow B_m(\Gamma, \Lambda)$ von φ, φ' , so daß (φ, φ') ein Schnittpaar darstellt.

α, α' induzieren ferner Einbettungen $\alpha_*, \alpha'_* : \Lambda_n \hookrightarrow \Lambda_m$, so daß wir kürzer $\Lambda_m = \Lambda_n \dot{\cup} \Lambda'_n$ schreiben. Lassen wir f zum (Γ, Λ_n) -Kozykel γ und f' zum (Γ, Λ_n) -Kozykel γ' korrespondieren, sind γ und γ' kohomolog, so daß ein $(\Gamma, \Lambda_n \dot{\cup} \Lambda'_n)$ -Kozykel $\bar{\gamma}$ mit klassifizierender Abbildung $\bar{f} : X \rightarrow B_m(\Gamma, \Lambda)$ existiert mit $\bar{\gamma}|_{\Lambda_n} = \gamma$ und $\bar{\gamma}|_{\Lambda'_n} = \gamma'$. Aus Lemma 5.4.2 folgt dann $\varphi \circ \bar{f} = f$ und $\varphi' \circ \bar{f} = f'$. △

BEMERKUNG. Nach Lemma 4.6.3 ist daher $B^\star(\Gamma, \Lambda)$ schön disjunkt additiv, was man natürlich auch sofort auf der Ebene der Γ -Kozykel sieht. Sicherlich ist es aber sinnvoll, wie eben geschehen, einen Beweis ausschließlich mit Hilfe innerer Systemeigenschaften von $B^\star(\Gamma, \Lambda)$ zu erbringen. Man bedenke zudem, daß für étale-Gruppoide Γ die Additivität von $B^\star\Gamma$ (Folgerung 5.6.2) bisher anscheinend nicht mittels Gruppoid-Kozykel gezeigt werden kann.

5.6.2 In 5.3.1 hatten wir für jede Menge Λ und jedes $\lambda \in \Lambda$ die offenen Mengen

$$U_\lambda = \{ (\gamma_{ij}) \in B(\Gamma, \Lambda) \mid \gamma_{\lambda\lambda} \neq * \}$$

eingeführt. Insbesondere sind damit auch die offenen Mengen

$$U_{\lambda,i} \subset B(\Gamma, \Lambda_n)$$

für alle $(\lambda, i) \in \Lambda_n = \Lambda \times [n]$ definiert. Wegen $B_n(\Gamma, \Lambda) \subset B(\Gamma, \Lambda_n)$ müßten wir für $U_{\lambda,i} \cap B_n(\Gamma, \Lambda)$ eine andere Bezeichnung verwenden, aber der Einfachheit halber soll jetzt $U_{\lambda,i}$ stets $U_{\lambda,i} \cap B_n(\Gamma, \Lambda)$ bezeichnen. Mit dieser Vereinbarung gilt dann für eine monotone Abbildung $\alpha : [0] \hookrightarrow [n]$ mit $\alpha(0) = i \in [n]$ und deren induzierte Abbildung $\alpha^* =: \varphi : B_n(\Gamma, \Lambda) \rightarrow B(\Gamma, \Lambda)$ die Identität

$$(\star) \quad \varphi^{-1}(U_\lambda) = U_{\lambda,i} \quad \text{für alle } \lambda \in \Lambda.$$

Beim Arbeiten mit $U_\lambda \subset B(\Gamma, \Lambda)$, wobei Γ ein topologischer *Gruppoid* sei, ist es angenehmer, die sog. **alternative Darstellung** $\text{alt-}U_\lambda$ zu verwenden, die für jedes $\lambda \in \Lambda$ durch

$$\text{alt-}U_\lambda := \{ (\gamma_{i\lambda})_{i \in \Lambda} \in (\bar{C}\Gamma)^\Lambda \mid \gamma_{\lambda\lambda} \in \Gamma^0 \text{ und } \forall i \in \Lambda \text{ mit } \gamma_{i\lambda} \neq * \text{ gilt } s(\gamma_{i\lambda}) = \gamma_{\lambda\lambda} \}$$

gegeben sei. Die Projektion von $B(\Gamma, \Lambda)$ auf das Produkt mit den Komponenten $\Lambda \times \{\lambda\} \subset \Lambda \times \Lambda$ definiert eine stetige Abbildung

$$\pi_\lambda : U_\lambda \longrightarrow \text{alt-}U_\lambda.$$

BEHAUPTUNG. π_λ ist ein Homöomorphismus.

BEWEIS: Man zeigt die Behauptung am besten durch Angabe einer Umkehrabbildung $p_\lambda : \text{alt-}U_\lambda \rightarrow U_\lambda$, die vollständig durch die ij -Komponenten $p_{\lambda,ij}$ bestimmt ist. Diese seien durch

$$p_{\lambda,ij}((\gamma_{i\lambda})_i) := \begin{cases} \gamma_{i\lambda} \gamma_{j\lambda}^{-1}, & \text{falls } \gamma_{i\lambda}, \gamma_{j\lambda} \neq * \\ *, & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Die rechte Seite ist wegen $s(\gamma_{i\lambda}) = s(\gamma_{j\lambda}) = r(\gamma_{j\lambda}^{-1})$ definiert, und die Stetigkeit folgt aus der Stetigkeit der Inversion und Multiplikation in Γ . Man prüft durch Verifizierung der Eigenschaften (1)–(3) in 5.3.1 nach, daß $p_\lambda((\gamma_{i\lambda})_i)$ ein Element von U_λ ist. Wegen der Kozykelbedingung (3) in 5.3.1 sind π_λ und p_λ invers zueinander. \triangle

Allgemeiner ist auch für die $U_{\lambda,i}$ eine alternative Darstellung $\text{alt-}U_{\lambda,i}$ analog definiert, wobei deren Tupel $(\gamma_{(\mu,j)(\lambda,i)})_{(\mu,j)}$ noch die „Streifenbedingung“

$$\forall j \in [n] \exists \mu \in \Lambda \text{ mit } \gamma_{(\mu,j)(\lambda,i)} \neq *$$

erfüllen müssen. Analog gilt eine entsprechende Behauptung für $\text{alt-}U_{\lambda,i}$. Ist ferner $\varphi : U_{\lambda,i} \rightarrow U_\lambda$ wie in (\star) gegeben, so hat die transportierte Abbildung $\tilde{\varphi} : \text{alt-}U_{\lambda,i} \rightarrow \text{alt-}U_\lambda$ wieder die Form einer Produktprojektion, da auch die Übergänge zu den alternativen Darstellungen von dieser Form sind, und φ eine produktartige Abbildung ist. \triangle

Wir spezialisieren uns nun auf $\Lambda = \mathbb{N}_0$ und definieren für $0 \in \mathbb{N}_0$ eine stetige Abbildung $f : \text{alt-}U_0 \rightarrow \text{alt-}U_0$, $(\gamma_{i0})_i \mapsto (\tilde{\gamma}_{i0})_i$ mit

$$\tilde{\gamma}_{i0} := \begin{cases} \gamma_{\frac{i}{2}0}, & i \equiv 0 \pmod{2} \\ *, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Suggestiver schreibt man besser

$$f(\gamma_{00}, \gamma_{10}, \gamma_{20}, \gamma_{30}, \dots) := (\gamma_{00}, *, \gamma_{10}, *, \gamma_{20}, *, \gamma_{30}, \dots).$$

LEMMA. *f ist homotop zur Identität mittels einer Homotopie, deren 0-te Komponente stationär ist.*

BEWEIS: Es liegt die analoge Situation wie auf Seite 264 in [tom] vor, so daß wir den Beweis von TOM DIECK nur zu imitieren brauchen. Die Grundidee ist, den Stern * durch eine Homotopie in unendlich vielen Schritten immer mehr nach rechts zu verschieben, „bis er gar nicht mehr existiert“.

Dazu definieren wir für jede Zahl $k \in \mathbb{N}$ das Intervall

$$I_k := \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}, 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k \right]$$

und schreiben $[0, 1]$ als Vereinigung $[0, 1] = \bigcup_k I_k \cup \{1\} = [0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \cup \dots \cup \{1\}$. Im ersten Homotopieschritt (s. unten) werden wir eine Homotopie auf $\text{alt-}U_0 \times I_1$ definieren, die mit einer Abbildung f^1 von der Form

$$f^1(\gamma_{00}, \gamma_{10}, \gamma_{20}, \gamma_{30}, \dots) = (\gamma_{00}, \gamma_{10}, *, \gamma_{20}, *, \gamma_{30}, \dots)$$

endet. Im zweiten Homotopieschritt werden wir eine Homotopie auf $\text{alt-}U_0 \times I_2$ beginnend bei f^1 definieren, die mit einer Abbildung f^2 von der Form

$$f^2(\gamma_{00}, \gamma_{10}, \gamma_{20}, \gamma_{30}, \dots) = (\gamma_{00}, \gamma_{10}, \gamma_{20}, *, \gamma_{30}, \dots)$$

endet usw. Nach dem k -ten Homotopieschritt haben wir also eine stetige Abbildung $f^k : \text{alt-}U_0 \rightarrow \text{alt-}U_0$, die auf den ersten k Komponenten mit der Identität übereinstimmt. Daher läßt sich die auf $[0, 1]$ zusammengesetzte Homotopie derart zu einer stetigen Homotopie auf ganz $[0, 1]$ fortsetzen, daß deren Homotopieende $=: f^\infty$ die Identität ist.

Nun zur Definition der einzelnen Homotopieschritte. Dafür reicht es aus, den ersten Schritt verstanden zu haben: Es werden aufeinanderfolgende Komponenten mit Indizes $i, i + 1$, wobei i ungerade, jeweils zusammengefaßt und dann homotop miteinander vertauscht. Befassen wir uns zunächst mit dieser elementaren Homotopie.

Wir geben eine Homotopie H für die beiden Abbildungen $p_0 : \bar{C}\Gamma \rightarrow \bar{C}\Gamma \times \bar{C}\Gamma$ und $p_1 : \bar{C}\Gamma \rightarrow \bar{C}\Gamma \times \bar{C}\Gamma$ an, wobei

$$p_0(\gamma) = (*, \gamma) \quad \text{und} \quad p_1(\gamma) = (\gamma, *)$$

sei. Wegen der Kegeleigenschaft von $\bar{C}\Gamma$ ist die Abbildung

$$H(\gamma, t) := \begin{cases} (*, \gamma), & t \in [0, \frac{1}{3}] \\ (\gamma, \gamma), & t \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ (\gamma, *), & t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

eine stetige Homotopie von p_0 nach p_1 . Dann liefert $H((\gamma_{i0})_i, t) := (\gamma_{00}, (H(\gamma_{i0}, t))_{i \geq 1})$ die gewünschte, in der 0-ten Komponente stationäre Homotopie des ersten Schrittes. \triangle

Analog gibt es natürlich auch für jedes andere $n \in \mathbb{N}_0$ solche zur Identität homotopen Abbildungen $f : \text{alt-}U_n \rightarrow \text{alt-}U_n$, wobei dann entsprechend statt der 0-ten die n -te Komponente von f und der Homotopie stationär sein muß.

SATZ. Γ sei ein étale-Gruppoid. Dann ist $B^*\Gamma$ schön Serre-fasernd.

BEWEIS: Stellvertretend für alle anderen Fälle beweisen wir den Satz für die von $\alpha : [0] \rightarrow [1]$ mit $\alpha(0) = 0$ induzierte Systemabbildung $\varphi : B_1\Gamma \rightarrow B\Gamma$.

Bekanntlich reicht es aus, zu beweisen, daß φ lokal eine schöne Serre-Faserung ist. Konkret zeigen wir, daß $\varphi : U_{n,0} \rightarrow U_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine schöne Serre-Faserung ist. Um dies einfacher zu sehen, gehen wir zu der alternativen Darstellung

$$\varphi : \text{alt-}U_{n,0} \rightarrow \text{alt-}U_n$$

über, wobei wir wieder dieselbe Bezeichnung φ wählen.

Mit der Abkürzung $D := B^N$ haben wir die Existenz einer stetigen Abbildung $\bar{F} : D \rightarrow \text{alt-}U_{n,0}$ nachzuweisen, die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \partial D & \xrightarrow{\bar{f}} & \text{alt-}U_{n,0} \\ \downarrow & \nearrow \bar{F} & \downarrow \varphi \\ D & \xrightarrow{f} & \text{alt-}U_n \end{array}$$

kommutativ ergänzt, wobei f und \bar{f} gegeben seien. Diese Aufgabe kann aber noch reduziert werden. Die Bedingung $\varphi \circ \bar{F} = f$ läßt sich auch anders charakterisieren: $\mathbb{N}_0 \times [1]$ besteht aus den zwei „Streifen“ $S_0 := \mathbb{N}_0 \times 0$ und $S_1 := \mathbb{N}_0 \times 1$, und φ ist dasselbe wie die Projektion von $\text{alt-}U_{n,0}$ auf das Produkt mit den zu S_0 gehörigen Komponenten. Daher ist $\varphi \circ \bar{F} = f$ äquivalent dazu, daß die S_0 -Komponenten von \bar{F} mit den Komponenten von f identisch sind. Somit braucht man sich nur noch um die Fortsetzung von \bar{f} in die S_1 -Komponenten zu kümmern. Nimmt man noch die $(n, 1)$ -Komponente dazu, so ist das projizierte Bild von $\text{alt-}U_{n,0}$ auf diese Koordinaten mit einer Teilmenge $\widetilde{\text{alt-}U_n} \subset \text{alt-}U_n$ plus einer zusätzlichen Koordinate identisch, indem man

$$(\gamma_{(m,1)(n,0)})_{m \neq n} \equiv (\gamma_{mn})_{m \neq n}, \gamma_{(n,1)(n,0)} \equiv \tilde{\gamma}_{nn} \text{ und } \gamma_{(n,0)(n,0)} \equiv \gamma_{nn}$$

setzt. Da es bei der Beweisargumentation nicht auf die Anzahl der Koordinaten ankommt, lassen wir daher $\tilde{\gamma}_{nn}$ weg. Hierbei ist $\widetilde{\text{alt-}U_n}$ durch die „Streifenbedingung“

$$\widetilde{\text{alt-}U_n} := \{ (\gamma_{mn})_m \in \text{alt-}U_n \mid \exists m \neq n \text{ mit } \gamma_{mn} \neq * \}$$

definiert. Somit ist jenes projizierte Bild mit $\widetilde{\text{alt-}U_n}$ identisch. Auf $\widetilde{\text{alt-}U_n}$ ist die kanonische Projektion

$$k^n : \widetilde{\text{alt-}U_n} \rightarrow \Gamma^0, \quad (\gamma_{mn})_m \mapsto \gamma_{nn}$$

definiert, und o.B.d.A. sei $n = 0$, womit wir folgende Reduktion erzielt haben:

Behauptung: $k^0 : \widetilde{\text{alt-}U_0} \rightarrow \Gamma^0$ ist eine schöne Serre-Faserung.

Beweis: Inzwischen sind wir also beim harmloseren Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \partial D & \xrightarrow{\bar{f}} & \widetilde{\text{alt-}U_0} \\ \downarrow & \nearrow \bar{F} & \downarrow k^0 \\ D & \xrightarrow{f} & \Gamma^0 \end{array}$$

angelangt, in dem f, \bar{f} gegeben sind und \bar{F} gefunden werden muß. Falls \bar{F} existiert, bezeichne \bar{F}_m die m -te Komponente von \bar{F} und \bar{f}_m ebenso die m -te Komponente von \bar{f} für alle $m \in \mathbb{N}_0$. Daß \bar{F} einen Lift von k^0 darstellt, ist äquivalent zu $\bar{F}_0 = f$. Was wir also brauchen, ist für jedes $m \neq 0$ eine Fortsetzung $\bar{F}_m : D \rightarrow \bar{C}\Gamma$ von \bar{f}_m , so daß die Bedingungen

- (1) $x \in D$ mit $\bar{F}_m(x) \neq * \Rightarrow s(\bar{F}_m(x)) = f(x)$,
- (2) Zu jedem $x \in D$ existiert ein $m \neq 0$ mit $\bar{F}_m(x) \neq *$ (Streifenbedingung, vgl. auch Seite 178),

erfüllt sind.

Diese Aufgabe wird in zwei Schritten gelöst: Zuerst finden wir Fortsetzungen $\tilde{F}_m : D \rightarrow \bar{C}\Gamma$, die zwar (1) erfüllen, aber nicht (2). Danach werden die \tilde{F}_m stationär auf einer gemeinsamen Umgebung von ∂D zu \bar{F}_m modifiziert, so daß auch (2) gilt.

Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest. Mit $A_m \subset \partial D$ bezeichnen wir die in ∂D offene Menge $A_m := \bar{f}_m^{-1}(\Gamma)$. Nehmen wir als ersten Fall an, daß A_m nichtleer ist. Wir wenden nun Lemma 1.6.4 auf die Garbe $s : \Gamma \rightarrow \Gamma^0$, auf $f : D \rightarrow \Gamma^0$ und $\bar{f}_m : A_m \rightarrow \Gamma$ an und bekommen daher eine in D offene Umgebung V_m von A_m mit $V_m \cap \partial D = A_m$ und eine Fortsetzung $\tilde{f}_m : V_m \rightarrow \Gamma$, die einen Lift von $f : V_m \rightarrow \Gamma^0$ darstellt. Ist A_m leer, setzen wir einfach $V_m := \emptyset$. Nach der Kegeleigenschaft von $\bar{C}\Gamma$ gibt es nun für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine eindeutige Fortsetzung $\tilde{F}_m : D \rightarrow \bar{C}\Gamma$ von \tilde{f}_m mit $V_m = \tilde{F}_m^{-1}(\Gamma)$. Wegen $V_m \cap \partial D = A_m$ ist \tilde{F}_m eine Fortsetzung von \bar{f}_m .

Nach Konstruktion erfüllt jedes \tilde{F}_m Bedingung (1). Das Produkt der \tilde{F}_m bezeichnen wir mit $\tilde{F} : D \rightarrow (\bar{C}\Gamma)^{\mathbb{N}_0}$. Da \bar{f} den Rand ∂D nach $\widetilde{\text{alt-}U_0}$ abbildet, muß für jedes $x \in \partial D$ die Streifenbedingung gelten, so daß ein $m_x \neq 0$ mit $A_{m_x} \neq \emptyset$ existiert. Daher ist

$$V := \bigcup_{m \geq 1} V_m$$

eine in D offene Umgebung von ∂D mit

$$\tilde{F}(V) \subset \widetilde{\text{alt-}U_0}.$$

Wir haben somit also $\bar{f} : \partial D \rightarrow \widetilde{\text{alt-}U_0}$ auf eine offene Umgebung V von ∂D als Lift von $f|_V$ fortgesetzt.

Die Kompaktheit von ∂D erlaubt uns, V o.E. als offenen Ring $\{x : 1 - \epsilon < \|x\| \leq 1\}$ zu wählen, wobei wir o.B.d.A. $1 - \epsilon = 1/4$ annehmen, i.e.

$$V = \left\{ x \in D : \frac{1}{4} < \|x\| \leq 1 \right\}.$$

Jetzt greifen wir auf das letzte Lemma zurück: Sei $H : \text{alt-}U_0 \times I \rightarrow \text{alt-}U_0$ die Homotopie aus diesem Lemma, deren 0-te Komponente stationär ist, so daß $H_0 = id$. Da H die Koordinaten nur verschiebt, aber deren Werte nicht ändert, bleibt $\widetilde{\text{alt-}U_0}$ unter H invariant, so daß H auch als Homotopie $H : \widetilde{\text{alt-}U_0} \times I \rightarrow \widetilde{\text{alt-}U_0}$ aufgefaßt werden kann. Aus technischen Gründen müssen wir aber H ein wenig abändern, indem wir an das eine Ende noch die stationäre Homotopie ankleben, d.h. wir wählen H bereits derart modifiziert, daß H auf $[1/2, 1]$ stationär ist. Bilden wir den abgeschlossenen Ring

$$R = \left\{ x \in D : \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 1 \right\} \subset V$$

und identifizieren ihn mit $\partial D \times I$, wobei ∂D zu $\partial D \times 0$ korrespondiere, so stellt \tilde{F} eine Homotopie $\tilde{F} : \partial D \times I \rightarrow \widetilde{\text{alt-}U_0}$ dar. Verkettung von $\tilde{F} \times p_2, (x, t) \mapsto (\tilde{F}(x), t)$ mit H ergibt eine stetige Abbildung

$$\tilde{F}' : R = \partial D \times I \longrightarrow \widetilde{\text{alt-}U_0} \times I \xrightarrow{H} \widetilde{\text{alt-}U_0},$$

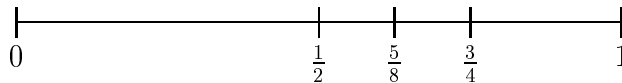
deren 0-te Komponente mit $f|_R$ übereinstimmt und \bar{f} derart fortsetzt, daß es mindestens eine (es gibt sogar unendlich viele) Komponente z.B. zum Index 1 gibt, so daß

$$\tilde{F}'_1|_{\{x : \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq \frac{3}{4}\}} = \text{konstant} = *$$

gilt. Der Vollball D wird nun von den offenen Mengen

$$U := \left\{ x \in D : \|x\| < \frac{5}{8} \right\} \quad \text{und} \quad R' := \left\{ x \in D : \frac{1}{2} < \|x\| \leq 1 \right\}$$

überdeckt, so daß wir mit der Skala



als Anschauungshilfe $\bar{F} : D \rightarrow \widetilde{\text{alt-}U_0}$ schließlich definieren können durch

$$\bar{F}_m(x) := \begin{cases} \tilde{F}'_m(x), & \text{falls } m \neq 1, x \in R' \\ *, & \text{falls } m \neq 1, x \notin R' \\ \tilde{F}'_1(x) & \text{falls } m = 1, \|x\| > \frac{3}{4} \\ *, & \text{falls } m = 1, x \notin U, \|x\| \leq \frac{3}{4} \\ f(x), & \text{falls } m = 1, x \in U. \end{cases}$$

\bar{F} ist gerade so definiert, daß jetzt endlich auch die Bedingung (2) gilt. \triangle

BEMERKUNG. *Man beachte aber, daß $B^*\Gamma$ i.a. nicht ri-schön Serre-fasernd ist!*

Zusammen mit Lemma 5.6.1, Lemma 4.6.3 und Lemma 4.6.2 liefert der Satz die maßgebende

FOLGERUNG. *Für jeden étale-Gruppoiden Γ ist $B^*\Gamma$ sowohl schön disjunkt additiv als auch additiv.* \triangle

5.7 Schwache Homotopieeigenschaften

Das Ausweichen in die projektive Kategorie \mathbf{Top}^* ist nur erforderlich, um mittels $B^*\Gamma$ die (Γ, \mathbb{N}) -Strukturen ganz direkt zu klassifizieren. Aber für die *Homotopieklassen* von (Γ, \mathbb{N}) -Strukturen gibt es einen klassifizierenden Raum in \mathbf{Top} (nämlich $B\Gamma$), was für die numerierbaren Γ -Strukturen schon länger durch [Haefl-T] und [Haefl] bekannt ist.

Wir setzen Γ nur als topologische Kategorie voraus.

5.7.1 In Lemma 5.6.2 wurde eine Homotopie auf $\text{alt-}U_0$ angegeben, die unendlich viele $*$ -Komponenten schafft. Tatsächlich kann man dieses Verfahren auf $B\Gamma$ erweitern.

LEMMA. *Es sei Γ eine topologische Kategorie. Dann ist für $B\Gamma := B(\Gamma, \mathbb{N}_0)$ (vgl. Lemma 5.7.1) die Identität $\text{id} : B\Gamma \rightarrow B\Gamma$ jeweils homotop zu Abbildungen $t_0 : B\Gamma \rightarrow B\Gamma$ und $t_1 : B\Gamma \rightarrow B\Gamma$ mit*

$$\left(t_0((\gamma_{ij}))\right)_{ij} := \begin{cases} \gamma_{\frac{i}{2}\frac{j}{2}}, & \text{falls } i, j \equiv 0 \pmod{2} \\ *, & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\left(t_1((\gamma_{ij}))\right)_{ij} := \begin{cases} \gamma_{\frac{i-1}{2}\frac{j-1}{2}}, & \text{falls } i, j \equiv 1 \pmod{2} \\ *, & \text{sonst} \end{cases}$$

BEWEIS: Zum Zwecke einer transparenten Beweisführung beginnen wir in Anlehnung an 5.3.2 mit allgemeinen Überlegungen.

Sei $\Lambda \subset \mathbb{N}_0$ und $r : \Lambda \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine *surjektive* Abbildung. Dann induziert r eine natürliche Transformation

$$r^* : Z^1(\cdot; \Gamma, \mathbb{N}_0) \longrightarrow Z^1(\cdot; \Gamma, \mathbb{N}_0)$$

wie folgt: Sei γ ein (Γ, \mathbb{N}_0) -Kozykel auf $X \in \mathbf{Top}$ zur offenen Überdeckung $(U_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Das neue (Γ, \mathbb{N}_0) -Kozykel $r^*\gamma$ zur Überdeckung $((r^*U)_n)$ ist dann definiert durch

$$(r^*U)_n := \begin{cases} \emptyset, & n \notin \Lambda \\ U_{r(n)}, & n \in \Lambda \end{cases} \quad (r^*\gamma)_{nm} := \begin{cases} \emptyset, & (n, m) \notin \Lambda \times \Lambda \\ \gamma_{r(n)r(m)}, & (n, m) \in \Lambda \times \Lambda \end{cases}$$

Man beachte, daß $((r^*U)_n)$ aufgrund der Surjektivität von r auch tatsächlich eine Überdeckung von X darstellt. Für jede stetige Abbildung $f : Y \rightarrow X$ gilt $r^*(f^*\gamma) = f^*(r^*\gamma)$, was die Natürlichkeit von r^* belegt.

Nach Satz 5.3.1 und dem Yoneda-Lemma korrespondiert r^* zu einer stetigen Abbildung

$$Br^* : B\Gamma \rightarrow B\Gamma,$$

die mit der klassifizierenden Abbildung von $r^*\omega$ identisch ist. Schreiben wir Br^* als $(\gamma_{ij}) \mapsto (\tilde{\gamma}_{ij})$, so hat daher $(\tilde{\gamma}_{ij})$ die Komponentenform

$$\tilde{\gamma}_{ij} = \begin{cases} *, & (i, j) \notin \Lambda \times \Lambda \\ \gamma_{r(i)r(j)}, & (i, j) \in \Lambda \times \Lambda \end{cases}$$

so daß also Br^* die Einschränkung einer stetigen Abbildung $\bar{C}\Gamma^{\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0} \rightarrow \bar{C}\Gamma^{\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0}$ ist.

Eine surjektive Abbildung $r : \Lambda \rightarrow \mathbb{N}_0$ ist offenbar durch ihre Fasern $r^{-1}(n)$ eindeutig bestimmt. Sind diese nach einem einfachen Prinzip angeordnet, kann man r auch in der suggestiveren Folgeschreibweise angeben, wie z.B.

$$r_0 : (0, 1, 2, 3, \dots) \longrightarrow (0, *, 1, *, 2, *, 3, *, \dots),$$

d.h. $\Lambda = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \text{ gerade}\}$ und $r(n) = n/2$. Die von r_0 induzierte Abbildung Br_0^* stimmt übrigens mit t_0 überein, so daß t_0 überhaupt erstmal definiert und stetig ist. Analog ist t_1 durch $r_1 : (0, 1, 2, 3, \dots) \longrightarrow (*, 0, *, 1, *, 2, *, 3, \dots)$ induziert.

Solche induzierten Abbildungen Br^* eignen sich sehr gut zur Definition von Homotopien in $B\Gamma$, wobei wir folgendes Verfahren anwenden: Zu gegebenen, surjektiven Abbildungen

$$r_- : \Lambda_- \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad r_0 : \Lambda_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad r_+ : \Lambda_+ \rightarrow \mathbb{N}_0$$

definieren wir eine (nicht notwendig stetige) Abbildung $H : B\Gamma \times I \rightarrow B\Gamma$ durch

$$H_t(x) := \begin{cases} Br_-^*(x), & t \in [0, \frac{1}{3}] \\ Br_0^*(x), & t \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ Br_+^*(x), & t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

Um zusätzlich die Stetigkeit von H zu bekommen, setzen wir noch die Verträglichkeitsbedingung

$$(\star) \quad r_-|_{\Lambda_- \cap \Lambda_0} = r_0|_{\Lambda_- \cap \Lambda_0}, \quad r_+|_{\Lambda_+ \cap \Lambda_0} = r_0|_{\Lambda_+ \cap \Lambda_0}$$

voraus; denn wegen obiger Komponentenform und der Kegeleigenschaft von $\bar{C}\Gamma$ impliziert dann (\star) die Stetigkeit sowohl von $H|_{[0,2/3)}$ als auch von $H|_{(1/3,1]}$ und damit von H insgesamt. Ein Beispiel für solch eine Homotopie ist für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ durch

$$\begin{aligned} r_- : (0, \dots, n, n+1, n+2, \dots) &\longrightarrow (0, \dots, n, *, n+1, *, n+2, *, \dots) \\ r_0 : (0, \dots, n, n+1, n+2, \dots) &\longrightarrow (0, \dots, n, n+1, n+1, n+2, n+2, \dots) \\ r_+ : (0, \dots, n, n+1, n+2, \dots) &\longrightarrow (0, \dots, n, n+1, *, n+2, *, \dots) \end{aligned}$$

gegeben, die mit H_n bezeichnet werde. Hängt man nun diese einzelnen Homotopien H_0, H_1, H_2, \dots wie im Beweis von Lemma 5.6.2 aneinander, bekommt man daher wie gewünscht eine Homotopie $H : t_0 \simeq id_{B\Gamma}$. Für t_1 geht man analog vor. \triangle

FOLGERUNG. Entsprechen zwei kohomologe (Γ, \mathbb{N}_0) -Kozykel³⁾ γ_0, γ_1 von $X \in \mathbf{Top}$ lt. Satz 5.3.1 den klassifizierenden Abbildungen $f_0, f_1 : X \rightarrow B\Gamma$, dann sind f_0 und f_1 zueinander homotop, wobei die Homotopie (H_t) so gewählt werden kann, daß jedes H_t dieselbe (Γ, \mathbb{N}) -Struktur induziert.

BEWEIS: Wie im Beweis des vorigen Lemmas seien t_0 und t_1 von

$$\begin{aligned} r_0 : (0, 1, 2, 3, \dots) &\longrightarrow (0, *, 1, *, 2, *, 3, *, \dots) \\ r_1 : (0, 1, 2, 3, \dots) &\longrightarrow (*, 0, *, 1, *, 2, *, 3, \dots) \end{aligned}$$

induziert. Bezeichnet $\tilde{\gamma}_i$ für $i = 0, 1$ das zu $t_i \circ f_i$ gehörige (Γ, \mathbb{N}_0) -Kozykel zur Überdeckung $(\tilde{U}_j^i)_{j \in \mathbb{N}_0}$, so gilt also

$$\tilde{U}_j^0 = \emptyset, \text{ falls } j \text{ ungerade, und } \tilde{U}_j^1 = \emptyset, \text{ falls } j \text{ gerade.}$$

Daher gibt es wegen $\tilde{\gamma}_0 \sim \tilde{\gamma}_1$ ein (Γ, \mathbb{N}_0) -Kozykel $\tilde{\gamma}$ von X zur Vereinigungsüberdeckung

$$(\tilde{U}_j)_{j \in \mathbb{N}_0} := (\tilde{U}_j^0)_j \text{ gerade} \cup (\tilde{U}_j^1)_j \text{ ungerade}$$

mit $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1 \subset \tilde{\gamma}$.

Mit Hilfe der Standardprojektion $p : X \times I \rightarrow X, (x, t) \mapsto x$ ziehen wir $\tilde{\gamma}$ zunächst zum Kozykel $p^*\tilde{\gamma}$ von $X \times I$ zurück, das dann auf der Überdeckung $(\tilde{U}_j \times I)_j$ definiert ist.

Bilden wir nun von dieser Überdeckung die Verfeinerung

$$(\tilde{U}_j \times [0, 1[)_j \text{ gerade} \cup (\tilde{U}_j \times]0, 1])_j \text{ ungerade}$$

und schränken $p^*\tilde{\gamma}$ auf diese ein, erhalten wir ein (Γ, \mathbb{N}_0) -Kozykel auf $X \times I$, dessen klassifizierende Abbildung eine Homotopie zwischen $t_0 \circ f_0$ und $t_1 \circ f_1$ darstellt, womit dann wegen obigem Lemma auch f_0 und f_1 homotop wären.

Zu klären bleibt noch, ob alle Homotopieschnitte dieselbe Γ -Struktur induzieren: Wie aus dem Beweis von Lemma 5.7.1 hervorgeht, sind bei der Homotopie zwischen f_0 und $t_0 \circ f_0$ die Kozykel aller Homotopieschnitte zueinander indexisomorph. Dasselbe gilt natürlich

³⁾Wie schon vorher ist es momentan angenehmer, mit \mathbb{N}_0 anstatt \mathbb{N} zu arbeiten.

bzgl. $t_1 \circ f_1$. Die Homotopieschnitte der mittleren Homotopie korrespondieren lediglich zu den Kozykeln $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}_1$, die zueinander kohomolog sind. \triangle

5.7.2 In diesem Unterabschnitt klären wir, ob für eine topologische Kategorie Γ die kanonische Abbildung $B\Gamma \rightarrow B^*\Gamma$ eine schwache Homotopieäquivalenz ist, und ob es (für einen topologischen Gruoiden Γ) eine schwache Homotopieäquivalenz $B_{\text{Milnor}}\Gamma \rightarrow B\Gamma$ gibt.

SATZ. *Für jede topologische Kategorie Γ ist $B\Gamma \rightarrow B^*\Gamma$ eine schwache Homotopieäquivalenz im Sinne von Definition 4.7.2.*

BEWEIS: Zum Beweis der schwachen Homotopieäquivalenz von $\beta_0 : B\Gamma \rightarrow B^*\Gamma$ gehen wir auf die Definition 4.7.2 zurück. Demnach sind vorgegeben eine Abbildung $H : P \rightarrow B^*\Gamma$, paarweise disjunkte Unterpolyeder $Q_1, \dots, Q_k \subset P$ von P sowie Abbildungen $g_i : Q_i \rightarrow B\Gamma$ mit $\beta_0 \circ g_i = H|_{Q_i}$ für alle i .

Da $B\Gamma$ die 0-te Komponente von $B^*\Gamma$ ist, gibt es einen Repräsentanten $h : P \rightarrow B\Gamma$ von H . Weil $h|_{Q_i}$ und g_i für jedes i die Voraussetzungen der Folgerung 5.7.1 erfüllen, gibt es eine Homotopie $k_i : Q_i \times I \rightarrow B\Gamma$ zwischen $h|_{Q_i}$ und g_i mit der Zusatzbedingung aus Folgerung 5.7.1. Aufgrund der paarweisen Disjunktheit der Q_i vereinigen sich die k_i zu einer Homotopie $k : Q \times I = \bigcup Q_i \times I \rightarrow B\Gamma$ mit $k = h|_Q$.

k und h vereinigen sich wiederum zu einer stetigen Abbildung

$$P \times 0 \cup (Q \times I) \longrightarrow B\Gamma,$$

die aufgrund der Kofaserungseigenschaft zu einer stetigen Abbildung

$$F : P \times I \rightarrow B\Gamma$$

fortgesetzt werden kann, deren Einschränkung auf $P \times 1$ wir mit \bar{H} bezeichnen. Nach Konstruktion gilt $\bar{H}|_{Q_i} = g_i$ für alle i .

Was wir noch brauchen, ist eine auf Q stationäre Homotopie zwischen $\beta_0 \circ \bar{H}$ und $H = \beta_0 \circ h$. Der richtige Kandidat hierfür ist $\beta \circ F$, denn die einzelnen Homotopien k_i konnten derart gewählt werden, daß $\beta_0 \circ k_i$ streng stationär ist für alle i . Weil nun aber $B^*\Gamma$ nach Folgerung 5.6.2 schön disjunkt additiv ist, stellt auch $\beta_0 \circ k = \bigcup_i \beta_0 \circ k_i$ eine streng stationäre Homotopie dar. \triangle

Man beachte, daß in obigem Beweis sowohl P als auch die Q_i lediglich topologische Räume und keine Polyeder zu sein brauchten. Daher induziert $B\Gamma \rightarrow B^*\Gamma$ für jeden topologischen Raum $X \in \mathbf{Top}$ eine Bijektion

$$[X, B\Gamma] \xrightarrow{\cong} [X, B^*\Gamma].$$

Dies impliziert sofort die

FOLGERUNG. Für jede topologische Kategorie Γ ist $B\Gamma$ der klassifizierende Raum für die Homotopieklassen der abzählbaren Γ -Strukturen, d.h. $B\Gamma$ ist das klassifizierende Objekt innerhalb \mathbf{Top}/\simeq für den Funktor $H^1(\cdot; \Gamma, \mathbb{N})/\simeq : \mathbf{Top}/\simeq \rightarrow \mathbf{Set}$. \triangle

Durch eine Übertragung der Milnor-Konstruktion auf den Gruppoidfall in [Haefl] erhielt HAEFLIGER für jeden topologischen Gruppoiden Γ ganz konkret den klassifizierenden Raum $B_{\text{Milnor}}\Gamma$ für die numerierbaren Homotopieklassen numerierbarer Γ -Strukturen.

LEMMA. Für jeden topologischen Gruppoiden Γ ist $B\Gamma$ schwach homotopieäquivalent zu $B_{\text{Milnor}}\Gamma$.

BEWEIS: Unsere Beweisargumentation stützt sich im wesentlichen auf [Haefl], wobei wir wieder mit $B\Gamma := B(\Gamma, \mathbb{N}_0)$ arbeiten. Mit Anwendung des Lemmas auf Seite 142 in [Haefl] kann man zu jedem numerierbaren Γ -Kozykel $\gamma \in \text{num-}Z^1(X; \Gamma)$ auf $X \in \mathbf{Top}$ ein abzählbares Γ -Kozykel γ' finden, das kohomolog zu γ ist. Somit ist eine Abbildung $\text{num-}Z^1(X; \Gamma) \rightarrow H^1(X; \Gamma, \mathbb{N})$ wohldefiniert, die sich zudem als natürlich erweist und zu einer natürlichen Transformation

$$\text{num-}H^1(\cdot; \Gamma) \longrightarrow H^1(\cdot; \Gamma, \mathbb{N})$$

faktorisiert, die eingeschränkt auf parakompakte Räume ein Isomorphismus ist. Man kann noch weiterfaktorisieren zur natürlichen Transformation

$$\text{num-}H^1(\cdot; \Gamma)/\text{num-}\simeq \longrightarrow H^1(\cdot; \Gamma, \mathbb{N})/\simeq,$$

wobei für parakompakte und insbesondere kompakte Räume wiederum ein Isomorphismus vorliegt. Wegen voriger Folgerung korrespondiert diese Transformation zu einer natürlichen Transformation

$$[\cdot, B_{\text{Milnor}}\Gamma] \longrightarrow [\cdot, B\Gamma],$$

die nach dem Yoneda-Lemma von einer stetigen Abbildung $f : B_{\text{Milnor}}\Gamma \rightarrow B\Gamma$ induziert wird. Weil das universelle, numerierbare Γ -Kozykel ω von $B_{\text{Milnor}}\Gamma$ abzählbar ist, kann man hierbei f als die klassifizierende Abbildung für ω wählen.

Es sollen nun Basispunkte berücksichtigt werden, wozu irgendein Punkt $e_0 \in \Gamma^0$ ausgewählt sei. Dieser induziert den Punkt $(1e_0, 0, 0, 0, \dots) \in B_{\text{Milnor}}\Gamma$ sowie den Punkt $(e_0, *, *, *, \dots) \in B\Gamma$, dessen 00-Komponente gleich e_0 ist und restliche Komponenten gleich $*$. Für beide Basispunkte schreiben wir einfach wieder e_0 . Man verifiziert, daß $f(e_0) = e_0$ gilt. Da f einen Isomorphismus $[S^n, B_{\text{Milnor}}\Gamma] \xrightarrow{\cong} [S^n, B\Gamma]$ induziert, ist

$$\pi_n(f) : \pi_n(B_{\text{Milnor}}\Gamma, e_0) \xrightarrow{\cong} \pi_n(B\Gamma, e_0)$$

injektiv für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zum Nachweis der Surjektivität von $\pi_n(f)$ ⁴⁾ ist etwas mehr erforderlich.

Sei also $\beta : (S^n, 1) \rightarrow (B\Gamma, e_0)$ stetig. Dann korrespondiert β lt. Satz 5.3.1 zu einem Γ -Kozykel γ von S^n zur Überdeckung $(U_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ mit $1 \in U_0$ und $1 \notin U_k$ für alle $k \geq 1$. Wir

⁴⁾Der Fall $n = 1$ genügt zwar, aber der Beweis wird dadurch nicht einfacher.

wählen ein N mit $S^n \subset U_0 \cup \dots \cup U_N$, schränken γ auf diese endliche Teilüberdeckung ein, was das Γ -Kozykel γ' definiert, und fassen γ' mittels leerer Fortsetzung als (Γ, \mathbb{N}_0) -Kozykel auf. Aufgrund der lokalen Endlichkeit existiert eine Teilung $(v_i)_{0 \leq i \leq N}$ der Eins mit $U_i = v_i^{-1}(]0, 1])$ für alle $i = 0, \dots, N$. Aus [Haefl] geht nun hervor, daß zu γ' als ein solches numerierbares Γ -Kozykel eine stetige Abbildung $\alpha : (S^n, 1) \rightarrow (B_{\text{Milnor}}\Gamma, e_0)$ gehört mit $\gamma' = \alpha^*\omega$. Folglich ist $f \circ \alpha$ die klassifizierende Abbildung von γ' im Sinne eines (Γ, \mathbb{N}_0) -Kozykels.

Um den Beweis abzuschließen, benötigen wir noch eine in $1 \in S^n$ stationäre Homotopie zwischen β und $f \circ \alpha$. Wegen dieser Nebenbedingung bzgl. $1 \in S^n$ können wir Folgerung 5.7.1 aber nicht direkt anwenden, sondern müssen folgende Modifikationen vornehmen: Zunächst ist γ' ein Unterkozykel von γ mit $U_0(\gamma') = U_0(\gamma)$. Die Abbildungen t_0, t_1 aus Lemma 5.7.1 ersetzen wir durch t'_0, t'_1 , die mit der Prozedur aus dessen Beweis von den Abbildungen

$$\begin{aligned} r'_0 : (0, 1, 2, 3, \dots) &\longrightarrow (0, 1, *, 2, *, 3, *, \dots) \\ r'_1 : (0, 1, 2, 3, \dots) &\longrightarrow (0, *, 1, *, 2, *, 3, \dots) \end{aligned}$$

induziert seien, und lassen die Homotopie von t'_0 zu $id_{B\Gamma}$ nicht mit H_0 beginnen wie im Beweis von Lemma 5.7.1, sondern stattdessen erst mit H_1 . Daher ist die zusammengesetzte Homotopie auf e_0 stationär. Auch die Homotopie von t'_1 lassen wir erst mit H_1 beginnen. Somit ist β stationär in 1 homotop zu $t'_0 \circ \beta$ und analog $f \circ \alpha$ stationär in 1 homotop zu $t'_1 \circ f \circ \alpha$. Für die mittlere Homotopie—wie sie im Beweis von Folgerung 5.7.1 genannt wird—zwischen den letzten beiden Abbildungen führt man die Konstruktion ebenfalls nur für die Indizes ≥ 1 durch und läßt $\tilde{U}_0 \times I = \tilde{U}_0^0 \times I = \tilde{U}_0^1 \times I$ unberührt, wodurch diese mittlere Homotopie wiederum stationär in 1 ist. \triangle

Kapitel 6

Von Monoiden zu Gruppen

Die direkte Beschreibung von Blätterungen und gelifteten Gruppoid-Strukturen aus dem vorigen Kapitel stellt nur den ersten Schritt ihrer abstrakten Klassifikation dar. Was aber angestrebt wird, ist eine homotopietheoretische oder sogar homologiethoretische Form der abstrakten Klassifikation.

Der Übergang von einem ursprünglichen geometrischen Objekt zu seiner Homologie ist ein algebraischer Prozeß, der i.a. mit dem Verlust genau derjenigen geometrischen Information einhergeht, die man zur Klassifikation der Isomorphieklasse des Objektes eigentlich benötigen würde.

Aus diesem Grunde ist es sinnvoll, Homologie möglichst geometrisch zu definieren, wie dies etwa in [R-S, Anhang A.2] exemplarisch getan wird.

Am besten eignet sich hierfür eine natürliche Addition von Homologiezykeln, wie sie in \mathbf{Top} stets möglich ist—im Gegensatz zu \mathbf{Top}^* aufgrund der fehlenden Existenz von Koprodukten. Aber selbst in \mathbf{Top} ist jene Addition *geometrisch* nicht als Gruppenstruktur gegeben, sondern ursprünglich als *Monoidstruktur*, die erst modulo der nullhomologen Zykel eine Gruppenstruktur induziert. Folglich ist es zur Vermeidung unnötigen geometrischen Informationsverlustes besser, freie Monoide zu bilden (wenn es schon nicht anders geht) und ganz direkt durch Ausdividieren einer geeigneten Äquivalenzrelation eine Gruppe zu bekommen, anstatt die freie abelsche Gruppe zu bilden und dann eine Untergruppe auszudividieren.

Dieser allgemeine Übergang von Monoiden zu Gruppen wird in den ersten beiden Abschnitten studiert.

Im dritten und vierten Abschnitt werden die Ω - und Dipol-Homologie eingeführt. *Klassifikationsrelevant* ist jedoch nur die Dipol-Homologie und dies auch erst in gezähmter Form. Dafür stellt die Ω -Homologie das Pendant in \mathbf{Top}^* zur geometrisch definierten Homologie in \mathbf{Top} dar. Während die Ω -Homologie stets eine Gruppe ist, scheint die Dipol-Homologie nach dem einfachen Gegenbeispiel in Anmerkung 8.3.4 i.a. keine Gruppenstruktur zu besitzen. Dennoch vertragen sich beide Homologiearten mit \mathbf{Top} , weil sie dort mit der singulären Homologie identisch sind.

Gänzlich ungeklärt bleibt jedoch die Frage nach der axiomatischen Charakterisierung

beider Homologiearten, wie auch sowieso die eventuellen Möglichkeiten, die gesamte algebraische Topologie auf \mathbf{Top}^\star zu übertragen, weiterer Forschung harren.

Wir haben es also in dieser Arbeit lediglich mit einer ad hoc Konstruktion der klassifikationsrelevanten Dipol-Homologie zu tun.

Noch interessanter ist eigentlich die Frage nach geeigneten Definitionen von *geometrischen* Kohomologiegruppen für \mathbf{Top}^\star . Gibt es etwa eine „Dipol-Kohomologie“? Kann eine solche Kohomologie definiert werden, ist eine

abstrakte Klassifikation von PL-Blätterungen mittels charakteristischer Klassen

zu erwarten! Zur befriedigenden Klärung dieser Fragen wird eine Verallgemeinerung der Theorie der Mock-Bündel (s.[B-R-S]) auf \mathbf{Top}^\star sicherlich nicht zu vermeiden sein.

Alles in diesem Kapitel wird für die ri-Kategorie \mathbf{Top}^\star_{ri} parallel entwickelt mitsamt den entsprechenden Bezeichnungen, die somit etwas aufgebauscht wirken; aber was letztendlich zählt, ist nur die Dipol-Homologie $H_n^D(X^\star)$ bzw. die unorientierte Dipol-Homologie $H_n^D(X^\star; \mathbb{Z}_2)$.

6.1 Über Monoide im allgemeinen

Es werden einige Begriffe definiert und zusammengestellt. Insbesondere werden freie und involutive Monoide studiert.

6.1.1 Ein **Monoid** ist bekanntlich eine Halbgruppe mit neutralem Element, das im abelschen Fall mit 0 bezeichnet werde.

KONVENTION. Alle in dieser Arbeit auftretenden Monoide werden als abelsch vorausgesetzt, wenn nichts anderes bemerkt wird. Für die Addition (= abelsche Halbgruppenmultiplikation) verwenden wir stets das Symbol \oplus .

Das einfachste Beispiel eines Monoiden ist \mathbb{N}_0 .

Eine Mengenabbildung $f : M \rightarrow Q$ zwischen Monoiden M, Q heißt ein **Monoidmorphismus**, wenn f die beiden Eigenschaften

- (1) $f(0) = 0$,
- (2) $f(a \oplus b) = f(a) \oplus f(b)$ für alle $a, b \in M$

erfüllt. Kürzer nennen wir f auch einfach **monoidal** oder noch besser **additiv**. Monoidmorphismen sind abgeschlossen bzgl. Verkettung, so daß die Monoide und ihre Monoidmorphismen eine Kategorie **Mon** bilden. Insbesondere sind Monoidisomorphismen im kategoriellen Sinne definiert, die sich aber durch Bijektivität charakterisieren lassen:

Behauptung: Ein Monoidisomorphismus ist dasselbe wie ein bijektiver Monoidmorphismus.

Beweis: $f : M \rightarrow Q$ sei monoidal und bijektiv. Folglich existiert die inverse Mengenabbildung $f^{-1} : Q \rightarrow M$. Zu zeigen ist die Additivität von f^{-1} : $f(0) = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = 0$. Für alle $a, b \in Q$ gilt:

$$f(f^{-1}(a \oplus b)) = a \oplus b = f(f^{-1}(a) \oplus f^{-1}(b)),$$

so daß wegen der Injektivität $f^{-1}(a \oplus b) = f^{-1}(a) \oplus f^{-1}(b)$ gelten muß. \triangle

Eine Teilmenge $N \subset M$ eines Monoiden wird ein **Untermonoid** von M genannt, wenn N die 0 enthält und abgeschlossen bzgl. \oplus ist. Die Inklusion $N \hookrightarrow M$ stellt also einen Monoidmorphismus dar. Bilder und Urbilder von Untermonoiden unter Monoidmorphismen sind selbst wieder Untermonoide. Beliebige Durchschnitte von Untermonoiden sind ebenfalls wieder Untermonoide. Daher induziert jede Teilmenge $X \subset M$ den kleinsten Untermonoiden $\langle X \rangle$, der X umfaßt und durch

$$\langle X \rangle = \bigcap \{ N \subset M \text{ Untermonoid} \mid X \subset N \}$$

gegeben ist. Die konkrete Form von $\langle X \rangle$ lautet

$$\langle X \rangle = \left\{ \sum_{i \in I} x_i \mid I \text{ endlich und } x_i \in X \forall i \in I \right\}.$$

Man sagt auch, X erzeugt $\langle X \rangle$. Für den Spezialfall einer Familie $(N_i)_{i \in I}$ von Untermonoiden $N_i \subset M$ setzen wir

$$\sum N_i := \sum_{i \in I} N_i := \left\langle \bigcup_{i \in I} N_i \right\rangle$$

und nennen $\sum N_i$ die **Summe** der N_i . Die Summe z.B. zweier Untermonoide $N, N' \subset M$ schreiben einfach als $N + N'$.

Die Existenz von Produkten und Koprodukten in **Mon** bereitet keinerlei Schwierigkeiten: Für eine Familie $(M_i)_{i \in I}$ von Monoiden M_i definiert man wie gewohnt das mengentheoretische Produkt $\prod_i M_i$ und versieht es mit der komponentenweisen Addition, wohingegen ihre direkte Summe $\bigoplus_i M_i \subset \prod_i M_i$ als die Menge aller Elemente $(m_i) \in \prod_i M_i$ mit nur endlich vielen Komponenten $m_i \neq 0$ definiert wird. In beiden Fällen haben wir die kanonischen Monoidmorphismen $\prod_i M_i \rightarrow M_i$ und $M_i \hookrightarrow \bigoplus_i M_i$ für alle $i \in I$.

Besondere Aufmerksamkeit verdienen die **freien Monoide**, die per Definition (bis auf Isomorphie) von der Form $\bigoplus_{i \in I} M_i$ sind mit $M_i = \mathbb{N}_0$ für alle $i \in I$. Somit induziert jede Menge X einen freien Monoiden $M(X) := \bigoplus_{x \in X} M_x$ mit $M_x := \mathbb{N}_0$ für alle $x \in X$. Meistens schreiben wir

$$M(X) = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{N}_0 x$$

und nennen $M(X)$ den **freien Monoiden über X**. Alternativ kann man

$$M(X) = \{ f : X \rightarrow \mathbb{N}_0 \text{ Abbildung} \mid f \text{ fast überall } 0 \}$$

mit der punktweisen Addition definieren. Ferner haben wir eine Abbildung $p : X \rightarrow M(X), x \mapsto 1x \in \mathbb{N}_0 x$. $M(X)$ ist modulo Isomorphie durch folgende universelle Eigenschaft eindeutig charakterisiert: Ist M ein Monoid und $q : X \rightarrow M$ eine Abbildung, so existiert genau ein Monoidmorphismus $f : M(X) \rightarrow M$ mit $q = f \circ p$.

Wir wollen freie Monoide durch innere Eigenschaften charakterisieren, wofür einige Begriffe eingeführt werden. Sei M ein Monoid und $(x_i)_{i \in I}$ eine Familie aus M . Dann heißt diese Familie ein **Erzeugendensystem** von M , wenn sich jedes $m \in M$ als endliche Summe von Elementen x_i mit Koeffizienten in \mathbb{N}_0 schreiben läßt, d.h. $m = \sum_{i \in I} n_i x_i$ mit $n_i \in \mathbb{N}_0$ für alle i , so daß nur endlich viele der n_i ungleich 0 sind (sonst wäre die Summe auch gar nicht definiert). Man sagt auch, (x_i) erzeugt M . Wir einigen uns an dieser Stelle darüber, daß mit der Schreibweise $\sum_{i \in I} n_i x_i$ stets eine endliche Summe gemeint ist (also fast alle $n_i = 0$).

Eine Familie $(x_i)_{i \in I}$ aus M heie **unabhängig**, falls jedes $m \in M$ höchstens eine solche endliche Summendarstellung mit Elementen x_i besitzt, was genauer

$$\sum_{i \in I} n_i x_i = \sum_{i \in I} \tilde{n}_i x_i \Rightarrow n_i = \tilde{n}_i \text{ für alle } i \in I$$

heißen soll. Notwendigerweise muß dann (x_i) injektiv indiziert sein, und jedes x_i ist nicht Null. Die Begriffe ‘Erzeugendensystem’ und ‘unabhängig’ sind natürlich auch für *Teilmengen* von M definiert.

Eine **Basis** von M sei ein unabhängiges Erzeugendensystem von M .

Noch ein weiterer Begriff: Ein Monoidenelement $m \in M$ heie **irreduzibel**, falls folgendes gilt:

$$m = a \oplus b \implies a = 0 \text{ oder } b = 0.$$

Damit haben wir alle begrifflichen Ingredienzen zur Formulierung des folgenden Lemmas beisammen.

LEMMA. *M sei ein Monoid. Dann sind quivalent:*

- (1) *M ist freier Monoid.*
- (2) *M besitzt eine Basis.*
- (3) *Die Teilmenge der irreduziblen Elemente von M ist eine Basis von M .*

Ist M frei, so gibt es (bis auf Umordnung der Indizierung) genau eine Basis von M .

BEWEIS: (1) \Rightarrow (2): Wir zeigen, daß $X \equiv p(X) \subset M(X)$ eine Basis von $M(X)$ ist. Offensichtlich wird $M(X)$ von X erzeugt. Für den Beweis der Unabhängigkeit von X fasse man $M(X)$ als Teilmenge von $\prod_x \mathbb{N}_0 x$ auf und projiziere ein Element der Gestalt $\sum_x n_x x$ auf jede x -Komponente, wodurch jeder Koeffizient n_x eindeutig durch $\sum_x n_x x$ bestimmt ist.

(2) \Rightarrow (3): Sei B eine Basis von M , die wir als Teilmenge $B \subset M$ auffassen (injektive Indizierung). M_{irr} bezeichne die Menge der irreduziblen Elemente von M . Wir zeigen $B = M_{irr}$, womit auch gleich die Eindeutigkeitsaussage bewiesen ist. Sei $b \in B$ mit $b = a \oplus a'$. Aufgrund der Basiseigenschaft von B besitzen a und a' eindeutige Darstellungen $a = \sum_{\beta \in B} n_\beta \beta$, $a' = \sum_{\beta \in B} n'_\beta \beta$ mit jeweils nur endlich vielen Koeffizienten $n_\beta, n'_\beta \neq 0$. Also hat b die Darstellung $b = \sum_{\beta \in B} (n_\beta + n'_\beta) \beta$, woraus $n_\beta = n'_\beta = 0$ für alle $\beta \neq b$ und $n_b + n'_b = 1$ folgt, was nur für $a = 0$ oder $a' = 0$ möglich ist. Dies beweist $B \subset M_{irr}$. Sei umgekehrt x ein irreduzibles Element mit der eindeutigen Darstellung $x = \sum_{\beta \in B} n_\beta \beta$. Aufgrund der Irreduzibilität von x besteht die Summe nur aus einem Summanden $n_\beta \beta$ mit $n_\beta = 1$, so daß $x = \beta \in B$ gilt, was $M_{irr} \subset B$ beweist.

(3) \Rightarrow (1): Trivialerweise gilt (3) \Rightarrow (2), so daß wir (2) \Rightarrow (1) zeigen. Sei $X \subset M$ eine Basis von M . Die Zuordnung $x \mapsto x \in M$ induziert über die universelle Eigenschaft einen Monoidmorphismus $f : M(X) \rightarrow M$. Dann ist f surjektiv, weil M von X erzeugt wird und injektiv, weil X unabhängig ist. Somit ist f ein Monoidisomorphismus. \triangle

Das Lemma berechtigt uns, bei einem freien Monoiden M von *der* Basis von M zu sprechen, die wir meist mit X bezeichnen. Jedes Element $m \in M$ schreiben wir in der Form $m = \sum_x n_x(m)x$ mit eindeutigen $n_x(m) \in \mathbb{N}_0$.

Manchmal ist es besser, eine mehr kombinatorische Darstellung freier Monoide zu verwenden, auf die wir jetzt eingehen. M sei ein freier Monoid mit seiner Basis X . Wir betrachten zunächst die Menge aller endlichen Familien¹⁾ $(x_i)_{i \in I}$ aus X , die mittels der disjunkten Vereinigung von Familien sich auch als *Monoid* auffassen läßt (mit der leeren Familie als neutralem Element). Auf diesem Monoiden definieren wir die Äquivalenzrelation der **Indexisomorphie** (vgl. 3.2.1): Zwei endliche Familien $(x_i)_{i \in I}$ und $(y_j)_{j \in J}$ seien indexisomorph, wenn eine Bijektion $\varphi : I \rightarrow J$ existiert mit

$$y_{\varphi(i)} = x_i \quad \text{für alle } i \in I.$$

Dies ist offensichtlich sogar eine additive Äquivalenzrelation, die somit einen Quotientenmonoiden induziert, der auf folgende Weise kanonisch isomorph zu M ist:

Jeder endlichen Familie $(x_i)_{i \in I}$ ordnen wir das Element $\sum_{i \in I} x_i \in M$ zu (der leeren Familie natürlich die 0), so daß diese Zuordnung also additiv ist und aufgrund der Kommutativität von M durch die Indexisomorphieklassen und daher zu einem Monoidmorphismus $f : \text{Quotient} \rightarrow M$ faktorisiert, der sich dann als surjektiv und injektiv erweist und somit einen Monoidisomorphismus darstellt.

Wird für M diese Form der Darstellung gewählt, kann man meist mit den Familien selbst anstatt ihrer Indexisomorphieklassen arbeiten. Daher vereinbaren wir hier, daß mit einer Familie $(x_i)_{i \in I}$ eigentlich ihre Indexisomorphieklasse gemeint ist, wobei dies aber in der Notation unterlassen wird.

6.1.2 Ferner gibt es noch involutive Monoide: Ein **involutiver Monoid** sei ein Monoid, für den zusätzlich noch eine monoidiale Involution $^{-1} : M \rightarrow M$ gegeben ist (d.i. ein

¹⁾Insbesondere sei auch die leere Familie (d.h. $I = \emptyset$) zugelassen.

Monoidmorphismus $v : M \rightarrow M$ mit $v \circ v = id_M$). Ein Monoidmorphismus $f : M \rightarrow Q$ zwischen involutiven Monoiden heie *involutiv*, wenn er die Involutionen respektiert, d.h. $f(m^{-1}) = (f(m))^{-1}$ für alle $m \in M$.

6.2 Äquivalenzrelationen und Untermonoide

Der Quotient eines Monoiden nach einer additiven Äquivalenzrelation ist auf jeden Fall wieder ein Monoid. Wir wollen wissen, unter welchen hinreichenden Bedingungen an die Äquivalenzrelation der Quotient eine abelsche Gruppe ergibt. Es stellt sich heraus, daß man noch einen Untermonoiden N mit gewissen Eigenschaften braucht, der in dem Quotienten verschwindet muß. Das Zusammenwirken von N und einer *erwünschten* Äquivalenzrelation liefert eine gröbere Äquivalenzrelation als die ursprüngliche, was i.a. nicht zu umgehen ist.

Diesen Effekt wollen wir aber durch zusätzliche Bedingungen vermeiden. Am einfachsten kann dies bei involutiven Monoiden M mit *kürzenden* Untermonoiden $N \subset M$ erreicht werden, wobei die Äquivalenzrelation nicht gegeben ist, sondern über die Involution und N erst definiert wird.

6.2.1 Eine Äquivalenzrelation „ \sim “ auf einem Monoiden M heie **additiv**, wenn sie die Addition respektiert, i.e.

$$a \sim a', b \sim b' \quad \Rightarrow \quad a \oplus b \sim a' \oplus b'$$

für alle $a, a', b, b' \in M$. Offensichtlich ist dann der Quotient M/\sim wieder ein Monoid und die Projektion $M \rightarrow M/\sim$ ein Monoidmorphismus. Umgekehrt definieren die Fasern eines surjektiven Monoidmorphismus $f : M \rightarrow Q$ eine additive Äquivalenzrelation \sim auf M , so daß f von der Form $M \rightarrow M/\sim$ ist.

Wir wenden uns nun speziellen Betrachtungen über Untermonoiden zu. Ein Untermonoid $N \subset M$ eines Monoiden M soll **kürzend** genannt werden, wenn gilt:

$$m \in M, n \in N \text{ mit } m \oplus n \in N \quad \Rightarrow \quad m \in N.$$

Z.B. sind $\{0\}$ und M krzende Untermonoide von M . Ein Durchschnitt von kürzenden Untermonoiden ist wieder kürzend. Daher induziert *jeder* Untermonoid N von M einen eindeutigen, kleinsten, kürzenden Untermonoiden N^∞ , der N umfaßt, nämlich

$$N^\infty = \bigcap \{ \bar{N} \mid N \subset \bar{N}, \bar{N} \text{ kürzender Untermonoid von } M \}.$$

Tatsächlich kann man N^∞ konkreter beschreiben:

LEMMA. $N^\infty = \{ m \in M \mid \exists n \in N \text{ mit } m \oplus n \in N \}$.

BEWEIS: Sei \tilde{N}^∞ wie im Lemma definiert, so daß wir $\tilde{N}^\infty = N^\infty$ zu zeigen haben.

\tilde{N}^∞ ist kürzender Untermonoid: Auf den ersten Blick sieht man, daß N in \tilde{N}^∞ enthalten ist und auf den zweiten, daß \tilde{N}^∞ ein Untermonoid von M ist.

\tilde{N}^∞ kürzend: Seien also $m \in M$, $n \in \tilde{N}^\infty$ mit $m \oplus n \in \tilde{N}^\infty$. $n \in \tilde{N}^\infty \Rightarrow \exists n' \in N$ mit $n \oplus n' \in N$. Daher ist $m \oplus n \oplus n' \in \tilde{N}^\infty$, so daß ein $\bar{n} \in N$ existiert mit $m \oplus ((n \oplus n') \oplus \bar{n}) \in N$, was aber $m \in \tilde{N}^\infty$ bedeutet.

\tilde{N}^∞ minimal: Sei N' ein kürzender Untermonoid von M mit $N \subset N'$. Wir müssen $\tilde{N}^\infty \subset N'$ zeigen: Zu $m \in \tilde{N}^\infty$ existiert nach Definition ein $n \in N$ mit $m \oplus n \in N \subset N'$, also ist $n \in N'$ mit $m \oplus n \in N'$. Da aber N' kürzend ist, haben wir $m \in N'$. \triangle

FOLGERUNG. Seien M, Q Monoide, $N \subset M, \tilde{N} \subset Q$ Untermonoide und $f : M \rightarrow Q$ ein Monoidmorphismus mit $f(N) \subset \tilde{N}$. Dann gilt auch $f(N^\infty) \subset \tilde{N}^\infty$.

BEWEIS: Sei $m \in N^\infty$. Dann existiert ein $n \in N$ mit $m \oplus n \in N$, so daß $f(m) \oplus f(n) = f(m \oplus n) \in \tilde{N}$ gilt mit $f(n) \in \tilde{N}$. D.h. $f(m) \in \tilde{N}^\infty$. \triangle

6.2.2 Befassen wir uns mit dem Zusammenhang zwischen additiven Äquivalenzrelationen und kürzenden Untermonoiden.

Wir beginnen mit einem Lemma, wie man allgemein eine additive Äquivalenzrelation so vergrößern kann, daß der Quotient eine abelsche Gruppe wird.

LEMMA. Gegeben seien ein Monoid M , eine additive Äquivalenzrelation \sim auf M und ein Untermonoid $N \subset M$, so daß zu jedem $m \in M$ ein $m' \in M$ mit $m \oplus m' \in N^\infty$ existiere.

Dann definiert

$$a \sim^N b : \iff \exists n, n' \in N \text{ mit } a \oplus n \sim b \oplus n'$$

eine additive Äquivalenzrelation auf M , die gröber als \sim ist. Ferner ist

$$M / \sim^N$$

eine abelsche Gruppe. Außerdem gilt $\sim^N = \sim^{N^\infty}$.

BEWEIS: Reflexivität und Symmetrie von \sim^N sind klar. Transitivität: Es gelte $a \sim^N b$ und $b \sim^N c$. Daher existieren Elemente $n, n', \tilde{n}', n'' \in N$ mit

$$a \oplus n \sim b \oplus n' \quad \text{und} \quad b \oplus \tilde{n}' \sim c \oplus n''.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} a \oplus (n \oplus \tilde{n}') &= (a \oplus n) \oplus \tilde{n}' \\ &\sim (b \oplus n') \oplus \tilde{n}' \\ &= (b \oplus \tilde{n}') \oplus n' \\ &\sim (c \oplus n'') \oplus n' \\ &= c \oplus (n'' \oplus n'), \end{aligned}$$

was $a \sim^N c$ beweist. Evidenterweise ist \sim^N gröber als \sim .

Additivität: Seien $a, a', m \in M$ mit $a \sim^N a'$. Wir zeigen $a \oplus m \sim^N a' \oplus m$. Zunächst gibt es $n, n' \in N$ mit $a \oplus n \sim a' \oplus n'$, woraus $(a \oplus m) \oplus n = (a \oplus n) \oplus m \sim (a' \oplus n') \oplus m = (a' \oplus m) \oplus n'$ folgt.

M/\sim^N abelsche Gruppe: Wir haben die Existenz inverser Elemente zu zeigen, wofür die Voraussetzung an N verwendet wird: Zu $m \in M$ existiert ein $m' \in M$ mit $m \oplus m' \in N^\infty$, so daß wir nur noch $n \sim^N 0$ für alle $n \in N^\infty$ zu gelten braucht, wofür es reicht, $n \sim^N 0$ für alle $n \in N$ zu zeigen, was aber aus $n \oplus 0 = 0 \oplus n$ folgt.

$\sim^N = \sim^{N^\infty}$: Sind $a, b \in M$ und $n, n' \in N^\infty$ mit $a \oplus n \sim b \oplus n'$, so existieren $\tilde{n}, \tilde{n}' \in N$ mit $n \oplus \tilde{n} \in N$ und $n' \oplus \tilde{n}' \in N$. Somit haben wir $(n \oplus \tilde{n}) \oplus \tilde{n}' \in N$ und $(n' \oplus \tilde{n}') \oplus \tilde{n} \in N$ mit

$$a \oplus ((n \oplus \tilde{n}) \oplus \tilde{n}') = (a \oplus n) \oplus (\tilde{n} \oplus \tilde{n}') \sim (b \oplus n') \oplus (\tilde{n} \oplus \tilde{n}') = b \oplus ((n' \oplus \tilde{n}') \oplus \tilde{n})$$

und daher $a \sim^N b$. △

BEMERKUNG. Die Projektion $p : M \rightarrow M/\sim^N$ besitzt folgende universelle Eigenschaft: Ist A eine abelsche Gruppe und $h : M \rightarrow A$ monoidal mit $h(N) = 0$ und $h(a) = h(b)$ für alle $a, b \in M$ mit $a \sim b$, so existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $f : M/\sim^N \rightarrow A$ mit $f \circ p = h$.

BEISPIEL. Die Grothendieck-Gruppe eines Monoiden erhalten wir wie folgt: $M \oplus M = M \times M$ ist ein Monoid mit der Diagonalen $\Delta = \{(m, m)\}$ als Untermonoiden. Dann ist $M \times M / \equiv^\Delta$ die Grothendieck-Gruppe von M zusammen mit der Abbildung $M \equiv M \oplus 0 \subset M \oplus M \rightarrow M \times M / \equiv^\Delta$.

M sei jetzt zusätzlich ein involutiver Monoid und N ein Untermonoid von M . Wir nennen N einen **involutiven Untermonoiden**, wenn die beiden Bedingungen

(i) $N^{-1} = N$,

(ii) $m \oplus m^{-1} \in N$ für alle $m \in M$

gelten. Ist N involutiv, dann auch N^∞ , wie man sich überlegt.

Ein beliebiger Durchschnitt involutiver Untermonoide ist wieder involutiv. Daher erzeugt jeder Untermonoid $N \subset M$ einen eindeutigen kleinsten, involutiven Untermonoiden, nämlich

$$N + N^{-1} + \{m \oplus m^{-1} \mid m \in M\},$$

in dem N enthalten ist und einen eindeutigen kleinsten, involutiven und kürzenden Untermonoiden $\bar{N} \supset N$, nämlich

$$\bar{N} = (N + N^{-1} + \{m \oplus m^{-1} \mid m \in M\})^\infty.$$

Ist M ein involutiver Monoid und $N \subset M$ ein involutiver Untermonoid, so kann man die von der identischen, additiven Äquivalenzrelation „ $=$ “ auf M induzierte Äquivalenzrelation $=^N$ auch noch anders ausdrücken, es gilt nämlich

$$a =^N b \iff a \oplus b^{-1} \in N^\infty,$$

was wir nun beweisen werden: Es gelte $a =^N b$, so daß $n, n' \in N$ mit $a \oplus n = b \oplus n'$ existieren. Addition von b^{-1} auf beiden Seiten liefert $a \oplus b^{-1} \oplus n = b \oplus b^{-1} \oplus n' \in N \subset N^\infty$. Daher gilt $a \oplus b^{-1} \in N^\infty$, da N^∞ kürzend ist. Umgekehrt folgt aus $a \oplus b^{-1} \in N^\infty$ die Existenz eines $n \in N$ mit $a \oplus b^{-1} \oplus n \in N$. Addition von b liefert dann

$$a \oplus (b^{-1} \oplus b \oplus n) = b \oplus (a \oplus b^{-1} \oplus n)$$

und damit $a =^N b$. Wichtig für uns ist der Fall eines kürzenden, involutiven Untermonoiden N , den wir in der nächsten Folgerung notieren.

FOLGERUNG. Sei M ein involutiver Monoid und $N \subset M$ ein kürzender, involutiver Untermonoid. Dann ist

$$a \sim_N b : \iff a \oplus b^{-1} \in N$$

eine additive Äquivalenzrelation auf M und der Quotient M/\sim_N eine abelsche Gruppe, so daß die Quotientenprojektion $p : M \rightarrow M/\sim_N$ den Kern $p^{-1}(0) = N$ besitzt. Ferner ist $=^N$ mit \sim_N identisch.

BEWEIS: Nur die Aussage über den Kern von p muß noch bewiesen werden:

$$m \sim_N 0 \iff m = m \oplus 0^{-1} \in N^\infty = N. \quad \triangle$$

Ist $N \subset M$ Untermonoid eines involutiven Monoiden M , und bezeichnet \bar{N} wie vorhin den von N erzeugten, kürzenden und involutiven Untermonoiden, so definieren wir die Äquivalenzrelation „ \sim_N “ durch

$$\sim_N := \sim_{\bar{N}}.$$

Ferner setzen wir

$$M/N := M/\sim_N,$$

so daß mit dieser Notation M/N stets eine abelsche Gruppe ist.

KOROLLAR. (a) Sei M ein involutiver Monoid und $N \subset M$ ein Untermonoid. Dann ist \sim_N eine additive Äquivalenzrelation auf M und der Quotient M/N eine abelsche Gruppe, so daß die Quotientenprojektion $p : M \rightarrow M/N$ den Kern $p^{-1}(0) = \bar{N}$ besitzt. Ferner ist $=^{\bar{N}}$ mit \sim_N identisch.

(b) Sind M', M involutive Monoide mit Untermonoiden $N' \subset M'$, $N \subset M$ und $f : M' \rightarrow M$ ein involutiver Monoidmorphismus mit $f(N') \subset N$, dann faktorisiert f zu genau einem Gruppenhomomorphismus $\bar{f} : M'/N' \rightarrow M/N$.

BEWEIS: Nur Teil (b) ist vielleicht noch nicht ganz einsichtig. Da f die Untermonoide respektiert und involutiv ist, respektiert f auch die von N' bzw. N erzeugten involutiven Untermonoide und daher wieder die von diesen erzeugten involutiven, kürzenden Untermonoide \bar{N}', \bar{N} . Dann respektiert f aber auch die Äquivalenzrelationen $\sim_{\bar{N}'}, \sim_{\bar{N}}$. \triangle

6.3 Die geometrische Ω -Homologie

Für die Kategorie **Top** liefern die kettenalgebraisch definierte Homologie, die geometrisch definierte Homologie (= Ω -Homologie) und die für uns wichtige Dipol-Homologie das Gleiche, was an der Existenz von Koprodukten (= disjunkte Summen) in **Top** liegt. Diese Eigenschaft ist in **Top**⁺ und noch mehr in **Top**⁺_{ri} nicht erfüllt, so daß sich die Ω -Homologie für **Top**⁺, die in diesem Abschnitt definiert wird, von der „normalen“ Homologie H_* i.a. unterscheidet.

Die Ω -Homologie wird dann im nächsten Kapitel zur zahmen geometrischen Homologie auf **Top**⁺ und **Top**⁺_{ri} verfeinert.

Die Dipol-Homologie aus dem nächsten Abschnitt ist ebenso wie die Ω -Homologie für alle Sorten von ri- und/oder zahmen Kategorien in der gleichen Weise wie für **Top**⁺ definiert.

Die Konstruktion der geometrischen Ω -Homologiegruppen besteht i.w. darin, die Voraussetzungen aus Korollar 6.2.2 (a) zu schaffen und dieses dann anzuwenden. A priori sei angemerkt, daß die Involution durch Umorientieren singulärer Zykel gegeben ist.

6.3.1 Es sei zunächst an die Begriffe in [R-S, Anhang A.2] erinnert: Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei ein **n-Zykel** ein kompaktes Polyeder P , das ein Unterpolyeder $S(P) \subset P$ der Dimension $\leq n - 2$ enthält, so daß die Bedingungen

- (1) $P - S(P) \subset P$ dicht,
- (2) $P - S(P)$ ist eine randlose PL-Mannigfaltigkeit der Dimension n ,

gelten, oder salopper ausgedrückt: P ist eine geschlossene, singuläre PL-Mannigfaltigkeit mit Singularitäten der Kodimension ≥ 2 . P heißt **orientiert**, falls $P - S(P)$ orientiert ist. Läßt sich dagegen $P - S(P)$ nicht orientieren, oder ist keine Orientierung von $P - S(P)$ ausgewählt worden, heißt P ein **unorientiertes** n -Zykel.

Schön ist auch die kombinatorische Definition eines n -Zykels: Es gibt eine Triangulierung $|K| = P$ von P , so daß jedes prinzipale²⁾ Simplex von K Dimension n hat, und jedes $(n - 1)$ -Simplex Seite von genau zwei n -Simplizes ist. Orientierbarkeit von K kann man dann z.B. über die geordnete n -te Homologie von K (s. z.B. [Spa]) definieren, oder auch über die n -te singuläre Homologie von $|K|$ ³⁾.

Für jedes orientierte n -Zykel P bezeichne P^{-1} dasselbe n -Zykel P nur mit der entgegengesetzten Orientierung versehen.

Ähnlich lassen sich auch berandete n -Zykel und somit berandete singuläre n -Zykel definieren (s. [R-S, Anhang A.2]).

Sei X ein topologischer Raum. Unter einem **singulären n-Zykel** von X versteht man ein Paar (P, f) , wobei P ein orientiertes n -Zykel ist und $f : P \rightarrow X$ eine stetige Abbildung.

²⁾Ein Simplex heißt prinzipal, wenn es in keinem Simplex *echt* enthalten ist.

³⁾Man orientiert K , indem man jedem n -Simplex $\sigma \in K$ einen simplizialen Isomorphismus $\Delta_n \xrightarrow{\cong} \sigma$ zusammen mit einem Vorzeichen ± 1 derart zuordnet, daß deren Summe in $C_n(|K|)$ ein Zykel darstellt.

Mit $(P, f)^{-1} := (P^{-1}, f)$ bezeichnen wir das singuläre n -Zykel mit der entgegengesetzten Orientierung. Entsprechend gibt es **unorientierte, singuläre n -Zykel** von X . Die Umkehrung der Orientierung stellt also eine Involution auf der Menge aller singulären n -Zykel von X dar. Falls (P, f) unorientiert ist, setzen wir $(P, f)^{-1} := (P, f)$.

Zur Definition singulärer n -Zykel von X braucht man also nur den Begriff des orientierten n -Zykels und des stetigen Morphismus $P \rightarrow X$. Indem man daher X durch Objekte aus jeweils anderen Oberkategorien von **Top** ersetzt, definiert man wortwörtlich auch singuläre n -Zykel von Objekten aus **Top⁺**, **Top^{*}** und **Top^{ri}**.

6.3.2 Exemplarisch befassen wir uns mit der geometrischen Homologie für die Kategorie **Top⁺**. Die Definition der Ω -Homologie für die anderen Kategorien - und insbesondere für die neuen Kategorien aus dem nächsten Kapitel - wird vollkommen analog vorgenommen.

X^\blacktriangleleft sei also ein projektives **Top**-System. Dann erzeugen für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die singulären n -Zykel von X^\blacktriangleleft den freien Monoiden

$$Z_n^\Omega(X^\blacktriangleleft)$$

der **n -Zykel von X^\blacktriangleleft** . Demnach sind die singulären n -Zykel von X^\blacktriangleleft die Basis von $Z_n^\Omega(X^\blacktriangleleft)$. Dagegen bezeichne

$$Z_n^{\Omega_0}(X^\blacktriangleleft)$$

den freien Monoiden, der von allen *zusammenhängenden* singulären n -Zykeln von X^\blacktriangleleft erzeugt wird.

Die Involution der Orientierungsumkehrung auf den singulären n -Zykeln von X^\blacktriangleleft induziert daher eine monoidiale Involution auf $Z_n^\Omega(X^\blacktriangleleft)$ und $Z_n^{\Omega_0}(X^\blacktriangleleft)$.

Ist $X^\blacktriangleleft = X \in \mathbf{Top}$, läßt sich $Z_n^{\Omega_0}(X)$ auch rein geometrisch deuten: Da es in **Top** disjunkte Summen gibt, kann man singuläre n -Zykel von X disjunkt vereinigen, was mit Adjunktion der 0 einen Monoiden $\tilde{Z}_n^\Omega(X)$ und außerdem einen Monoidmorphismus $Z_n^{\Omega_0}(X) \rightarrow \tilde{Z}_n^\Omega(X)$ definiert, der sich als Monoidisomorphismus herausstellt (die Zusammenhangskomponenten eines n -Zykels P sind wohldefiniert), so daß es in **Top** gleichgültig ist, welchen Monoiden man wählt. Aber es sei nochmal betont: In **Top⁺** gibt es keine disjunkten Summen, so daß eine analoge, *rein* geometrische Definition von $Z_n^{\Omega_0}(X^\blacktriangleleft)$ nicht möglich ist!

Dennoch gibt es nach 6.1.1 so etwas wie eine „semirein“ geometrische Definition: Demnach ist $Z_n^{\Omega_0}(X^\blacktriangleleft)$ kanonisch isomorph zum Monoiden der Indexisomorphieklassen endlicher Familien $(P_i, f_i)_{i \in I}$ zusammenhängender singulärer n -Zykel von X^\blacktriangleleft . Für $Z_n^\Omega(X^\blacktriangleleft)$ muß man natürlich die Indexisomorphieklassen endlicher Familien $(P_i, f_i)_{i \in I}$ singulärer n -Zykel von X^\blacktriangleleft nehmen.

Diese Feststellung bildet den Hintergrund für folgende

DEFINITION. Eine endliche Familie⁴⁾ $(P_1, f_1), \dots, (P_k, f_k)$ singulärer n -Zykel von X^\blacktriangleleft heiße **streng nullhomolog**, falls ein berandetes, orientiertes $(n+1)$ -Zykel P und ein

⁴⁾Die Möglichkeit der *nicht* injektiven Indizierung ist voll beabsichtigt.

Top[←]-Morphismus $F : P \rightarrow X^{\leftarrow}$, sowie ein orientierungserhaltender PL-Isomorphismus $\delta : \bigcup_i P_i \xrightarrow{\cong} \partial P$ existiert mit $f_i = F \circ \delta|_{P_i}$ für alle $i = 1, \dots, k$.

Ferner heie ein n -Zykel $z \in Z_n^\Omega(X^{\leftarrow})$ streng nullhomolog, wenn eine streng nullhomologe, endliche Familie $(P_1, f_1), \dots, (P_k, f_k)$ singulärer n -Zykel von X^{\leftarrow} existiert, so daß $z = \sum_i (P_i, f_i)$ gilt.

Somit ist klar, daß die Eigenschaft der strengen Nullhomologie einer Familie nur von ihrer Indexisomorphieklasse abhängt.

Als Vorbereitung zur Dipol-Homologie führen wir hier schon mal den Begriff der strengen Homologie ein: Zwei singuläre n -Zykel (P, f) und (P', f') von X^{\leftarrow} nennen wir **streng homolog**, wenn $(P, f) \oplus (P', f')^{-1}$ streng nullhomolog ist. Strenge Homologie ist grob gesprochen also dasselbe wie singulärer PL-Kobordismus. Mit „streng homolog“ ist jedoch keine Äquivalenzrelation auf den singulären n -Zykeln von X^{\leftarrow} gegeben. Strenge Homologie zwischen unorientierten n -Zykeln von X^{\leftarrow} wird natürlich analog definiert.

Die streng nullhomologen n -Zykel von X^{\leftarrow} erzeugen den Untermonoiden $B_n^\Omega(X^{\leftarrow})$ der **pr-nullhomologen** n -Zykel von X^{\leftarrow} . Analog ist der Untermonoid $B_n^{\Omega_0}(X^{\leftarrow}) \subset Z_n^{\Omega_0}(X^{\leftarrow})$ definiert.

BEMERKUNG. Betrachten wir wieder den Spezialfall $X^{\leftarrow} = X \in \mathbf{Top}$. Wegen der Möglichkeit der disjunkten Summenbildung sind die streng nullhomologen n -Zykel von X abgeschlossen gegenüber Addition, so daß jedes Element aus $B_n^\Omega(X)$ streng nullhomolog ist. Obendrein ist $B_n^\Omega(X)$ auch noch ein kürzender Untermonoid von $Z_n^\Omega(X)$. Beides ist für **Top[←]** i.a. falsch. Aber zumindest gilt:

KOROLLAR. $B_n^\Omega(X^{\leftarrow})$ ist ein involutiver Untermonoid von $Z_n^\Omega(X^{\leftarrow})$. Ebensolches gilt für $B_n^{\Omega_0}(X^{\leftarrow})$.

BEWEIS: Sei (P, f) ein singuläres n -Zykel von X^{\leftarrow} , das durch ein stetiges $f_i : P \rightarrow X_i$ repräsentiert werde. Dann stellt die konstante Homotopie von f_i einen Homologie-Kobordismus zwischen $f_i : P \rightarrow X_i$ und $f_i : P^{-1} \rightarrow X_i$ dar, der somit eine strenge Homologie zwischen (P, f) und $(P, f)^{-1}$ induziert. Die Beziehung $(B_n^\Omega(X^{\leftarrow}))^{-1} = B_n^\Omega(X^{\leftarrow})$ ist sowieso klar. △

Wegen Korollar 6.2.2 (a) ist die n -te **Ω-Homologie**

$$H_n^\Omega(X^{\leftarrow}) := Z_n^\Omega(X^{\leftarrow}) / B_n^\Omega(X^{\leftarrow})$$

von X^{\leftarrow} definiert und eine abelsche Gruppe. Analog setzt man

$$H_n^{\Omega_0}(X^{\leftarrow}) := Z_n^{\Omega_0}(X^{\leftarrow}) / B_n^{\Omega_0}(X^{\leftarrow}).$$

Die Ω_0 -Homologie führen wir nur aus technischen Gründen ein (siehe nächsten Unterabschnitt). Das Bild in $H_n^\Omega(X^{\leftarrow})$ eines Elementes $z \in Z_n^\Omega(X^{\leftarrow})$ schreiben wir als $[z]$ und

nennen es die **Ω -Homologieklass**e von z . Gilt $[z] = 0$, heißt z **nullhomolog**, was nach Korollar 6.2.2 (a) äquivalent zu $z \in (B_n^\Omega(X^\blacktriangleleft))^\infty$ ist. Zwei n -Zykel z, z' von X^\blacktriangleleft sollen ferner **homolog** heißen, i.Z.

$$z \sim z',$$

wenn ihre Homologieklassen $[z], [z'] \in H_n^\Omega(X^\blacktriangleleft)$ gleich sind, was natürlich gleichbedeutend zur Nullhomologie von $z' \oplus z^{-1}$ ist.

Bevor die Funktorialität dieser Ω -Homologie nachgewiesen wird, gehen wir noch kurz auf den unorientierten Fall ein: Man nimmt einfach unorientierte, singuläre n -Zykel von X^\blacktriangleleft , die den freien, involutiven⁵⁾ Monoiden $Z_n^\Omega(X^\blacktriangleleft; \mathbb{Z}_2)$ erzeugen, definiert strenge Nullhomologie mittels unorientierter, berandeter $(n+1)$ -Zykel und bildet daraus $B_n^\Omega(X^\blacktriangleleft; \mathbb{Z}_2)$ ganz analog, womit

$$H_n^\Omega(X^\blacktriangleleft; \mathbb{Z}_2) := Z_n^\Omega(X^\blacktriangleleft; \mathbb{Z}_2) / B_n^\Omega(X^\blacktriangleleft; \mathbb{Z}_2)$$

definiert ist. In dieser Gruppe gilt die Relation $2x = 0$, die daher einen Vektorraum über \mathbb{Z}_2 darstellt. $H_n^{\Omega_0}(X^\blacktriangleleft; \mathbb{Z}_2)$ wird analog gebildet.

Zur Funktorialität von H_n^Ω : Ein **Top $^\blacktriangleleft$** -Morphismus $G^\blacktriangleleft : X^\blacktriangleleft \rightarrow Y^\blacktriangleleft$ induziert durch

$$(P, f) \mapsto (P, G^\blacktriangleleft \circ f)$$

eine involutive Abbildung auf der Ebene der singulären n -Zykel und damit einen involutiven Monoidmorphismus $Z_n^\Omega(X^\blacktriangleleft) \rightarrow Z_n^\Omega(Y^\blacktriangleleft)$, der strenge Nullhomologie und damit Prä-Nullhomologie respektiert und somit $B_n^\Omega(X^\blacktriangleleft)$ nach $B_n^\Omega(Y^\blacktriangleleft)$ abbildet. Nach Korollar 6.2.2 (b) bekommen wir als eindeutige Faktorisierung einen Gruppenhomomorphismus

$$H_n^\Omega(G^\blacktriangleleft) : H_n^\Omega(X^\blacktriangleleft) \longrightarrow H_n^\Omega(Y^\blacktriangleleft).$$

Verträglichkeit mit Verkettung ist offensichtlich. Da zwei streng homotope, singuläre n -Zykel insbesondere streng nullhomolog sind, ist $H_n^\Omega(\cdot)$ ein *homotopieinvarianter* Funktor. Gleiches gilt für den Funktor $H_n^{\Omega_0}(\cdot)$.

LEMMA. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sind $H_n^\Omega(\cdot)$ und $H_n^\Omega(\cdot; \mathbb{Z}_2)$ homotopieinvariante, kovariante Funktoren

$$H_n^\Omega(\cdot) : \mathbf{Top}^\blacktriangleleft \longrightarrow \mathbf{Ab}, \quad H_n^\Omega(\cdot; \mathbb{Z}_2) : \mathbf{Top}^\blacktriangleleft \longrightarrow \mathbf{Ab}. \quad \triangle$$

Wie schon bemerkt wurde, überträgt sich diese ganze Konstruktion vollkommen analog auf die Kategorien **Top $^\blacktriangleleft$** , **Top $^\blacktriangleleft_{ri}$** , wobei hier zu beachten ist, daß die singulären n -Zykel natürlich stets Morphismen der entsprechenden Kategorie sein müssen, also z.B. für $X^\blacktriangleleft \in \mathbf{Top}^\blacktriangleleft_{ri}$ hat man singuläre n -Zykel (P, f) , wobei $f : P \rightarrow X^\blacktriangleleft$ ein **Top $^\blacktriangleleft_{ri}$** -Morphismus ist. Wir brauchen daher nur die Bezeichnungen $H_n^{\Omega_{ri}}(X^\blacktriangleleft)$, $H_n^{\Omega_{ri}}(X^\blacktriangleleft; \mathbb{Z}_2)$ festzulegen.

6.3.3 Es ist an der Zeit, den Zusammenhang zwischen $H_n^\Omega(\cdot)$ und $H_n^{\Omega_0}(\cdot)$ zu klären; diese beiden Funktoren sind nämlich isomorph.

⁵⁾Die Involution ist die Identität.

Es sei wieder ein \mathbf{Top}^\star -System X^\star gegeben. Da die zusammenhängenden singulären n -Zykel von X^\star eine Teilmenge aller singulären n -Zykel von X^\star bilden, gibt es zunächst die Monoidinklusion $i : Z_n^{\Omega_0}(X^\star) \hookrightarrow Z_n^\Omega(X^\star)$ mit $i(B_n^{\Omega_0}(X^\star)) \subset B_n^\Omega(X^\star)$.

Andererseits stiftet die eindeutige Zerlegung eines singulären n -Zykels in seine Bogenkomponenten einen Monoidmorphismus $r : Z_n^\Omega(X^\star) \rightarrow Z_n^{\Omega_0}(X^\star)$ mit $r(B_n^\Omega(X^\star)) \subset B_n^{\Omega_0}(X^\star)$. Somit haben wir offensichtlich einen Retrakt

$$Z_n^{\Omega_0}(X^\star) \xrightarrow{i} Z_n^\Omega(X^\star) \xrightarrow{r} Z_n^{\Omega_0}(X^\star)$$

vorliegen, der den Retrakt

$$B_n^{\Omega_0}(X^\star) \xrightarrow{i} B_n^\Omega(X^\star) \xrightarrow{r} B_n^{\Omega_0}(X^\star)$$

und nach Folgerung 6.2.1 außerdem den Retrakt

$$(B_n^{\Omega_0}(X^\star))^\infty \xrightarrow{i} (B_n^\Omega(X^\star))^\infty \xrightarrow{r} (B_n^{\Omega_0}(X^\star))^\infty$$

induziert.

Bei einem *schön disjunkt additiven* System X^\star kann man noch eine zusätzliche Eigenschaft von r ausnutzen, denn es gilt

$$r^{-1}(B_n^{\Omega_0}(X^\star)) = B_n^\Omega(X^\star),$$

was man folgendermaßen sieht: Nach Lemma 6.3.4 (2) sind alle Elemente aus $B_n^\Omega(X^\star)$ (und damit aus $B_n^{\Omega_0}(X^\star)$) streng nullhomolog. Mit der Eindeutigkeit disjunkter Vereinigungen bekommen wir für jedes $z \in Z_n^\Omega(X^\star)$ die gewünschte Äquivalenz

$$z \text{ streng nullhomolog} \iff r(z) \text{ streng nullhomolog}.$$

Daraus ergibt sich die

FOLGERUNG. *Für ein schön disjunkt additives projektives System X^\star gilt die Äquivalenz*

$$B_n^\Omega(X^\star) \text{ kürzend} \iff B_n^{\Omega_0}(X^\star) \text{ kürzend}.$$

BEWEIS: Wird $B_n^{\Omega_0}(X^\star)$ als kürzend vorausgesetzt, erhält man die Ungleichung

$$(B_n^\Omega(X^\star))^\infty \subset r^{-1}((B_n^{\Omega_0}(X^\star))^\infty) = r^{-1}(B_n^{\Omega_0}(X^\star)) = B_n^\Omega(X^\star).$$

Der umgekehrte Schluß ergibt sich aus $r((B_n^\Omega(X^\star))^\infty) = (B_n^{\Omega_0}(X^\star))^\infty$ und $r(B_n^\Omega(X^\star)) = B_n^{\Omega_0}(X^\star)$. \triangle

Aber bereits ohne Zusatzbedingungen an X^\star induzieren i und r Homologieisomorphismen:

LEMMA. *Die Monoidmorphismen i, r induzieren natürliche Gruppenisomorphismen*

$$H_n^{\Omega_0}(\cdot) \xrightarrow{\cong} H_n^\Omega(\cdot) \xrightarrow{\cong} H_n^{\Omega_0}(\cdot).$$

Analoges gilt für die \mathbb{Z}_2 -Homologie.

BEWEIS: Die Natürlichkeit von i und r bedarf nur der Erwähnung, aber nicht des Beweises. Für die Isomorphie braucht man nur die Surjektivität von $i : Z_n^{\Omega_0}(X^\star) \rightarrow Z_n^\Omega(X^\star)$ modulo Homologie zu zeigen, wofür man bereits mit der konstanten Homotopie auskommt.

△

6.3.4 Zur Gewinnung einer Gruppenstruktur für die geometrische Ω -Homologie bedurfte es erstens einer Monoidstruktur auf den singulären Zykeln, die mittels des freien Monoiden $Z_n^\Omega(X^\star)$ quasi erzwungen wurde, und zweitens der Abschwächung von ‘streng nullhomolog’ zu ‘nullhomolog’. Diese algebraischen Elemente bewirken eine Distanzierung von dem eigentlichen geometrischen Gehalt des Homologiebegriffes, so daß die Ω -Homologie ihre Bezeichnung „geometrisch“ gar nicht so sehr verdient zu haben scheint.

Wir fragen: Unter welchen Bedingungen an X^\star sind sowohl die Addition als auch die Nullhomologie singulärer Zykeln von geometrischem Charakter? Eine hinreichende Bedingung lautet: X^\star ist additiv und schön disjunkt additiv (s. Lemma 6.3.5).

LEMMA. X^\star sei disjunkt additiv. Dann gilt zweierlei:

- (1) Jede Ω -Homologieklassse von X^\star kann durch ein singuläres n -Zykel von X^\star repräsentiert werden.
- (2) Es gilt Prä-Nullhomologie = strenge Nullhomologie, d.h. jedes Element aus $B_n^\Omega(X^\star)$ ist streng nullhomolog.

Ein analoges Resultat gilt für die Ω_0 -Homologie und die unorientierten Pendants, sowie für beide Ω -Homologiearten auf \mathbf{Top}^\star_{ri} , falls X^\star disjunkt additiv im ri -Sinne ist.

BEWEIS: Wir nutzen aus, daß jedes n -Zykel z von X^\star von einer endlichen Familie $((P_i, f_i))_{i \in I}$ singulärer n -Zykel (P_i, f_i) induziert ist, d.h. es gilt $z = \sum_{i \in I} (P_i, f_i)$. Oder noch besser berufen wir uns auf den Monoidisomorphismus aus 6.3.1 zwischen $Z_n^\Omega(X^\star)$ und den Indexisomorphieklassen jener Familien $((P_i, f_i))_{i \in I}$.

Eigentlich folgt (1) sofort aus der disjunkten Additivität, aber wir wollen sorgfältig argumentieren. Wir gehen also zunächst von einer solchen Darstellung $z = \sum_{i \in I} (P_i, f_i)$ aus und vereinigen die endliche Familie $((P_i, f_i))_i$ zu einem auf $P := \bigcup_i P_i$ definierten \mathbf{Top}^\star -Morphismus $f : P \rightarrow X^\star$ mit $f|_{P_i} = f_i$. Wir orientieren $P \times I$ so, daß im orientierten Sinne $P \times 0 = P$ und $P \times 1 = P^{-1}$ gilt, und definieren auf $P \times I$ die konstante Homotopie $F : P \times I \rightarrow X^\star$ zwischen f und f (man tue dies für einen Repräsentanten von f). Damit ist aber wegen $P = \bigcup P_i$ die Familie $((P_i, f_i))_i \cup (P, f)^{-1}$ streng nullhomolog, so daß $z \oplus (P, f)^{-1}$ in $B_n^\Omega(X^\star) \subset (B_n^\Omega(X^\star))^\infty$ liegt und z homolog zu (P, f) ist.

(2) ist einfacher zu beweisen: Wir fassen ein prä-nullhomologes n -Zykel z von X^\star als Indexisomorphieklasse einer endlichen Familie $((P_i, f_i))_{i \in I}$ wie in 6.1.1 auf. Da diese Familie prä-nullhomolog ist, gibt es eine Zerlegung der Indexmenge $I = I_1 \dot{\cup} I_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} I_k$, so daß jede

Teilfamilie $((P_i, f_i))_{i \in I}$ streng nullhomolog ist mittels einer Nullhomologie $H_l : M_l \rightarrow X^\star$. Da X^\star disjunkt additiv ist, lassen sich diese einzelnen Morphismen H_l zu einer stetigen Abbildung $H : M = \bigcup_l M_l \rightarrow X^\star$ zusammensetzen, so daß also $((P_i, f_i))_{i \in I}$ und somit z sogar streng nullhomolog ist.

Der unorientierte Fall wird ganz genauso bewiesen, und für die Kategorie \mathbf{Top}_{ri}^\star argumentiert man entsprechend. \triangle

6.3.5 LEMMA. *Für jedes additive und schön disjunkt additive projektive Top-System X^\star ist $B_n^\Omega(X^\star)$ kürzend. Insbesondere gelten dann die Eigenschaften:*

- (1) *Jede Ω -Homologiekategorie von X^\star kann durch ein singuläres n -Zykel von X^\star repräsentiert werden.*
- (2) *Es gilt Nullhomologie = strenge Nullhomologie, d.h. für jedes Zykel $z \in Z_n^\Omega(X^\star)$ gilt die Äquivalenz:
 z nullhomolog $\iff z$ streng nullhomolog.*
- (3) *Für je zwei singuläre n -Zykel $z, \tilde{z} \in Z_n^\Omega(X^\star)$ gilt:
 z homolog zu \tilde{z} $\iff z$ streng homolog zu \tilde{z} .*
- (4) *„Streng homolog“ stellt auf den singulären n -Zykeln von X^\star eine Äquivalenzrelation dar.*

Ein analoges Resultat gilt für die unorientierte Ω -Homologie sowie für \mathbf{Top}_{ri}^\star , falls X^\star additiv und schön disjunkt additiv im ri -Sinne ist.

BEWEIS: Wegen Folgerung 6.3.3 reicht es, die Kürzungseigenschaft für $B_n^{\Omega_0}(X^\star)$ nachzuweisen, was einfacher ist, da die Addition in $Z_n^{\Omega_0}(X^\star)$ rein geometrisch interpretiert werden kann: Die eindeutige disjunkte Vereinigung zweier singulärer n -Zykel von X^\star stellt eine wohldefinierte Verknüpfung dar, die zudem kommutativ und assoziativ ist, so daß man die Menge der singulären n -Zykel von X^\star auf diese Weise als Monoiden $\tilde{Z}_n^{\Omega_0}(X^\star)$ mit dem leeren Zykel als neutralem Element auffassen kann. Die Identität stiftet dann einen Monoidmorphismus

$$Z_n^{\Omega_0}(X^\star) \longrightarrow \tilde{Z}_n^{\Omega_0}(X^\star),$$

der sich als Monoidisomorphismus herausstellt, so daß wir in diesem Beweis o.E. stets mit singulären Zykeln arbeiten können.

Seien $z \in Z_n^{\Omega_0}(X^\star)$ und $b \in B_n^{\Omega_0}(X^\star)$ mit $z \oplus b \in B_n^{\Omega_0}(X^\star)$ vorgegeben. Zu zeigen ist $z \in B_n^{\Omega_0}(X^\star)$. Dazu fassen wir z und b zunächst als singuläre n -Zykel (Z, f) bzw. (B, g) auf, so daß daher $(Z \dot{\cup} B, f \dot{\cup} g)$ und (B, g) streng nullhomolog sind (Lemma 6.3.4). Seien $H^\star : P \rightarrow X^\star$ und $h^\star : Q \rightarrow X^\star$ berandete, singuläre $(n+1)$ -Zykel von X^\star mit $\partial H^\star := H^\star|_{\partial P} = f \dot{\cup} g$ bzw. $\partial h^\star := h^\star|_{\partial Q} = g$, wobei wir bequemerweise ∂P mit $Z \dot{\cup} B$ und ∂Q mit B (Orientierungserhaltend) identifiziert haben. Nach Orientierungsumkehrung von Q vereinigen wir P und Q^{-1} längs B zu $V := P \cup_B Q^{-1}$, so daß also $P \cap Q^{-1} = B$ und $\partial V = Z$ gilt, und nutzen die Additivität von X^\star aus, um H^\star und h^\star zu einem singulären,

berandeten $(n + 1)$ -Zykel $H^\star \cup h^\star : V \rightarrow X^\star$ mit $H^\star \cup h^\star|_{\partial V} = f$ zu vereinigen. Somit ist (Z, f) streng nullhomolog.

Die Eigenschaften (1)–(3) folgen in Verbindung mit Lemma 6.3.4 unmittelbar aus $(B_n^\Omega(X^\star))^\infty = B_n^\Omega(X^\star)$. Zu (4): „homolog“ stellt eine Äquivalenzrelation auf den singulären n -Zykeln von X^\star dar, die wegen (3) mit „streng homolog“ übereinstimmt.

Für den unorientierten und ri-Fall geht man vollkommen analog vor. △

Insbesondere können wir dieses Lemma auf das gemäß Folgerung 5.6.2 additive und schön disjunkt additive System $B^\star\Gamma$ anwenden, wobei Γ ein étale-Gruppoid sei. Die geometrische Ω -Homologie von $B^\star\Gamma$ eignet sich jedoch nicht zur abstrakten Klassifikation der Isomorphieklassen von étale- Γ -Strukturen, weil sie nicht fein genug filtert. Die nötige Verfeinerung erzielt man durch eine Zählung von $B^\star\Gamma$, die eine Zählung der Ω -Homologie nach sich zieht. Genauer benötigt man eine sog. *variable Zählung*. Dann geht aber—vgl. auch Bemerkung 4.6.5—die natürliche Addition auf den singulären n -Zykeln verloren. Somit ist das System $B^\star\Gamma$ nicht „zahn-gut“ und daher nicht mehr zur Klassifikation geeignet.

Dies erzwingt die Einführung der Dipol-Homologie im nächsten Abschnitt, die nur noch einen Mengenfunktor darstellt.

BEMERKUNG. Ohne Beweis (vgl. jedoch Beweisskizze von Lemma 4.1.5) weisen wir auf die Existenz einer natürlichen Transformation

$$H_*^\Omega \longrightarrow H_*$$

hin, die durch Triangulierung von Zykeln gegeben ist, und auf der vollen Unterkategorie der *schön additiven* projektiven **Top**-Systeme (und damit insbesondere für $\mathbf{Top} \subset \mathbf{Top}^\star$) einen Isomorphismus liefert, so daß für schön additive Systeme die Ω -Homologie mit der üblichen singulären Homologie übereinstimmt. Dasselbe gilt analog für den ri-Fall und für die Homologie mit Koeffizienten in \mathbb{Z}_2 .

6.4 Dipol-Homologie

In 6.3.2 wurde für jedes projektive **Top**-System X^\star die Relation „streng homolog“ auf der Menge der singulären n -Zykel von X^\star eingeführt, die i.a. aber keine Äquivalenzrelation ist. Daher definieren wir:

6.4.1 DEFINITION. Die von „streng homolog“ erzeugte Äquivalenzrelation nennen wir „**dipol-homolog**“ und setzen

$$H_n^D(X^\star) := \{\text{singuläre } n\text{-Zykel von } X^\star\} / \text{dipol-homolog.}$$

Per Definition sei ein singulärer n -Zykel von X^\star streng homolog zum leeren n -Zykel, wenn es streng nullhomolog ist. Ein singulärer n -Zykel von X^\star , das dipol-homolog zum leeren n -Zykel ist, nennen wir **dipol-nullhomolog**. Für Systeme $X^\star \in \mathbf{Top}_{ri}^\star$ ist $H_n^{Dri}(X^\star)$ analog definiert. Mit Berücksichtigung des unorientierten Falles seien die Mengen $H_n^D(X^\star; \mathbb{Z}_2)$

und $H_n^{D_{ri}}(X^\star; \mathbf{Z}_2)$ dann entsprechend definiert. Wir sprechen dabei von der **Dipol-Homologie** bzw. der ri-Dipol-Homologie bzw. der unorientierten Dipol-Homologie bzw. der unorientierten ri-Dipol-Homologie von X^\star .

Jede stetige Abbildung $f^\star : X^\star \rightarrow Y^\star$ induziert via Verkettung eine Abbildung der singulären n -Zykel, die streng homologe und damit dipol-homologe Zykel respektiert und folglich zu einer eindeutigen Abbildung

$$H_n^D(f^\star) : H_n^D(X^\star) \rightarrow H_n^D(Y^\star)$$

faktoriisiert. Wie in 6.3.2 ist $H_n^D(\cdot)$ funktoriell und homotopieinvariant, wobei jedoch die Zielkategorie **Ab** durch **Set** ersetzt werden muß.

Desweiteren gibt es eine kanonische, natürliche Transformation

$$H_n^D(\cdot) \rightarrow H_n^\Omega(\cdot),$$

die wir folgendermaßen konstruieren: die Menge der singulären n -Zykel von X^\star ist als Basis in $Z_n^\Omega(X^\star)$ eingebettet, und diese Einbettung soll durchfaktorisieren. Daher muß für je zwei dipol-homologe, singuläre n -Zykel z, z' das Element $z' \oplus z^{-1}$ nullhomolog sein. Da z, z' dipol-homolog sind, existiert eine Folge $z' = z_0, \dots, z_k = z$ singulärer n -Zykel z_i von X^\star , so daß z_{i-1} streng homolog zu z_i ist für alle $i = 1, \dots, k$. Falls $k = 1$, ist $z_0 \oplus z_1^{-1}$ streng nullhomolog nach Definition und damit natürlich nullhomolog. Für $k > 1$ verfahren wir induktiv: $z_0 \oplus z_k^{-1}$ ist streng homolog und damit nullhomolog zu $z_1 \oplus z_{k-1}^{-1}$, das nach Induktionsvoraussetzung nullhomolog ist. Also ist auch $z_0 \oplus z_k^{-1}$ nullhomolog.

SPRECHWEISE. Wir sagen „ $H_n^D(X^\star)$ besitzt eine natürliche Gruppenstruktur“, wenn $H_n^D(X^\star) \xrightarrow{\cong} H_n^\Omega(X^\star)$ eine Bijektion ist, wobei durch diese die Gruppenstruktur auf $H_n^D(X^\star)$ definiert wird. Die Sprechweise wird auch für die unorientierte Dipol-Homologie verwendet.

Man kann sich überlegen, daß bei projektiven **Top**-Systemen X^\star , die additiv und schön disjunkt additiv sind, obige natürliche Transformation $H_n^D(X^\star) \rightarrow H_n^\Omega(X^\star)$ eine Bijektion ist, so daß $H_n^D(X^\star)$ daher eine natürliche abelsche Gruppenstruktur besitzt. Die Injektivität sieht man folgendermaßen: Seien z und \tilde{z} zwei singuläre n -Zykel von X^\star , die in $H_n^\Omega(X^\star)$ homolog sind. Nach Aussage (3) in Lemma 6.3.5 sind dann z und \tilde{z} auch streng homolog und damit erst recht dipol homolog. Surjektivität folgt, wenn die Verkettung der natürlichen Transformation $H_n^D(X^\star) \rightarrow H_n^\Omega(X^\star)$ mit dem gemäß Lemma 6.3.3 von der Retraktion $r : Z_n^\Omega(X^\star) \rightarrow Z_n^{\Omega_0}(X^\star)$ induzierten Homologieisomorphismus $H_n^\Omega(X^\star) \xrightarrow{\cong} H_n^{\Omega_0}(X^\star)$ surjektiv ist: Die Abbildung

$$\text{Basis} \hookrightarrow Z_n^\Omega(X^\star) \xrightarrow{r} Z_n^{\Omega_0}(X^\star)$$

ist aber nichts anderes als die Inverse zu dem im Beweisanfang von Lemma 6.3.5 definierten Monoidisomorphismus

$$Z_n^{\Omega_0}(X^\star) \xrightarrow{\cong} \tilde{Z}_n^{\Omega_0}(X^\star)$$

und daher als Bijektion insbesondere surjektiv.

Wir fassen die bisherigen Überlegungen in einem Lemma zusammen.

LEMMA. *Die n -te Dipol-Homologie ist ein homotopieinvarianter, kovarianter Funktor*

$$H_n^D(\cdot) : \mathbf{Top}^\star \longrightarrow \mathbf{Set}.$$

Ferner gibt es eine natürliche Transformation

$$H_n^D(\cdot) \longrightarrow H_n^\Omega(\cdot),$$

so daß $H_n^D(X^\star)$ für additives und schön disjunkt additives X^\star (und damit für alle $X \in \mathbf{Top}$) eine natürliche Gruppenstruktur besitzt, und die Transformation

$$H_n^D(X^\star) \xrightarrow{\cong} H_n^\Omega(X^\star)$$

ein Gruppenisomorphismus ist. Analoge Aussagen gelten für die ri-Kategorie und die unorientierte n -te Dipol-Homologie. \triangle

6.4.2 Das nächste Lemma kommt mit einer schwächeren Voraussetzung als in Lemma 6.3.5 aus und wird im siebten Kapitel zum Lemma 7.4.4 verallgemeinert.

LEMMA. *$X^\star \in \mathbf{Top}^\star$ sei additiv.*

(a) *Für je zwei singuläre n -Zykel (P_0, f_0) und (P_1, f_1) von X^\star gilt:*

$$(P_0, f_0) \text{ dipol homolog zu } (P_1, f_1) \iff (P_0, f_0) \text{ streng homolog zu } (P_1, f_1)$$

(b) *Für jedes Polyeder P und je zwei stetige Abbildungen $f_0, f_1 : P \rightarrow X^\star$ gilt:*

$$f_0 \text{ homotop zu } f_1 \iff f_0 \text{ streng homotop zu } f_1$$

Eine entsprechende Aussage (a) gilt für unorientierte n -Zykel von X^\star .

BEWEIS: zunächst von (a): Die jeweilige Rückrichtung „ \Leftarrow “ in (a), (b) ist evident. Da uns die Additivität von X^\star gestattet, singuläre Homologie-Kobordismen bzw. Homotopien aneinander zu kleben, sind auch jeweils die Implikationen „ \Rightarrow “ in (a), (b) bewiesen. \triangle

6.4.3 Unter einer Zusatzbedingung induzieren schwache Homotopieäquivalenzen Bijektionen aller Ω - und Dipol-Homologien.

LEMMA. *Sei $f^\star : X^\star \rightarrow Y^\star$ eine schwache n -Homotopieäquivalenz. Ist Y^\star additiv, induziert f^\star Bijektionen*

$$H_k^\Omega(f^\star) : H_k^\Omega(X^\star) \xrightarrow{\cong} H_k^\Omega(Y^\star) \quad \text{und} \quad H_k^D(f^\star) : H_k^D(X^\star) \xrightarrow{\cong} H_k^D(Y^\star)$$

für alle $k \leq n - 1$ und Surjektionen

$$H_n^\Omega(f^\blacktriangleleft) : H_n^\Omega(X^\blacktriangleleft) \longrightarrow H_n^\Omega(Y^\blacktriangleleft), \quad H_n^D(f^\blacktriangleleft) : H_n^D(X^\blacktriangleleft) \longrightarrow H_n^D(Y^\blacktriangleleft).$$

Entsprechendes gilt für den unorientierten und ri-Fall, wobei im letzteren Y^\blacktriangleleft natürlich als ri-additiv vorausgesetzt werden muß.

BEWEIS: Surjektivität sowohl im Dipol- als auch Ω -Fall gewinnt man direkt aus der Definition 4.7.2. Die Injektivität ist allerdings weniger offensichtlich, die wir zunächst für die Dipol-Homologie zeigen werden:

Seien also z, \tilde{z} zwei singuläre k -Zykel von X^\blacktriangleleft , so daß $f^\blacktriangleleft \circ z$ dipol-homolog zu $f^\blacktriangleleft \circ \tilde{z}$ ist. Wegen Lemma 6.4.2 sind dann $f^\blacktriangleleft \circ z$ und $f^\blacktriangleleft \circ \tilde{z}$ sogar streng homolog.

Für jede endliche Familie z_1, \dots, z_l singulärer k -Zykel von X^\blacktriangleleft mit $k \leq n - 1$, so daß $(f^\blacktriangleleft \circ z_1), \dots, (f^\blacktriangleleft \circ z_l)$ streng nullhomolog ist, bekommt man ganz allgemein mit Definition 4.7.2 direkt auch die strenge Nullhomologie von z_1, \dots, z_l . Insbesondere sind dann z, \tilde{z} streng homolog und somit natürlich dipol-homolog.

Im Fall der Ω -Homologie ist aber Nullhomologie durch streng nullhomologe Teilfamilien nach *Stabilisierung* gegeben, so daß man ohne die Additivität von Y^\blacktriangleleft erst recht nicht auskommt. Man benötigt das folgende Argument: z_1, \dots, z_l sei eine endliche Familie singulärer k -Zykel von X^\blacktriangleleft mit $k \leq n - 1$, und jedes $f^\blacktriangleleft \circ z_i$ sei homotop zu einem singulären k -Zykel w_i von Y^\blacktriangleleft , so daß die Familie w_1, \dots, w_l streng nullhomolog ist. Dann soll auch z_1, \dots, z_l streng nullhomolog sein: Aufgrund der Additivität von Y^\blacktriangleleft folgt analog wie im Beweis der Injektivität der Dipol-Homologie die strenge Nullhomologie von $(f^\blacktriangleleft \circ z_1), \dots, (f^\blacktriangleleft \circ z_l)$ und damit wie oben die strenge Nullhomologie von z_1, \dots, z_l . \triangleleft

BEMERKUNG. Mit Lemma 7.4.3 folgt ein analoges Lemma für schwache PL- n -Homotopieäquivalenzen.

Kapitel 7

Zähmung

Ohne geeignete Zusatzbedingungen an die Homologie von $B^\blacktriangleleft\Gamma$ bekommt man keine abstrakte Klassifikation von Γ -Strukturen, weil dafür die „normale“, singuläre Homologie $H_*(B^\blacktriangleleft\Gamma)$ einfach zu grob ist.

Aber aufgrund der sehr feudalen Eigenschaften von $B^\blacktriangleleft\Gamma$ liefert selbst die stark verfeinerte¹⁾ Homologie $H_*^{Dri}(B^\blacktriangleleft\Gamma)$ nichts neues, und es bereitet einem Mühe, sich eine noch feinere, aber dennoch nichttriviale Homologie vorzustellen. Daher bietet es sich an, den „Raum“ $B^\blacktriangleleft\Gamma$ selbst zu modifizieren und zwar auf möglichst natürliche Weise: Man bedenke, daß jeder Raum $B_n\Gamma$ nicht Hausdorffsch ist, so daß man ihn „zähmen“ sollte, indem man ihn mit einer natürlichen, „zahmen Struktur“ versieht, daraus ein allgemeines projektives System von Polyedern ableitet, mit dessen Hilfe die Homologie definiert werden *kann* (aber nicht muß).

Es sollte darauf hingewiesen werden, daß unsere Begriffe wie „zahme Struktur“, „Zähmung“ usw. aus der ursprünglichen Bedeutung heraus (etwa wie bei Knoten) motiviert sind und nichts mit gleichlautenden Begriffen etwa in [Dwyer, Pay] zu tun haben.

Im ersten Abschnitt werden zahme Strukturen, zahme Räume und zahme Abbildungen eingeführt, womit die Kategorie \mathbf{Top}_z der zahmen Räume etabliert ist.

Im zweiten Abschnitt konstruieren wir den „Zähmungsfunktor“

$$P^\blacktriangleleft : \mathbf{Top}_z \longrightarrow \mathbf{P}^\blacktriangleleft$$

und setzen ihn auf $\mathbf{Top}_z^\blacktriangleleft$ fort. Der Sinn der Zähmung $P^\blacktriangleleft(X^\blacktriangleleft)$ ist folgender: Die zahme Struktur T_{X^\blacktriangleleft} von X^\blacktriangleleft besteht aus bestimmten $\mathbf{Top}^\blacktriangleleft$ -Morphismen nach X^\blacktriangleleft , aus denen auch die zahme Ω - und zahme Dipol-Homologie gebildet werden, was dem Arbeiten in bestimmten Unterkategorien von $\mathbf{Top}^\blacktriangleleft$ gleichkommt. Nun ist es aber auf jeden Fall angenehmer, in $\mathbf{Top}^\blacktriangleleft$ zu arbeiten. Die Aufgabe von $P^\blacktriangleleft(X^\blacktriangleleft)$ besteht darin, alle speziellen Eigenheiten der Abbildungen aus T_{X^\blacktriangleleft} zu erfassen, damit man z.B. $H_*^z(X^\blacktriangleleft) = H_*^\Omega(P^\blacktriangleleft(X^\blacktriangleleft))$ definieren kann. Dies geht sogar soweit, daß man $P_{ri}^\blacktriangleleft(X^\blacktriangleleft)$ noch nicht mal als ri-Objekt auffassen muß, d.h. man hat beispielsweise $H_*^{zri}(X^\blacktriangleleft) = H_*^\Omega(P_{ri}^\blacktriangleleft(X^\blacktriangleleft))$ mit $P_{ri}^\blacktriangleleft(X^\blacktriangleleft) \in \mathbf{Top}^\blacktriangleleft$. Zusammenfassend ausgedrückt:

¹⁾aber nur bei echten Systemen. In \mathbf{Top} ist $H_*^{Dri} = H_*$.

Die Zählung ermöglicht es, o.E. stets in \mathbf{Top}^\star zu arbeiten.

Im dritten Abschnitt verfeinern wir die zahmen Strukturen zu den \downarrow zahmen Strukturen, die an die Einführung der variablen \downarrow zahmen Strukturen im sechsten Abschnitt heranzuführen soll. Hierzu wird die Kategorie \mathbf{P}^\downarrow der kompakten Polyeder „mit Basis“ vorgestellt. Ist aber diese Kategorie erstmal definiert, überträgt sich alles aus den beiden Abschnitten vorher weitgehend analog auf den \mathbf{P}^\downarrow -Fall.

Der vierte Abschnitt verallgemeinert die Homologiedefinitionen aus dem 6. Kapitel zu den entsprechenden zahmen Homologien.

Im fünften Abschnitt wird der abstrakte ri-Klassifikationssatz für injektive Hochhebungen formuliert und bewiesen, der sich jedoch noch nicht mal zur Klassifikation von PL-Blätterungen verwenden läßt, aber wahrscheinlich für die abstrakte Klassifikation von triangulierbaren Blätterungen von adäquaterer Bedeutung werden wird (s. Anmerkung 8.3.3). Jener ri-Klassifikationssatz wird dann zum allgemeinen Klassifikationssatz 7.7.2 verbessert, der die Grundlage für die abstrakte Klassifikation der PL-Blätterungen darstellt und durch den sechsten Abschnitt über variable zahme Strukturen vorbereitet wird.

Noch ein Hinweis zu den Bezeichnungen, die logisch aufgebaut sind: Ein kleines z steht stets für ‘zahn’. Kategorien mit gezählter Struktur werden durch ein tiefgestelltes z gekennzeichnet, z.B. \mathbf{Top}^\star_z . Alle Bezeichnungen haben eine ri-Entsprechung, die stets durch ein tiefgestelltes ri (auch bei den Homologien) kenntlich gemacht sind, beispielsweise steht $H_n^{Dz}(X^\star)$ für die gezähmte ri-Dipol-Homologie von X^\star , oder \mathbf{Top}^\star_{zri} bezeichnet die gezähmte ri-Kategorie (bzgl. eines gegebenen Zähmungs begriffes). Die \downarrow zahmen Objekte werden mit $\downarrow z$ verziert, so daß $H_n^{D\downarrow z}(X^\star)$ z.B. die \downarrow zahme Dipol-Homologie von X^\star bedeutet. Wird dann schließlich zu den variablen zahmen Strukturen übergegangen, so übernimmt ein kleines v die Rolle von ri .

Für das mathematische Verständnis ist es natürlich nicht erforderlich, all diese Bezeichnungen zu assimilieren, denn die Kategorien werden auch verbal beschrieben, und die verschiedenen zahmen Homologien werden durch die Zählung alle vereinheitlicht, so daß im Grunde nur die Bezeichnung $H_n^D(X^\star)$ unumgänglich ist. Aber ein korrektes Arbeiten erfordert sicherlich einen vollständigen Bezeichnungssatz.

7.1 Zahme Strukturen

Vorerst arbeiten wir in \mathbf{Top} .

7.1.1 Zwecks komfortableren Umgangs mit kompakten Polyedern bilden wir folgende Kategorie \mathbf{P} : Die Gesamtheit der PL-Isomorphieklassen aller kompakten Polyeder ist eine abzählbare Menge²⁾. Aus jeder Isomorphieklasse sei ein fester Repräsentant ausgewählt. Die Menge dieser ausgewählten Repräsentanten sei die Klasse der Objekte von \mathbf{P} . Als Morphismen wählen wir einfach die PL-Abbildungen. Damit ist \mathbf{P} sogar eine kleine Kategorie.

²⁾ weil die endlichen, simplizialen Komplexe eine abzählbare Menge bilden.

BEMERKUNG. Normalerweise würde man \mathbf{P} als die Kategorie *aller* kompakten Polyeder mit ihren PL-Abbildungen wählen. Für diesen Abschnitt und vor allem die Zähmungskonstruktion in 7.2.1 benötigen wir \mathbf{P} aber als kleine Kategorie. Wir werden jedoch darauf nicht mehr eingehen und stattdessen einfach von kompakten Polyedern sprechen und nicht mit ausgewählten Repräsentanten arbeiten, da wir uns gegebenenfalls auf die korrekte Definition von \mathbf{P} berufen können.

Sei X ein topologischer Raum. Eine **zahme Struktur** sei eine Teilmenge³⁾

$$T \subset \{ f : P \rightarrow X \text{ stetig} \mid P \in \mathbf{P} \},$$

die abgeschlossen gegenüber Verkettung mit PL-Abbildungen von rechts ist, d.h. ist $f : P \rightarrow X$ aus T und $g : Q \rightarrow P$ eine PL-Abbildung zwischen kompakten Polyedern mit $Q \in \mathbf{P}$, so gelte auch $f \circ g \in T$. Wird dagegen diese Abgeschlossenheitseigenschaft von T nur für Verkettungen von rechts mit PL-*Einbettungen* g verlangt, nennen wir T eine **zahme Grundstruktur** von X . Ist T aber eine zahme Struktur, nennen wir das Paar

$$(X, T)$$

einen **zahmen Raum**. Wird T nicht explizit als Notation gebraucht, unterdrücken wir T und schreiben nur X .

BEMERKUNG + BEZEICHNUNG. Zahme Grundstrukturen haben wir sehr allgemein definiert, und man fragt sich z.B., wieso man von einer zahmen Grundstruktur nicht die Bedingung

$$P = P_0 \cup P_1, f : P \rightarrow X \text{ stetig mit } f|_{P_0}, f|_{P_1} \in T \Rightarrow f \in T$$

fordert. Aber gerade diese Bedingung wird sich als zu starke Einschränkung herausstellen. Genügt eine zahme Grundstruktur dieser Bedingung, nennen wir sie **additiv**. Eben um für die abstrakte Klassifikation geeignete, additive Zähmungsstrukturen zu bekommen, führen wir später die \mathbf{P}^\downarrow -Polyeder ein.

Was eine zahme Abbildung sein soll, ist schnell geklärt: Seien $(X, T), (X', T')$ zwei zahme Räume und $f : X \rightarrow X'$ eine stetige Abbildung. Dann heie f eine **zahme Abbildung**, wenn $f \circ T \subset T'$ gilt, was genauer $f \circ \tau \in T'$ für alle $\tau \in T$ heißt. Damit ist die Verkettung zweier zahmen Abbildungen wieder zahm, so daß die Kategorie \mathbf{Top}_z der zahmen Räume und zahmen Abbildungen definiert ist.

Für die obige Definition einer zahmen Abbildung brauchen T, T' offensichtlich nur zahme Grundstrukturen zu sein. Trotzdem bleiben wir dabei, daß die Objekte von \mathbf{Top}_z **Top**-Räume mit zahmen Strukturen und nicht **Top**-Räume mit zahmen Grundstrukturen sein sollen. Diese Konvention werde auch für alle anderen, allgemeinen Zähmungskonzepte angewandt, wobei Ausnahmen hiervon natürlich ausdrücklich erwähnt werden.

Für einen festen Raum X ist ein beliebiger Durchschnitt von zahmen Strukturen auf X wieder eine zahme Struktur, so daß jede zahme Grundstruktur T von X eine eindeutig

³⁾“ T “ ist von englisch “tame“ abgeleitet.

bestimmte, kleinste zahme Struktur \tilde{T} erzeugt, die T enthält. Die konkrete Form von \tilde{T} ist

$$\tilde{T} = \{ Q \xrightarrow{g} P \xrightarrow{f} X \mid Q \in \mathbf{P}, g \text{ PL-Abbildung und } f \in T \}.$$

BEISPIELE

- [1] Jedes $X \in \mathbf{Top}$ besitzt die **allgemeine zahme Struktur**, die aus *allen* stetigen Abbildungen $f : P \rightarrow X$ mit $P \in \mathbf{P}$ besteht. Da hierbei alles vorkommen kann, was stetig ist, wirkt das Präfix „zahm“ eigentlich etwas unpassend, weil eben überhaupt nichts gezähmt wird. Daher ist jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ automatisch zahm bzgl. der allgemeinen zahmen Strukturen von X und Y .
- [2] Jeder PL-Raum X trägt eine **kanonische zahme Struktur**, nämlich die Menge aller PL-Abbildungen von kompakten Polyedern aus \mathbf{P} nach X . Daher ist jede PL-Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen PL-Räumen X, Y automatisch zahm bzgl. der kanonischen zahmen Strukturen von X und Y .
- [3] Jeder PL-Raum X induziert die traditionelle **ambient zahme Struktur**: Eine stetige Abbildung $f : P \rightarrow X$ mit $P \in \mathbf{P}$ gehöre genau dann dieser zahmen Struktur an, wenn f ambient homöomorph zu einer PL-Abbildung ist, i.e. es existiert ein PL-Automorphismus $\varphi : X \rightarrow X$, so daß $\varphi \circ f$ eine PL-Abbildung ist. Im Gegensatz zu den anderen Beispielen ist die ambient zahme Struktur nicht additiv.
- [4] Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und jede zahme Struktur T auf $X \in \mathbf{Top}$ sei T^n die von der Menge $\{ f : P \rightarrow X \mid f \in T \text{ und } \dim P \leq n \}$ erzeugte zahme Struktur auf X , die wir das **n-Gerüst** von T nennen. Eine zahme Struktur T auf $X \in \mathbf{Top}$ heiße **n-dimensional**, wenn $T = T^n$ und $T \neq T^{n-1}$ gilt. Daher setzen wir für jede zahme Struktur T auf X

$$\dim T := \begin{cases} \infty, & \text{falls } \{ n \mid T = T^n \} = \emptyset \\ \min\{ n \mid T = T^n \}, & \text{sonst} \end{cases}$$

- [5] Eine andere erwähnenswerte zahme Struktur eines topologischen Raumes X ist die **residuale zahme Struktur** von X , die aus allen Pseudo-PL-Abbildungen $f : P \rightarrow X$ mit $P \in \mathbf{P}$ besteht. Wegen Korollar 1.5.1 ist diese Menge tatsächlich eine zahme Struktur. Sie wird erzeugt von der **residualen zahmen Grundstruktur**, das ist die Menge aller stabil residual lokal injektiven Abbildungen $P \rightarrow X$ mit $P \in \mathbf{P}$. Diese Grundstruktur ist additiv (Lemma 1.5.1). Man vergleiche jedoch Beispiel 7.2.2 und Bemerkung 7.2.2!

Das Beispiel [2] ermöglicht uns, die Elemente einer zahmen Struktur T_X von X auch als zahme Abbildungen aufzufassen: P sei ein kompaktes Polyeder aus \mathbf{P} mit seiner kanonischen zahmen Struktur lt. obigem Beispiel [2] und $f : P \rightarrow X$ stetig. Dann gilt

$$f \in T_X \iff f \text{ zahme Abbildung,}$$

wie man sich sofort überlegt. Daher sind wir berechtigt, die Elemente einer zahmen Struktur synonym auch als zahme Abbildungen zu bezeichnen. Weniger mißverständlich ist allerdings die Bezeichnung **‘zahmes Element’**, die wir häufiger gebrauchen. Diese Konvention und Bezeichnung werden wir auch auf die zahmen Strukturen in anderen Kategorien anwenden.

7.1.2 Man kann sich aber auch auf einen mehr simplizialen Standpunkt stellen, was in der Praxis manchmal durchaus gegebener sein kann: Sei X wieder ein topologischer Raum. Eine **ss-zahme Struktur** von X sei ein semisimplizialer Unterkomplex

$$T \subset S(X)$$

von $S(X)$, den singulären Simplizes von X , der abgeschlossen gegenüber der Operation der Simplexpermutationen⁴⁾ ist, i.e. $f : \nabla(n) \rightarrow X$ aus T und $|\pi|$ Simplexpermutation auf $\nabla(n) \Rightarrow f \circ |\pi| \in T$. Faßt man eine endliche Menge σ als Simplex auf, so ist daher für eine stetige Abbildung $f : |\sigma| \rightarrow X$ die Schreibweise $f \in T$ wohldefiniert.

Eine ss-zahme Struktur T auf X induziert kanonisch wie folgt eine zahme Struktur \bar{T} auf X : Es gelte $f : P \rightarrow X \in \bar{T}$ genau dann, wenn zu jeder PL-Triangulierung $|K| = P$ von P eine Unterteilung $K' \triangleleft K$ von K existiert, so daß für jedes Simplex $\sigma \in K'$ die Abbildung $f|_{|\sigma|} : |\sigma| \rightarrow X$ ein Element aus T ist.

Jede zahme Struktur induziert umgekehrt natürlich eine ss-zahme Struktur, indem man als spezielle Polyeder die Standardsimplizes $\nabla(n)$ wählt. Selbstverständlich sind diese beiden Konstruktionen *nicht* zueinander invers.

7.2 Zähmung

7.2.1 Wir konstruieren nun den kovarianten Funktor

$$P^* : \mathbf{Top}_z \longrightarrow \mathbf{P}^*.$$

Sei dazu (X, T) ein zahmer Raum. Es ist sehr praktisch, $T_X = T$ zu schreiben. Jedes $f \in T_X$ ist eine stetige Abbildung

$$f : P_f \rightarrow X.$$

Auf T_X ist nun folgende Relation \leq gegeben:

$$f \leq g \quad : \iff \quad \exists \text{ PL-Abbildung } \varphi : P_g \rightarrow P_f \text{ mit } g = f \circ \varphi.$$

Dann ist \leq offensichtlich reflexiv und transitiv, aber i.a. nicht antisymmetrisch. An dieser Stelle wird auch klar, warum wir in 4.3.1 projektive Systeme so allgemein definiert haben.

Für $f, g \in T_X$ mit $f \leq g$ setzen wir

$$\Phi_f^g := \{ \varphi : P_g \rightarrow P_f \text{ PL-Abbildung} \mid g = f \circ \varphi \}.$$

⁴⁾das sind die geometrischen Realisationen $|\pi| : \nabla(n) \rightarrow \nabla(n)$ der Permutationen π auf den Ecken des affinen Standardsimplex $\nabla(n)$.

Damit definieren wir

$$P^\star(X) := ((\Phi_f^g), (P_f), T_X).$$

Die Systemeigenschaften (1) und (2) aus 4.3.1 sind unmittelbar einzusehen, so daß nur der Nachweis von (3) mehr Überlegung erfordert:

Als erstes vergewissert man sich der Existenz von Pullbacks in \mathbf{P} : Sind $\varphi_0 : P_0 \rightarrow P$, $\varphi_1 : P_1 \rightarrow P$ zwei PL-Abbildungen aus \mathbf{P} , so bilden wir zunächst das mengentheoretische Pullback

$$\bar{P} := \{ (x, y) \in P_0 \times P_1 \mid \varphi_0(x) = \varphi_1(y) \}.$$

Nach [R-S, 1.3 (4)] ist das Produkt $P_0 \times P_1$ ein kompaktes Polyeder und nach [R-S, 1.6 (1)] $\varphi_0 \times \varphi_1 : P_0 \times P_1 \rightarrow P \times P$ eine PL-Abbildung, so daß $\bar{P} = (\varphi_0 \times \varphi_1)^{-1}(\Delta)$ ein Unterpolyeder darstellt, wobei $\Delta \subset P \times P$ die Diagonale bezeichne. Sind P_0, P_1 und P Komponenten aus $P^\star(X)$, so ist auch \bar{P} eine, weil die zahme Struktur von X nach Voraussetzung abgeschlossen gegenüber Verkettung mit PL-Abbildungen sein soll. Daher ist $P^\star(X)$ vollständig und somit ein projektives \mathbf{P} -System, welches wir als die **Zählung** von X bezeichnen.

Es bleibt noch zu klären, wie P^\star auf zahme Abbildungen $F : (X, T_X) \rightarrow (Y, T_Y)$ wirken soll: Durch $T_X \ni f \mapsto F \circ f \in T_Y$ induziert $F : X \rightarrow Y$ eine monotone Abbildung $F_* : T_X \rightarrow T_Y$. Insbesondere gilt $P_f = P_{F_*(f)}$ für alle $f \in T_X$, so daß die Identitätsabbildung $id : P_f \rightarrow P_{F_*(f)}$ einen \mathbf{P}^\star -Morphismus $F_f : P_f \rightarrow P^\star(Y)$ induziert. Wegen $g = f \circ \varphi$ und daher $\Phi_f^g \subset \Phi_{F_*(f)}^{F_*g}$ haben wir das kommutative Diagramm,

$$\begin{array}{ccc} P_g & \xrightarrow{id} & P_{F_*(g)} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ P_f & \xrightarrow{id} & P_{F_*(f)} \end{array}$$

das die Kompatibilität der einzelnen $F_f : P_f \rightarrow P^\star(Y)$ garantiert, so daß diese schließlich einen \mathbf{P}^\star -Morphismus

$$P^\star(F) : P^\star(X) \rightarrow P^\star(Y)$$

definieren, der auch die **Zählung von \mathbf{F}** genannt werde. Wegen der Funktorialität von $*$ ist auch P^\star ein kovarianter Funktor.

LEMMA. P^\star ist ein kovarianter Funktor $P^\star : \mathbf{Top}_z \rightarrow \mathbf{P}^\star$. △

7.2.2 Indem wir das Symbol „ X “ einfach durch „ X^\star “ ersetzen, übertragen wir alles—außer der Additivität, die etwas anders, aber kompatibel zu \mathbf{Top} definiert werden muß—aus dem vorigen Unterabschnitt auf die Kategorie \mathbf{Top}^\star , weil wir dafür nur den Begriff des \mathbf{Top}^\star -Morphismus benötigen. Insbesondere sind **zahme projektive \mathbf{Top} -Systeme**, **zahme \mathbf{Top}^\star -Morphismen**, die zahme Kategorie \mathbf{Top}^\star_z sowie die **Zählung $P^\star(X^\star)$** definiert. Daher liegt ein kovarianter Funktor

$$P^\star : \mathbf{Top}^\star_z \longrightarrow \mathbf{P}^\star$$

vor.

DEFINITION. Sei $X^\star \in \mathbf{Top}^\star$ mit einer zahmen Grundstruktur $T = T(X^\star)$ versehen. Dann heißt T **additiv**, wenn zu jedem Polyeder $P \in \mathbf{P}$ und zu je zwei zahmen Elementen $f_0 : P_0 \rightarrow X^\star$, $f_1 : P_1 \rightarrow X^\star$ aus T , wobei $P = P_0 \cup P_1$ ⁵⁾ und

$$f_0|_{P_0 \cap P_1} = f_1|_{P_0 \cap P_1}$$

gelte, ein zahmes Element $f : P \rightarrow X^\star$ aus T mit $f|_{P_0} = f_0$ und $f|_{P_1} = f_1$ existiert.

Nunmehr bereitet auch die Übertragung auf die Kategorie \mathbf{Top}_{ri}^\star keinerlei Schwierigkeiten: Es ist nur zu beachten, daß die die zahme Struktur von X^\star bildenden zahmen Abbildungen $f : P \rightarrow X^\star$ natürlich ri-Morphismen sein müssen, also Morphismen aus \mathbf{Top}_{ri}^\star , was natürlich auch für eine entsprechende ri-Definition der Additivität gilt. Zur Verdeutlichung der ri-Situation schreiben wir $P_{ri}^\star(X^\star)$ für die **ri-Zählung** von $X^\star \in \mathbf{Top}_{ri}^\star$. Entsprechend haben wir einen Funktor

$$P_{ri}^\star : \mathbf{Top}_{z_{ri}}^\star \longrightarrow \mathbf{P}^\star,$$

wobei $\mathbf{Top}_{z_{ri}}^\star$ die Kategorie der Objekte aus \mathbf{Top}_{ri}^\star mit ri-zahmer Struktur und den zahmen ri-Morphismen als Morphismen bezeichnet.

Ebenso ist das zu \mathbf{Top}_z^\star induktive Pendant \mathbf{Top}_z^\star mitsamt dem Funktor $P^\star : \mathbf{Top}_z^\star \rightarrow \mathbf{P}^\star$ definiert, aber wir machen davon keinen Gebrauch und wenden uns wieder projektiven Systemen zu.

BEISPIEL. Die ri-Kategorie \mathbf{Top}_{ri}^\star erlaubt folgende Verallgemeinerung der residuellen zahmen Strukturen aus Beispiel [5] in 7.1.1 auf **residuale ri-zahme Strukturen** von Objekten aus \mathbf{Top}_{ri}^\star : $X^\star \in \mathbf{Top}_{ri}^\star$ sei ein ri-Objekt, $P \in \mathbf{P}$ ein kompaktes Polyeder und $f : P \rightarrow X^\star$ ein \mathbf{Top}_{ri}^\star -Morphismus. Wir nennen f einen **Pseudo-PL-ri-Morphismus**, wenn ein (und damit nach Lemma 4.4.1 (3) jeder) Repräsentant von f eine Pseudo-PL-Abbildung ist. Die residuale ri-zahme Struktur von X^\star sei die Menge aller Pseudo-PL-ri-Morphismen $f : P \rightarrow X^\star$ mit $P \in \mathbf{P}$. Wegen Korollar 1.5.1 ist diese auch tatsächlich eine ri-zahme Struktur. Ferner gibt es eine dazu passende **residuale ri-zahme Grundstruktur** von X^\star , die aus allen \mathbf{Top}_{ri}^\star -Morphismen $f : P \rightarrow X^\star$ besteht, so daß ein (und damit nach Lemma (3) 4.4.1 wieder jeder) Repräsentant $f_i : P \rightarrow X_i$ von f stabil residual lokal injektiv ist (siehe Bezeichnung 1.5.1). Offensichtlich erzeugt diese residuale ri-zahme Grundstruktur die residuale ri-zahme Struktur. Aber nur wenn X^\star als *ri-schön Serre-faserndes* System vorliegt, ist die residuale ri-zahme Grundstruktur von X^\star auch additiv, sonst i.a. jedoch nicht! Das klassifizierende System $B^\star T$ beispielsweise, Γ étale-Gruppoid, ist zwar schön Serre-fasernd, aber eben nicht ri-schön Serre-fasernd.

BEMERKUNG. Natürlich kann man auch für \mathbf{Top}^\star die **residuale zahme Struktur** und die dazu passende **residuale zahme Grundstruktur** definieren, indem man

⁵⁾Gemeint ist hier genauer, daß P der Pushout zweier \mathbf{P} -Einbettungen $P' \hookrightarrow P_i$ ist, so daß man P' auch als $P_0 \cap P_1$ ansehen kann.

wortwörtlich wie im Beispiel die analoge Definition über die Existenz eines Pseudo-PL bzw. stabil residual lokal injektiven Repräsentanten nimmt. Der wesentliche Unterschied zum ri-Fall besteht natürlich darin, daß i.a. nicht mehr alle, sondern nur noch gewisse Repräsentanten Pseudo-PL bzw. stabil residual lokal injektiv sind. Außerdem muß $X^\star \in \mathbf{Top}^\star$ als schön Serre-fasernd angenommen werden, damit die residuale zahme Grundstruktur von X^\star additiv ist, was z.B. im Fall $X^\star = B^\star\Gamma$ mit Γ wie oben erfüllt ist. Dafür treten aber wieder andere Probleme auf (s. Anmerkung 8.3.1 und Lemma 7.3.2, Bemerkung 7.3.2), die das Arbeiten mit \mathbf{P}^\downarrow -Polyedern und variablen \downarrow zahmen Strukturen erzwingen.

Die i.a. fehlende Additivität der ri-zahmen Grundstruktur aus obigem Beispiel ist nicht etwa ein singulärer Einzelfall, sondern in der ri-Kategorie ein weit verbreitetes Phänomen, da ri-schön Serre-fasernde Systeme „in der Natur“ nicht häufig vorkommen. In der simplizialen Kategorie \mathbf{SIM} hingegen gilt tatsächlich die Implikation: X^\star schön Serre-fasernd $\Rightarrow X^\star$ ri-schön Serre-fasernd!

Die Zählung $P^\star(X^\star)$ verdient noch einige Aufmerksamkeit. In 7.2.1 haben wir die Vollständigkeit von $P^\star(X^\star) \in \mathbf{P}^\star$ dadurch gezeigt, daß wir das Pullbackobjekt je zweier Systemmorphisamen als eine Komponente von $P^\star(X^\star)$ identifizierten. Jenes Pullbackobjekt ist aber auch in \mathbf{Top} das Pullback, so daß wir $P^\star(X^\star)$ ebenso als ein Objekt aus \mathbf{Top}^\star auffassen können. An der Definition des induzierten Morphismus $P^\star(F^\star) : P^\star(X^\star) \rightarrow P^\star(Y^\star)$ sieht man, daß P^\star auch als kovarianter Funktor

$$P^\star : \mathbf{Top}^\star_z \longrightarrow \mathbf{Top}^\star$$

interpretiert werden kann, was wir jedoch nicht zur Regel erheben wollen, sondern gegebenenfalls erwähnen. Im Normalfall betrachten wir daher P^\star als Funktor nach \mathbf{P}^\star .

Die andere Möglichkeit kommt uns aber in folgender Situation zugute: angenommen, $G : \mathbf{Top}^\star_z \rightarrow \mathbf{Top}^\star$ ist ein Funktor, so ist mit einer natürlichen Transformation von P^\star nach G selbstredend eine natürliche Transformation von P^\star , aufgefaßt als Funktor $P^\star : \mathbf{Top}^\star_z \rightarrow \mathbf{Top}^\star$, nach G gemeint. Diese Übereinkunft verwenden wir im unteren Lemma.

Auf einfachste Weise gibt es nun eine solche natürliche Transformation

$$t^\star : P^\star \rightarrow \iota,$$

wobei $\iota : \mathbf{Top}^\star_z \rightarrow \mathbf{Top}^\star$ derjenige Funktor sei, der einfach die zahme Struktur von X^\star vergißt.

Die Definition von t^\star : Sei $X^\star \in \mathbf{Top}^\star_z$ mit seiner zahmen Struktur T_{X^\star} . Jedes $f \in T_{X^\star}$ ist eine zahme Abbildung $f : P_f \rightarrow X^\star$ und kann somit als \mathbf{Top}^\star -Morphismus aufgefaßt werden. Aufgrund der Definition von Φ_f^g ist klar, daß diese $f : P_f \rightarrow X^\star$ sich untereinander vertragen und daher einen \mathbf{Top}^\star -Morphismus $t^\star : P^\star(X^\star) \rightarrow X^\star$ induzieren.

LEMMA. t^\star ist eine natürliche Transformation $t^\star : P^\star \rightarrow \iota$.

BEWEIS: Wir müssen für jede zahme Abbildung $F^\star : X^\star \rightarrow Y^\star$ die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} P^\star(X^\star) & \xrightarrow{P^\star(F^\star)} & P^\star(Y^\star) \\ t^\star \downarrow & & \downarrow t^\star \\ X^\star & \xrightarrow{F^\star} & Y^\star \end{array}$$

überprüfen, die aber z.B. dann gewährleistet ist, wenn Kommutativität auf der Ebene der kanonischen Repräsentanten vorliegt. Diese ist jedoch zur Kommutativität von

$$\begin{array}{ccc} P_f & \xrightarrow{id} & P_{F^\star \circ f} \\ f \downarrow & & \downarrow F^\star \circ f \\ X^\star & \xrightarrow{F^\star} & Y^\star \end{array}$$

gleichwertig. △

Zum Verständnis der nächsten Folgerung sei angemerkt, daß die Repräsentanten eines \mathbf{P}^\star -Morphismus $G^\star : P^\star(X^\star) \rightarrow P^\star(Y^\star)$ einen \mathbf{Top}^\star -Morphismus $P^\star(X^\star) \rightarrow P^\star(Y^\star)$ definieren, den wir wieder mit G^\star bezeichnen.

FOLGERUNG. Seien X^\star, Y^\star zahme Räume aus \mathbf{Top}^\star_z und $F^\star : X^\star \rightarrow Y^\star$ stetig. Dann sind äquivalent:

(i) F^\star ist ein zahmer Morphismus.

(ii) Es gibt einen \mathbf{P}^\star -Morphismus $G^\star : P^\star(X^\star) \rightarrow P^\star(Y^\star)$, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P^\star(X^\star) & \xrightarrow{G^\star} & P^\star(Y^\star) \\ t^\star \downarrow & & \downarrow t^\star \\ X^\star & \xrightarrow{F^\star} & Y^\star \end{array}$$

kommutativ macht.

BEWEIS: (i) \Rightarrow (ii) ist durch das Lemma erledigt. Es gelte (ii). G^\star besteht aus den Komponenten $G_f : P_f \rightarrow P^\star(Y)$ für alle Elemente $f : P_f \rightarrow X^\star$ aus T_{X^\star} . Schalten wir vor das Diagramm den kanonischen Morphismus $P_f \rightarrow P^\star(X^\star)$ und beachten $t^\star|_{P_f} = f$, so bekommen wir die Gleichung

$$F^\star \circ f = t^\star \circ G_f : P_f \rightarrow P^\star(Y^\star) \rightarrow Y^\star.$$

Weil G^\star ursprünglich ein \mathbf{P}^\star -Morphismus ist, besitzt G_f einen PL-Repräsentanten $G_{f,i} : P_f \rightarrow P_g$, wobei $g : P_g \rightarrow Y^\star$ aus T_{Y^\star} stammt. Somit besteht die Beziehung

$$F^\star \circ f = g \circ G_{f,i} : P_f \rightarrow P_g \rightarrow Y^\star,$$

so daß wegen $g \circ G_{f,i} \in T_{Y^\star}$ auch $F^\star \circ f \in T_{Y^\star}$ gilt. \triangle

Ist $X^\star = Q \in \mathbf{P}$ ein kompaktes Polyeder, gewinnt man noch eine andere Charakterisierung aller zahmen Morphismen $Q \rightarrow Y^\star$, wozu wir ein wenig von obiger Situation abstrahieren und zur besseren Verdeutlichung in der Kategorie $\mathbf{Top}^\star_{z_{ri}}$ arbeiten wollen.

Gegeben seien ein System $X^\star \in \mathbf{Top}^\star_{ri}$, ein Objekt $P^\star = ((\Phi_i^j), (P_i), I) \in \mathbf{P}^\star$ und eine Familie $(t_i : P_i \rightarrow X^\star)_{i \in I}$ von \mathbf{Top}^\star_{ri} -Morphismen mit $t_i \circ \varphi = t_j$ im Sinne von ri-Morphismen für alle $\varphi \in \Phi_i^j$. Zur Abkürzung sei $t^\star := (t_i)_i$, wobei wir $t^\star : P^\star \rightarrow X^\star$ schreiben. Im weiteren sei $Q \in \mathbf{P}$ ein beliebiges, aber im folgenden festes, kompaktes Polyeder, für das wir wie folgt eine kanonische Abbildung

$$t_Q : \text{Mor}_{\mathbf{P}^\star}(Q, P^\star) \longrightarrow \text{Mor}_{ri}(Q, X^\star)$$

konstruieren: Ist $f_i : Q \rightarrow P_i$ irgendein Repräsentant einer \mathbf{P}^\star -Abbildung $f^\star : Q \rightarrow P^\star$, so setzen wir einfach $t_Q(f^\star) := t_i \circ f_i : Q \rightarrow X^\star$, wobei die Wohldefiniertheit zu zeigen ist: Für einen anderen Repräsentanten $f_j : Q \rightarrow P_j$, so daß $f_i = \varphi \circ f_j$ mit geeignetem Systemmorphismus $\varphi \in \Phi_i^j$ gilt, bekommen wir innerhalb der ri-Kategorie die erwünschte Gleichung

$$t_i \circ f_i = t_i \circ \varphi \circ f_j = t_j \circ f_j.$$

Man beachte insbesondere, daß die Morphismen $Q \rightarrow P^\star$ keine ri-Morphismen sind und via t_Q trotzdem zu ri-Morphismen $Q \rightarrow X^\star$ transformiert werden.

Ein anderer Aspekt dieser Konstruktion betrifft ihre Natürlichkeit: Eine PL-Abbildung $g : Q' \rightarrow Q$ induziert durch Verkettung von rechts zwei Abbildungen

$$\text{Mor}_{\mathbf{P}^\star}(Q, P^\star) \xrightarrow{g^\star} \text{Mor}_{\mathbf{P}^\star}(Q', P^\star) \quad \text{und} \quad \text{Mor}_{ri}(Q, X^\star) \xrightarrow{g^\star} \text{Mor}_{ri}(Q', X^\star),$$

die sich mit t_Q und $t_{Q'}$ im Sinne des kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_{\mathbf{P}^\star}(Q, P^\star) & \xrightarrow{t_Q} & \text{Mor}_{ri}(Q, X^\star) \\ \downarrow g^\star & & \downarrow g^\star \\ \text{Mor}_{\mathbf{P}^\star}(Q', P^\star) & \xrightarrow{t_{Q'}} & \text{Mor}_{ri}(Q', X^\star) \end{array}$$

vertragen, wie man sofort an der Definition von t_Q über Repräsentanten f_i sieht, d.h. die Gesamtheit aller t_Q definiert bei festem P^\star und X^\star eine natürliche Transformation, was sich formelmäßig als

$$t_{Q'}(f^\star \circ g) = t_Q(f^\star) \circ g$$

für jeden \mathbf{P}^\star -Morphismus $f^\star : Q \rightarrow P^\star$ und jeden \mathbf{P} -Morphismus $g : Q' \rightarrow Q$ schreibt.

Im Fall der Standardzählung $P_{ri}^\star(X^\star)$ von $X^\star \in \mathbf{Top}_{z_{ri}}^\star$ lassen sich aber noch zusätzliche Eigenschaften gewinnen. Aufgrund der Definition von t_Q gilt zunächst

$$t_Q(f^\star) \in \text{Mor}_{ri}(Q, P_{ri}^\star(X^\star)) \cap T_{X^\star}$$

für jeden \mathbf{P}^\star -Morphismus $f^\star : Q \rightarrow P_{ri}^\star(X^\star)$ mit $Q \in \mathbf{P}$. Ferner führen wir für f^\star den Begriff des **kanonischen Repräsentanten** ein: $t_Q(f^\star) : Q \rightarrow X^\star$ schreiben wir wie üblich als $t_Q(f^\star) : Q_{t_Q(f^\star)} \rightarrow X^\star$. Ist $f_\tau : Q \rightarrow P_\tau$ mit $\tau \in T_{X^\star}$ ein Repräsentant von f^\star , so können wir f_τ wegen $Q = Q_{t_Q(f^\star)}$ als PL-Abbildung $f_\tau : Q_{t_Q(f^\star)} \rightarrow P_\tau$ auffassen. Wegen der Wohldefiniertheit von $t_Q(f^\star)$ gilt die Gleichung

$$t_Q(f^\star) : Q_{t_Q(f^\star)} \rightarrow X^\star = t_\tau \circ f_\tau : Q_{t_Q(f^\star)} \rightarrow P_\tau \rightarrow X^\star,$$

was $T_{X^\star} \ni \tau \leq t_Q(f^\star) \in T_{X^\star}$ und $f_\tau \in \Phi_\tau^{t_Q(f^\star)}$ zur Folge hat. Aufgrund der trivialen Gleichung

$$f_\tau : Q \rightarrow P_\tau = f_\tau \circ id : Q \rightarrow Q_{t_Q(f^\star)} \rightarrow P_\tau$$

erweist sich $id : Q \rightarrow Q_{t_Q(f^\star)}$ obendrein als ein Repräsentant von f^\star , der durch f^\star eindeutig bestimmt ist, eben der gesuchte kanonische Repräsentant von f^\star . Auf diese Weise sieht man auch unmittelbar die Injektivität von t_Q .

Außer der bereits erwähnten Natürlichkeit in der ersten Komponente gibt es auch noch die Natürlichkeit in der zweiten Komponente: Die Funktorialität von $P^\star(\cdot)$ zieht die Bifunktorialität von $(Q, X^\star) \mapsto \text{Mor}_{\mathbf{P}^\star}(Q, P_{ri}^\star(X^\star))$ nach sich. Aufgrund der Definition und der Assoziativität der Verkettung von ri-Morphismen ist $(Q, X^\star) \mapsto T_{X^\star} \cap \text{Mor}_{ri}(Q, P_{ri}^\star(X^\star))$ ebenfalls ein Bifunktor. Mit dem zweiten Diagramm im Beweis von Lemma 7.2.2 sieht man dann schließlich auch die Natürlichkeit von $t \equiv \{t_Q\}$.

Die analoge Definition von t und des kanonischen Repräsentanten für die Kategorie \mathbf{Top}_z^\star bereitet natürlich erst recht keine Schwierigkeiten. Wir notieren:

KOROLLAR. *Es gibt einen natürlichen Isomorphismus*

$$t : \text{Mor}_{\mathbf{P}^\star}(Q, P_{ri}^\star(X^\star)) \xrightarrow{\approx} T_{X^\star} \cap \text{Mor}_{ri}(Q, X^\star)$$

zwischen Bifunktoren, die beide auf $\mathbf{P} \times \mathbf{Top}_{z_{ri}}^\star$ definiert sind. In Gleichungsform schreibt sich die Natürlichkeit als

$$t(P^\star(f^\star) \circ g^\star \circ \varphi) = f^\star \circ t(g^\star) \circ \varphi.$$

Eine analoge Aussage gilt für \mathbf{Top}_z^\star .

△

7.3 \downarrow Zahme Strukturen

Hauptaufgabe dieses Abschnitts ist die Definition der Kategorie \mathbf{P}^\downarrow , deren Objekte kompakte Polyeder mit „Basis“ sind, und die Einführung der \downarrow zahmen Strukturen.

7.3.1 Für ein beliebiges, kompaktes Polyeder $P \in \mathbf{P}$ bilden die *surjektiven* PL-Abbildungen $\pi : P \rightarrow B$ die Objekte der folgenden kleinen Kategorie: Ein Morphismus von $\pi : P \rightarrow B$ nach $\pi' : P' \rightarrow B'$ ist eine PL-Abbildung $\beta : B \rightarrow B'$ mit $\beta \circ \pi = \pi'$. Komposition solcher Morphismen ist natürlich durch Verkettung gegeben. Insbesondere sind die Isomorphieklassen von Objekten dieser Kategorie definiert.

Damit können wir bereits die Objekte unserer neuen Kategorie \mathbf{P}^\downarrow festlegen: Ein Objekt von \mathbf{P}^\downarrow sei per Definition ein kompaktes Polyeder $P \in \mathbf{P}$ zusammen mit einer Isomorphieklasse obiger, von P induzierter Kategorie. Für dieses Objekt verwenden wir aber nur den Buchstaben P . Die Isomorphieklasse bezeichnen wir auch als die **Basis** oder auch **Basisstruktur** von P . In der Praxis genügt es, mit einem fest gewählten Repräsentanten $\pi : P \rightarrow B$ der Basis zu arbeiten, wobei es gleichgültig ist, welcher Repräsentant ausgewählt wurde. In diesem Sinne bezeichnen wir auch π oder sogar nur B selbst als *die* (bis auf PL-Homöomorphie eindeutige) Basis von P . Die Objekte von \mathbf{P}^\downarrow nennen wir alternativ auch **\mathbf{P}^\downarrow -Polyeder**.

Die Morphismen von \mathbf{P}^\downarrow : Seien P, P' zwei \mathbf{P}^\downarrow -Polyeder mit jeweils ausgewählten Basisrepräsentanten $\pi : P \rightarrow B$ bzw. $\pi' : P' \rightarrow B'$. Ein **\mathbf{P}^\downarrow -Morphismus** sei eine PL-Abbildung $f : P \rightarrow P'$, die zu einer *injektiven* PL-Abbildung $\bar{f} : B \hookrightarrow B'$ faktorisiert (siehe kommutatives Diagramm).

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & P' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ B & \xrightarrow{\bar{f}} & B' \end{array}$$

Diese Faktorisierungseigenschaft von f ist unabhängig von der Wahl der Basen wohldefiniert und äquivalent dazu, daß $\pi' \circ f : P \rightarrow \text{Bild}(\pi' \circ f) \subset B'$ die Basisstruktur von P darstellt. \mathbf{P}^\downarrow -Morphismen sind abgeschlossen bzgl. Verkettung, so daß die Kategorie \mathbf{P}^\downarrow vollständig definiert ist. Aus der letzteren Charakterisierung der Faktorisierungseigenschaft ergibt sich unmittelbar die

FOLGERUNG. Seien $Q \in \mathbf{P}^\downarrow$ ein \mathbf{P}^\downarrow -Polyeder, $P \in \mathbf{P}$ ein kompaktes Polyeder und $f : P \rightarrow Q$ eine PL-Abbildung. Dann besitzt P genau eine Basisstruktur, so daß f ein \mathbf{P}^\downarrow -Morphismus ist. \triangle

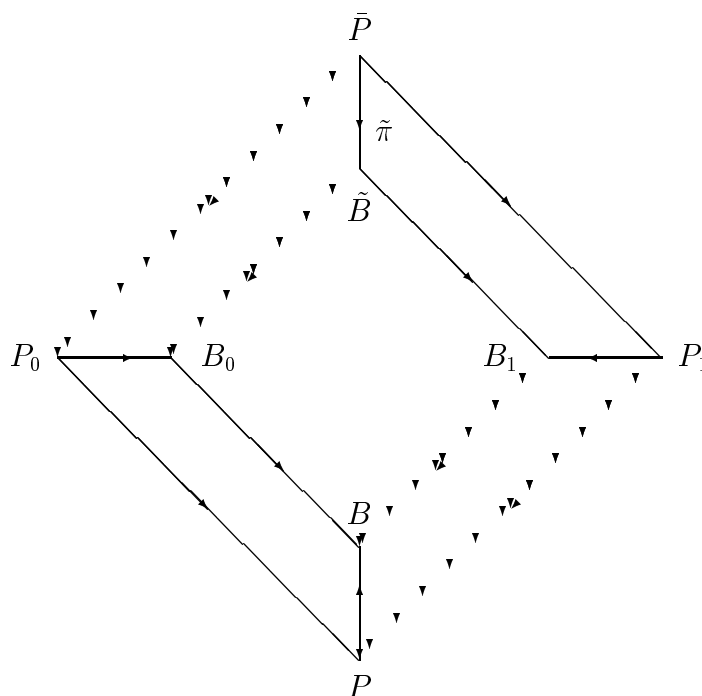
Durch Vergessen der Basisstruktur eines \mathbf{P}^\downarrow -Polyeders erhalten wir den Vergißfunktork

$$V : \mathbf{P}^\downarrow \longrightarrow \mathbf{P}.$$

Man beachte jedoch, daß dieser keinen Vergißfaktor $\mathbf{P}^{\downarrow\leftarrow} \rightarrow \mathbf{P}^{\leftarrow}$ induziert. Für jedes \mathbf{P}^{\downarrow} -Polyeder P sei der **Totalraum** von P als $V(P)$ definiert.

Jedes kompakte Polyeder $P \in \mathbf{P}$ induziert mit der Identität $id : P \rightarrow P$ als Basisstruktur ein \mathbf{P}^{\downarrow} -Polyeder, das wir wieder mit P bezeichnen und das zu P **assoziierte \mathbf{P}^{\downarrow} -Polyeder** nennen. id_P heißt dann auch die zu $P \in \mathbf{P}$ **assoziierte Basisstruktur**.

Als nächstes ist die Existenz von Pullbacks und Pushouts innerhalb \mathbf{P}^{\downarrow} zu klären. Wir beginnen mit den Pullbacks, wofür wir natürlich die Existenz von Pullbacks in \mathbf{P} ausnutzen. Wir führen den Nachweis durch Diagrammschau an folgendem Pullbackdiagramm



innerhalb \mathbf{P}^{\downarrow} , das die Basen mitberücksichtigt, wobei das innere Rhombusdiagramm das Pullback der Basen darstellt und das äußere das Pullback der darüberliegenden Polyeder. Dabei ist folgendes zu beachten:

- Die Pullbackabbildungen von injektiven Abbildungen sind wieder injektiv (Pullback entspricht dem Durchschnitt zweier Teilmengen).
- Aufgrund der universellen Eigenschaft des inneren Pullbackdiagramms wird eine eindeutige PL-Abbildung $\tilde{\pi} : \bar{P} \rightarrow \tilde{B}$ induziert, die jedoch *nicht* die Basisstruktur von \bar{P} induziert. Die richtige Basisstruktur ist durch $\bar{B} := \text{Bild } \tilde{\pi}$ und entsprechend $\bar{\pi} := \tilde{\pi} : \bar{P} \rightarrow \bar{B}$ gegeben. Damit hat man zunächst nur die Existenz eines solchen Diagramms.

Danach überzeugt man sich von der Pullbackeigenschaft dieses Diagramms in \mathbf{P}^{\downarrow} unter Ausnutzung der Pullbackeigenschaft in \mathbf{P} des inneren und äußeren Diagramms. Insbesondere ist der Totalraum des Pullbacks gleich dem Pullback der \mathbf{P} -Morphismen zwischen den Totalräumen und somit—wie schon vorher—auch der Pullback innerhalb **Top**.

Wie in \mathbf{P} gibt es auch in \mathbf{P}^\downarrow keine allgemeinen Pushouts, und—im Gegensatz zu \mathbf{P} —noch nicht mal Pushouts von \mathbf{P}^\downarrow -Einbettungen! Nichtsdestotrotz gibt es eine kanonische **\mathbf{P}^\downarrow -Vereinigung**⁶⁾, die auf folgende Weise definiert ist: $\pi_0 : P_0 \rightarrow B_0$ und $\pi_1 : P_1 \rightarrow B_1$ seien die Basen von \mathbf{P}^\downarrow -Polyedern P_0 bzw. P_1 , P' ein weiteres \mathbf{P}^\downarrow -Polyeder mit Basis $\pi' : P' \rightarrow B'$ und $\alpha_i : P' \hookrightarrow P_i$, $i = 0, 1$ zwei \mathbf{P}^\downarrow -Einbettungen. Hierbei faktorisieren wir α_i zu der \mathbf{P} -Einbettung $\beta_i : B' \rightarrow B_i$ für $i = 0, 1$. Wir haben also zwei kommutative Diagramme,

$$\begin{array}{ccc} P' & \xrightarrow{\alpha_i} & P_i \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi_i \\ B' & \xrightarrow{\beta_i} & B_i \end{array}$$

in denen α_i und β_i PL-Einbettungen sind. Mittels α_0, α_1 verkleben⁷⁾ wir P_0 und P_1 längs P' zu einem Polyeder P und B_0, B_1 mittels β_0, β_1 längs B' zu einem Polyeder B . Die Kommutativität der beiden Diagramme impliziert die Verträglichkeit dieser beiden Verklebungen, so daß sich π_0 und π_1 zu einer Basisstruktur $\pi : P \rightarrow B$ vereinigen. Das \mathbf{P}^\downarrow -Polyeder P heißt dann die \mathbf{P}^\downarrow -Vereinigung von P_0 und P_1 .

Man sollte aber \mathbf{P}^\downarrow -Vereinigungen konkreter nur mittels normaler Vereinigungen und Durchschnitte wie folgt beschreiben: Dazu muß zunächst die Klasse der zulässigen Vereinigungen in \mathbf{P}^\downarrow spezifiziert werden. Sei P ein \mathbf{P}^\downarrow -Polyeder mit Basis $\pi : P \rightarrow B$ und $P_0, P_1 \subset P$ zwei kompakte Unterpolyeder von P , die P überdecken. Lt. Folgerung 7.3.1 sind dann die Einschränkungen $\pi : P_0 \rightarrow \pi(P_0)$, $\pi : P_1 \rightarrow \pi(P_1)$, $\pi : P_0 \cap P_1 \rightarrow \pi(P_0 \cap P_1)$ die eindeutigen, zugehörigen Basisstrukturen, so daß alle Inklusionen $P_0 \hookrightarrow P$, $P_1 \hookrightarrow P$, $P_0 \cap P_1 \hookrightarrow P$ \mathbf{P}^\downarrow -Morphismen darstellen. Man überlegt sich, daß P genau dann die \mathbf{P}^\downarrow -Vereinigung von P_0 und P_1 darstellt, wenn die Bedingung

$$\pi(P_0 \cap P_1) = \pi(P_0) \cap \pi(P_1)$$

erfüllt ist.

7.3.2 Weil \mathbf{P}^\downarrow -Polyeder weder Objekte von \mathbf{Top} noch von \mathbf{Top}^\star sind, gibt es eigentlich auch keine \mathbf{Top}^\star -Morphismen $f : P \rightarrow X^\star$ mit $P \in \mathbf{P}^\downarrow$. Man muß daher auf P die beiden Vergißfunktoren $v : \mathbf{P}^\downarrow \rightarrow \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Top}$ anwenden, um f als einen \mathbf{Top}^\star -Morphismus bezeichnen zu können. Trotzdem wird dabei die Basisstruktur sozusagen im Gedächtnis behalten, womit genau folgendes gemeint ist:

Für ein \mathbf{P}^\downarrow -Polyeder P und ein $X^\star \in \mathbf{Top}^\star$ sei ein \mathbf{Top}^\star -Morphismus $f : P \rightarrow X^\star$ per Definition ein Paar

$$(P, f : v(P) \rightarrow X^\star),$$

⁶⁾Dies ist ein schönes Beispiel dafür, daß man nicht immer alles nur durch die funktorielle Brille sehen sollte.

⁷⁾Mit anderen Worten bilden wir den Pushout zweier PL-Einbettungen innerhalb \mathbf{P} .

wobei $f : v(P) \rightarrow X^\star$ ein \mathbf{Top}^\star -Morphismus ist. Die Definition für einen ri-Morphismus $f : P \rightarrow X^\star$ mit $P \in \mathbf{P}^\downarrow$ und $X^\star \in \mathbf{Top}^\star_{ri}$ wird analog getroffen. Die Schreibweise $f : P \rightarrow X^\star$ ist damit definiert.

Nachdem dieser Punkt befriedigend geklärt ist, kann alles—mit besonderer Berücksichtigung eines adäquaten Additivitätsbegriffes—aus den beiden vorigen Abschnitten wortwörtlich für den \mathbf{P}^\downarrow -Fall übernommen werden, wobei wir stets die Substitutionen

$$\begin{array}{lcl}
 \mathbf{P} & \longrightarrow & \mathbf{P}^\downarrow \\
 \text{zahm} & \longrightarrow & \downarrow\text{zahm} \\
 \text{kompaktes Polyeder} & \longrightarrow & \mathbf{P}^\downarrow\text{-Polyeder} \\
 \text{PL-Abbildung} & \longrightarrow & \mathbf{P}^\downarrow\text{-Morphismus} \\
 P^\star & \longrightarrow & P^\downarrow\star \\
 T_X & \longrightarrow & T_X^\downarrow \\
 T_{X^\star} & \longrightarrow & T_{X^\star}^\downarrow \\
 T_Y & \longrightarrow & T_Y^\downarrow \\
 T_{Y^\star} & \longrightarrow & T_{Y^\star}^\downarrow
 \end{array}$$

durchführen und bei der ri-Kategorie analog verfahren. Insbesondere sind die Begriffe ‘ \downarrow zahme Struktur’, ‘ \downarrow zahme Grundstruktur’, ‘ \downarrow zahmes Element’, ‘ \downarrow zahmes projektives System’, ‘ \downarrow zahmer Morphismus’ und ‘ri- \downarrow zahme Struktur’, ‘ri- \downarrow zahme Grundstruktur’, ‘ri- \downarrow zahmes Element’, ‘ri- \downarrow zahmes projektives System’, ‘ri- \downarrow zahmer Morphismus’ definiert.

Auf der Grundlage von \mathbf{P}^\downarrow -Vereinigungen ist nunmehr auch die Analogie—im ri-Fall ebenfalls—zur Definition 7.2.2 der **Additivität** von \downarrow zahmen bzw. ri- \downarrow zahmen Grundstrukturen offensichtlich, indem man nämlich $P = P_0 \cup P_1$ als \mathbf{P}^\downarrow -Vereinigung voraussetzt.

Wie in 7.1.1 werden die Elemente einer \downarrow zahmen Struktur von X^\star auch selbst als \downarrow zahm, ri- \downarrow zahm usw. bezeichnet.

Die Zählungskonstruktion wird analog wie in 7.2.1 durchgeführt, so daß die Zählung $P^\downarrow\star(X^\star)$, deren Vollständigkeit (Eigenschaft (3) in 4.3.1) wegen der o.g. Existenz von Pullbacks in \mathbf{P}^\downarrow ganz genauso wie in 7.2.1 folgt, also ein Objekt von $\mathbf{P}^\downarrow\star$ darstellt. Durch Vergessen der \mathbf{P}^\downarrow -Struktur und schließlich auch der \mathbf{P} -Struktur kann man $P^\downarrow\star(X^\star)$ ebenso als Objekt von \mathbf{P}^\star oder sogar von \mathbf{Top}^\star auffassen. Wir vereinbaren hier, daß wir die Zählung *normalerweise*, außer wenn etwas anderes verlangt wird, als kovarianten Funktor

$$P^\downarrow\star : \mathbf{Top}^\star_{\downarrow z} \longrightarrow \mathbf{P}^\star$$

interpretieren, wobei $\mathbf{Top}^\star_{\downarrow z}$ die Kategorie der \downarrow zahmen Systeme und \downarrow zahmen Morphismen bezeichnet. Im ri-Fall haben wir entsprechend einen Funktor

$$P^\downarrow\star_{ri} : \mathbf{Top}^\star_{\downarrow z_{ri}} \longrightarrow \mathbf{P}^\star.$$

Wir fassen die bereits erwähnten Bezeichnungen, die von der Kategorie \mathbf{P}^\downarrow induziert sind, nochmal zusammen.

BEZEICHNUNG. $\mathbf{Top}_{\downarrow z}, \mathbf{Top}^\star_{\downarrow z}, \mathbf{Top}^\star_{\downarrow z}, \mathbf{Top}^\star_{\downarrow z_{ri}}, P^{\downarrow\star}(X^\star), P_{ri}^{\downarrow\star}(X^\star)$.

Eine wortwörtliche Übertragung von Korollar 7.2.2 schlägt dagegen fehl, weil für die rechte Seite Q als ein Objekt von \mathbf{Top} aufgefaßt werden muß, so daß die Basisstruktur von Q nicht mehr berücksichtigt wird. Tatsächlich bekommen wir aber trotzdem eine für \mathbf{P}^\downarrow adäquate Version dieses Korollars, indem wir $P_{ri}^{\downarrow\star}(X^\star)$, wobei $X^\star \in \mathbf{Top}^\star_{\downarrow z_{ri}}$, als ein Objekt aus \mathbf{P}^\star auffassen und für jeden \mathbf{P}^\star -Morphismus

$$Q \longrightarrow P_{ri}^{\downarrow\star}(X^\star)$$

die in den Indizes der Komponenten von $P_{ri}^{\downarrow\star}(X^\star)$ als Information mit enthaltenen Basisstrukturen mittels Folgerung 7.3.1 *eindeutig* zu einer Basisstruktur von Q zurückziehen. Bezeichnen wir die ri- \downarrow zahme Struktur eines ri- \downarrow zahmen Systems $X^\star \in \mathbf{Top}^\star_{\downarrow z_{ri}}$ mit $T_{ri}^\downarrow(X^\star)$, bekommen wir daher das zu Korollar 7.2.2 analoge

KOROLLAR. *Es gibt einen natürlichen Isomorphismus*

$$t : \text{Mor}_{\mathbf{P}^\star}(Q, P_{ri}^{\downarrow\star}(X^\star)) \xrightarrow{\cong} T_{ri}^\downarrow(X^\star) \cap \text{Mor}_{ri}(Q, X^\star)$$

zwischen Bifunktoren, die beide auf $\mathbf{P} \times \mathbf{Top}^\star_{\downarrow z_{ri}}$ definiert sind. In Gleichungsform schreibt sich die Natürlichkeit als

$$t(P^\star(f^\star) \circ g^\star \circ \varphi) = f^\star \circ t(g^\star) \circ \varphi.$$

Eine analoge Aussage gilt für $\mathbf{Top}^\star_{\downarrow z}$. △

Die verfeinerte Struktur von \mathbf{P}^\downarrow -Polyedern ermöglicht eine zusätzliche Begriffsbildung: Eine \downarrow zahme Struktur T^\downarrow eines projektiven \mathbf{Top} -Systems X^\star heiße **faktorisierend**, wenn zu jedem $T^\downarrow \ni f : P \rightarrow X^\star$ mit Basis $\pi : P \rightarrow B$ ein \mathbf{Top}^\star -Morphismus $g : B \rightarrow X^\star$ mit $f = g \circ \pi$ existiert, so daß $g \in T^\downarrow$ gilt, wobei die assoziierte Basisstruktur von B genommen werde. Im ri-Fall definiert man faktorisierende ri- \downarrow zahme Strukturen analog.

Erwähnenswert ist nun die Tatsache, daß für ein Objekt $X^\star \in \mathbf{Top}^\star$ jede zahme Grundstruktur $T(X^\star)$ von X^\star wie folgt kanonisch eine faktorisierende \downarrow zahme Struktur $T^\downarrow(X^\star)$ auf X^\star induziert: Sei P ein \mathbf{P}^\downarrow -Polyeder mit einer Basis $\pi : P \rightarrow B$ und $f : P \rightarrow X^\star$ ein \mathbf{Top}^\star -Morphismus. Dann gelte

$$f \in T^\downarrow(X^\star) : \iff \exists g : B \rightarrow X^\star \in T(X^\star) \text{ mit } f = g \circ \pi.$$

Im Fall $X^\star \in \mathbf{Top}^\star_{ri}$ wird ganz analog kanonisch eine faktorisierende ri- \downarrow zahme Struktur $T_{ri}^\downarrow(X^\star)$ auf X^\star induziert. Die Frage, warum wir überhaupt faktorisierende \downarrow zahme Strukturen eingeführt haben, wird durch das nächste Lemma beantwortet:

LEMMA. T_{ri} sei eine ri-zahme Grundstruktur von $X^\leftarrow \in \mathbf{Top}_{ri}^\leftarrow$ und T_{ri}^\downarrow die von T_{ri} induzierte, faktorisierende ri- \downarrow zahme Struktur von X^\leftarrow . Ist T_{ri} additiv, dann auch T_{ri}^\downarrow . Eine analoge Aussage für die \mathbf{Top}^\leftarrow -Kategorie⁸⁾ ist i.a. falsch!

BEWEIS: Wie in der Definition additiver ri- \downarrow zahmer Strukturen sei P ein \mathbf{P}^\downarrow -Polyeder mit Basis $\pi : P \rightarrow B$, $P = P_0 \cup P_1$ eine \mathbf{P}^\downarrow -Vereinigung mit den zugehörigen Basen $B_0 := \pi(P_0)$, $B_1 := \pi(P_1)$ und $f_0 : P_0 \rightarrow X^\leftarrow$, $f_1 : P_1 \rightarrow X^\leftarrow$ ri-Morphismen, die zu ri-zahmen Elementen $g_0 : B_0 \rightarrow X^\leftarrow$ bzw. $g_1 : B_1 \rightarrow X^\leftarrow$ faktorisieren, so daß $f_0|_{P_0 \cap P_1} = f_1|_{P_0 \cap P_1} =: h$ im Sinne von ri-Morphismen gilt.

Nach Lemma 4.5.2 faktorisiert h eindeutig zu \bar{h} , so daß $g_0|_{B_0 \cap B_1} = g_1|_{B_0 \cap B_1}$ gilt. Die Additivität von T_{ri} impliziert nun ein ri-zahmes Element $g : B \rightarrow X^\leftarrow$ aus T_{ri} mit $g|_{B_0} = g_0$ und $g|_{B_1} = g_1$. Daher ist $f := g \circ \pi$ ein Element aus T_{ri}^\downarrow , das f_0 f_1 fortsetzt. \triangle

BEMERKUNG. Das Lemma beruht auf der Eindeutigkeit von $\mathbf{Top}_{ri}^\leftarrow$ -Faktorisationen, die in \mathbf{Top}^\leftarrow verloren geht. Genau aus diesem Grunde müssen wir die *variablen* \downarrow zahmen Strukturen einführen, damit sich die Additivität einer zahmen Grundstruktur auf die von ihr induzierte variable \downarrow zahme Struktur vererbt. Die Verwendung von \mathbf{P}^\downarrow -Polyedern dagegen hat seinen Grund in der fehlenden Pushout-Eigenschaft von \mathbf{P} (s. Anmerkung 8.3.1).

7.4 Zahme Homologie

Zahme Homologie kann man direkt oder auch über die Zähmung definieren. Wir zeigen, daß beide Möglichkeiten das Gleiche liefern. Analog gehen wir bei der \downarrow zahmen Homologie vor. Wenn auch die Definition über die Zähmung eleganter erscheinen mag, so bleibt die direkte Definition dennoch unentbehrlich für die abstrakte Klassifikation.

7.4.1 Die direkte Definition der **zahmen Homologie** ist schnell erledigt: Wir brauchen uns nur zu vergegenwärtigen, daß an *geometrischen* Voraussetzungen sowohl zur Definition der Ω -Homologie als auch der Dipol-Homologie nur dreierlei erforderlich ist:

- Eine Menge von singulären Zykeln,
- Ein Begriff von strenger Nullhomologie für endliche Familien solcher singulären Zykeln,
- Die konstante Homotopie eines singulären Zykels ist eine solche strenge Nullhomologie.

⁸⁾Es gibt jedoch noch die Möglichkeit, sog. *variable* zahme Strukturen einzuführen, bei denen man immer in \mathbf{Top}^\leftarrow bleiben kann und die aber trotzdem auch z.B. ri-zahme Strukturen subsumieren! Die variablen zahmen Strukturen werden im vorletzten Abschnitt dieses Kapitels definiert.

Der restliche Teil der Definition, auch natürlich im ri-Fall, war rein algebraischer Natur. Weil aber singuläre Zykel und strenge Nullhomologien stetige, auf kompakten Polyedern definierte Abbildungen sind, ist klar, wie für ein zahmes projektives System $X^\star \in \mathbf{Top}_z^\star$ singuläre Zykel $f : P \rightarrow X^\star$ und strenge Nullhomologien gewählt werden sollten, nämlich als zahme Abbildungen bzw. ri-zahme Abbildungen im ri-Fall (d.h. genauer als Elemente der betreffenden zahmen Struktur). Wie auch in 7.2.2 sind dann die zahme Ω - und zahme Dipol-Homologie sowie deren unorientierte Pendant für die Kategorien \mathbf{Top}_z^\star , $\mathbf{Top}_{z_{ri}}^\star$, \mathbf{Top}_z^\star analog definiert, so daß wir nur noch die Bezeichnungen festzulegen brauchen, was wir exemplarisch nur für die beiden ersten Kategorien durchführen.

BEZEICHNUNG. Sei $X^\star \in \mathbf{Top}_z$. Dann bezeichne

$$\begin{aligned} H_n^z(X^\star) & \text{ die } n\text{-te zahme } \Omega\text{-Homologie von } X^\star, \\ H_n^{D^z}(X^\star) & \text{ die } n\text{-te zahme Dipol-Homologie von } X^\star, \\ H_n^z(X^\star; \mathbb{Z}_2) & \text{ die unorientierte } n\text{-te zahme } \Omega\text{-Homologie von } X^\star, \\ H_n^{D^z}(X^\star; \mathbb{Z}_2) & \text{ die unorientierte } n\text{-te zahme Dipol-Homologie von } X^\star. \end{aligned}$$

Ist X^\star als ri-Objekt aus $\mathbf{Top}_{z_{ri}}^\star$ gegeben, seien

$$\begin{aligned} H_n^{z_{ri}}(X^\star) & \text{ die } n\text{-te ri-zahme } \Omega\text{-Homologie von } X^\star, \\ H_n^{D_{ri}^z}(X^\star) & \text{ die } n\text{-te ri-zahme Dipol-Homologie von } X^\star, \\ H_n^{z_{ri}}(X^\star; \mathbb{Z}_2) & \text{ die unorientierte } n\text{-te ri-zahme } \Omega\text{-Homologie von } X^\star, \\ H_n^{D_{ri}^z}(X^\star; \mathbb{Z}_2) & \text{ die unorientierte } n\text{-te ri-zahme Dipol-Homologie von } X^\star. \end{aligned}$$

Da zahme Zykel von zahmen Abbildungen mittels Verkettung wieder zu zahmen Zykeln transformiert werden, stellen alle diese Homologien kovariante Funktoren von den entsprechenden Kategorien nach \mathbf{Ab} bzw. \mathbf{Set} dar.

Ferner verwenden wir die Sprechweisen „**zahn streng nullhomolog**“, „**zahn streng homolog**“, „**ri-zahn streng nullhomolog**“ und „**ri-zahn streng homolog**“.

7.4.2 Zur Definition einer \downarrow zahmen Homologie geht man im Prinzip analog vor, wobei jedoch die Nichtexistenz von Koprodukten in \mathbf{P}^\downarrow zu berücksichtigen ist. Vorher muß natürlich auch der Begriff des **\mathbf{P}^\downarrow -n-Zykels** geklärt werden: Darunter verstehen wir ein n -Zykel P zusammen mit einer Basisstruktur im Sinne von 7.3.1. Unorientierte \mathbf{P}^\downarrow - n -Zykel sind analog definiert. Daher ist jedes \mathbf{P}^\downarrow - n -Zykel ein \mathbf{P}^\downarrow -Polyeder. Das umorientierte \mathbf{P}^\downarrow - n -Zykel P^{-1} besitzt natürlich die gleiche Basisstruktur. Analog sind berandete \mathbf{P}^\downarrow - n -Zykel definiert.

Für ein $X^\star \in \mathbf{Top}_{\downarrow z}^\star$ mit seiner \downarrow zahmen Struktur T^\downarrow sei ein **\downarrow zahmes n -Zykel** ein Element $f : P \rightarrow X^\star$ aus T^\downarrow , wobei P ein \mathbf{P}^\downarrow - n -Zykel ist. Wie in 6.3.1 verwenden wir die

Schreibweise (P, f) . Bis hierhin ist also alles ganz analog. Eine kleine Änderung erfolgt erst mit der

DEFINITION. Eine endliche Familie $(P_1, f_1), \dots, (P_k, f_k)$ \downarrow zahmer n -Zykel von $X^\star \in \mathbf{Top}^\star_{\downarrow z}$ mit \downarrow zahmer Struktur $T^\downarrow(X^\star)$ heie **\downarrow zahn streng nullhomolog**, falls ein berandetes, orientiertes \mathbf{P}^\downarrow - $(n+1)$ -Zykel P und ein Element $F : P \rightarrow X^\star$ aus $T^\downarrow(X^\star)$, sowie ein orientierungserhaltender \mathbf{P} -Isomorphismus $\delta : \bigcup_i P_i \xrightarrow{\cong} \partial P$ existieren, so daß

$$\delta|_{P_i} : P_i \rightarrow \partial P$$

ein \mathbf{P}^\downarrow -Morphismus ist und $f_i = F \circ \delta|_{P_i}$ für alle $i = 1, \dots, k$ gilt.

Die restlichen Definitionen und Begriffsbildungen werden dann analog wie in 7.4.1 vorgenommen, was insbesondere den unorientierten und ri-Fall einschließt. Wiederum bleibt uns nur die Aufgabe, die Bezeichnungen festzulegen.

BEZEICHNUNG. Sei $X^\star \in \mathbf{Top}_{\downarrow z}$. Dann bezeichne

$$\begin{aligned} H_n^{\downarrow z}(X^\star) & \quad \text{die } n\text{-te } \downarrow\text{zahme } \Omega\text{-Homologie von } X^\star, \\ H_n^{D^{\downarrow z}}(X^\star) & \quad \text{die } n\text{-te } \downarrow\text{zahme Dipol-Homologie von } X^\star, \\ H_n^{\downarrow z}(X^\star; \mathbf{Z}_2) & \quad \text{die unorientierte } n\text{-te } \downarrow\text{zahme } \Omega\text{-Homologie von } X^\star, \\ H_n^{D^{\downarrow z}}(X^\star; \mathbf{Z}_2) & \quad \text{die unorientierte } n\text{-te } \downarrow\text{zahme Dipol-Homologie von } X^\star. \end{aligned}$$

Ist X^\star als ri-Objekt aus $\mathbf{Top}^\star_{\downarrow z, ri}$ gegeben, seien

$$\begin{aligned} H_n^{\downarrow z, ri}(X^\star) & \quad \text{die } n\text{-te ri-}\downarrow\text{zahme } \Omega\text{-Homologie von } X^\star, \\ H_n^{D^{\downarrow z}, ri}(X^\star) & \quad \text{die } n\text{-te ri-}\downarrow\text{zahme Dipol-Homologie von } X^\star, \\ H_n^{\downarrow z, ri}(X^\star; \mathbf{Z}_2) & \quad \text{die unorientierte } n\text{-te ri-}\downarrow\text{zahme } \Omega\text{-Homologie von } X^\star, \\ H_n^{D^{\downarrow z}, ri}(X^\star; \mathbf{Z}_2) & \quad \text{die unorientierte } n\text{-te ri-}\downarrow\text{zahme Dipol-Homologie von } X^\star. \end{aligned}$$

Dies sind selbstredend alles kovariante Funktoren. Inzwischen erklären sich auch die Begriffe „ri- \downarrow zahn streng nullhomolog“, „ \downarrow zahn streng homolog“ usw. von selbst und ebenso z.B. **ri- \downarrow zahn streng homotop** und **ri- \downarrow zahn homotop**.

7.4.3 Wir gehen nun darauf ein, wieso man alle diese Homologien isomorph durch singuläre Ω - bzw. singuläre Dipol-Homologie der entsprechenden Zähmung ausdrücken kann.

Dazu müssen wir zunächst die PL- Ω - und PL-Dipol-Homologie von Objekten $P^\star \in \mathbf{PL}^\star$ definieren und näher studieren, was sich dann auf die volle Unterkategorie $\mathbf{P}^\star \subset \mathbf{PL}^\star$ anwenden läßt.

Für Objekte P^\star aus \mathbf{PL}^\star muß man eine der Kategorie \mathbf{PL} angepaßte Definition der Ω - und Dipol-Homologie wählen: Die singulären Zyklen und die strengen Nullhomologien sind eben \mathbf{PL}^\star -Morphismen. Zur besseren Verdeutlichung dieser \mathbf{PL} -Homologien schreiben wir $PL-H_n^\Omega(P^\star)$ bzw. $PL-H_n^D(P^\star)$.

Wegen simplizialer Approximation liegt die Vermutung nahe, daß diese \mathbf{PL} -Homologien mit ihren singulären Pendanten übereinstimmen, *aber* das Problem besteht darin, daß sich eben nun mal nicht jedes System $P^\star \in \mathbf{PL}^\star$ als ein Objekt aus \mathbf{Top}^\star interpretieren läßt. Im Falle der Zählungssysteme ist dies aber möglich!

Sei allgemein $P^\star \in \mathbf{PL}^\star$. Mit der Sprechweise „ P^\star läßt sich als ein Objekt von \mathbf{Top}^\star auffassen“ ist folgendes gemeint: Mittels des Vergißfunktors $\mathbf{PL} \rightarrow \mathbf{Top}$ stellt jeder Systemmorphismus $\varphi \in \Phi_i^j$ von P^\star eine stetige Abbildung dar. Das System $((\Phi_i^j), (P_i))$ erfüllt dann stets die Bedingungen (1), (2) aus 4.3.1. Erfüllt das System außerdem die Bedingung (3) (Vollständigkeit), so verwenden wir jene Sprechweise, andernfalls nicht.

Es soll nun ein \mathbf{PL}^\star -Objekt P^\star vorliegen, daß sich als ein Objekt $P^\star \in \mathbf{Top}^\star$ auffassen läßt. Dann hat man die „Vergißabbildungen“ $PL-H_n^\Omega(P^\star) \rightarrow H_n^\Omega(P^\star)$ und $PL-H_n^D(P^\star) \rightarrow H_n^D(P^\star)$ sowie deren unorientierte Versionen in die singulären Homologien von $P^\star \in \mathbf{Top}^\star$.

LEMMA. $PL-H_n^\Omega(P^\star) \xrightarrow{\cong} H_n^\Omega(P^\star)$, $PL-H_n^\Omega(P^\star; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cong} H_n^\Omega(P^\star; \mathbb{Z}_2)$ sind Gruppenisomorphismen und $PL-H_n^D(P^\star) \xrightarrow{\cong} H_n^D(P^\star)$, $PL-H_n^D(P^\star; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cong} H_n^D(P^\star; \mathbb{Z}_2)$ Mengenisomorphismen.

BEWEIS: Das Beweisprinzip lautet natürlich simpliziale Approximation, aber es ist nicht selbstverständlich, daß für \mathbf{Top}^\star -Morphismen keine Komplikationen auftreten. Wir befassen uns zunächst mit dem technisch einfacheren Dipol-Fall.

Die Surjektivität ist leicht einzusehen: Sei (Q, f) ein singulärer n -Zykel von $P^\star \in \mathbf{Top}^\star$ und $f_i : Q \rightarrow P_i$ ein Repräsentant von $f : Q \rightarrow P^\star$. Dann ist f_i homotop, also insbesondere homolog, zu einer PL-Abbildung $\tilde{f}_i : Q \rightarrow P_i$. Diese induziert ein PL- n -Zykel (Q, \tilde{f}) von $P^\star \in \mathbf{PL}^\star$, das in $H_n^D(P^\star)$ homolog zu (Q, f) ist.

Was den Nachweis der Injektivität betrifft, ist es viel besser, der natürlichen Beweisidee zu folgen und sie visuell mit dem Bild



umzusetzen, als sich durch ein unübersichtliches Konglomerat überhäufeter Bezeichnungen zu kämpfen. Wir erläutern nun das Bild: Die beiden äußeren unteren Ecken stellen PL-Repräsentanten der gegebenen PL- n -Zykel $(Q, f), (\tilde{Q}, \tilde{f})$ dar, die singulär dipolhomolog sind und PL-dipolhomolog noch werden sollen. Die waagerechten Linien stellen topologische, singuläre Repräsentanten der strengen Homologien zwischen ihren jeweiligen Enden dar, wobei wir o.E. nur den Fall berücksichtigen, daß jede strenge Homologie wie im Bild zwei nichtleere Randzyklen besitzt. Die obersten Ecken stehen jeweils für einen gemeinsamen, dominierenden Repräsentanten der beiden darunterliegenden Repräsentanten

eines singulären n -Zwischenzykels, so daß die geneigten Strecken geeignete Systemmorphismen aus $P^\star \in \mathbf{Top}^\star$ symbolisieren.

Im zweiten Schritt wählen für jeden dominierenden Repräsentanten (oberste Ecken) eine \mathbf{Top} -Homotopie, die mit einer PL-Abbildung ende, was wir in diesem Bild



durch die kleinen vertikalen Strecken stellvertretend für die Homotopien andeuten, wobei die obersten Ecken die PL-Abbildungen symbolisieren. Diese Homotopien drücken wir jeweils mit dem rechten und linken Systemmorphimus hinunter und stückeln sie an die strengen Homologien an. Damit haben wir zunächst erreicht, daß o.B.d.A. wenigstens alle „Spitzen“ und Homologieenden PL-Abbildungen sind. Dabei werden aber auch die äußersten Zykel (Q, f) , (\tilde{Q}, \tilde{f}) jeweils homotop durch PL-Zykel (Q', f') bzw. (\tilde{Q}', \tilde{f}') ersetzt. Mit relativer simplizialer Approximation sind dann auch die strengen Homologien o.E. PL-Abbildungen und die Homotopien zwischen (Q, f) und (Q', f') bzw. zwischen (\tilde{Q}, \tilde{f}) und (\tilde{Q}', \tilde{f}') ebenso. Daher ist (Q, f) PL-dipol-homolog zu (\tilde{Q}, \tilde{f}) , was die Injektivität beweist.

Im Fall der Ω -Homologie beweist man die Injektivität im Prinzip genauso, wobei folgendes noch zu beachten ist: Man startet mit einer Familie von Zykeln, die disjunkt in Unterfamilien aufgeteilt ist, wobei *einige* dieser Unterfamilien singulär streng nullhomolog sind, und weiß zunächst nur, daß es eine andere disjunkte Aufteilung in Unterfamilien gibt, so daß *jede* dieser neuen Unterfamilien singulär streng nullhomolog ist. Nun wählt man für jede streng nullhomologe Unterfamilie (auch für jede von den früheren) einen Nullhomologierepräsentanten. Sei nun (Q, f) ein Zykel, das aus einer der alten, streng nullhomologen Unterfamilie stammt. Dann gibt es höchstens noch eine der neuen Unterfamilien, in der (Q, f) auftreten kann. In diesem Fall wähle man einen gemeinsamen dominierenden Repräsentanten. Diese letzteren sind dann mit den „Spitzen“ im Dipol-Fall vergleichbar, so daß wir eine ähnliche Situation vorliegen haben. Die Spitzen ändern wir homotop zu PL-Abbildungen ab, drücken diese Homotopien hinunter, stückeln sie jeweils an und ersetzen alle Homologien stationär auf den Rändern durch PL-Homologien, wobei die ursprünglichen PL-Zykel PL-homotop abgeändert worden sind.

Der unorientierte Fall wird ganz analog bewiesen. △

Die beiden Korollare 7.2.2 und 7.3.2 besagen, daß zahme Abbildungen $Q \rightarrow X^\star$, Q fest, gleichgültig, welche Art zahme Struktur vorliegt, bijektiv zu \mathbf{P}^\downarrow -Abbildungen von Q in die entsprechende Zähmung korrespondieren. Daher induziert die Transformation t

$$\text{PL-Homologie(Zähmung)} \xrightarrow{\cong} \text{zahme Homologie}(X^\star),$$

und zwar für alle Sorten von zahmen Strukturen auf X^\star . Setzt man diesen Isomorphismus mit jenem aus obigem Lemma zusammen, erhält man die Isomorphismen der nächsten

FOLGERUNG. X^\star sei wahlweise ein Objekt aus \mathbf{Top}^\star_z , $\mathbf{Top}^\star_{z_{ri}}$, $\mathbf{Top}^\star_{\downarrow z}$, $\mathbf{Top}^\star_{\downarrow z_{ri}}$. Dann induziert der natürliche Isomorphismus t entsprechende, natürliche Gruppenisomorphismen der Ω -Homologien

$$\begin{aligned} H_n^\Omega(P^\star(X^\star)) &\xrightarrow{\cong} H_n^z(X^\star), \\ H_n^\Omega(P_{ri}^\star(X^\star)) &\xrightarrow{\cong} H_n^{z_{ri}}(X^\star), \\ H_n^\Omega(P^\star_{\downarrow}(X^\star)) &\xrightarrow{\cong} H_n^{\downarrow z}(X^\star), \\ H_n^\Omega(P_{ri}^\star_{\downarrow}(X^\star)) &\xrightarrow{\cong} H_n^{\downarrow z_{ri}}(X^\star) \end{aligned}$$

und entsprechende, natürliche Mengenbijektionen der Dipol-Homologien

$$\begin{aligned} H_n^D(P^\star(X^\star)) &\xrightarrow{\cong} H_n^{Dz}(X^\star), \\ H_n^D(P_{ri}^\star(X^\star)) &\xrightarrow{\cong} H_n^{Dz_{ri}}(X^\star), \\ H_n^D(P^\star_{\downarrow}(X^\star)) &\xrightarrow{\cong} H_n^{D\downarrow z}(X^\star), \\ H_n^D(P_{ri}^\star_{\downarrow}(X^\star)) &\xrightarrow{\cong} H_n^{D\downarrow z_{ri}}(X^\star). \end{aligned}$$

Für die unorientierten Homologien existieren die analogen Isomorphismen ebenfalls.

BEWEIS: Wir beschränken uns exemplarisch auf den $ri\text{-}\downarrow$ zahmen Fall. Wie bereits erwähnt liefern die Korollare 7.2.2 und 7.3.2 den natürlichen Isomorphismus $PL\text{-}H_n^D(P_{ri}^\star_{\downarrow}(\cdot)) \xrightarrow{\cong} H_n^{D\downarrow z_{ri}}(\cdot)$. Die Natürlichkeit der Bijektion $PL\text{-}H_n^D(P_{ri}^\star_{\downarrow}(X^\star)) \xrightarrow{\cong} H_n^D(P_{ri}^\star_{\downarrow}(X^\star))$ aus Lemma 7.4.3 folgt daraus, daß $P_{ri}^\star_{\downarrow}(f^\star)$ nicht nur ein $\mathbf{Top}^\star\text{-}$ Morphismus, sondern auch ein $\mathbf{P}^\star\text{-}$ Morphismus ist. \triangle

7.4.4 Das nächste Lemma stellt das Analogon zu Lemma 6.4.2 dar, das im Prinzip auch genauso bewiesen wird: Man beachte, daß $\mathbf{P}^\star_{\downarrow}$ -Homologiekobordismen bzw. $\mathbf{P}^\star_{\downarrow}$ -Homotopien im Sinne von $\mathbf{P}^\star_{\downarrow}$ -Vereinigungen aneinander gehängt werden können.

LEMMA. $X^\star \in \mathbf{Top}^\star_{\downarrow z_{ri}}$ sei ein $ri\text{-}\downarrow$ zahmes System mit additiver $ri\text{-}\downarrow$ zahmer Struktur $T_{ri}^\star_{\downarrow}(X^\star)$.

(a) Dann gilt für je zwei $ri\text{-}\downarrow$ zahme n -Zykel (P_0, f_0) und (P_1, f_1) von X^\star :

$$\begin{aligned} &(P_0, f_0) \text{ } ri\text{-}\downarrow\text{zahn dipol-homolog zu } (P_1, f_1) \\ \iff &(P_0, f_0) \text{ } ri\text{-}\downarrow\text{zahn streng homolog zu } (P_1, f_1) \end{aligned}$$

(b) Für jedes $\mathbf{P}^\star_{\downarrow}$ -Polyeder P und je zwei $ri\text{-}\downarrow$ zahme Morphismen $f_0, f_1 : P \rightarrow X^\star$ gilt:

$$\begin{aligned} &f_0 \text{ } ri\text{-}\downarrow\text{zahn homotop zu } f_1 \\ \iff &f_0 \text{ } ri\text{-}\downarrow\text{zahn streng homotop zu } f_1 \end{aligned}$$

Entsprechende Aussagen (a) und (b) gelten hinsichtlich $\mathbf{Top}^\star_{\downarrow z}$, \mathbf{Top}^\star_z , $\mathbf{Top}^\star_{z_{ri}}$ und ebenso für den unorientierten Fall. \triangle

7.5 Allgemeine ri-Klassifikation injektiver Hochhebungen

Für den Beweis des allgemeinen ri-Klassifikationssatzes injektiver Liftungen braucht man Bedingungen allgemeiner Art, die den Schluß

$$(P_0, f_0) \text{ zahm homolog zu } (P_1, f_1) \Rightarrow (P_0, f_0) \text{ und } (P_1, f_1) \text{ unterscheiden sich nur um einen PL-Homöomorphismus } \varphi : P_0 \rightarrow P_1$$

ermöglichen sollen. Dies wird am einfachsten dadurch erreicht, daß sich die Homologie zwischen den singulären n -Zykeln $(P_0, f_0), (P_1, f_1)$ auf einen ebenfalls n -dimensionalen PL-Zielraum bezieht. Hierzu eine kleine heuristische Begründung:

7.5.1 Für simpliziale Komplexe K gibt es die orientierte n -te Homologie $H_n(K)$, die natürlich isomorph zur n -ten singulären Homologie $H_n(|K|)$ ist (s. [Spa, Chapter 4]). Folglich sind bei n -dimensionalem K die Homologieklassen aus $H_n(K)$ mit den n -Zykeln des zugehörigen orientierten Kettenkomplexes $C(K)$ identisch. Interpretiert man solche Zykel als simpliziale Abbildungen von Pseudomannigfaltigkeiten nach K , erscheint die Möglichkeit eines Vergleiches zwischen solchen homologen Abbildungen mehr als plausibel, zumindest dann, wenn sie injektiv sind. Explizite Formulierungen oder Beweise dieses einfachen Sachverhaltes scheinen in der Literatur nicht zu existieren, so daß wir zu dem unteren Lemma gezwungen sind, das wir noch technisch vorbereiten müssen. Wir verwenden die Bezeichnungen aus 6.3.1.

Ein kompaktes Polyeder Q heiße ein **n-Pseudozykel**, wenn ein unorientiertes n -Zykel P und eine nicht degenerierte, surjektive PL-Abbildung $f : P \rightarrow Q$ existieren, so daß das Unterpolyeder $S(f) \subset P$ der singulären Punkte von f Kodimension ≥ 1 hat, d.h. $S(f)$ ist höchstens $(n - 1)$ -dimensional. Wir führen Pseudozykel nicht ein, weil wir sie bräuchten, sondern nur, um die Beweisargumentation des unteren Lemmas besser herauszustellen.

BEISPIEL. Sei K ein endlicher, von n -Simplizes erzeugter, simplizialer Komplex, so daß jedes $(n - 1)$ -Simplex Seite von einer geraden Anzahl von n -Simplizes ist. Dann stellt $|K|$ ein n -Pseudozykel dar. Umgekehrt ist jedes n -Pseudozykel von dieser Form. Insbesondere ist jede geschlossene, n -dimensionale PL-Mannigfaltigkeit und allgemeiner jedes unorientierte n -Zykel ein n -Pseudozykel.

Ein solches n -Pseudozykel Q induziert wie folgt eine wohldefinierte **Fundamentalklasse** $[Q] \in H_n(Q; \mathbb{Z}_2)$: Außer der bereits erwähnten, orientierten Homologie eines simplizialen Komplexes K gibt es noch die sog. geordnete Homologie von K (s. [Spa, Chapter 4]) mit zugehörigem Kettenkomplex $\Delta(K)$. Es existieren natürliche Kettenäquivalenzen $\mu : \Delta(K) \rightarrow C(K)$ und $\nu : \Delta(K) \rightarrow C(|K|)$, wobei $C(|K|)$ den singulären Kettenkomplex von $|K|$ bezeichne (näheres in [Spa]). Nach [Spa, Corollar 15, p. 227] induzieren μ und ν folglich natürliche Gruppenisomorphismen

$$H_*(\Delta(K); \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cong} H_*(K; \mathbb{Z}_2) \quad \text{und} \quad H_*(\Delta(K); \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cong} H_*(|K|; \mathbb{Z}_2).$$

$C(K; \mathbb{Z}_2) = C(K) \otimes \mathbb{Z}_2$ hat hierbei folgende konkrete Gestalt: $C_n(K; \mathbb{Z}_2)$ ist der freie \mathbb{Z}_2 -Modul, der von allen n -Simplizes von K erzeugt wird, wobei der Randoperator die Form

$$\partial(\{\sigma_0, \dots, \sigma_n\}) = \sum_{i=0}^n \{\sigma_0, \dots, \widehat{\sigma}_i, \dots, \sigma_n\}$$

besitzt. Wir wählen nun zum n -Pseudozykel Q eine n -Abbildung $f : P \rightarrow Q$ wie in der Definition und setzen erstmal $[Q] := H_n(f; \mathbb{Z}_2)([P]) \in H_n(Q; \mathbb{Z}_2)$, denn P besitzt eine wohldefinierte Fundamentalklasse $[P] \in H_n(P; \mathbb{Z}_2)$. Als PL-Abbildung ist f triangulierbar, so daß f simplizial bzgl. geeigneter Karten $|\tilde{K}| = P$ und $|K| = Q$ ist. Wegen der Voraussetzungen an f bildet f die Menge der n -Simplizes von \tilde{K} bijektiv auf die Menge der n -Simplizes von K ab, so daß $[Q]$, aufgefaßt als Element von $H_n(K; \mathbb{Z}_2)$, der Summe aller n -Simplizes von K entspricht.

Da jede singuläre \mathbb{Z}_2 -Homologiekategorie bei Unterteilung invariant bleibt, hängt daher $[Q]$ tatsächlich nur von Q ab: Man nehme irgendeine Karte $|K| = Q$ von Q , summiere in $C_n(K; \mathbb{Z}_2)$ alle n -Simplizes auf, und identifiziere via μ, ν die induzierte Homologiekategorie aus $H_n(K; \mathbb{Z}_2)$ mit einer Homologiekategorie aus $H_n(Q; \mathbb{Z}_2)$.

LEMMA. (a): Q_0, Q_1 seien zwei n -Pseudozykel, X ein n -dimensionaler PL-Raum und $f_0 : Q_0 \rightarrow X$, $f_1 : Q_1 \rightarrow X$ zwei PL-Abbildungen mit den beiden Bedingungen

- f_0 ist injektiv,
- $H_n(f_0; \mathbb{Z}_2)([Q_0]) = H_n(f_1; \mathbb{Z}_2)([Q_1])$ in $H_n(X; \mathbb{Z}_2)$.

Dann gilt $\text{Bild } f_0 \subset \text{Bild } f_1$ und

$$H_n(f_0; \mathbb{Z}_2)([Q_0]) = H_n(f_1; \mathbb{Z}_2)([Q_1]) \quad \text{in } H_n(\text{Bild } f_1; \mathbb{Z}_2).$$

Ist zudem f_1 ebenfalls injektiv, existiert ein PL-Homöomorphismus $\varphi : Q_1 \xrightarrow{\cong} Q_0$ mit $f_1 = f_0 \circ \varphi$.

(b): Eine analoge Aussage gilt für den orientierten Fall, wobei Q_0, Q_1 als orientierte n -Zykel vorausgesetzt werden und φ orientierungserhaltend ist.

BEWEIS: (a): Wir vereinigen Q_0 und Q_1 disjunkt zum n -Pseudozykel $Q := Q_0 \dot{\cup} Q_1$ und bilden die Vereinigungsabbildung $f := f_0 \dot{\cup} f_1 : Q \rightarrow X$, die uns die Bedingung

$$\begin{aligned} H_n(f; \mathbb{Z}_2)([Q]) &= H_n(f; \mathbb{Z}_2)([Q_0] + [Q_1]) \\ &= H_n(f_0; \mathbb{Z}_2)([Q_0]) + H_n(f_1; \mathbb{Z}_2)([Q_1]) \\ &= 0 \end{aligned}$$

liefert. Weil f eine eigentliche PL-Abbildung darstellt, gibt es Karten $|L| = X$ von X und $|K| = |K_0| \dot{\cup} |K_1| = Q$ von Q mit Unterkarten K_0 von Q_0 , K_1 von Q_1 , so daß $f : |K| \rightarrow |L|$ simplizial ist. Transformieren wir obige Gleichung äquivalent nach $H_n(L; \mathbb{Z}_2)$

und beachten, daß aufgrund der n -Dimensionalität von L die Kettenzykel aus $C_n(L; \mathbb{Z}_2)$ mit $H_n(L; \mathbb{Z}_2)$ identisch sind, erhalten wir die Gleichung

$$0 = H_n(f; \mathbb{Z}_2)([Q]) = \sum_{\sigma \in K_{0,n}} f_0(\sigma) + \sum_{\substack{\sigma \in K_{1,n} \\ \dim f_1(\sigma) = n}} f_1(\sigma),$$

wobei $K_{i,n}$ die Menge der n -Simplizes von K_i bezeichnet. Wegen der Injektivität von f_0 folgt daraus die Gleichheit

$$\sum_{\sigma \in K_{0,n}} f_0(\sigma) = \sum_{\substack{\sigma \in K_{1,n} \\ \dim f_1(\sigma) = n}} f_1(\sigma).$$

Insbesondere gibt es zu jedem n -Simplex σ von K_0 ein n -Simplex σ' von K_1 mit $f_0(\sigma) = f_1(\sigma')$, woraus sich sofort $\text{Bild } f_0 \subset \text{Bild } f_1$ ergibt. Außerdem hat man

$$H_n(f_0; \mathbb{Z}_2)([Q_0]) = H_n(f_1; \mathbb{Z}_2)([Q_1]) \text{ in } H_n(f_1(K_1); \mathbb{Z}_2),$$

so daß wegen der Isomorphie $H_n(\text{Bild } f_1; \mathbb{Z}_2) \cong H_n(f_1(K_1); \mathbb{Z}_2)$ die letzte Gleichung wie behauptet auch in $H_n(\text{Bild } f_1; \mathbb{Z}_2)$ gültig ist.

Falls auch f_1 injektiv ist, haben wir aufgrund der Symmetrie der Argumentation

$$\text{Bild } f_0 = \text{Bild } f_1 =: B,$$

wobei $B \subset X$ ein Unterpolyeder ist. Daher sind $f_0 : Q_0 \xrightarrow{\cong} B$, $f_1 : Q_1 \xrightarrow{\cong} B$ beide PL-Homöomorphismen, womit das gewünschte φ existiert.

Um (b) zu beweisen, geht man analog vor und arbeitet mit der \mathbb{Z} -Homologie. Q ist dabei natürlich als $Q = Q_0 \dot{\cup} Q_1^{-1}$ zu wählen. \triangle

7.5.2 Damit haben wir die wichtigsten Argumente bereits zusammengestellt, um den allgemeinen ri-Klassifikationssatz für injektive Liftungen formulieren und beweisen zu können.

Zur Vorbereitung sind noch einige Begriffe, Bezeichnungen festzulegen und einige allgemeine Abbildungen zu konstruieren.

BEZEICHNUNGEN. (a) Ganz allgemein schreiben wir für jeden topologischen Raum X die Gruppe der Homotopieklassen aller Homotopieäquivalenzen $X \xrightarrow{\cong} X$ als

$$[X, X]_{\cong}.$$

Ist $X = P$ ein orientiertes n -Zykel und gleichzeitig eine PL-Mannigfaltigkeit, so folgt mit einem „ \mathbb{Z} -Argument“ (ähnlich dem \mathbb{Z}_2 -Argument in (d) unten), daß die Untergruppe

$$[P, P]_{\cong}^+$$

der Homotopieklassen der orientierungserhaltenden Homotopieäquivalenzen $P \xrightarrow{\cong} P$ entsprechend definiert ist.

Für jedes System $Y^\star \in \mathbf{Top}^\star$ operiert $[X, X]^\simeq$ durch

$$[g][f] := [f \circ \tilde{g}]$$

von links auf $[X, Y^\star]$, wobei \tilde{g} eine Homotopieinverse von g sei. Den Quotienten bezeichnen wir mit $[X, Y^\star]/[X, X]^\simeq$.

(b) $\pi^\star : E^\star \rightarrow B^\star$ und $f : X \rightarrow B^\star$ seien \mathbf{Top}^\star -Morphismen mit $X \in \mathbf{Top}$. Dann bezeichne

$$[X, E^\star]_{[f]}$$

die Menge aller \mathbf{Top}^\star -Homotopieklassen von \mathbf{Top}^\star -Morphismen $\bar{f} : X \rightarrow E^\star$, so daß $\pi^\star \circ \bar{f}$ \mathbf{Top}^\star -homotop zu f ist. Insbesondere ist dann $[X, E^\star]_{[f]}$ eine Teilmenge von $[X, E^\star]$. Daher werde $[X, E^\star]_{[f]}/[X, X]^\simeq$ als Teilmenge von $[X, E^\star]/[X, X]^\simeq$ aufgefaßt.

(c) X^\star sei ein ri-zahmes projektives System und (Q, f) ein singuläres, unorientiertes ri-zahmes n -Zykel von X^\star . Dann repräsentiert (Q, f) eine ri-zahme Dipol-Homologiekategorie aus $H_n^{Dz}(X^\star; \mathbb{Z}_2)$ und induziert nach Folgerung 7.4.3 eine dazu korrespondierende Homologiekategorie

$$f_*[Q] \in H_n^D(P_{ri}^\star(X^\star); \mathbb{Z}_2),$$

die mittels des natürlichen Isomorphismus t aus Korollar 7.2.2 mit der von $t^{-1}(f) : Q \rightarrow P_{ri}^\star(X^\star)$ definierten, unorientierten singulären Dipol-Homologiekategorie übereinstimmt. Andererseits induziert das unorientierte singuläre n -Zykel (Q, id_Q) von Q die \mathbb{Z}_2 -Fundamentalkategorie $[Q]$, wobei (Q, id_Q) von $t^{-1}(f)$ auf das unorientierte singuläre n -Zykel $(Q, t^{-1}(f))$ abgebildet wird, d.h. es gilt

$$f_*[Q] = H_n^D(t^{-1}(f); \mathbb{Z}_2)([Q]),$$

wobei $H_n(Q; \mathbb{Z}_2) = H_n^D(Q; \mathbb{Z}_2)$ ausgenutzt wird (Lemma 6.4.1 und Bemerkung 6.3.5).

(d) E^\star und B^\star seien ri-zahme projektive Systeme mit ihren jeweiligen ri-zahmen Strukturen $T_{ri}(E^\star)$, $T_{ri}(B^\star)$ und $\pi^\star : E^\star \rightarrow B^\star$ ein \mathbf{Top}^\star_{ri} -Morphismus. Dann heißt π^\star **ri-Liftzahn**, wenn π^\star ri-zahn ist und außerdem folgender Bedingung genügt: Ist $f : P \rightarrow B^\star$ ein Element aus $T_{ri}(B^\star)$ und $\bar{f} : P \rightarrow E^\star$ ein \mathbf{Top}^\star_{ri} -Morphismus mit $\pi^\star \circ \bar{f} = f$, also ein Lift von f , dann ist \bar{f} ein Element von $T_{ri}(E^\star)$.

Der Begriff ‘Liftzahn’ wird auch für alle anderen Arten von zahmen Kategorien, z.B. \mathbf{Top}^\star_{zri} , $\mathbf{Top}^\star_{\downarrow z}$, ... analog definiert.

Als nächstes konstruieren wir die angekündigten, kanonischen Abbildungen.

Zu Beginn gehen wir aus von einem \mathbf{Top}^\star -Morphismus $p^\star : Y^\star \rightarrow Z^\star$, einem unorientierten n -Zykel Q , das gleichzeitig auch eine geschlossene PL-Mannigfaltigkeit sein soll, und einem \mathbf{Top}^\star -Morphismus $f : Q \rightarrow Z^\star$. In Analogie zur obigen Bezeichnung (c) setzen wir einfachhalber $f_*[Q] := H_n^D(f; \mathbb{Z}_2)([Q]) \in H_n^D(Z^\star; \mathbb{Z}_2)$, wobei $[Q] \in H_n(Q; \mathbb{Z}_2) = H_n^D(Q; \mathbb{Z}_2)$ wieder die \mathbb{Z}_2 -Fundamentalkategorie von Q bezeichnet.

Der Morphismus $p^\star : Y^\star \rightarrow Z^\star$ induziert die Homologieabbildung

$$H_n^D(p^\star; \mathbb{Z}_2) : H_n^D(Y^\star; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_n^D(Z^\star; \mathbb{Z}_2).$$

Jede stetige Abbildung $\bar{f} : Q \rightarrow Y^\star$, so daß $p^\star \circ \bar{f}$ als unorientiertes, singuläres n -Zykel von Z^\star dipol-homolog zu f ist, definiert eine Homologieklassse aus

$$(H_n^D(p^\star; \mathbb{Z}_2))^{-1}(f_*[Q]),$$

die mit $H_n^D(\bar{f}; \mathbb{Z}_2)([Q])$ übereinstimmt, so daß auf diese Weise eine kanonische Abbildung

$$[Q, Y^\star]_{[f]} \longrightarrow (H_n^D(p^\star; \mathbb{Z}_2))^{-1}(f_*[Q])$$

gegeben ist, die durch die Aktion von $[Q, Q]^\simeq$ faktorisiert: Jede Homotopieäquivalenz $g : Q \xrightarrow{\simeq} Q$ induziert eine Bijektion der Zusammenhangskomponenten von Q . Da aber jede Komponente Q_i nach Voraussetzung eine zusammenhängende, geschlossene PL-Mannigfaltigkeit der Dimension n ist, hat man $H_n(Q_i; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$. Es gibt aber nur einen Isomorphismus $\mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$, nämlich die Identität. Somit gilt

$$H_n^D(g; \mathbb{Z}_2)([Q]) = H_n(g; \mathbb{Z}_2)([Q]) = [Q].$$

Sei nun $z \in H_n^D(Y^\star; \mathbb{Z}_2)$ eine Homologieklassse, die durch ein singuläres n -Zykel $\bar{f} : Q \rightarrow Y^\star$ repräsentiert werde. Wie oben gilt dann

$$z = H_n^D(\bar{f}; \mathbb{Z}_2)([Q]).$$

Daraus folgt aber

$$[\bar{f} \circ g] = H_n^D(\bar{f} \circ g; \mathbb{Z}_2)([Q]) = H_n^D(\bar{f}; \mathbb{Z}_2)(H_n^D(g; \mathbb{Z}_2)([Q])) = H_n^D(\bar{f}; \mathbb{Z}_2)([Q]) = z.$$

Also haben wir eine kanonische Abbildung

$$[Q, Y^\star]_{[f]} / [Q, Q]^\simeq \xrightarrow{h} (H_n^D(p^\star; \mathbb{Z}_2))^{-1}(f_*[Q]).$$

Die Existenz von h machen wir uns für folgende Situation zunutze: $\pi^\star : E^\star \rightarrow B^\star$ und $f : Q \rightarrow B^\star$ seien ri-zahme Abbildungen. Die Zählung von π^\star stellt einen \mathbf{P}^\star - und damit einen \mathbf{Top}^\star -Morphismus

$$P_{ri}^\star(\pi^\star) : P_{ri}^\star(E^\star) \longrightarrow P_{ri}^\star(B^\star)$$

dar, und f korrespondiert lt. Korollar 7.2.2 zu einem \mathbf{P}^\star -Morphismus $t^{-1}(f) : Q \longrightarrow P_{ri}^\star(B^\star)$, den wir ebenfalls als \mathbf{Top}^\star -Morphismus auffassen. Durch die Entsprechungen

$$\begin{aligned} Y^\star &\equiv P_{ri}^\star(E^\star) \\ Z^\star &\equiv P_{ri}^\star(B^\star) \\ p^\star &\equiv P_{ri}^\star(\pi^\star) \\ f &\equiv t^{-1}(f) \end{aligned}$$

erhalten wir daher eine Abbildung

$$[Q, P_{ri}^\star(E^\star)]_{[t^{-1}(f)]} / [Q, Q]^\simeq \xrightarrow{h} (H_n^D(P_{ri}^\star(\pi^\star); \mathbb{Z}_2))^{-1}(f_*[Q]).$$

Es folgt die Konstruktion der zweiten kanonischen Abbildung, wozu wir die folgenden Voraussetzungen annehmen: $\pi^\star : E^\star \rightarrow B^\star$ sei eine ri-Liftzahme Abbildung (Bezeichnung

(d)) und $f : Q \rightarrow B^\star$ eine ri-zahme Abbildung, wobei $Q \in \mathbf{P}$ wie vorhin eine geschlossene, unorientierte, n -dimensionale PL-Mannigfaltigkeit mit assoziierter Basisstruktur $id_Q : Q \rightarrow Q$ ist.

Die PL-Automorphismengruppe $\text{Aut}^{\text{PL}}Q$ operiert wie in 5.5.1 von links auf allen stetigen Abbildungen $Q \rightarrow B^\star$. Die Standgruppe dieser Aktion in f werde mit $\text{Aut}_f^{\text{PL}}Q$ bezeichnet.

$\bar{f} : Q \rightarrow E^\star$ sei ein beliebiges Element von $\{Q, E^\star\}_f$, also ein ri-Lift von f über π^\star . Dann ist \bar{f} eine ri-zahme Abbildung, da π^\star als ri-Liftzahn angenommen wurde, und stellt daher ein ri-zahmes n -Zykel von E^\star dar, das von π^\star auf das ri-zahme n -Zykel (Q, f) von B^\star abgebildet wird. Nach Bezeichnung (c) induziert \bar{f} daher eine Homologiekategorie

$$\bar{f}_*[Q] \in (H_n^D(P_{ri}^\star(\pi^\star); \mathbb{Z}_2))^{-1}(f_*[Q]).$$

Sei nun $\varphi \in \text{Aut}^{\text{PL}}Q$. Dann ist $\bar{f} \circ \varphi$ wieder ri-zahm und induziert daher die Homologiekategorie $(\bar{f} \circ \varphi)_*[Q]$. Jetzt verwenden wir die letzte Formel in Bezeichnung (c) und erhalten die Gleichungskette

$$\begin{aligned} (\bar{f} \circ \varphi)_*[Q] &= H_n^D(t^{-1}(\bar{f} \circ \varphi); \mathbb{Z}_2)([Q]) \\ &= H_n^D(t^{-1}(\bar{f}) \circ \varphi; \mathbb{Z}_2)([Q]) \\ &= H_n^D(t^{-1}(\bar{f}); \mathbb{Z}_2)(H_n^D(\varphi; \mathbb{Z}_2)([Q])) \\ &= H_n^D(t^{-1}(\bar{f}); \mathbb{Z}_2)([Q]) \\ &= \bar{f}_*[Q], \end{aligned}$$

wobei wir außer dem \mathbb{Z}_2 -Isomorphismus Argument vor allem die Natürlichkeit von t ausgenutzt haben. Somit gibt es eine kanonische Abbildung

$$\{Q, E^\star\}_f / \text{Aut}_f^{\text{PL}}Q \xrightarrow{\kappa} (H_n^D(P_{ri}^\star(\pi^\star); \mathbb{Z}_2))^{-1}(f_*[Q]).$$

BEMERKUNG. Es ist wichtig, zu verstehen, warum man für Elemente $\varphi \in \text{Aut}_f^{\text{TOP}}Q$ aus der topologischen Standgruppe von f nicht gleichermaßen verfahren kann. Nehmen wir also ein $\varphi \in \text{Aut}_f^{\text{TOP}}Q$. Da π^\star Liftzahn ist und $\bar{f} \circ \varphi$ ein Lift von f , stellt $\bar{f} \circ \varphi$ eine ri-zahme Abbildung dar, die daher via t zu dem \mathbf{P}^\star -Morphismus $t^{-1}(\bar{f} \circ \varphi)$ korrespondiert. Weil aber die Natürlichkeitsbedingung

$$t(F \circ g) = t(F) \circ g$$

nur für PL-Abbildungen $g : Q_0 \rightarrow Q_1$ erfüllt ist, haben wir keinerlei Information über einen Zusammenhang zwischen $t^{-1}(\bar{f} \circ \varphi)$ und $t^{-1}(\bar{f}) \circ \varphi$. Genau aus diesem Grunde bekommen wir in dieser Weise auch keine abstrakte Klassifikation für differenzierbare Strukturen oder PL-Strukturen auf TOP-Mannigfaltigkeiten oder TOP-Blätterungen. Eine solche Übertragung der hier vorgestellten Theorie hinge von einer geeigneten Verallgemeinerung der Kategorie \mathbf{P} ab. Andeutungen hierzu sind in Anmerkung 8.3.2 zu finden.

Indem wir die natürliche Bijektion t anwenden und dann die Homotopieklassen ausdividieren, erhalten wir eine dritte kanonische Abbildung

$$\{Q, E^\star\}_f / \text{Aut}_f^{\text{PL}}Q \xrightarrow{\tilde{\kappa}} [Q, P_{ri}^\star(E^\star)]_{[t^{-1}(f)]} / [Q, Q]^\simeq,$$

wobei nach Konstruktion $h \circ \tilde{\kappa} = \kappa$ gilt. Fassen wir zusammen:

Sind $E^\star, B^\star \in \mathbf{Top}_{z_{ri}}^\star$, $\pi^\star : E^\star \rightarrow B^\star$ ein ri-Liftzahmer Morphismus, $Q \in \mathbf{P}$ eine unorientierte, geschlossene PL-Mannigfaltigkeit der Dimension n mit ihrer assoziierten Basisstruktur id_Q und $f : Q \rightarrow B^\star$ ein ri-zahmer Morphismus, dann existiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 & [Q, P_{ri}^\star(E^\star)]_{[t_Q^{-1}(f)]} / [Q, Q]^\simeq & \\
 & \nearrow \tilde{\kappa} & \downarrow h \\
 \{Q, E^\star\}_f / \text{Aut}_f^{\text{PL}} Q & \xrightarrow{\kappa} & (H_n^D(P_{ri}^\star(\pi^\star); \mathbb{Z}_2))^{-1}(f_*[Q])
 \end{array}$$

von kanonischen Abbildungen $\tilde{\kappa}, h, \kappa$.

Es folgt der abstrakte ri-Klassifikationssatz für injektive Liftungen.

SATZ. *Es seien B^\star, E^\star Objekte aus $\mathbf{Top}_{z_{ri}}^\star$ mit ihren jeweiligen ri-zahmen Strukturen $T_{ri}(B^\star), T_{ri}(E^\star)$. Sind*

$$\pi^\star : E^\star \longrightarrow B^\star$$

ein ri-Liftzahmer Morphismus, $Q \in \mathbf{P}$ eine unorientierte, geschlossene, n -dimensionale PL-Mannigfaltigkeit mit ihrer assoziierten Basisstruktur id_Q und $f : Q \rightarrow B^\star$ ein ri-zahmer Morphismus, dann ist unter den zusätzlichen Bedingungen

- $T_{ri}(B^\star)$ und $T_{ri}(E^\star)$ sind beide erzeugt von additiven und n -dimensionalen ri-zahmen Grundstrukturen,
- π^\star ist kompakt injektiv,
- $f : Q \rightarrow B^\star$ ist injektiv,

die kanonische Abbildung

$$\kappa : \{Q, E^\star\}_f / \text{Aut}_f^{\text{PL}} Q \xrightarrow{\approx} (H_n^D(P_{ri}^\star(\pi^\star); \mathbb{Z}_2))^{-1}(f_*[Q])$$

eine Bijektion. Insbesondere induziert h via κ^{-1} eine surjektive Retraktion

$$h : [Q, P_{ri}^\star(E^\star)]_{[t^{-1}(f)]} / [Q, Q]^\simeq \longrightarrow \{Q, E^\star\}_f / \text{Aut}_f^{\text{PL}} Q.$$

Ist Q dagegen orientiert, und bezeichnet $\text{Aut}_{f,+}^{\text{PL}} Q$ die Standgruppe in f bzgl. der Operation der orientierungserhaltenden PL-Automorphismen von Q , so erhält man eine analoge, abstrakte Klassifikation von $\{Q, E^\star\}_f / \text{Aut}_{f,+}^{\text{PL}} Q$ mittels der orientierten Dipol-Homologie und den orientierungserhaltenden Homotopieäquivalenzen $[Q, Q]_{\pm}^\simeq$.

BEWEIS: Wir beginnen mit dem Nachweis der Injektivität von κ .

Seien $\bar{f}_0 : Q \rightarrow E^\star$ und $\bar{f}_1 : Q \rightarrow E^\star$ zwei ri-Lifts von f über π^\star mit $\kappa(\bar{f}_0) = \kappa(\bar{f}_1)$. Dann sind die unorientierten ri-zahmen n -Zykel (Q, \bar{f}_0) und (Q, \bar{f}_1) nach Konstruktion von κ und Folgerung 7.4.3 zueinander ri-zahm dipol-homolog. Lemma 7.3.2 impliziert die Additivität sowohl von $T_{ri}(B^\star)$ als auch von $T_{ri}(E^\star)$, so daß (Q, \bar{f}_0) und (Q, \bar{f}_1) wegen Lemma 7.4.4 sogar ri-zahm streng-homolog sind. Aufgrund dessen existieren ein unorientiertes, berandetes \mathbf{P} - $(n+1)$ -Zykel P , ein ri-zahmes Element $F : P \rightarrow E^\star$ aus $T_{ri}(E^\star)$ und ein PL-Homöomorphismus $\delta : Q \dot{\cup} Q \cong Q_0 \dot{\cup} Q_1 \xrightarrow{\cong} \partial P$ mit $\bar{f}_i = F \circ \delta|_{Q_i}$ für $i = 0, 1$.

Da $T_{ri}(E^\star)$ von einer n -dimensionalen ri-zahmen Grundstruktur erzeugt wird, faktorisiert F durch einen \mathbf{P} -Morphismus $\alpha : P \rightarrow \tilde{P}$ zu einem ri-zahmen Element $\tilde{F} : \tilde{P} \rightarrow E^\star$ aus dieser Grundstruktur mit $\dim \tilde{P} \leq n$ (siehe Diagramm).

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{F} & E^\star \\ \alpha \downarrow & \nearrow \tilde{F} & \\ \tilde{P} & & \end{array}$$

Mit zweimaliger Anwendung von Folgerung 4.5.3 (b) stellen sich $\alpha \circ \delta|_{Q_0}$ und $\alpha \circ \delta|_{Q_1}$ als PL-Einbettungen heraus, wobei α eine unorientierte Homologie zwischen diesen singulären PL-Zykeln von \tilde{P} darstellt. Wegen Lemma 7.5.1 (a) existiert daher ein PL-Automorphismus $\varphi \in \text{Aut}^{\text{PL}} Q$ mit

$$\alpha \circ \delta|_{Q_1} = \alpha \circ \delta|_{Q_0} \circ \varphi,$$

was uns via Verkettung mit \tilde{F} die Gleichung $\bar{f}_1 = \bar{f}_0 \circ \varphi$ liefert. Daraus folgt aber $f = f \circ \varphi$, so daß sogar $\varphi \in \text{Aut}_f^{\text{PL}} Q$ gilt und somit die Injektivität von κ bewiesen ist.

Surjektivität von κ : Gemäß Folgerung 7.4.3 und Konstruktion von κ reicht es, folgendes zu zeigen:

Zu jedem unorientierten ri-zahmen n -Zykel $\bar{g} : \bar{Q} \rightarrow E^\star$, so daß $(\bar{Q}, \pi^\star \circ \bar{g})$ ri-zahm dipol-homolog zu (Q, f) ist, existiert ein Lift $\tilde{f} : Q \rightarrow E^\star$ von f , der ri-zahm dipol-homolog zu (\bar{Q}, \bar{g}) ist.

Gehen wir also von solch einem $\bar{g} : \bar{Q} \rightarrow E^\star$ aus. Weil $T_{ri}(B^\star)$ nach Lemma 7.3.2 additiv ist, sind $(\bar{Q}, \pi^\star \circ \bar{g})$ und (Q, f) nach Lemma 7.4.4 sogar ri-zahm streng homolog zueinander.

Ähnlich wie beim Injektivitätsbeweis existieren daher ein unorientiertes, berandetes \mathbf{P} - $(n+1)$ -Zykel P , ein ri-zahmes Element $F : P \rightarrow B^\star$ aus $T_{ri}(B^\star)$ und ein PL-Homöomorphismus $\delta : Q \dot{\cup} \bar{Q} \xrightarrow{\cong} \partial P$ mit $f = F \circ \delta|_Q$ und $\pi^\star \circ \bar{g} = F \circ \delta|_{\bar{Q}}$, wobei F wieder durch einen \mathbf{P} -Morphismus $\alpha : P \rightarrow \tilde{P}$ zu einem ri-zahmen Element $\tilde{F} : \tilde{P} \rightarrow B^\star$ der ri-zahmen Grundstruktur von B^\star faktorisiert.

Aufgrund der Dimensionsbedingung gilt hierbei $\dim \tilde{P} \leq n$. Zur Veranschaulichung diene das folgende Diagramm.

$$\begin{array}{ccc}
 P & \xrightarrow{F} & B^\star \\
 \alpha \downarrow & \nearrow \tilde{F} & \\
 \tilde{P} & &
 \end{array}$$

Die Injektivität von f impliziert wegen Folgerung 4.5.3 die Injektivität von $\alpha \circ \delta|_Q$, so daß wir mit Lemma 7.5.1 die folgende Situation bekommen:

- (1) $\text{Bild}(\alpha \circ \delta|_Q) \subset \text{Bild}(\alpha \circ \delta|_{\bar{Q}})$,
- (2) Die singulären n -Zykel $\alpha \circ \delta|_Q$ und $\alpha \circ \delta|_{\bar{Q}}$ von $\text{Bild}(\alpha \circ \delta|_{\bar{Q}})$ sind innerhalb $\text{Bild}(\alpha \circ \delta|_{\bar{Q}})$ singulär \mathbb{Z}_2 -homolog.

Wegen $\pi^\star \circ \bar{g} = F \circ \delta|_{\bar{Q}} = \tilde{F} \circ (\alpha \circ \delta|_{\bar{Q}})$ faktorisiert $\pi^\star \circ \bar{g}$ also durch $\alpha \circ \delta|_{\bar{Q}} : \bar{Q} \rightarrow \text{Bild}(\alpha \circ \delta|_{\bar{Q}})$ zu $\tilde{F}|_{\text{Bild}(\alpha \circ \delta|_{\bar{Q}})}$. Nach Lemma 4.5.4 faktorisiert dann \bar{g} zu einem ri-Morphismus $\bar{F} : \text{Bild}(\alpha \circ \delta|_{\bar{Q}}) \rightarrow E^\star$ mit $\pi^\star \circ \bar{F} = \tilde{F}|_{\text{Bild}(\alpha \circ \delta|_{\bar{Q}})}$. Darüberhinaus ist \bar{F} ein ri-zahmes Element von $T_{ri}(E^\star)$, weil π^\star als ri-Liftzahn vorausgesetzt wurde.

Wegen Bedingung (1) ist $\bar{f} := \bar{F} \circ \alpha \circ \delta|_Q$ definiert und ein Lift von f . Mit (2) bekommt man eine singuläre \mathbb{Z}_2 -Homologie zwischen $\alpha \circ \delta|_Q$ und $\alpha \circ \delta|_{\bar{Q}}$ innerhalb $\text{Bild}(\alpha \circ \delta|_{\bar{Q}})$, die man geometrisch als PL-Homologie interpretieren kann, so daß ein unorientiertes, berandetes $(n+1)$ -Zykel M mit $\partial M = Q \dot{\cup} \bar{Q}$ und eine PL-Abbildung

$$H : M \rightarrow (\alpha \circ \delta)(\bar{Q}) \subset \tilde{P}$$

existieren mit $\alpha \circ \delta|_Q = H|_Q$ und $\alpha \circ \delta|_{\bar{Q}} = H|_{\bar{Q}}$. Somit ist $\bar{H} := \bar{F} \circ H$ eine strenge ri-zahme Homologie zwischen \bar{f} und \bar{g} .

Für den orientierten Fall geht man analog vor und berücksichtigt die orientierte Version von Lemma 7.5.1. △

7.6 Über variable zahme Strukturen

Es gibt zwei Gründe, variable zahme Strukturen einzuführen:

- (1) Der ri-Klassifikationssatz aus dem vorigen Abschnitt eignet sich noch nicht mal zur abstrakten Klassifikation von étale-PL-Untergruppoid-Strukturen (und damit von PL-Blätterungen), weil die beteiligten ri-zahmen Strukturen nicht additiv sind. Was die abstrakte Klassifikation von *gelifteten* étale-PL-Gruppoid-Strukturen angeht, so würde es noch mehr Schwierigkeiten geben, da die Voraussetzung „ π^\star kompakt injektiv“ nicht erfüllt ist. Könnte man aber in \mathbf{Top}^\star arbeiten, würde dieses Problem nicht auftreten. Doch dann geht in der Praxis die unverzichtbare Additivität der zahmen (oder \downarrow zahmen) Struktur verloren, obwohl die zahmen Grundstrukturen

sehr wohl additiv sind, so daß ein Beweis des Klassifikationssatzes zum Scheitern verurteilt zu sein *scheint*. Die dialektische Auflösung dieses Problems ist jedoch gerade durch die variablen \downarrow zahmen Strukturen gewährleistet.

- (2) Gleichgültig, ob ein Objekt aus \mathbf{Top}^\star oder \mathbf{Top}^\star_{ri} gezähmt wird, die Zählung selbst ist stets ein Objekt aus \mathbf{P}^\star . Von daher drängt sich ohnehin die Frage nach einer Verallgemeinerung und Vereinheitlichung der verschiedenen Zähmungskonzepte auf.

Zur Realisierung dieser Vereinheitlichung führen wir variable zahme Strukturen ein und gehen dann zu den von variablen zahmen Grundstrukturen induzierten variablen \downarrow zahmen Strukturen über, für die wir einen zu Satz 7.5.2 analogen abstrakten Klassifikationssatz beweisen, der jedoch mit weniger Voraussetzungen auskommt.

7.6.1 Der erste Schritt in Richtung Vereinheitlichung besteht darin, daß wir variable zahme Strukturen nur für die Kategorie \mathbf{Top}^\star definieren. Als Preis dafür müssen wir die fehlende Existenz einer kanonischen v -zahmen Kategorie in Kauf nehmen.

$X^\star = ((\Phi_i^j), (X_i), I)$ sei ein projektives \mathbf{Top} -System, und für jedes kompakte Polyeder $P \in \mathbf{P}$ sei eine Teilmenge

$$A^P(X^\star) \subset \{P \rightarrow X_i \text{ stetig} \mid i \in I\}$$

gegeben, und auf $A^P(X^\star)$ eine Äquivalenzrelation $R^P(X^\star)$, so daß für je zwei $f_0, f_1 \in A^P(X^\star)$ mit $f_0 R^P(X^\star) f_1$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (1) f_0 und f_1 sind cofinal gleich,
- (2) Für jede PL-Abbildung $g : Q \rightarrow P$ mit $Q \in \mathbf{P}$ gilt $f_0 \circ g, f_1 \circ g \in A^Q(X^\star)$ und $f_0 \circ g R^Q(X^\star) f_1 \circ g$.

Dann nennen wir die Familie $(A^P(X^\star), R^P(X^\star))_{P \in \mathbf{P}}$ eine **variable zahme Struktur** oder kurz eine **v -zahme Struktur** von X^\star und X^\star zusammen mit dieser v -zahmen Struktur ein **v -zahmes projektives System**.

Da (2) insbesondere für $f_0 = f_1$ gilt, ist jede v -zahme Struktur abgeschlossen gegenüber Verkettungen von rechts mit \mathbf{P} -Morphismen. Ist jedoch außer Bedingung (1) die Bedingung (2) nur für \mathbf{P} -Einbettungen $g : Q \hookrightarrow P$ erfüllt, heiße $(A^P(X^\star), R^P(X^\star))_{P \in \mathbf{P}}$ eine **variable zahme Grundstruktur** (kurz v -zahme Grundstruktur) von X^\star .

Um die Kategorie $\mathbf{Top}^\star_{z_v}$ vollständig definieren zu können, *bräuchten* wir außer den eben definierten v -zahmen projektiven Systemen als Objekte die dazu passenden v -zahmen Morphismen. Obwohl sich letztere problemlos definieren lassen, sind sie nicht abgeschlossen gegenüber Verkettung!

X^\star, Y^\star seien zwei v -zahme Objekte mit ihren jeweiligen v -zahmen Strukturen $(A^P(X^\star), R^P(X^\star))_P$ bzw. $(A^P(Y^\star), R^P(Y^\star))_P$ und $f^\star : X^\star \rightarrow Y^\star$ ein \mathbf{Top}^\star -Morphismus. Dann heiße f^\star ein **v -zahmer Morphismus**, wenn für jedes $P \in \mathbf{P}$ zweierlei erfüllt ist:

- (i) Zu jedem $\tau \in A^P(X^\blacktriangleleft)$ existiert ein Repräsentant f von f^\blacktriangleleft , so daß die Abbildung $f \circ \tau$ definiert ist und in $A^P(Y^\blacktriangleleft)$ liegt.
- (ii) Sind Abbildungen $\tau_0 : P \rightarrow X_{i_0}, \tau_1 : P \rightarrow X_{i_1}$ aus $A^P(X^\blacktriangleleft)$ mit $\tau_0 \in R^P(X^\blacktriangleleft), \tau_1 \in R^P(X^\blacktriangleleft)$ und Repräsentanten $f_0 : X_{i_0} \rightarrow Y_{j_0}, f_1 : X_{i_1} \rightarrow Y_{j_1}$ von f^\blacktriangleleft mit $f_0 \circ \tau_0, f_1 \circ \tau_1 \in A^P(Y^\blacktriangleleft)$ gegeben, dann gelte $f_0 \circ \tau_0 \in R^P(Y^\blacktriangleleft), f_1 \circ \tau_1 \in R^P(Y^\blacktriangleleft)$.

Achtung: Hauptsächlich deswegen, weil sich nicht jeder Repräsentant einer Verkettung $g^\blacktriangleleft \circ f^\blacktriangleleft$ von $\mathbf{Top}^\blacktriangleleft$ -Morphismen als Verkettung von geeigneten Repräsentanten schreiben läßt, sind die v -zahmen Morphismen *nicht* invariant unter Verkettung, so daß daher auch keine Standard-Kategorie $\mathbf{Top}_{z_v}^\blacktriangleleft$ von v -zahmen projektiven Systemen und v -zahmen Morphismen definiert werden kann. Daher vereinbaren wir folgende

BEZEICHNUNG. Eine **v -zahme Kategorie** sei eine Kategorie mit den v -zahmen projektiven Systemen als Objekte, deren Morphismen eine Unterklasse der v -zahmen Morphismen bilden.

BEISPIELE

- [1] Jede zahme Struktur $T(X^\blacktriangleleft)$ von X^\blacktriangleleft läßt sich auch als v -zahme Struktur auffassen: $A^P(X^\blacktriangleleft)$ besteht aus allen Repräsentanten $P \rightarrow X_i, i \in I$ von Elementen $P \rightarrow X^\blacktriangleleft$ aus $T(X^\blacktriangleleft)$, und $R^P(X^\blacktriangleleft)$ ist als ‘cofinal gleich’ gegeben.
- [2] Nimmt man stattdessen ri-Repräsentanten und die Äquivalenzrelation ‘ri-cofinal gleich’, dann läßt sich auch jede ri-zahme Struktur als v -zahme Struktur interpretieren. Man beachte aber, daß sich die Kategorie $\mathbf{Top}_{z_{ri}}^\blacktriangleleft$ nicht als eine v -zahme Kategorie auffassen läßt!

Wir werden nun die Notationen etwas vereinfachen. Ist X^\blacktriangleleft ein v -zahmes projektives System mit seiner v -zahmen Struktur $(A^P(X^\blacktriangleleft), R^P(X^\blacktriangleleft))_{P \in \mathbf{P}}$, dann kürzen wir für jedes $P \in \mathbf{P}$ den Quotienten $A^P(X^\blacktriangleleft)/R^P(X^\blacktriangleleft)$ mit $T_v^P(X^\blacktriangleleft)$ ab und setzen

$$T_v(X^\blacktriangleleft) := \bigcup_{P \in \mathbf{P}} T_v^P(X^\blacktriangleleft).$$

Da es etwas Mühe macht, in jeder betreffenden Situation die ganze Familie $(A^P(X^\blacktriangleleft), R^P(X^\blacktriangleleft))_{P \in \mathbf{P}}$ zu erwähnen, werden wir einfacher $T_v(X^\blacktriangleleft)$ als die v -zahme Struktur von X^\blacktriangleleft bezeichnen und uns dabei stets ihrer ursprünglichen Definition bewußt bleiben.

Es bietet sich an, ein Element $\tau \in T_v^P(X^\blacktriangleleft)$, also eine Äquivalenzklasse aus $A^P(X^\blacktriangleleft)$, ein **v -zahmes Element** von X^\blacktriangleleft zu nennen und jede Abbildung aus dieser Äquivalenzklasse τ einen **v -Repräsentanten** von τ . Ferner führen wir für jedes v -zahme Element $\tau \in T_v^P(X^\blacktriangleleft)$ die Schreibweise

$$\tau : P \rightarrow X^\blacktriangleleft$$

ein.

Es bleibt noch folgender Punkt zu erwähnen: Sind $g : Q \rightarrow P$ ein \mathbf{P} -Morphismus und $\tau : P \rightarrow X^\star$ ein v -zahmes Element von X^\star , so liefert die Verkettung jedes v -Repräsentanten von τ mit g wegen Bedingung (2) aus der Definition v -zahmer Strukturen v -Repräsentanten eines wohldefinierten v -zahmen Elementes $\psi : Q \rightarrow X^\star$. Daher ist die Schreibweise

$$\psi = \tau \circ g$$

wohldefiniert und sinnvoll. Aber man muß sich dabei über folgendes im Klaren sein: Es kann durchaus v -Repräsentanten von $\psi = \tau \circ g$ geben, die sich *nicht* als Verkettung von g mit einem v -Repräsentanten von τ darstellen lassen!

Sind X^\star und Y^\star v -zahme projektive Systeme mit ihren jeweiligen v -zahmen Strukturen $T_v(X^\star)$ und $T_v(Y^\star)$, so induziert jeder v -zahme Morphismus $f^\star : X^\star \rightarrow Y^\star$ eine Abbildung

$$T_v(f^\star) : T_v(X^\star) \longrightarrow T_v(Y^\star)$$

wie folgt: Je zwei v -Repräsentanten eines v -zahmen Elements $\tau \in T_v(X^\star)$ werden durch Verkettung mit jeweiligen Repräsentanten von f^\star wegen obiger Bedingungen (i), (ii) auf äquivalente v -Repräsentanten eines wohldefinierten v -zahmen Elementes aus $T_v(Y^\star)$ abgebildet, welches wir mit

$$f^\star \circ \tau$$

bezeichnen. Ist $g^\star : Y^\star \rightarrow Z^\star$ ein anderer v -zahmer Morphismus, so daß die Verkettung $g^\star \circ f^\star$ ebenfalls einen v -zahmen Morphismus darstellt, dann gilt $T_v(g^\star \circ f^\star) = T_v(g^\star) \circ T_v(f^\star)$, so daß $T_v(\cdot)$ für *jede* v -zahme Kategorie $\mathbf{Top}^\star_{z_v}$ einen kovarianten Funktor $\mathbf{Top}^\star_{z_v} \rightarrow \mathbf{Set}$ darstellt.

Mit Hilfe der oben eingeführten Verkettungsschreibweise mit v -zahmen Elementen ergeben sich aufgrund der Wohldefiniertheit über Repräsentanten die folgenden assoziativen Regeln, die zusammen mit der Verkettungsschreibweise im weiteren als **Verkettungskonvention** bezeichnet werden:

$$(f^\star \circ \tau) \circ g = f^\star \circ (\tau \circ g), \quad (\tau \circ g_1) \circ g_2 = \tau \circ (g_1 \circ g_2),$$

wobei f^\star ein v -zahmer Morphismus, τ ein v -zahmes Element und g, g_0, g_1 \mathbf{P} -Morphismen sind.

Die nächste Aufgabe ist die Übertragung aller vorherigen Abschnitte auf v -zahme Strukturen, die mit Berücksichtigung wichtiger Charakteristiken tatsächlich vollkommen analog vorgenommen werden kann. Eines dieser Charakteristika betrifft den Begriff der Additivität einer v -zahmen Struktur, die hier im v -zahmen Fall zur Verdeutlichung angegeben wird:

Eine v -zahme Grundstruktur von $X^\star \in \mathbf{Top}^\star$ heiße **additiv**, wenn für jedes \mathbf{P} -Polyeder P , das von zwei \mathbf{P} -Unterpolyedern P_0, P_1 überdeckt werde, und für je zwei v -zahme Elemente $\tau_0 : P_0 \rightarrow X^\star$, $\tau_1 : P_1 \rightarrow X^\star$ mit $\tau_0|_{P_0 \cap P_1} = \tau_1|_{P_0 \cap P_1}$ (im Sinne von v -zahmen Elementen!) ein v -zahmes Element $\tau : P \rightarrow X^\star$ von X^\star existiert mit $\tau|_{P_0} = \tau_0$ und $\tau|_{P_1} = \tau_1$.

Besondere Beachtung verdient natürlich auch die **v -Zählung**. Sei dazu $\mathbf{Top}^\star_{z_v}$ *irgendeine* v -zahme Kategorie. Dann kann ganz analog wie in 7.2.1 bzw. 7.2.2 ein kovarianter Zähmfunktorkonv

$$P_v^\star : \mathbf{Top}^\star_{z_v} \longrightarrow \mathbf{P}^\star$$

konstruiert werden, wobei man natürlich mit v -zahmen Elementen arbeitet und die obige Verkettungs-Konvention beachtet. Für die Definition der natürlichen Transformation $t^\star : P_v^\star \rightarrow \iota$ ist zu bedenken, daß jedes v -zahme Element $\tau : P \rightarrow X^\star$ wegen Bedingung (1) in der Definition v -zahmer Strukturen einen \mathbf{Top}^\star -Morphismus $P \rightarrow X^\star$ induziert.

Als drittes ist das Analogon zu Korollar 7.2.2 hervorzuheben, das aufgrund der neueren Notationen sogar noch eine schönere Form innehat. Die Natürlichkeit von t geht hierbei auf die Verkettungs-Konvention zurück, die im ri-Fall offenbar überflüssig ist.

KOROLLAR. Für jede v -zahme Kategorie $\mathbf{Top}^\star_{z_v}$ gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$t : \text{Mor}_{\mathbf{P}^\star}(Q, P_v^\star(X^\star)) \xrightarrow{\approx} T_v^Q(X^\star)$$

zwischen Bifunktoren, die beide auf $\mathbf{P} \times \mathbf{Top}^\star_{z_v}$ definiert sind. In Gleichungsform schreibt sich die Natürlichkeit als

$$t(P^\star(f^\star) \circ g^\star \circ \varphi) = f^\star \circ t(g^\star) \circ \varphi. \quad \triangle$$

Die analogen Definitionen einer **v -zahmen Ω -Homologie** und einer **v -zahmen Dipol-Homologie** ergeben sich natürlich ebenso mit Verwendung v -zahmer Elemente.

7.6.2 Ersetzt man ganz konsequent \mathbf{P} -Polyeder durch \mathbf{P}^\downarrow -Polyeder, \mathbf{P} -Morphismen durch \mathbf{P}^\downarrow -Morphismen und \mathbf{P} -Vereinigungen durch \mathbf{P}^\downarrow -Vereinigungen, läßt sich alles aus dem vorigen Unterabschnitt auf den v - \downarrow zahmen Fall übertragen.

Somit sind die Begriffe **v - \downarrow zahme Struktur**, **v - \downarrow zahme Grundstruktur**, **additive v - \downarrow zahme Grundstruktur**, **v - \downarrow zahmes projektives System**, **v - \downarrow zahmer Morphismus**, **v - \downarrow zahme Kategorie**, **v - \downarrow zahmes Element**, **v - \downarrow Repräsentant**, **v - \downarrow Zählung**, **v - \downarrow zahme Ω -Homologie** und **v - \downarrow zahme Dipol-Homologie** alle definiert. Den verschiedenen Arten von v - \downarrow zahmen Homologien kann man jeweils eine eigene Notation zuordnen. Wir erwähnen hier nur die Bezeichnung

$$H_n^{D_v^\downarrow z}(X^\star)$$

der v - \downarrow zahmen Dipol-Homologie.

Ebenso analog gibt es eine **Verkettungs-Konvention**.

Für *irgendeine* v - \downarrow zahme Kategorie $\mathbf{Top}^\star_{\downarrow z_v}$ schreiben wir den v - \downarrow Zähmungsfunktor üblicherweise als

$$P_v^\downarrow \star : \mathbf{Top}^\star_{\downarrow z_v} \longrightarrow \mathbf{P}^\star,$$

der aber analog wie in 7.3.2 auch als Funktor $P_v^\downarrow \star : \mathbf{Top}^\star_{\downarrow z_v} \rightarrow \mathbf{P}^\downarrow \star$ oder $P_v^\downarrow \star : \mathbf{Top}^\star_{\downarrow z_v} \rightarrow \mathbf{Top}^\star$ interpretiert werden kann.

Ferner verwenden wir dem \downarrow zahmen Fall entsprechend für eine v - \downarrow zahme Grundstruktur von X^\star die Bezeichnung $T_v^P(X^\star)$, wobei P ein \mathbf{P}^\downarrow -Polyeder sei, und setzen

$$T_v^\downarrow(X^\star) := \bigcup_{P \in \mathbf{P}^\downarrow} T_v^P(X^\star).$$

Ist aber P nur ein \mathbf{P} -Polyeder und kein \mathbf{P}^\downarrow -Polyeder, definieren wir

$$T_v^P(X^\star) := \bigcup_{Q \in \mathbf{P}^\downarrow} \{T_v^Q(X^\star) \mid \text{Totalraum von } Q = P\}.$$

Damit bekommen wir das \downarrow Analogon zu Korollar 7.6.1 bzw. zu Korollar 7.3.2:

KOROLLAR. Für jede v - \downarrow zahme Kategorie $\mathbf{Top}^\star_{\downarrow z_v}$ gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$t : \text{Mor}_{\mathbf{P}^\leftarrow}(Q, P^\downarrow_{z_v}(X^\star)) \xrightarrow{\cong} T_v^Q(X^\star)$$

zwischen Bifunktoren, die beide auf $\mathbf{P} \times \mathbf{Top}^\star_{\downarrow z_v}$ definiert sind. In Gleichungsform schreibt sich die Natürlichkeit als

$$t(P^\star(f^\star) \circ g^\star \circ \varphi) = f^\star \circ t(g^\star) \circ \varphi. \quad \triangle$$

In 7.3.2 sahen wir, wie jede zahme Grundstruktur von X^\star kanonisch eine \downarrow zahme Struktur auf X^\star induziert. Analoges gilt auch für den v -zahmen Fall:

DEFINITION. Jede v -zahme Grundstruktur $T_v(X^\star)$ von $X^\star \in \mathbf{Top}^\star$ induziert wie folgt eine v - \downarrow zahme Struktur $T_v^\downarrow(X^\star)$ von X^\star : Für $P \in \mathbf{P}^\downarrow$ mit seiner Basis $\pi : P \rightarrow B$, wobei o.E. $B \in \mathbf{P}$ gelte, sei

$$A^P(X^\star) := \{ \tilde{f} = f \circ \pi : P \xrightarrow{\pi} B \xrightarrow{f} X_i \mid f \text{ repräsentiert ein } F \in T_v(X^\star) \}$$

(Hierbei ist f eindeutig durch \tilde{f} bestimmt). Ferner gelte

$$f \circ \pi \in A^P(X^\star) \iff f' \circ \pi \in A^P(X^\star) \iff f \text{ und } f' \text{ repräsentieren dasselbe } F \in T_v(X^\star)$$

Diese Definition ist unabhängig von der konkreten Basis von P .

Bei einer fest gewählten Basis $\pi : P \rightarrow B$ korrespondieren insofern die v - \downarrow zahmen Elemente aus $T_v^\downarrow(X^\star)$ bijektiv zu den v -zahmen Elementen aus $T_v^B(X^\star)$. Auf diese Weise sieht man am klarsten das folgende, zu Lemma 4.5.4 analoge

LEMMA. Seien $T_v(X^\star)$, $T_v(Y^\star)$ v -zahme Grundstrukturen von X^\star bzw. Y^\star und $T_v^\downarrow(X^\star)$, $T_v^\downarrow(Y^\star)$ die von diesen lt. Definition induzierten v - \downarrow zahmen Strukturen. Dann ist jeder bzgl. $T_v(X^\star)$ und $T_v(Y^\star)$ v -zahme Morphismus $f^\star : X^\star \rightarrow Y^\star$ auch ein v - \downarrow zahmer Morphismus bzgl. $T_v^\downarrow(X^\star)$ und $T_v^\downarrow(Y^\star)$. Darüber hinaus gilt: Gehört (im obigen Sinne) das v - \downarrow zahme Element $\tilde{\tau} \in T_v^\downarrow(X^\star)$ zum v -zahmen Element $\tau \in T_v(X^\star)$, dann gehört $f^\star \circ \tilde{\tau}$ zu $f^\star \circ \tau$. △

Aus der Definition 7.6.2 ergibt sich außerdem unmittelbar die zu Lemma 7.3.2 analoge

FOLGERUNG. $T_v^\downarrow(X^\star)$ sei die gemäß obiger Definition von der v -zahmen Grundstruktur $T_v(X^\star)$ induzierte v - \downarrow zahme Struktur von X^\star . Ist $T_v(X^\star)$ additiv, dann auch $T_v^\downarrow(X^\star)$. \triangle

Wir weisen zum wiederholten Male auf die ansonsten ebenso vollkommene Analogie zu den vorherigen Abschnitten hin. Ganz besonders sei hierbei an Folgerung 7.4.3 und Lemma 7.4.4 erinnert.

7.6.3 Wir schließen diesen Abschnitt mit dem Studium der **allgemeinen v - \downarrow zahmen Struktur** auf topologischen Räumen $X \in \mathbf{Top}$, die nach Definition 7.6.1 von der in Beispiel [1] aus 7.1.1 definierten allgemeinen zahmen Struktur auf \mathbf{Top} induziert werde.

Dann ist bzgl. dieser allgemeinen v - \downarrow zahmen Struktur auch die entsprechende Dipol-Homologie $H_n^{D_v^\downarrow z}(X)$ definiert. Der Vergißfunktorkomplex $\mathbf{P}^\downarrow \rightarrow \mathbf{P}$ induziert daher eine natürliche Transformation

$$H_n^{D_v^\downarrow z}(X) \longrightarrow H_n(X).$$

Ob diese eine natürliche Bijektion ist, beantwortet das

LEMMA. $H_n^{D_v^\downarrow z}(\cdot) \xrightarrow{\cong} H_n(\cdot)$ ist eine natürliche Bijektion. Dasselbe gilt für \mathbb{Z}_2 -Koeffizienten.

BEWEIS: Surjektivität gewinnt man sofort aus der zahmen Grundstruktur. Für den Beweis der Injektivität muß etwas mehr getan werden.

Seien dazu $(P_0, f_0), (P_1, f_1)$ zwei orientierte, singuläre v - \downarrow zahme n -Zykel von X mit ihren jeweiligen Basen $\pi_0 : P_0 \rightarrow B_0$ und $\pi_1 : P_1 \rightarrow B_1$, so daß f_0 bzw. f_1 nach Voraussetzung zu $\bar{f}_0 : B_0 \rightarrow X$ bzw. $\bar{f}_1 : B_1 \rightarrow X$ faktorisiere. Weil $(P_0, f_0), (P_1, f_1)$ dieselbe Homologiekategorie in $H_n(X)$ repräsentieren, gibt es also ein orientiertes, berandetes singuläres $(n+1)$ -Zykel M mit Rand $\partial M = P_0 \dot{\cup} P_1^{-1}$ und eine stetige Abbildung $H : M \rightarrow X$ mit $H|_{P_0} = f_0$ und $H|_{P_1} = f_1$.

Indem wir an ∂M einen Kragen ankleben und $H|_{\partial M}$ durch die stationäre Homotopie auf den Kragen fortsetzen, gewinnen wir $M' := M + \text{Kragen}$ und eine neue stetige Abbildung $H' : M' \rightarrow X$ mit $H'|_{P_0} = f_0$ und $H'|_{P_1} = f_1$. Die Projektion $\pi_0 \dot{\cup} \pi_1 : \partial M' = P_0 \dot{\cup} P_1 \rightarrow B_0 \dot{\cup} B_1$ induziert eine Äquivalenzrelation \sim auf M' , die den Quotienten

$$\bar{M}' := M' / \sim$$

mit der Projektion $\bar{\pi} : M' \rightarrow \bar{M}'$ induziert, so daß H' durch $\bar{\pi}$ zu einer stetigen Abbildung $\bar{H}' : \bar{M}' \rightarrow X$ faktorisiert.

Man erhält aber M' auch, indem man an P_0 und P_1 jeweils die Abbildungszylinder von π_0 bzw. π_1 anklebt. Bezeichnen wir mit Z_0 den Abbildungszylinder von π_0 , dann besitzt Z_0 eine Polyeder-Struktur (vgl. [R-S, B.5], s. [Whd]) und zwar derart, daß $P_0, B_0 \subset Z_0$ Unterpolyeder sind. Dasselbe gilt für den Abbildungszylinder Z_1 von π_1 . Weil nun $\bar{\pi}|_{\partial M'} : \partial M' \rightarrow \bar{M}'$ eine PL-Abbildung ist, gibt es wegen relativer simplizialer Approximation eine

zu $\bar{\pi}$ auf $\partial M'$ stationär homotope PL-Abbildung $\bar{\pi}' : M' \rightarrow \bar{M}'$, so daß $\bar{H}' \circ \bar{\pi}'$ ebenfalls eine singuläre Homologieabbildung für f_0 und f_1 darstellt.

Mit $\bar{B}' := \text{Bild } \bar{\pi}'$ und $\bar{\pi}' : M' \rightarrow \bar{B}'$ haben wir daher eine Basisstruktur von M' gewonnen, so daß P_0 und P_1 \mathbf{P}^\downarrow -Unterpolyeder von M' sind, und $\bar{H}' \circ \bar{\pi}' : M' \rightarrow X$ eine v - \downarrow zahme Dipol-Homologie zwischen (P_0, f_0) und (P_1, f_1) darstellt.

Beim unorientierten Fall argumentiert man natürlich genauso und verwendet unorientierte Zykel. △

BEMERKUNG. *Nimmt man für die Kategorie \mathbf{PL}^\star die von der kanonischen zahmen Struktur induzierte kanonische v - \downarrow zahme Struktur, so gilt ein analoges Lemma auch für $X \in \mathbf{PL}$.*

Man lasse sich aber durch obiges Lemma nicht in die Irre führen: Daß diese allgemeine v - \downarrow zahme Dipol-Homologie mit der ganz normalen singulären Homologie übereinstimmt, liegt ausschließlich an der feudalen Grundstruktur. Wählt man eine andere Grundstruktur, z.B. für \mathbf{PL}^\star alle nicht degenerierten PL-Abbildungen, so geht nicht nur jene Übereinstimmung verloren, sondern die entsprechenden Dipol-Homologiemengen $H_^{D\downarrow z}(X^\star)$ besitzen i.a. noch nicht mal eine Gruppenstruktur!*

7.7 Ein allgemeiner Klassifikationssatz

Der abstrakte ri-Klassifikationssatz 7.5.2 für injektive Hochhebungen kann für v - \downarrow zahme Strukturen aus Definition 7.6.1 verallgemeinert werden. Dies wird weitestgehend analog durchgeführt werden, wobei wir hauptsächlich nur die Bezeichnungen 7.5.2 anpassen müssen. Selbst der Beweis wird möglichst wortwörtlich übernommen, um einerseits die Gemeinsamkeiten, aber andererseits auch die Unterschiede herauszustellen. Die dabei zitierten Referenzen sind natürlich im gemäß 7.6.2 analogen Sinne zu verstehen.

7.7.1 Um Unterabschnitt 7.5.2 übernehmen zu können, brauchen wir nur „ri“ durch „v“ und „zahn“ durch „ \downarrow zahn“ konsequent zu ersetzen und die entsprechenden Bezeichnungen mit einem \downarrow zu verzieren.

Wir nehmen aber in (d) folgende Änderung vor: Die v - \downarrow zahmen Strukturen $T_v^\downarrow(B^\star)$ von B^\star und $T_v^\downarrow(E^\star)$ von E^\star seien jeweils von zahmen Grundstrukturen $T(B^\star)$ bzw. $T(E^\star)$ induziert, wobei $\pi^\star : E^\star \rightarrow B^\star$ als Liftzahn bzgl. dieser zahmen Grundstrukturen vorausgesetzt wird. Daher kann auch jedes zahme Element $f : Q \rightarrow B^\star$ aus $T(B^\star)$ als ein v - \downarrow zahmes Element von $T_v^\downarrow(B^\star)$ aufgefaßt werden, wobei Q mit seiner assoziierten Basisstruktur id_Q versehen sei.

Nach Lemma 7.6.2 ist jeder zahme Morphismus $\pi^\star : E^\star \rightarrow B^\star$ auch ein v - \downarrow zahmer Morphismus bzgl. der induzierten v - \downarrow zahmen Strukturen. Insbesondere ist dann auch

$$H_n^D(P_v^{\downarrow\star}(\pi^\star); \mathbb{Z}_2) : H_n^D(P_v^{\downarrow\star}(E^\star); \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_n^D(P_v^{\downarrow\star}(B^\star); \mathbb{Z}_2)$$

definiert.

7.7.2 Es folgt der allgemeine Klassifikationssatz für Liftungen.

SATZ. $T(B^\star)$ und $T(E^\star)$ seien additive und n -dimensionale zahme Grundstrukturen auf den projektiven **Top**-Systemen B^\star bzw. E^\star , deren induzierte v - \downarrow zahme Strukturen $T_v^\downarrow(B^\star)$ bzw. $T_v^\downarrow(E^\star)$ die v - \downarrow Zähmungen $P_v^{\downarrow\star}(B^\star)$ bzw. $P_v^{\downarrow\star}(E^\star)$ definieren. Sind

$$\pi^\star : E^\star \longrightarrow B^\star$$

ein (bzgl. $T(B^\star)$, $T(E^\star)$) Liftzahmer Morphismus, $Q \in \mathbf{P}$ eine unorientierte, geschlossene PL-Mannigfaltigkeit der Dimension n mit ihrer assoziierten Basisstruktur id_Q und $f : Q \rightarrow B^\star$ ein zahmes Element aus $T(B^\star)$ mit dem korrespondierenden Morphismus $t^{-1}(f) : Q \rightarrow P_v^{\downarrow\star}(B^\star)$, dann ist die kanonische Abbildung

$$\kappa : \{Q, E^\star\}_f / \text{Aut}_f^{\text{PL}} Q \xrightarrow{\approx} \left(H_n^D(P_v^{\downarrow\star}(\pi^\star); \mathbb{Z}_2) \right)^{-1} (f_*[Q])$$

eine Bijektion. Insbesondere induziert h via κ^{-1} eine surjektive Retraktion

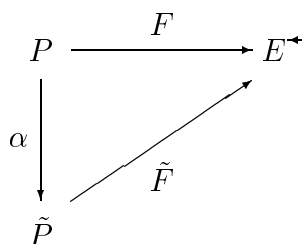
$$h : [Q, P_v^{\downarrow\star}(E^\star)]_{[t^{-1}(f)]} / [Q, Q]^\simeq \longrightarrow \{Q, E^\star\}_f / \text{Aut}_f^{\text{PL}} Q.$$

Ist Q dagegen orientiert, und bezeichnet $\text{Aut}_{f,+}^{\text{PL}} Q$ die Standgruppe in f bzgl. der Operation der orientierungserhaltenden PL-Automorphismen von Q , so erhält man eine analoge, abstrakte Klassifikation von $\{Q, E^\star\}_f / \text{Aut}_{f,+}^{\text{PL}} Q$ mittels der orientierten Dipol-Homologie bzw. den orientierungserhaltenden Homotopieäquivalenzen $[Q, Q]_+^\simeq$.

BEWEIS: Wir beginnen mit dem Nachweis der Injektivität von κ .

Seien $\bar{f}_0 : Q \rightarrow E^\star$ und $\bar{f}_1 : Q \rightarrow E^\star$ zwei Lifts von f über π^\star mit $\kappa(\bar{f}_0) = \kappa(\bar{f}_1)$. Dann sind die unorientierten v - \downarrow zahmen n -Zykel (Q, \bar{f}_0) und (Q, \bar{f}_1) nach Konstruktion von κ und Folgerung 7.4.3 zueinander v - \downarrow zahm dipol-homolog. Folgerung 7.6.2 impliziert die Additivität sowohl von $T_v^\downarrow(B^\star)$ als auch von $T_v^\downarrow(E^\star)$, so daß (Q, \bar{f}_0) und (Q, \bar{f}_1) wegen Lemma 7.4.4 sogar v - \downarrow zahm streng-homolog sind. Aufgrund dessen existieren ein unorientiertes, berandetes \mathbf{P}^\downarrow - $(n + 1)$ -Zykel P mit einem \mathbf{P} -Morphismus $\alpha : P \rightarrow \tilde{P}$ als Basis, ein v - \downarrow zahmes Element $F : P \rightarrow E^\star$ aus $T_v^\downarrow(E^\star)$ und ein PL-Homöomorphismus $\delta : Q \dot{\cup} Q \equiv: Q_0 \dot{\cup} Q_1 \xrightarrow{\approx} \partial P$ mit $\bar{f}_i = F \circ \delta|_{Q_i}$ für $i = 0, 1$ (Verkettungs-Konvention!), so daß $\delta|_{Q_i} : Q_i \rightarrow P$ ein \mathbf{P}^\downarrow -Morphismus ist.

Da $T_v^\downarrow(E^\star)$ von der n -dimensionalen zahmen Grundstruktur $T(E^\star)$ induziert ist, gehört das v - \downarrow zahme Element F zu einem zahmen Element $\tilde{F} : \tilde{P} \rightarrow E^\star$ aus $T(E^\star)$ mit $\dim \tilde{P} \leq n$ (siehe Diagramm).



Weil für $i = 0, 1$ $\delta_{Q_i} : Q_i \rightarrow P$ ein \mathbf{P}^\downarrow -Morphismus ist, sind $\alpha \circ \delta|_{Q_0}$ und $\alpha \circ \delta|_{Q_1}$ beide PL-Einbettungen, wobei α eine unorientierte Homologie zwischen diesen singulären PL-Zykeln von \tilde{P} darstellt. Wegen Lemma 7.5.1 (a) existiert daher ein PL-Automorphismus $\varphi \in \text{Aut}^{\text{PL}}Q$ mit

$$\alpha \circ \delta|_{Q_1} = \alpha \circ \delta|_{Q_0} \circ \varphi,$$

was uns via Verkettung mit \tilde{F} die Gleichung $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_0 \circ \varphi$ liefert. Daraus folgt aber $f = f \circ \varphi$, so daß sogar $\varphi \in \text{Aut}_f^{\text{PL}}Q$ gilt und somit die Injektivität von κ bewiesen ist.

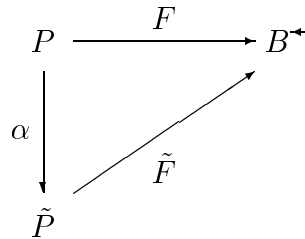
Surjektivität von κ : Gemäß Folgerung 7.4.3 und Konstruktion von κ reicht es, folgendes zu zeigen:

Zu jedem unorientierten v- \downarrow zahmen n -Zykel $\bar{g} : \bar{Q} \rightarrow E^\star$, so daß $(\bar{Q}, \pi^\star \circ \bar{g})$ v- \downarrow zahm dipolhomolog zu (Q, f) ist, existiert ein Lift $\tilde{f} : Q \rightarrow E^\star$ von f , der v- \downarrow zahm dipolhomolog zu (\bar{Q}, \bar{g}) ist.

Gehen wir also von solch einem $\bar{g} : \bar{Q} \rightarrow E^\star$ aus. Weil $T_v^\downarrow(B^\star)$ nach Folgerung 7.6.2 additiv ist, sind $(\bar{Q}, \pi^\star \circ \bar{g})$ und (Q, f) nach Lemma 7.4.4 sogar v- \downarrow zahm streng homolog zueinander.

Ähnlich wie beim Injektivitätsbeweis existieren daher ein unorientiertes, berandetes \mathbf{P}^\downarrow - $(n + 1)$ -Zykel P mit dem \mathbf{P} -Morphismus $\alpha : P \rightarrow \tilde{P}$ als Basis, ein v- \downarrow zahmes Element $F : P \rightarrow B^\star$ aus $T_v^\downarrow(B^\star)$ und ein PL-Homöomorphismus $\delta : Q \dot{\cup} \bar{Q} \xrightarrow{\cong} \partial P$, so daß sowohl $\delta|_Q : Q \rightarrow P$ als auch $\delta|_{\bar{Q}} : \bar{Q} \rightarrow P$ \mathbf{P}^\downarrow -Morphismen sind, mit $f = F \circ \delta|_Q$ und $\pi^\star \circ \bar{g} = F \circ \delta|_{\bar{Q}}$ (Verkettungs-Konvention), wobei F wieder zu einem zahmen Element $\tilde{F} : \tilde{P} \rightarrow B^\star$ aus $T(B^\star)$ gehört.

Aufgrund der Dimensionsbedingung gilt hierbei $\dim \tilde{P} \leq n$. Zur Veranschaulichung diene das folgende Diagramm.



Da $\delta|_Q : Q \rightarrow P$ ein \mathbf{P}^\downarrow -Morphismus ist, erweist sich $\alpha \circ \delta|_Q$ als \mathbf{P} -Einbettung, so daß wir mit Lemma 7.5.1 die folgende Situation bekommen:

- (1) $\text{Bild}(\alpha \circ \delta|_Q) \subset \text{Bild}(\alpha \circ \delta|_{\bar{Q}})$,
- (2) Die singulären n -Zykel $\alpha \circ \delta|_Q$ und $\alpha \circ \delta|_{\bar{Q}}$ von $\text{Bild}(\alpha \circ \delta|_{\bar{Q}})$ sind innerhalb $\text{Bild}(\alpha \circ \delta|_{\bar{Q}})$ singulär \mathbb{Z}_2 -homolog.

Nach Folgerung 7.3.1 ist dann $\alpha \circ \delta|_{\bar{Q}} : \bar{Q} \rightarrow \text{Bild}(\alpha \circ \delta|_{\bar{Q}})$ die Basis von \bar{Q} , so daß das v- \downarrow zahme Element $\pi^\star \circ \bar{g} = F \circ \delta|_{\bar{Q}}$ zu einem zahmen Element $\tilde{F}|_{\text{Bild}(\alpha \circ \delta|_{\bar{Q}})}$ gehört. Wegen

Lemma 7.6.2 gehört dann \bar{g} zu einem zahmen Element $\bar{F} : \text{Bild}(\alpha \circ \delta|_{\bar{Q}}) \rightarrow E^{\blacktriangleleft}$ aus $T(E^{\blacktriangleleft})$ mit $\pi^{\blacktriangleleft} \circ \bar{F} = \tilde{F}|_{\text{Bild}(\alpha \circ \delta|_{\bar{Q}})}$.

Wegen Bedingung (1) ist $\bar{f} := \bar{F} \circ \alpha \circ \delta|_Q$ definiert und ein Lift von f . Mit (2) bekommt man eine singuläre \mathbb{Z}_2 -Homologie zwischen $\alpha \circ \delta|_Q$ und $\alpha \circ \delta|_{\bar{Q}}$ innerhalb $\text{Bild}(\alpha \circ \delta|_{\bar{Q}})$, die man geometrisch als PL-Homologie interpretieren kann, so daß ein unorientiertes, berandetes $(n+1)$ -Zykel M mit $\partial M = Q \dot{\cup} \bar{Q}$ und eine PL-Abbildung

$$H : M \rightarrow (\alpha \circ \delta)(\bar{Q}) \subset \tilde{P}$$

existieren mit $\alpha \circ \delta|_Q = H|_Q$ und $\alpha \circ \delta|_{\bar{Q}} = H|_{\bar{Q}}$. H definiert eine Basisstruktur für M und $\bar{F} \in T(E^{\blacktriangleleft})$ zusammen mit H ein v- \downarrow zahmes Element $\bar{H} \in T_v^{\downarrow}(E^{\blacktriangleleft})$, das eine strenge v- \downarrow zahme Homologie zwischen \bar{f} und g darstellt.

Für den orientierten Fall geht man analog vor und berücksichtigt die orientierte Version von Lemma 7.5.1. △

Kapitel 8

Abstrakte Klassifikationssätze

In diesem Kapitel wenden wir den allgemeinen Klassifikationssatz 7.7.2 an, wofür noch die Voraussetzungen überprüft und vorher die geeigneten zahmen Grundstrukturen für $B^*\Gamma$ definiert werden müssen.

Wir erhalten somit einen abstrakten Klassifikationssatz für geliftete étale-PL-Gruppoid-Strukturen, aus dem als Spezialfall ein abstrakter Klassifikationssatz für PL-Blätterungen folgt.

Außerdem beweisen wir für n -dimensionale étale-PL-Mannigfaltigkeitsgruppoid Γ die Übereinstimmung der Dipol-Homologiegruppen ihrer $v\text{-}\downarrow$ Zählung (bzgl. der nd -zahmen Grundstruktur) $P^*\Gamma$ mit den singulären Homologiegruppen von $B\Gamma$ in den Dimensionen $< n$.

Das Kapitel und damit die Arbeit schließt mit kommentierenden Anmerkungen.

8.1 Zahme Gruppoid-Strukturen

Es gibt nur wenige zahme Grundstrukturen für projektive Systeme $X^* \in \mathbf{Top}^*$, die für jedes X^* in gleicher Weise definiert werden können. Die residuale zahme Grundstruktur ist hierfür ein Beispiel.

Wenn man aber auf diese Uniformität verzichtet, erscheint für das klassifizierende System $B^*\Gamma$ einer étale-Kategorie Γ eine spezifischere Definition seiner zahmen Grundstruktur über zahme Γ -Strukturen adäquater. Man bedenke, daß diese Systeme ohnehin universelle Objekte darstellen und daher durch eine solche Spezifizierung nichts von ihrer klassifizierenden Bedeutung einbüßen.

8.1.1 Für jede étale-PL-Kategorie Γ werden wir drei Sorten von zahmen Γ -Strukturen definieren:

residual zahme Γ -Strukturen,
 PL-zahme Γ -Strukturen,
 nd-zahme Γ -Strukturen.

Die beste und wichtigste ist die nd-zahme Γ -Struktur.

Das Definitionsschema ist jeweils gleich: Man definiert zunächst zahme Γ -Kozykel und zeigt dann mit Hilfe der étale-Eigenschaft von Γ die Invarianz unter Kohomologie, wodurch zahme Γ -Strukturen wohldefiniert sind.

Ein Γ -Kozykel γ von $X \in \mathbf{Top}$ zur Überdeckung (U_i) heiÙe **residual zahm**, wenn jedes $\gamma_{ii} : U_i \rightarrow \Gamma$ eine stabil residual lokal injektive Abbildung ist.

Wegen Lemma 3.3.1 gilt analog zur Folgerung 3.3.1 für je zwei kohomologe Γ -Kozykel γ, γ' die Äquivalenz:

$$\gamma \text{ residual zahm} \iff \gamma' \text{ residual zahm,}$$

so daß **residual zahme Γ -Strukturen** über Repräsentanten wohldefiniert sind.

Für die Definition der residual zahmen Γ -Strukturen braucht Γ natürlich nur als étale-Kategorie vorausgesetzt werden. Die PL-Struktur von Γ benötigt man erst für die letzten beiden Sorten.

PL-zahme Γ -Strukturen auf einem (allgemeinen) PL-Raum X definiert man analog über PL-Abbildungen $\gamma_{ii} : U_i \rightarrow \Gamma$ und **nd-zahme** Γ -Strukturen auf X über *lokal* nicht degenerierte¹⁾ PL-Abbildungen $\gamma_{ii} : U_i \rightarrow \Gamma$.

Alle drei Sorten von zahmen Γ -Strukturen besitzen folgende *Additivitätseigenschaft*:

FOLGERUNG. Sei Γ eine étale-PL-Kategorie und σ eine Γ -Struktur auf dem Polyeder P , das von zwei Unterpolyedern P_0, P_1 überdeckt werde. Dann gilt

$$\sigma \text{ nd-zahm} \iff \sigma|_{P_0}, \sigma|_{P_1} \text{ beide nd-zahm.}$$

Eine entsprechende Aussage gilt für PL-zahme Γ -Strukturen und für residual zahme Γ -Strukturen, falls Γ eine étale-Kategorie ist.

BEWEIS: Der technische Schlüssel zum Beweis im nd-zahmen Fall ist durch [R-S, 5.2(3)] gegeben. Der PL-zahme Fall ist evident, und für den residual zahmen Fall ist Lemma 1.5.1 ausschlaggebend. △

LEMMA. Γ sei eine étale-PL-Kategorie der Dimension $\leq n$ und X ein (gewöhnlicher) PL-Raum. Existiert auf X eine nd-zahme Γ -Struktur, so gilt $\dim X \leq n$.

¹⁾Eine allgemeine PL-Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heiÙe nd (nicht degeneriert), wenn jede Faser von f diskret ist. Für kompaktes X gilt: f nd $\iff f$ lokal nd.

BEWEIS: Sei also γ ein nd -zahmes Γ -Kozykel von X zur Überdeckung (U_i) . Ist σ ein k -Simplex einer Triangulierung von X , so gibt es einen Punkt $x \in \langle \sigma \rangle$ im Inneren von $|\sigma|$ und ein $U_i \ni x$, so daß $\gamma_{ii} : U_i \rightarrow \Gamma$ auf einer Umgebung $U \subset U_i$ von x eine nd -Abbildung ist. O.B.d.A. nehmen wir $U = U_i$ und $|\sigma| \subset U_i$ an (sonst trianguliere man feiner).

Aufgrund der nd -Eigenschaft von $\gamma_{ii}|_{|\sigma|}$ gibt es eine Triangulierung K von $|\sigma|$ und o.E. eine Triangulierung L einer Umgebung von $\gamma_{ii}(x)$, so daß $\gamma_{ii} : K \rightarrow L$ simplizial und auf jedem Simplex von K injektiv ist. O.E. sei σ ein prinzipales Simplex von K . Dann wird das Innere $\langle \sigma \rangle$ in einen \mathbb{R}^m mit $m \leq n$ eingebettet. Aus dem Satz über die topologische Gebietstreue folgt daher $\dim \sigma = k \leq n$. \triangle

BEMERKUNG. Ist Γ eine étale-TOP-Mannigfaltigkeitskategorie der Dimension $\leq n$, so gilt eine analoge Aussage für TOP-Mannigfaltigkeiten X und residual zahme Γ -Strukturen.

Zahme Γ -Strukturen lassen sich von entsprechenden Abbildungen natürlich auch zurückziehen: residual zahme Γ -Strukturen von stabil residual lokal injektiven Abbildungen und nd -zahme Γ -Strukturen von nd -Abbildungen, so daß zahme Γ -Strukturen als Funktoren auf entsprechenden Unterkategorien von **Top** oder **PL** definiert sind.

8.1.2 In der Topologie gibt es die wohlbekanntes simpliziale Approximation, auch in relativer Version. Bei étale-PL-Mannigfaltigkeitsgruppoiden Γ lassen sich Γ -Strukturen in ähnlicher Weise durch PL-zahme Γ -Strukturen und unter Voraussetzungen an die Dimensionen durch nd -zahme Γ -Strukturen homotop approximieren. Wir werden im nächsten Lemma aber nur auf den nd -Fall eingehen.

LEMMA. Γ sei ein n -dimensionaler étale-PL-Mannigfaltigkeitsgruppoid. Ferner seien:

- X ein kompaktes Polyeder mit $\dim X \leq n$,
- $Q \subset X$ ein kompaktes Unterpolyeder,
- $f : X \rightarrow B^* \Gamma$ die klassifizierende Abbildung einer Γ -Struktur σ von X , so daß $\sigma|_Q$ eine nd -zahme Γ -Struktur ist.

Dann ist f stationär auf Q streng homotop zu einer stetigen Abbildung $\tilde{f} : X \rightarrow B^* \Gamma$ mit zugehöriger nd -zahmer Γ -Struktur $\tilde{\sigma}$.

BEWEIS: Natürlicherweise würde man bei einem Γ -Kozykel γ eigentlich versuchen wollen, die einzelnen γ_{ij} sukzessive zu nd -Abbildungen abzuändern. Aber das müßte verträglich mit der Kozykelbedingung geschehen, wodurch man sofort mit einem globalen Problem konfrontiert wird, das sich auf diese naive Weise anscheinend nicht bewältigen läßt. Ein globales Problem verlangt auch nach einem globalen Lösungsansatz, der in diesem Falle durch Verwendung geblätterter Mikroidbündel gegeben ist, denn ein geblättertes Mikroidbündel ist sicherlich ein globales Objekt (mit lokalen Eigenschaften).

Das Beweisprinzip sieht folgendermaßen aus: Gemäß 3.1.3 gibt es einen étale-PL-Gruppoidhomomorphismus $\varphi : \Gamma \rightarrow \Gamma_{\Gamma^0}$, der σ auf $\varphi_*(\sigma) := H^1(\varphi)(\sigma)$ abbildet. Nach Satz 3.4.4 korrespondiert $\varphi_*(\sigma)$ zu einem geblätternen PL-Mikroïdbündel $\xi = (p, S, \mathcal{F})$ über X mit Faser $F := \Gamma^0$, Totalraum $E = E(\xi)$, Schnitt $S : X \rightarrow E$ und bgzsh-Zerlegung \mathcal{F} auf E . Die Idee ist nun, (ohne p, \mathcal{F} im Geringsten zu ändern) eine Homotopie $H : X \times I \rightarrow E$ von Schnitten mit $H_0 = S$ derart zu finden, daß H_1 ein nd-Schnitt ist und das zu H gehörende geblättern Mikroiðbündel über $X \times I$ lt. Satz 3.4.4 zu einer Γ_F -Struktur Σ von $X \times I$ korrespondiert, welche zu einer Γ -Struktur $\tilde{\Sigma}$ von $X \times I$ geliftet werden kann. Weil dann $\tilde{\sigma} := \tilde{\Sigma}|_{X \times 1}$ die nd-zahme Γ_{Γ^0} -Struktur $\Sigma|_{X \times 1}$ liftet, ist nach Korollar 8.1.3 auch $\tilde{\sigma}$ nd-zahm (was man natürlich auch direkt sofort sieht). Die Idee gründet sich auf die berechnigte Vorstellung, daß ein Liften von Σ stets möglich ist, wenn nur H nahe genug zur stationären Homotopie ist.

Die Umsetzung jenes Beweisprinzips erfolgt in mehreren Etappen, die hauptsächlich die geeignete Wahl eines Atlanten von ξ und der Schnittomotopie H ermöglichen.

Im Beweis der untenstehenden 1. und 6. Behauptung werden folgende allgemeine Regeln für Atlanten (V_i, h_i) von ξ angewandt, wobei jedes h_i von der Gestalt $h_i : V_i \xrightarrow{\cong} U_i \times U_{F,i}$ sei:

- (1) Jedes $U_i = p(V_i)$ ist offen und bogenzusammenhängend, so daß (U_i) eine offene Überdeckung von X darstellt.
- (2) Für jedes i und jede offene, bogenzusammenhängende Teilmenge $U \subset U_i$ ist mit $V := p^{-1}(U) \cap V_i$ auch $(V, h_i|_V)$ eine lokale Trivialisierung von ξ mit $h_i|_V(V) = U \times U_{F,i}$. Daher induziert insbesondere jede (bogenzusammenhängende) Verfeinerung von (U_i) kanonisch einen verfeinerten Atlas von ξ .
- (3) Nach der Konstruktion in 3.4.1 induziert jeder Atlas (V_i, h_i) auf kanonische Weise ein Γ_F -Kozykel zur Überdeckung (U_i) .

1. Behauptung: Es existiert ein Atlas (V_i, h_i) von ξ und ein Γ -Kozykel γ auf X zur Überdeckung (U_i) , welches σ repräsentiert, so daß $\varphi_*(\gamma) := Z^1(\varphi)(\gamma)$ mit dem von (V_i, h_i) gemäß Regel (3) induzierten Γ_{Γ^0} -Kozykel übereinstimmt.

Beweis: Man wähle irgendein Γ -Kozykel γ auf X mit $[\gamma] = \sigma$ und irgendeinen Atlas von ξ , der gemäß (3) ein Γ_F -Kozykel g induziert. Wegen $[\varphi_*(\gamma)] = \varphi_*(\sigma) = [g]$ ist Lemma 3.2.2 anwendbar. Daher existieren (bogenzusammenhängende) Verfeinerungen γ' von γ und g' von g , die auf der gleichen Überdeckung (U_i) definiert sind, so daß g' lt. Regel (2) von einem Atlas (V_i, h_i) von ξ induziert ist, und $\varphi_*(\gamma')$, g' in $H^1((U_i); \Gamma_F)$ gleich sind. Somit existieren für jedes i stetige Abbildungen $u_i : U_i \rightarrow \Gamma_F$ mit

$$\varphi_*(\gamma')_{ji} = u_j g'_{ji} u_i^{-1}$$

für alle i, j . Nach Definition der g'_{ji} in 3.4.1 ist der Schnitt von $U_i \times U_{F,i}$ mit

$$\text{graph } g'_{ii}$$

identisch. Weil das Produkt $u_i g'_{ij}$ für alle i, j definiert ist, hat man (mit der source-Abbildung $s : \Gamma_F \rightarrow F$) außerdem

$$s \circ u_i = g'_{ii}$$

für alle i . Dies gestattet uns, mit Hilfe der u_i wie folgt einen neuen Atlas von ξ zu konstruieren, dessen induziertes Γ_F -Kozykel mit einer Verfeinerung von $\varphi_*(\gamma')$ übereinstimmt: Zu einem beliebigen $x \in U_i$ existiert ein lokaler PL-Homöomorphismus

$$u_{i,x} : U_{F,i,x} \xrightarrow{\cong} \tilde{U}_{F,i,x}$$

von F um $s(u_i(x))$ mit $U_{F,i,x} \subset U_{F,i} \subset F$, dessen Keim in $s(u_i(x))$ gerade $u_i(x)$ ist. Wir wählen nun eine offene, bogenzusammenhängende Umgebung $U_{i,x} \subset U_i$ von x mit $(s \circ u_i)(U_{i,x}) = g'_{ii}(U_{i,x}) \subset U_{F,i,x}$ und

$$u_i(x') = \text{Keim von } u_{i,x} \text{ in } x'$$

für alle $x' \in U_{i,x}$. Dann bilden wir das eingeschränkte, trivial geblätterte Mikroidbündel

$$U_{i,x} \times U_{F,i,x}$$

über $U_{i,x}$ mit Faser $U_{F,i,x}$. Den blätter- und faserstreuen Homöomorphismus

$$id_{U_{i,x}} \times u_{i,x} : U_{i,x} \times U_{F,i,x} \xrightarrow{\cong} U_{i,x} \times \tilde{U}_{F,i,x}$$

interpretieren wir nun als echten Tripelpräisomorphismus zwischen trivial geblätterten Mikroidbündeln, wobei der Schnitt von $U_{i,x} \times \tilde{U}_{F,i,x}$ gerade via $id_{U_{i,x}} \times u_{i,x}$ definiert wird.

Mit $V_{i,x} := h_i^{-1}(U_{i,x} \times U_{F,i,x})$ erhält man also eine neue lokale Trivialisierung

$$h_{i,x} : V_{i,x} \xrightarrow{h_i} U_{i,x} \times U_{F,i,x} \xrightarrow{id_{U_{i,x}} \times u_{i,x}} U_{i,x} \times \tilde{U}_{F,i,x}$$

und damit den neuen Atlas $(V_{i,x}, h_{i,x})$. Die offene Überdeckung $(U_{i,x})_{(i,x) \in I \times X}$ ist dann eine Verfeinerung von $(U_i)_{i \in I}$ mit der natürlichen Verfeinerungsabbildung $(i, x) \mapsto i$, mittels derer wir γ' zu γ'' und g' zu g'' verfeinern. Ebenso verfeinern wir (u_i) zu $(u'_{i,x})$ und bekommen die Beziehung

$$\varphi_*(\gamma'')_{(j,y)(x,i)} = u'_{j,y} g''_{(j,y)(i,x)} u'^{-1}_{i,x}$$

für alle Indizes $(j, y), (x, i)$. Da die Keime der $u_{i,x}$ die $u'_{i,x}$ induzieren, folgt daraus die Übereinstimmung von $\varphi_*(\gamma'')$ mit dem vom Atlas $(V_{i,x}, h_{i,x})$ induzierten Γ_F -Kozykel, womit die 1. Behauptung bewiesen ist.

Die nächsten Behauptungen führen schrittweise zur Klärung der Bedingungen, die ein Liften von nahe $g = \varphi_*(\gamma)$ liegenden Γ_F -Kozykeln g' erlauben.

2. Behauptung: Allgemein seien Γ ein étale-Gruppoid, γ ein Γ -Kozykel zu einer lokal endlichen Überdeckung (U_i) auf $X \in \mathbf{Top}$ und für jedes $x \in X$ $\Lambda_x := \{i \in I \mid x \in U_i\}$. Dann existieren zu beliebig vorgegebenen offenen Umgebungen $V'_{ij}(x)$ von $\gamma_{ij}(x)$, $i, j \in \Lambda_x$, kleinere offene Umgebungen $\tilde{V}_{ij}(x) \subset V'_{ij}(x)$ von $\gamma_{ij}(x)$ mit

$$\tilde{V}_{ji}(x) = \tilde{V}_{ij}^{-1}(x) \quad \text{und} \quad \tilde{V}_{ij}(x)\tilde{V}_{jk}(x) = \tilde{V}_{ik}(x)$$

für alle $i, j, k \in \Lambda_x$ ²⁾.

²⁾Hierbei ist UV als $m(U \times V \cap \Gamma \times_{\Gamma_0} \Gamma)$ für je zwei Teilmengen $U, V \subset \Gamma$ definiert.

Beweis: Wir führen eine endliche Induktion nach $\#\Lambda_x$, wobei zur Vereinfachung $\Lambda := \Lambda_x$ gesetzt werde. Weil Γ ein Gruppoid ist, bildet jedes γ_{ii} in die Einheiten ab, so daß sich der Induktionsanfang als trivial herausstellt.

Induktionsschluß: Wir versehen Λ mit einer Totalordnung und schreiben

$$\Lambda = \Lambda' \dot{\cup} \{n\},$$

wobei n das größte Element von Λ und m das größte Element von Λ' bezeichne. Als erstes wird $V'_{nm}(x)$ verkleinert: Da $s, r : \Gamma \rightarrow \Gamma^0$ étale-Abbildungen sind, kann $V'_{nm}(x)$ o.E. so verkleinert werden, daß folgende Bedingungen gelten:

$$\begin{aligned} V'^{-1}_{nm}(x)V'_{nm}(x) &= s(V'_{nm}(x)), \\ V'_{nm}(x)V'^{-1}_{nm}(x) &= r(V'_{nm}(x)), \\ V'^{-1}_{nm}(x) &\subset V'_{mn}(x), \\ s(V'_{nm}(x)) &\subset V'_{mm}(x), \\ r(V'_{nm}(x)) &\subset V'_{nn}(x). \end{aligned}$$

Nach evtl. Verkleinerung können wir außerdem

$$V'^{-1}_{ni}(x) \subset V'_{in}(x)$$

für alle $i < m$ annehmen. Die Stetigkeit der Gruppoidmultiplikation gestattet uns, zu jedem $i < m$ offene Umgebungen $V''_{mi}(x) \subset V'_{mi}(x)$ von $\gamma_{mi}(x)$ und $V'_{nm,i}(x) \subset V'_{nm}(x)$ von $\gamma_{nm}(x)$ mit

$$V'_{nm,i}(x)V''_{mi}(x) \subset V'_{ni}(x)$$

zu wählen. Ferner setzen wir

$$\begin{aligned} V''_{ij}(x) &:= V'_{ij}(x) \quad \text{für alle } i, j \in \Lambda' \text{ mit } i \neq m, \\ V''_{nm}(x) &:= \bigcap_{i < m} V'_{nm,i}(x), \end{aligned}$$

und wenden die Induktionsbehauptung auf die Umgebungen $V''_{ij}(x)$ an. Somit gibt es für alle $i, j \in \Lambda'$ offene Umgebungen $\tilde{V}_{ij} \subset V''_{ij}(x)$ von $\gamma_{ij}(x)$ mit

$$\tilde{V}_{ji} = \tilde{V}_{ij}^{-1} \quad \text{und} \quad \tilde{V}_{ij}\tilde{V}_{jk} = \tilde{V}_{ik}$$

für alle $i, j, k \in \Lambda'$. Es müssen also noch die \tilde{V}_{ij} mit $i = n$ oder $j = n$ definiert werden:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{nm} &:= V''_{nm}(x)\tilde{V}_{mm}, \\ \tilde{V}_{nn} &:= r(\tilde{V}_{nm}), \\ \tilde{V}_{ni} &:= \tilde{V}_{nm}\tilde{V}_{mi} \quad \text{für alle } i < n, \\ \tilde{V}_{in} &:= \tilde{V}_{ni}^{-1} \quad \text{für alle } i < n. \end{aligned}$$

Wegen Behauptung 3.1.3 sind dies tatsächlich auch offene Mengen. Nach Konstruktion gilt somit zunächst $\tilde{V}_{ji} = \tilde{V}_{ij}^{-1}$ und $\tilde{V}_{ij} \subset V'_{ij}(x)$ für alle $i, j \in \Lambda$, so daß nur noch die

Kozykelbedingung nachzurechnen ist. So wie $V'_{nm}(x)$ verkleinert und \tilde{V}_{nm} definiert wurde, gilt diese schon mal für $i, j, k = n, m$ und wegen der Induktionsbehauptung für alle $i, j, k \leq m$.

Bei den „gemischten“ Fällen braucht man die Kozykelbedingung für Indizes aus Λ' , was wir hier exemplarisch nur an einem Beispiel zeigen: Für $i < j < n$ ergibt sich die Gleichungskette

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_{jn}\tilde{V}_{ni} &= \tilde{V}_{nj}^{-1}\tilde{V}_{ni} \\
&= (\tilde{V}_{nm}\tilde{V}_{mj})^{-1}\tilde{V}_{nm}\tilde{V}_{mi} \\
&= \tilde{V}_{mj}^{-1}\tilde{V}_{nm}^{-1}\tilde{V}_{nm}\tilde{V}_{mi} \\
&= \tilde{V}_{jm}\tilde{V}_{mn}\tilde{V}_{nm}\tilde{V}_{mi} \\
&= \tilde{V}_{jm}\tilde{V}_{mm}\tilde{V}_{mi} \\
&= \tilde{V}_{jm}\tilde{V}_{mi} \\
&= \tilde{V}_{ji}.
\end{aligned}$$

Somit sind die geeigneten $\tilde{V}_{ij}(x) := \tilde{V}_{ij}$ gefunden.

3. Behauptung: Ganz allgemein seien X ein kompaktes Polyeder mit einer PL-Karte $|K| = X$, (U_i) eine endliche, offene Überdeckung von X und (U'_i) eine Schrumpfung von (U_i) . Dann existiert eine Unterteilung $K' \triangleleft K$ von K , so daß für jedes Simplex $\varrho' \in K'$ die Bedingung

$$\bar{U}'_i \cap |\varrho'| \neq \emptyset \Rightarrow |\varrho'| \subset U_i$$

erfüllt ist.

Beweis: Jedes kompakte Polyeder X trägt eine Standardmetrik d (s. z.B. [Spa]). Aufgrund der Endlichkeit von (U_i) ist die Zahl

$$\epsilon := \min_i \{d(\bar{U}'_i, CU_i)\} > 0.$$

Man unterteile nun K soweit zu $K' \triangleleft K$ (z.B. mittels des iterierten Subdivision-Operators), daß jedes Simplex von K' einen Durchmesser $< \epsilon$ hat, womit die 3. Behauptung sofort folgt.

Mit Hilfe der Überdeckung (U_i) und dem Γ -Kozykel γ der 1. Behauptung sowie geeigneten $\tilde{V}_{ij}(x)$ aus der 2. Behauptung konstruieren wir nun offene Teilmengen $\tilde{V}_{ij}(\tau) \subset \Gamma$, wobei τ über alle Simplizes einer geeigneten PL-Karte $|K| = X$ variiert. Nach der 2. Behauptung lassen sich alle $\tilde{V}_{ij}(x)$ aufgrund der étale-Eigenschaft von $\varphi : \Gamma \rightarrow \Gamma_F$ so wählen, daß

$$\varphi|_{\tilde{V}_{ij}(x)} \text{ injektiv}$$

ist. Wegen der Stetigkeit von γ_{ij} existiert für jedes $x \in X$ zu je zwei Indizes $i, j \in \Lambda_x = \{i | x \in U_i\}$ eine offene Umgebung $U_{ij,x} \subset U_i \cap U_j$ von x mit $\gamma(U_{ij,x}) \subset \tilde{V}_{ij}(x)$. Als nächstes wählen wir eine Schrumpfung (U'_i) von (U_i) . Aufgrund der lokalen Endlichkeit von (\bar{U}'_i) gibt es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung

$$U_x \subset \bigcup_{i,j \in \Lambda_x} U_{ij,x}$$

mit der Bedingung

$$\bar{U}'_i \cap U_x \neq \emptyset \Rightarrow x \in \bar{U}'_i.$$

Dann ist $(U_x)_{x \in X}$ eine offene Überdeckung von X , die wegen der Kompaktheit von X eine endliche Teilüberdeckung (U_{x_μ}) besitzt.

Desweiteren wählen wir eine Triangulierung $|K| = X$ von X , die der Bedingung der obigen 3. Behauptung genügt. Indem man die 3. Behauptung auf eine Schrumpfung von (U_{x_μ}) anwendet³⁾, kann man o.B.d.A. von K verlangen, daß zu jedem Simplex $\tau \in K$ ein μ mit $|\tau| \subset U_{x_\mu}$ existiert.

Für alle $i, j \in I$ und jedes Simplex $\tau \in K$ setzen wir

$$\tilde{V}_{ij}(\tau) := \bigcap \{ \tilde{V}_{ij}(x_\mu) : |\tau| \subset U_{x_\mu}, U_{x_\mu} \cap \bar{U}'_i \cap \bar{U}'_j \neq \emptyset \}$$

und $V_{ij}(\tau) := \varphi(\tilde{V}_{ij}(\tau))$.

4. Behauptung: Diese $\tilde{V}_{ij}(\tau)$ besitzen folgende Eigenschaften:

- (1) $\tilde{V}_{ij}(\tau) \neq \emptyset \Rightarrow |\tau| \subset U_i \cap U_j$ und $\gamma_{ij}(|\tau|) \subset \tilde{V}_{ij}(\tau)$,
- (2) $|\tau| \cap \bar{U}'_i \cap \bar{U}'_j \neq \emptyset \Rightarrow |\tau| \subset U_i \cap U_j$ und $\tilde{V}_{ij}(\tau) \neq \emptyset$,
- (3) $\tilde{V}_{ij}(\tau) \neq \emptyset$ und $\varrho \subset \tau$ Seite $\Rightarrow \tilde{V}_{ij}(\varrho) \neq \emptyset$ und $\tilde{V}_{ij}(\varrho) \subset \tilde{V}_{ij}(\tau)$,
- (4) $\varphi|_{\tilde{V}_{ij}(\tau)} : \tilde{V}_{ij}(\tau) \xrightarrow{\cong} V_{ij}(\tau)$ ist ein Homöomorphismus.

Beweis: von (1): Gemäß Voraussetzung ist die Familie, deren Durchschnitt $\tilde{V}_{ij}(\tau)$ ergibt, nichtleer. Sei daher μ beliebig mit $|\tau| \subset U_{x_\mu}$ und $U_{x_\mu} \cap \bar{U}'_i \cap \bar{U}'_j \neq \emptyset$. Nach Konstruktion von (U_x) folgt $x_\mu \in \bar{U}'_i \cap \bar{U}'_j \subset U_i \cap U_j$ und damit $i, j \in \Lambda_{x_\mu}$, ferner $|\tau| \subset U_{x_\mu} \subset U_{ij, x_\mu} \subset U_i \cap U_j$ und daher $\gamma_{ij}(|\tau|) \subset \gamma_{ij}(U_{ij, x_\mu}) \subset \tilde{V}_{ij}(x_\mu)$, was schließlich (1) beweist.

Weil K so gewählt wurde, daß ein μ mit $|\tau| \subset U_{x_\mu}$ existiert, gilt auch (2). Die Implikation $\tilde{V}_{ij}(\tau) \neq \emptyset \Rightarrow \tilde{V}_{ij}(\varrho) \neq \emptyset$ in der Eigenschaft (3) ergibt sich direkt aus der Definition von $\tilde{V}_{ij}(\tau)$. Daran erkennt man auch sofort die Teilmengenrelation $\tilde{V}_{ij}(\varrho) \subset \tilde{V}_{ij}(\tau)$, denn die Durchschnittsfamilie für ϱ ist größer als die für τ . Eigenschaft (4) ist klar nach Konstruktion.

5. Behauptung: (a): Sei g irgendein Γ_F -Kozykel von X zur Überdeckung (U_i) mit $g_{ij}(|\tau|) \subset V_{ij}(\tau)$, falls $\tilde{V}_{ij}(\tau) \neq \emptyset$. Bezeichnet g' das verfeinerte Γ_F -Kozykel (zur Überdeckung (U'_i)), dann läßt sich g' zu genau einem Γ -Kozykel γ' liften mit $\gamma'_{ij}(|\tau| \cap U'_i \cap U'_j) \subset \tilde{V}_{ij}(\tau)$ für alle i, j und $\tau \in K$, so daß $\tilde{V}_{ij}(\tau) \neq \emptyset$.

(b): Eine analoge Aussage gilt für Γ_F -Kozykel g auf dem Zylinder $X \times [0, 1]$ zur Überdeckung $(U_i \times [0, 1])$, wobei die entsprechende Bedingung $g_{ij}(|\tau| \times [0, 1]) \subset V_{ij}(\tau)$ vorausgesetzt wird.

Beweis: Für jedes Paar $(i, j) \in I \times I$ bezeichne $K^{ij} \subset K$ den simplizialen Unterkomplex aller Simplizes $\varrho \in K$, zu denen ein Simplex $\tau \in K$ mit $\varrho \subset \tau$ und $|\tau| \cap \bar{U}'_i \cap \bar{U}'_j \neq \emptyset$

³⁾ stattdessen kann man natürlich auch die Existenz der Lebesgue-Zahl ausnutzen und den iterierten Subdivision-Operator anwenden.

existiert. Dann ist $\bar{U}'_i \cap \bar{U}'_j$ eine Teilmenge von $|K^{ij}| \subset X$. Mit den Eigenschaften (2), (3) der 4. Behauptung und der Voraussetzung an g bekommen wir $|\varrho| \subset U_i \cap U_j$ und $g_{ij}(|\varrho|) \subset V_{ij}(\varrho)$ für alle $\varrho \in K^{ij}$.

Daher können wir für jedes $\varrho \in K^{ij}$ gemäß der Eigenschaft (4) der 4. Behauptung eine stetige Abbildung $\gamma'_{ij}(\varrho) : |\varrho| \rightarrow \Gamma$ durch die Gleichung

$$\gamma'_{ij}(\varrho) := \left(\varphi|_{\tilde{V}_{ij}(\varrho)} \right)^{-1} \circ g_{ij}|_{|\varrho|}$$

definieren. Wegen der Eigenschaft (3) der 4. Behauptung gilt dabei die Kompatibilitätsbedingung $\gamma'_{ij}(\varrho) = \gamma'_{ij}(\tau)|_{|\varrho|}$ für alle $\varrho \subset \tau \in K^{ij}$, so daß sich die einzelnen $\gamma'_{ij}(\varrho)$ zu einer stetigen Abbildung $\gamma'_{ij} : |K^{ij}| \rightarrow \Gamma$ zusammensetzen, deren Einschränkung auf $U'_i \cap U'_j$ wir ebenfalls wieder mit γ'_{ij} bezeichnen. Nach Definition gilt zunächst $\varphi \circ \gamma'_{ij} = g'_{ij}$, so daß nur noch die Kozykelbedingung für $\gamma' := (\gamma'_{ij})$ nachgewiesen werden muß:

Sei also $x \in U'_i \cap U'_j \cap U'_k$ beliebig. Man wähle nun ein $\tau \in K$ und ein μ mit $x \in |\tau|$ und $|\tau| \subset U_{x_\mu}$, so daß zunächst $\tau \in K^{ij} \cap K^{jk} \cap K^{ik}$ gilt. Mit Eigenschaft (2) der 4. Behauptung erweisen sich alle drei Mengen $\tilde{V}_{ij}(\tau)$, $\tilde{V}_{jk}(\tau)$, $\tilde{V}_{ik}(\tau)$ als nichtleer, wobei außerdem die Relationen

$$\tilde{V}_{ij}(\tau) \subset \tilde{V}_{ij}(x_\mu), \quad \tilde{V}_{jk}(\tau) \subset \tilde{V}_{jk}(x_\mu), \quad \tilde{V}_{ik}(\tau) \subset \tilde{V}_{ik}(x_\mu)$$

gelten, die somit die Beziehungen $\gamma'_{ij}(x) \in \tilde{V}_{ij}(x_\mu)$, $\gamma'_{jk}(x) \in \tilde{V}_{jk}(x_\mu)$ und $\gamma'_{ik}(x) \in \tilde{V}_{ik}(x_\mu)$ implizieren. Da der étale-Gruppoidhomomorphismus $\varphi : \Gamma \rightarrow \Gamma_F$ auf den Einheiten stationär und $g'_{ij}(x)g'_{jk}(x)$ definiert ist, bildet auch $(\gamma'_{ij}(x), \gamma'_{jk}(x))$ ein verknüpfbares Paar, dessen Produkt $\gamma'_{ij}(x)\gamma'_{jk}(x)$ wegen der 2. Behauptung in $\tilde{V}_{ik}(x_\mu)$ liegt. Da aber sowohl dieses Produkt als auch $\gamma'_{ik}(x)$ von der *injektiven* Abbildung $\varphi|_{\tilde{V}_{ik}(x_\mu)}$ auf dasselbe Element $g'_{ij}(x)g'_{jk}(x) = g'_{ik}(x)$ geworfen werden, muß folglich $\gamma'_{ij}(x)\gamma'_{jk}(x) = \gamma'_{ik}(x)$ gelten. Jene Injektivität impliziert auch die Eindeutigkeit des Lifts γ' , womit Teil (a) bewiesen wäre. Bei Teil (b) verfährt man evidenterweise analog.

Zur Klärung der Notationen der nächsten 6. Behauptung bezeichne $\xi \times I^4$ das von der kanonischen Projektion $\pi : X \times I \rightarrow X$ zurückgezogene, geblätterte Mikroidbündel $\pi^*\xi$, welches den Totalraum $E \times I$, die Bündelprojektion $p \times id_I : E \times I \rightarrow X \times I$, den Schnitt $S \times id_I$ und die Zerlegung $\mathcal{F} \times I$ besitzt. Die Schnitte von $\xi \times I$ korrespondieren bijektiv zu Homotopien $H : X \times I \rightarrow E$, so daß jedes H_t ein Schnitt von ξ ist. Eine solche Homotopie H nennen wir eine **Schnittomotopie**.

6. Behauptung: (a): Mit den Bezeichnungen der 1. Behauptung lassen sich γ und der Atlas (V_i, h_i) o.E. so wählen, daß eine offene Umgebung $V \subset E$ des Schnittes $S(X)$ mit der folgenden Eigenschaft existiert: Für jeden stetigen Schnitt $S' : X \rightarrow E$ von $p : E \rightarrow X$ mit

$$S'(X) \subset V$$

gilt:

- (i) $\xi' := (p, S', \mathcal{F})$ ist ebenfalls wie ξ ein geblättertes Mikroidbündel über X mit derselben Faser $F = \Gamma_{\Gamma^0}$, derselben Zerlegung \mathcal{F} und demselben Atlas $(V_i, h_i)^5$.

⁴) $I = [0, 1]$.

⁵) Nur die Schnitte der Trivialisierungen $U_i \times U_{F,i}$ sind natürlich andere.

- (ii) Das von ξ' und (V_i, h_i) gemäß Regel (3) induzierte Γ_F -Kozykel läßt sich kanonisch zu einem Γ -Kozykel γ' liften. Für $S' = S$ gilt hierbei $\gamma' = \gamma$.

(b): Eine analoge Aussage gilt für $\xi \times I$ mit dem Atlas $(V_i \times I, h_i \times id_I)$, das Γ -Kozykel $\pi^*\gamma$ und Schnitthomotopien $H : X \times I \rightarrow E$ mit Bild $H \subset V$.

Beweis: Wieder reicht es, (a) zu zeigen. Eigenschaft (i) ist zur Bedingung $S'(U_i) \subset V_i$ für alle i äquivalent. Da X kompakt ist, können wir den Atlas (V_i, h_i) zunächst als endlich voraussetzen. Gemäß Regel (2) induziert eine bogenzusammenhängende Schrumpfung (U'_i) von (U_i) einen geschrumpften Atlas (V'_i, h'_i) . Wegen $X = U_i \cup C\bar{U}'_i$ ist

$$\tilde{V}_i := p^{-1}(C\bar{U}'_i) \cup V_i$$

eine offene Umgebung des Schnittes $S(X)$ für alle i . Daher genügt ein Schnitt $S' : X \rightarrow X$ von p mit $S'(X) \subset \tilde{V}_i$ der Bedingung $S'(U'_i) \subset V'_i$. Mit $\tilde{V} := \bigcap_i \tilde{V}_i$ erhalten wir also eine offene Umgebung von $S(X)$, so daß mit dem neuen Atlas (V'_i, h'_i) zunächst (i) erfüllt werden kann. Um Eigenschaft (ii) zu gewinnen, soll natürlich die 5. Behauptung zum Einsatz kommen, wobei nur noch \tilde{V} drastisch verkleinert werden muß; der Atlas (V'_i, h'_i) bedarf hingegen nur einer weiteren Verfeinerung, so daß wir ohne Bedenken mit den Substitutionen $U_i := U'_i$, $V_i := V'_i$, $h_i := h'_i$ weiterarbeiten können.

Wie im Beweis der ersten Behauptung verwenden wir die Abkürzung $g := \varphi_*(\gamma)$. Ferner wählen wir eine bogenzusammenhängende Schrumpfung (U'_i) von (U_i) und eine geeignete Karte $|K| = X$ wie in der Vorbereitung zur 4. Behauptung und definieren wie dort die Mengen $\tilde{V}_{ij}(\tau)$ für jedes $\tau \in K$. Wir halten im folgenden ein Simplex $\tau \in K$, zwei Indizes i, j mit $\tilde{V}_{ji}(\tau) \neq \emptyset$ und ein $x \in |\tau|$ fest. Dann ist $|\tau|$ gemäß Eigenschaft (1) der 4. Behauptung in $U_i \cap U_j$ enthalten. Zum Verständnis der weiteren Argumentation muß man sich erinnern, wie aus § 3.4.1 das zugehörige Γ_F -Kozykel g konstruiert wird, wozu wir angepaßte Bezeichnungen verwenden: S_i sei der Schnitt der Trivialisierung $U_i \times U_{F,i}$ und

$$W_{ji} = h_i(V_i \cap V_j) \subset U_i \times U_{F,i}$$

die offene Umgebung des Schnittes $S_i|_{U_i \cap U_j}$, auf der die Übergangsfunktion

$$G_{ji} = h_j \circ (h_i|_{W_{ji}})^{-1} : W_{ji} \xrightarrow{\cong} V_i \cap V_j \xrightarrow{\cong} W_{ij}$$

definiert ist. Jeder Keim $g_{ji}(x')$ mit $x' \in U_i \cap U_j$ wird von dem Keim von G_{ji} in $S_i(x') = (x', g_{ii}(x'))$ induziert. Somit können wir offene Umgebungen $W_{ji,x} \subset F$ von $g_{ii}(x)$ und $\tilde{W}_{ji,x} \subset F$ von $g_{jj}(x)$ zusammen mit einem lokalen PL-Homöomorphismus

$$g_{ij,x} : W_{ij,x} \xrightarrow{\cong} \tilde{W}_{ij,x}$$

sowie eine offene Umgebung $U_{ji,x} \subset U_i \cap U_j$ von x derart finden, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

- $U_{ji,x} \times W_{ji,x} \subset W_{ji} \cap h_i(\tilde{V} \cap V_i)$,
- $G_{ji}|_{U_{ji,x} \times W_{ji,x}} = id_{U_{ji,x}} \times g_{ji,x} : U_{ji,x} \times W_{ji,x} \longrightarrow U_{ji,x} \times \tilde{W}_{ji,x}$,
- $g_{ii}(U_{ji,x}) \subset W_{ji,x}$ mit $g_{ji}(x') = \text{Keim von } g_{ji,x} \text{ in } g_{ii}(x')$ für alle $x' \in U_{ji,x}$,

- Für alle $w \in W_{ji,x}$ ist der Keim von g_{ji} in w ein Element aus $V_{ji}(\tau)$.

Die letzte Bedingung resultiert aus $g_{ji}(x) \in V_{ji}(\tau)$ nach Eigenschaft (1) der 4. Behauptung. Da jede Menge $U_{ji,x} \times W_{ji,x}$ eine offene Umgebung von $S_i(x)$ darstellt, ist

$$\bigcup_{x \in |\tau|} U_{ji,x} \times W_{ji,x}$$

eine offene Umgebung von $S_i(|\tau|)$, die mittels h_i^{-1} zu einer offenen Umgebung $\tilde{V}_{ji,\tau}$ von $S(|\tau|)$ mit

$$\tilde{V}_{ji,\tau} \subset \tilde{V} \cap V_i \cap V_j$$

korrespondiert. Wir betrachten erstmal nur irgendeinen Schnitt $S' : X \rightarrow E$ von $p : E \rightarrow X$ mit $S'(X) \subset \tilde{V}$ und $S'(|\tau|) \subset \tilde{V}_{ji,\tau}$. Dann ist zunächst die Eigenschaft (i) erfüllt, so daß $\xi' := (p, S', \mathcal{F})$ ein geblättrtes Mikroidbündel über X mit Atlas $(V_i, h_i)_i$, Übergangsfunktionen $(G'_{ji})_{j,i}$ und lt. 3.4.1 zugehörigem Γ_F -Kozykel g' ist. Da ξ' bis auf die Schnitte der lokalen Trivialisierungen, die wir hier mit S'_i bezeichnen wollen, denselben Atlas wie ξ besitzt, gilt $G'_{ji} = G_{ji}$ für alle j, i .

Behauptung: $g'_{ji}(|\tau|) \subset V_{ji}(\tau)$.

Beweis: Sei $x' \in |\tau|$ beliebig. Wegen $S'_i(x') \in h_i(\tilde{V}_{ji,\tau})$ existiert ein $x \in |\tau|$ mit $S'_i(x') \in U_{ji,x} \times W_{ji,x}$, was äquivalent zu $x' \in U_{ji,x}$ und $g'_{ii}(x') \in W_{ji,x}$ ist. Ferner gilt wegen $G'_{ji} = G_{ji} = id_{U_{ji,x}} \times g_{ji}$ auf $U_{ji,x} \times W_{ji,x}$

$$g'_{ji}(x') = \text{Keim von } g_{ji,x} \text{ in } g'_{ii}(x')$$

und daher $g'_{ji}(x') \in V_{ji}(\tau)$.

Für jedes Simplex $\tau \in K$ setzen wir

$$\tilde{V}_\tau := \bigcap \{ \tilde{V}_{ji,\tau} \mid \tilde{V}_{ji}(\tau) \neq \emptyset \}.$$

Dann ist \tilde{V}_τ eine offene Umgebung von $S(|\tau|)$ mit $\tilde{V}_\tau \subset \tilde{V}$. Was wir daher nur noch brauchen, ist eine offene Umgebung V von $S(X)$ mit der Eigenschaft: S' Schnitt von p mit $S'(X) \subset V \Rightarrow S'(|\tau|) \subset \tilde{V}_\tau$ für alle $\tau \in K$. Denn dann gilt nach obiger Behauptung $g'_{ji}(|\tau|) \subset V_{ji}(\tau)$, falls $\tilde{V}_{ji}(\tau) \neq \emptyset$, so daß sich das zur Überdeckung (U'_i) verfeinerte Γ_F -Kozykel g'' nach der 5. Behauptung kanonisch zu einem Γ -Kozykel γ'' liften läßt.

Sie dazu $\tau \in K$ ein beliebiges Simplex von K . Weil S stetig ist, existiert eine offene Umgebung $U_\tau \subset X$ von $|\tau|$ mit

$$S(U_\tau) \subset \tilde{V}_\tau.$$

Aufgrund der Abgeschlossenheit von $|\tau| \subset X$ und der Normalität von X finden wir eine offene Umgebung $U'_\tau \subset U_\tau$ von $|\tau|$ mit $\bar{U}'_\tau \subset U_\tau$. Wir verfahren nun ähnlich wie bei der Definition von \tilde{V}_i und setzen

$$V_\tau := \tilde{V} \cap (p^{-1}(C\bar{U}'_\tau) \cup \tilde{V}_\tau),$$

so daß V_τ eine offene Umgebung von $S(X)$ mit $V_\tau \subset \tilde{V}$ ist. Für jeden stetigen Schnitt S' von p mit $S'(X) \subset V_\tau$ gilt also

$$S'(|\tau|) \subset S'(U'_\tau) \subset \tilde{V}_\tau.$$

Somit stellt

$$V := \bigcap_{\tau \in K} V_\tau$$

eine geeignete Umgebung von $S(X)$ dar, wobei wir den neuen Atlas (V'_i, h'_i) nehmen und die Invarianz von Eigenschaft (i) gegenüber Verfeinerung beachten müssen. \square

Nach diesen Vorbereitungen können wir mit dem eigentlichen Approximationsbeweis beginnen. Dazu nehmen wir die Gegebenheiten (mitsamt den Bezeichnungen) der 6. Behauptung an und ändern den ursprünglichen Schnitt $S : X \rightarrow E$ von ξ mittels einer Schnitthomotopie $H : X \times I \rightarrow E$, die sukzessive konstruiert wird und stationär auf Q ist, zu einem nd-zahmen Schnitt $\tilde{S} := H_1$ ab, so daß $\text{Bild } H \subset V$ gilt. Hierbei heiße ein Schnitt $\tilde{S} : X \rightarrow E$ von $p : E \rightarrow X$ nd-zahm auf einem Unterpolyeder $A \subset X$, wenn $\tilde{\xi} := (p, \tilde{S}, \mathcal{F})$ ein geblättertes Mikroidbündel über X ist, und die eingeschränkte Γ_F -Struktur $\tilde{\sigma}|_A$ der zu ξ gehörenden Γ_F -Struktur $\tilde{\sigma}$ nd-zahm ist. Wie bereits bemerkt wurde, korrespondiert eine solche Schnitthomotopie $H : X \times I \rightarrow E$ zu genau einem Schnitt $H' : X \times I \rightarrow E \times I$ von $\xi \times I$, dessen Projektion auf E mit H übereinstimmt.

Die sukzessive Konstruktion von H wird simplexweise durchgeführt. Hierzu wählen wir gemäß der 3. Behauptung (oder mittels Existenz der Lebesgue-Zahl) eine PL-Karte $|K| = X$ und einen simplizialen Unterkomplex $L \subset K$ von K , der Q trianguliert, so daß zu jedem Simplex $\varrho \in K$ ein U_i mit $|\varrho| \subset U_i$ existiert.

Bezeichnet m die Anzahl aller Simplizes aus $K - L$, so wird die gesuchte Homotopie H in m Schnitthomotopien $H_k, k = 1, \dots, m$ mit $\text{Bild } H_k \subset V$ für alle k unterteilt. Formal äußert sich dies in einer Unterteilung von $I = [0, 1]$ in m Teilintervalle, wodurch auch $\xi \times I$ in m Teilbündel unterteilt wird. Die einzelnen Schnitthomotopien H_k dieser Teilbündel setzen sich dann stetig zu einer Schnitthomotopie H von $\xi \times I$ mit $\text{Bild } H \subset V$ zusammen.

Die einzelnen Homotopieschritte werden in bestimmter Reihenfolge vorgenommen: beginnend bei Simplizes aus $K - L$ in unteren Dimensionen und innerhalb einer Dimension sukzessive nach der Anzahl, wobei die Homotopie jeweils auf dem Rand des betreffenden Simplex stationär ist.

Es seien bereits k -viele Homotopieschritte durchgeführt, wobei $S_k : X \rightarrow E$ den Schnitt nach der k -ten Homotopie bezeichne. Ein Simplex $\varrho \in K$ sei jetzt an der Reihe, so daß $S_k|_{|\varrho|}$ als nd-zahm angenommen werden kann, wobei außerdem $\text{Bild } S_k \subset V$ gelte.

Nach Konstruktion von K existiert ein i mit $|\varrho| \subset U_i$. Teil (a) der 6. Behauptung impliziert $S_k(U_i) \subset V_i$, so daß wir in der Trivialisierung

$$U_{i_0} \times U_{F, i_0}$$

arbeiten können (und müssen). Mit g_{ii} bezeichnen wir die Projektion von $h_i \circ S_k|_{U_i}$ auf $U_{F, i}$ ⁶⁾. Zur weiteren Argumentation nehmen wir an, daß $U_{F, i}$ o.E. PL-homöomorph zu einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^n ist: Da der beliebige, ursprüngliche Atlas von ξ von der 1. bis zur 6. Behauptung mehrfach verkleinert wurde, können wir jenen, weil $F = \Gamma^0$ eine allgemeine PL-Mannigfaltigkeit ist, auch gleich von vornherein so wählen, daß jedes $U_{F, i}$ PL-äquivalent zu einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^n ist, was dann erst recht für die

⁶⁾ g_{ii} gehört ja gerade zu einem Γ_F -Kozykel, das zum geblätterten Mikroidbündel mit Schnitt S_k korrespondiert.

modifizierten Atlanten zutrifft. Daher fassen wir $U_{F,i}$ als offenen, metrischen Unterraum des \mathbb{R}^n auf.

Nach Voraussetzung ist $g_{ii}|_{|\partial\varrho|}$ bereits eine lokal nicht degenerierte und daher eine nicht degenerierte PL-Abbildung (s. die Fußnote auf Seite 252), die nun stationär auf $|\partial\varrho|$ zu einer nd-Abbildung auf ganz $|\varrho|$ homotop abgeändert werden soll, wobei diese Homotopie innerhalb $h_i(V \cap V_i)$ bleiben muß.

Wegen Teil (b) der untenstehenden 7. Behauptung gibt es ein $\epsilon > 0$, so daß jede ϵ -Homotopie von $g_{ii}|_{|\varrho|}$ die letztere Bedingung erfüllt. Wegen allgemeiner Lage ($\dim X \leq n$) (s. z.B. [R-S, 5.4]) ist also $g_{ii}|_{|\varrho|}$ stationär auf $|\partial\varrho|$ ϵ -homotop zu einer nd-Abbildung $\tilde{g}_{ii} : |\varrho| \rightarrow U_{F,i}$. Der Graph dieser ϵ -Homotopie stellt daher eine Schnitthomotopie über $|\varrho|$ dar, die nun zu einer Homotopie H_{k+1} über ganz X fortgesetzt werden muß, deren Bild in V liegt: Auf den Simplizes aus L und auf solchen der Dimension $< \dim \varrho =: r$ sei diese Homotopie stationär und ebenso auf allen von ϱ verschiedenen Simplizes der gleichen Dimension r . Nur für Simplizes der Dimension $> r$ ist etwas mehr Sorgfalt angebracht.

Sei beispielsweise τ ein Simplex der Dimension $r+1$, auf dessen Rand $|\partial\tau|$ die H_{k+1} bereits definiert sei. Wir wählen wieder irgendein i mit $|\tau| \subset U_i$. Aufgrund der 6. Behauptung wird $|\partial\tau| \times I$ von H_{k+1} nach V_i abgebildet, so daß man o.E. wieder in der Trivialisierung $U_i \times U_{F,i}$ von V_i arbeiten kann und die Homotopie von τ nur für die Projektion auf $U_{F,i}$ zu definieren braucht:

Gegeben ist also eine stetige Abbildung

$$|\tau| \times 0 \cup |\partial\tau| \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

die zu einer stetigen Abbildung $|\tau| \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ fortgesetzt werden soll, was natürlich durch Vorschalten der Retraktion $|\tau| \times I \rightarrow |\tau| \times 0 \cup |\partial\tau| \times I$ sofort gewährleistet ist, wobei auch das Bild unverändert bleibt und somit H_{k+1} derart auf $|\tau|$ fortgesetzt wurde, daß $H_{k+1}(|\tau|) \subset V$ gilt. Man verfährt nun analog mit den anderen Simplizes der Dimension $r+1$ und führt dies Dimension für Dimension fort, womit dann die $(k+1)$ -te Schnitthomotopie H_{k+1} vollständig definiert wäre und nach V abbildet.

7. Behauptung: (a): Sei (Y, d) ein metrischer Raum, X kompakt, $f : X \rightarrow Y$ stetig und $V \subset Y$ eine offene Umgebung von Bild f . Dann existiert ein $\epsilon > 0$, so daß für jede stetige Abbildung $\tilde{f} : X \rightarrow Y$ mit $d(f, \tilde{f}) < \epsilon$ V auch offene Umgebung von Bild \tilde{f} ist.

(b): Seien X, Y metrische Räume mit X kompakt, $f : X \rightarrow Y$ stetig und $V \subset X \times Y$ eine offene Umgebung von $\text{graph } f$. Dann existiert ein $\epsilon > 0$, so daß für jede stetige Abbildung $\tilde{f} : X \rightarrow Y$ mit $d(f, \tilde{f}) < \epsilon$ V auch offene Umgebung von $\text{graph } \tilde{f}$ ist.

Beweis: Für Teil (a) leistet $\epsilon := d(\text{Bild } f, CV)$ das Gewünschte, und (b) folgt aus (a), indem man $X \times Y$ mit der Produktmetrik versieht.

Zusammengefaßt haben wir also folgendes erreicht:

- Es existiert eine auf Q stationäre Schnitthomotopie $H : X \times I \rightarrow E$ mit $H_0 = S$ und $\text{Bild } H \subset V$, so daß $\tilde{S} := H_1$ auf jedem Simplex einer Triangulierung von X nd-zahm ist. Wegen Additivität (s. 8.1.1) ist dann aber auch \tilde{S} nd-zahm.

- Nach Teil (b) der 6. Behauptung induziert H ein geblättertes Mikroidbündel über $X \times I$, das zu einer Γ_F -Struktur Σ von $X \times I$ korrespondiert, die sich nach Teil (ii) zu einer Γ -Struktur $\tilde{\Sigma}$ mit $\tilde{\Sigma}|_{X \times 0} = \sigma$ liften läßt.
- $\tilde{\sigma} := \tilde{\Sigma}|_{X \times 1}$ liftet die nd-zahme Γ_F -Struktur $\Sigma|_{X \times 1}$ (die zu \tilde{S} gehört) und ist daher selbst nd-zahm. Ferner gilt $\tilde{\Sigma}|_{Q \times t} = \sigma|_Q$ für alle $t \in [0, 1]$.
- $\tilde{\Sigma}$ wird durch eine Abbildung $F : X \times I \rightarrow B^* \Gamma$ klassifiziert, die den Bedingungen
 - $F|_{X \times 0} = f$,
 - $F|_{X \times 1} = \tilde{f}$ klassifiziert die nd-zahme Γ -Struktur $\tilde{\sigma}$,
 - $F|_{Q \times I}$ stationär

genügt.

Damit ist der Beweis des Lemmas erbracht. △

8.1.3 Zahme Γ -Strukturen induzieren auf natürlichste Weise entsprechende zahme Grundstrukturen auf $B^* \Gamma$. Wir geben die Definition exemplarisch nur für den nd-zahmen Fall an.

DEFINITION. Γ sei eine étale-PL-Kategorie. Dann bestehe die **nd-zahme Grundstruktur** von $B^* \Gamma$ aus allen **Top^{*}**-Morphismen

$$f : P \longrightarrow B^* \Gamma,$$

so daß $P \in \mathbf{P}$ ein kompaktes Polyeder ist, und die gemäß Satz 5.4.2 (A) zu f gehörige Γ -Struktur nd-zahm ist.

Für die anderen Fälle wendet man die gleiche Definitionsschablone an.

So gibt es für jede étale-Kategorie Γ z.B. zwei kanonische Möglichkeiten, auf $B^* \Gamma$ eine zahme Grundstruktur zu bekommen:

- (1) Die über die residual zahmen Γ -Strukturen definierte residual zahme Grundstruktur,
- (2) Die in Bemerkung 7.2.2 definierte residuale zahme Grundstruktur.

Man fragt sich natürlich sofort, ob diese beiden zahmen Grundstrukturen übereinstimmen. Obwohl dies sehr plausibel erscheint, läßt eine befriedigende Antwort noch auf sich warten.

BEZEICHNUNG. Für jede étale-PL-Kategorie Γ sind auf $B^* \Gamma$ insbesondere zwei Sorten von **zahmen Standardgrundstrukturen** definiert:

- die residual zahme Grundstruktur,

- die nd-zahme Grundstruktur.

Letztere ist wohl die angemessenste. Aufgrund der étale-Eigenschaft eines étale-PL-Kategoriemorphismus $\varphi : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ zwischen étale-PL-Kategorien $\tilde{\Gamma}, \Gamma$ bekommen wir das

KOROLLAR. $\tilde{\Gamma}, \Gamma$ seien étale-PL-Kategorien und $\varphi : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ ein étale-PL-Kategoriemorphismus. Dann ist $B^{\star}\varphi : B^{\star}\tilde{\Gamma} \rightarrow B^{\star}\Gamma$ bzgl. jeder zahmen Standardgrundstruktur ein Liftzahmer Morphismus. \triangle

Die für uns wichtigsten Eigenschaften jener beiden zahmen Standardgrundstrukturen sind im nächsten Lemma festgehalten.

LEMMA. Γ sei ein étale-PL-Gruppoid. Dann gilt:

- (a) Jede der zwei zahmen Standardgrundstrukturen von $B^{\star}\Gamma$ ist additiv.
- (b) Ist Γ zudem ein TOP-Mannigfaltigkeitsgruppoid der Dimension n , so ist jede zahme Standardgrundstruktur von $B^{\star}\Gamma$ additiv und n -dimensional.

BEWEIS: Seien $P = P_0 \cup P_1$ eine \mathbf{P} -Vereinigung und $f_0 : P_0 \rightarrow B^{\star}\Gamma, f_1 : P_1 \rightarrow B^{\star}\Gamma$ stetig mit $f_0|_{P_0 \cap P_1} = f_1|_{P_0 \cap P_1}$. Für $i = 0, 1$ sei σ_i die lt. Satz 5.4.2 (A) zu f_i gehörige Γ -Struktur. Da $B^{\star}\Gamma$ nach Folgerung 5.6.2 additiv ist, gibt es eine stetige Abbildung $f : P \rightarrow B^{\star}\Gamma$, die sowohl f_0 als auch f_1 fortsetzt. Bezeichnet σ die zu f korrespondierende Γ -Struktur, so ergibt sich Teil (a) direkt aus der Additivitätseigenschaft aller Sorten von zahmen Γ -Strukturen in Folgerung 8.1.1.

Teil (b) folgt aus Lemma und Bemerkung 8.1.1. \triangle

Beim Übergang von étale-PL-Kategorien zu den v - \downarrow zahmen Strukturen ihrer klassifizierenden Systeme bietet es sich an, die Notationen möglichst zu reduzieren:

Für jede étale-PL-Kategorie Γ setzen wir bzgl. einer bestimmten ausgewählten zahmen Standardgrundstruktur von $B^{\star}\Gamma$

$$P^{\star}\Gamma := P_v^{\downarrow\star}(B^{\star}\Gamma),$$

wobei $B^{\star}\Gamma$ mit der v - \downarrow zahmen Struktur versehen sei, die per Definition 7.6.1 von der zahmen Standardgrundstruktur von $B^{\star}\Gamma$ induziert ist. Da aus dieser Bezeichnung die Wahl der betreffenden zahmen Standardgrundstruktur nicht festgelegt ist, muß diese stets zusätzlich benannt werden.

Für étale-PL-Kategoriemorphismen $\varphi : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ zwischen étale-Kategorien verwenden wir die gleiche Bezeichnung: Nach obigem Korollar und Lemma 7.6.2 ist die Zähmung $P_v^{\downarrow\star}(B^{\star}\varphi)$ überhaupt definiert, so daß die Abkürzung $P^{\star}\varphi := P_v^{\downarrow\star}(B^{\star}\varphi)$ sinnvoll ist. Damit ist $P^{\star}\varphi$ ein \mathbf{Top}^{\star} -Morphismus

$$P^{\star}\varphi : P^{\star}\tilde{\Gamma} \rightarrow P^{\star}\Gamma.$$

8.1.4 In diesem Unterabschnitt beweisen wir, daß für jeden n -dimensionalen étale-PL-Mannigfaltigkeitsgruppoiden Γ der PL-schwache Homotopietyp von $P^{\star}\Gamma$ (nd-zahme Grundstruktur) in Dimensionen $< n$ gewissermaßen mit $B^{\star}\Gamma$ und daher wegen Satz 5.7.2 mit $B\Gamma$ übereinstimmt.

SATZ. Γ sei ein étale-PL-Mannigfaltigkeitsgruppoid der Dimension n , wobei $B^{\star}\Gamma$ mit der nd-zahmen Standardgrundstruktur versehen werde. Dann ist die natürliche \mathbf{Top}^{\star} -Abbildung

$$t^{\star} : P^{\star}\Gamma \longrightarrow B^{\star}\Gamma$$

eine schwache PL- n -Homotopieäquivalenz.

BEWEIS: Es wird empfohlen, sich die Beweisargumentation von Lemma 7.6.3 zu vergegenwärtigen, weil hier im Prinzip ähnlich vorgegangen wird.

Außerdem bietet der Beweis eine gute Gelegenheit, sich die Zählungskonstruktion von $v\text{-}\downarrow$ zahmen Strukturen zu verinnerlichen.

Gegeben sind also

- $H : P \rightarrow B^{\star}\Gamma$ \mathbf{Top}^{\star} -Morphismus mit $P \in \mathbf{P}$, $\dim P \leq n$,
- $Q_i \subset P$, $i \in I$, endlich viele, paarweise disjunkte \mathbf{P} -Unterpolyeder mit $\dim Q_i \leq n - 1$, $g_i : Q_i \rightarrow P^{\star}\Gamma$ \mathbf{P}^{\star} -Morphismen mit $t^{\star} \circ g_i = H|_{Q_i}$ für alle i .

Gesucht ist ein \mathbf{P}^{\star} -Morphismus $\bar{H} : P \rightarrow P^{\star}\Gamma$ mit

- (i) $\bar{H}|_{Q_i} = g_i$ für alle i ,
- (ii) $t^{\star} \circ \bar{H} \simeq H$ stat $Q := \bigcup_i Q_i$.

Jedes g_i korrespondiert zu einem $v\text{-}\downarrow$ zahmen Element

$$t_{Q_i}(g_i) : Q_i \rightarrow B^{\star}\Gamma$$

mit Basisstruktur $\pi_i : Q_i \rightarrow B_i$, so daß $t_{Q_i}(g_i)$ per Definition im Sinne eines $v\text{-}\downarrow$ zahmen Elementes einen \mathbf{Top}^{\star} -Morphismus $\bar{t}_{Q_i}(g_i) : B_i \rightarrow B^{\star}\Gamma$ als wohldefinierte Faktorisierung besitzt. Weil je zwei v -Repräsentanten von $t_{Q_i}(g_i)$ cofinal gleich sind, ist der von $t_{Q_i}(g_i)$ induzierte \mathbf{Top}^{\star} -Morphismus $[t_{Q_i}(g_i)]$ übrigens mit $t^{\star} \circ g_i$ identisch, so daß letzterer durch π_i zu $\bar{t}_{Q_i}(g_i)$ faktorisiert (\mathbf{Top}^{\star} -Faktorisierung nicht eindeutig).

Für jedes $i \in I$ bezeichne \bar{Q}_i den Abbildungszylinder von $\pi_i : Q_i \rightarrow B_i$, der mit der gleichen Begründung wie im Beweis von Lemma 7.6.3 ein kanonischer PL-Raum ist.

Nun kann man P und die $Q_i \times I$ längs der $Q_i \times 0$ zu einem Polyeder P' verkleben und analog P und die \bar{Q}_i längs der $Q_i \times 0$ zu einem Polyeder \bar{P}' . Dabei ist \bar{P}' der Quotient von P' nach einer Äquivalenzrelation, deren Quotientenprojektion wir mit

$$\bar{\pi}' : P' \rightarrow \bar{P}'$$

bezeichnen. $\bar{\pi}'$ ist jedoch nur stetig und i.a. keine PL-Abbildung. Nach Konstruktion gilt

$$\bar{\pi}'|_{Q_i \times 1} = \pi_i^7)$$

für alle i .

Die Verkettung der Projektion $P \times I \rightarrow P$ mit H ergibt die stationäre Homotopie $\tilde{H} : P \times I \rightarrow B^{\blacktriangleleft}\Gamma$ mit $\tilde{H}_t = H$ für alle t . Identifiziert man P' mit $P \times 0 \cup Q \times I \subset P \times I$, definiert die Einschränkung von \tilde{H} auf P' den **Top $^{\blacktriangleleft}$** -Morphismus

$$H' : P' \longrightarrow B^{\blacktriangleleft}\Gamma$$

mit $H'|_{Q_i \times 1} = t^{\blacktriangleleft} \circ g_i = \bar{t}_{Q_i}(g_i) \circ \bar{\pi}'|_{Q_i \times 1}$ für alle i .

Durch sukzessive Anwendung (Q_i paarweise disjunkt) von Folgerung 4.6.2 auf H' und $\bar{t}_{Q_i}(g_i) : B_i \equiv \bar{\pi}'(Q_i \times 1) \rightarrow B^{\blacktriangleleft}\Gamma$ bekommen wir daher eine Faktorisierung

$$\bar{H}' : \bar{P}' \longrightarrow B^{\blacktriangleleft}\Gamma$$

von H' über $\bar{\pi}'$ mit

$$H' = \bar{H}' \circ \bar{\pi}' \quad \text{und} \quad \bar{H}'|_{B_i = \bar{\pi}'(Q_i \times 1)} = \bar{t}_{Q_i}(g_i) = \text{nd-zahm}$$

für alle i .

Aufgrund der Additivität der nd-zahmen Grundstruktur stellt daher $\bar{H}'|_{\bar{\pi}'(Q \times 1)}$ ein nd-zahmes Element von $B^{\blacktriangleleft}\Gamma$ dar. Wegen $\dim \bar{P}' \leq n$ impliziert Lemma 8.1.2 die Existenz einer nd-zahmen Abbildung $\tilde{H}' : \bar{P}' \rightarrow B^{\blacktriangleleft}\Gamma$ und einer strengen Homotopie $\bar{H}' \simeq \tilde{H}'$ stat $\bar{\pi}'(Q \times 1)$. Mit relativer simplizialer Approximation können wir außerdem $\bar{\pi}'$ stationär auf $Q \times 1$ zu einer PL-Abbildung $\tilde{\pi}' : P' \rightarrow \bar{P}'$ abändern. In übersichtlicher Schreibweise gilt somit

$$\begin{aligned} \bar{\pi}' &\simeq \tilde{\pi}' \quad \text{stat} \quad Q \times 1, \\ \bar{H}' &\simeq \tilde{H}' \quad \text{stat} \quad \bar{\pi}'(Q \times 1). \end{aligned}$$

Wegen $P' \equiv P \times 0 \cup Q \times I \subset P \times I$ gibt es einen starken PL-Deformationsretrakt

$$P \times I \xrightarrow{r} P'.$$

Die Verkettung $P \equiv P \times 1 \xrightarrow{r} P' \xrightarrow{\tilde{\pi}'} \bar{B}' := \tilde{\pi}'(P')$ definiert eine Basisstruktur von P , so daß alle Inklusionen $Q_i \hookrightarrow P$ **P $^{\downarrow}$** -Morphismen sind. Diese Basisstruktur von P und der eingeschränkte **Top $^{\blacktriangleleft}$** -Morphismus

$$\tilde{H}'|_{\bar{B}'} : \bar{B}' \rightarrow B^{\blacktriangleleft}\Gamma$$

definieren ein v- \downarrow zahmes Element von $B^{\blacktriangleleft}\Gamma$, das via der Bijektion t_P zum **P $^{\blacktriangleleft}$** -Morphismus

$$\bar{H} : P \longrightarrow P^{\blacktriangleleft}\Gamma$$

korrespondiere. Nach Konstruktion gilt $\bar{t}_{Q_i}(g_i) = \bar{H}'|_{B_i} = \tilde{H}'|_{B_i}$ und $\tilde{\pi}'|_{Q_i \times 1} = \bar{\pi}'|_{Q_i \times 1} = \pi_i$, so daß (wegen der Bijektivität von t_{Q_i}) zunächst die Bedingung

$$\bar{H}|_{Q_i} = g_i$$

⁷⁾Hierbei wird Q_i mit $Q_i \times 1$ identifiziert.

erfüllt ist.

Wir müssen noch $t^\star \circ \bar{H} \simeq H$ stat Q zeigen. Bezeichnet $[t_P(\bar{H})]$ den von $t_P(\bar{H})$ induzierten \mathbf{Top}^\star -Morphismus, so ist dieser mit $t^\star \circ \bar{H}$ identisch. Daraus ergibt sich die Gleichungskette

$$\begin{aligned} t^\star \circ \bar{H} &= [t_P(\bar{H})] \\ &= \tilde{H}' \circ \tilde{\pi}' \circ r|_{P \times 1} \\ &\simeq \bar{H}' \circ \bar{\pi}' \circ r|_{P \times 1} \quad \text{stat} \quad Q \times 1 \\ &= H' \circ r|_{P \times 1} \\ &= \tilde{H} \circ r|_{P \times 1}. \end{aligned}$$

Da $r : P \times I \rightarrow P'$ nach Voraussetzung ein starker Deformationsretrakt ist, gilt

$$r|_{P \times 1} \simeq P \times 1 \hookrightarrow P \times I \quad \text{stat} \quad Q \times 1.$$

Daraus folgt $\tilde{H} \circ r|_{P \times 1} \simeq \tilde{H}'|_{P \times 1}$ stat $Q \times 1$. Wegen $\tilde{H}'|_{P \times 1} = H$ ist somit der Satz bewiesen. \triangle

FOLGERUNG. *Unter den Voraussetzungen dieses Satzes besitzen $H_k^D(P^\star\Gamma)$ und $H_k^D(P^\star\Gamma; \mathbb{Z}_2)$ natürliche Gruppenstrukturen für alle $k \leq n-1$. Ferner gibt es kanonische Gruppenisomorphismen*

$$H_k^D(P^\star\Gamma) \cong H_k(B\Gamma), \quad H_k^D(P^\star\Gamma; \mathbb{Z}_2) \cong H_k(B\Gamma; \mathbb{Z}_2)$$

sowie kanonische Surjektionen $H_n^D(P^\star\Gamma) \rightarrow H_n(B\Gamma)$, $H_n^D(P^\star\Gamma; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_n(B\Gamma; \mathbb{Z}_2)$.

BEWEIS: Mit Bemerkung 6.4.3, Folgerung 5.6.2, Lemma 6.4.1 und der Natürlichkeit von $H_k^D(\cdot) \rightarrow H_k^\Omega(\cdot)$ induziert t^\star das nachstehende kommutative Diagramm,

$$\begin{array}{ccc} H_k^D(P^\star\Gamma) & \longrightarrow & H_k^\Omega(P^\star\Gamma) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ H_k^D(B^\star\Gamma) & \xrightarrow{\cong} & H_k^\Omega(B^\star\Gamma) \end{array}$$

in dem für $k = n$ die senkrechten Bijektionen durch Surjektionen zu ersetzen sind. Satz 5.7.2, Lemma 6.4.3 in Verbindung mit Folgerung 5.6.2 und Bemerkung 6.3.5 liefern dann den Isomorphismus $H_k(B\Gamma) \xrightarrow{\cong} H_k^\Omega(B\Gamma) \xrightarrow{\cong} H_k^\Omega(B^\star\Gamma)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. \triangle

8.2 Abstrakte Klassifikation

Dieser Abschnitt enthält die zwei zentralen Klassifikationssätze 8.2.1 und 8.2.3. Hierbei klassifiziert Satz 8.2.1 ganz allgemein geliftete étale-PL-Gruppoid-Strukturen und impliziert daher Satz 8.2.3 als Spezialfall, der die Isomorphieklassen von PL-Blätterungen abstrakt klassifiziert.

8.2.1 Der nun folgende abstrakte Klassifikationssatz für geliftete étale-PL-Gruppoid-Strukturen stellt aufgrund seiner Allgemeinheit das zentrale Resultat der Arbeit dar.

SATZ. *Gegeben seien:*

- Eine der zwei zahmen Standardgrundstrukturen aus Bezeichnung 8.1.3 für étale-PL-Kategorien,
- Zwei allgemeine, n -dimensionale étale-PL-Mannigfaltigkeitsgruppoid $\tilde{\Gamma}$ und Γ ,
- Ein étale-PL-Gruppoidhomomorphismus $\varphi : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$,
- Eine geschlossene, n -dimensionale PL-Mannigfaltigkeit M mit $M \in \mathbf{P}$ o.E.,
- Eine étale-PL- Γ -Struktur $\sigma \in H^1(M; \Gamma)$.

$f : M \rightarrow B^{\star}\Gamma$ bezeichne die klassifizierende Abbildung für σ , die zu $t^{-1}(f) : M \rightarrow P^{\star}\Gamma$ korrespondiere, und $\text{Aut}_{\sigma}M$ den Stabilisator von $\text{Aut}^{\text{TOP}}M$ in σ . Mittels der von φ induzierten Abbildungen

$$\begin{aligned} H^1(\varphi) : H^1(M; \tilde{\Gamma}) &\longrightarrow H^1(M; \Gamma), \\ P^{\star}\varphi : P^{\star}\tilde{\Gamma} &\longrightarrow P^{\star}\Gamma, \\ H_n^D(P^{\star}\varphi; \mathbb{Z}_2) : H_n^D(P^{\star}\tilde{\Gamma}; \mathbb{Z}_2) &\longrightarrow H_n^D(P^{\star}\Gamma; \mathbb{Z}_2) \end{aligned}$$

gibt es dann eine kanonische Bijektion

$$(H^1(\varphi))^{-1}(\sigma) / \text{Aut}_{\sigma}M \xrightarrow{\cong} (H_n^D(P^{\star}\varphi; \mathbb{Z}_2))^{-1}(f_*[M]).$$

Ferner existiert eine surjektive Retraktion

$$[M, P^{\star}\tilde{\Gamma}]_{[t^{-1}(f)]} / [M, M]^{\cong} \longrightarrow (H^1(\varphi))^{-1}(\sigma) / \text{Aut}_{\sigma}M.$$

Für $\Gamma = \Gamma_F^{\text{PL}}$ ist dabei $\text{Aut}_{\sigma}M$ mit $\text{Aut}^{\text{PL}}M$ identisch. Eine entsprechende Klassifikation mit der orientierten Dipol-Homologie bzw. $[M, M]_{\mp}^{\cong}$ gilt für orientiertes M und den orientierten Stabilisator $\text{Aut}_{\sigma,+}M$.

BEWEIS: Jene Aussage über den Stabilisator $\text{Aut}_{\sigma}M$ resultiert aus Folgerung 3.3.2 (b).

Ansonsten brauchen wir nur noch die einzelnen Voraussetzungen von Satz 7.7.2 zu überprüfen:

Als étale-PL- Γ -Struktur ist σ sowohl residual zahm als auch nd-zahm, so daß f in beiden Fällen der zahmen Standardgrundstruktur von $B^\star\Gamma$ angehört.

Lt. Lemma 8.1.3 (b) sind die zahmen Standardgrundstrukturen von $\tilde{\Gamma}$ und Γ beide additiv und n -dimensional. Nach Korollar 8.1.3 ist die induzierte Abbildung $B^\star\varphi : B^\star\tilde{\Gamma} \rightarrow B^\star\Gamma$ Liftzahm.

Wegen Satz 5.5.1 (a) korrespondieren die Lifts von σ bzgl. φ modulo $\text{Aut}_\sigma M$ kanonisch bijektiv zu $\{M, B^\star\tilde{\Gamma}\}_f / \text{Aut}_\sigma M$. Hierbei ist $\text{Aut}_\sigma M$ nach Folgerung 3.3.2 (a) in $\text{Aut}^{\text{PL}} M$ enthalten, so daß $\text{Aut}_\sigma M$ mit dem Stabilisator von $\text{Aut}^{\text{PL}} M$ in σ übereinstimmt. \triangle

BEMERKUNG. Der Satz gilt auch ohne die PL-Voraussetzungen, wenn nur $\tilde{\Gamma}$ und Γ n -dimensionale étale-TOP-Mannigfaltigkeitsgruppoiden und M eine n -dimensionale, geschlossene PL-Mannigfaltigkeit sind. Wir haben aber diesen Satz deswegen nicht allgemeiner formuliert, weil es meist gar nicht sinnvoll ist, PL-Isomorphieklassen von Strukturen zu klassifizieren, die einer größeren Kategorie als **PL** angehören: So zerfällt etwa jede TOP-Isomorphieklasse von TOP-Blätterungen in überabzählbar viele PL-Isomorphieklassen.

8.2.2 Aus dem Beweisteil von Satz 7.7.2 der Injektivität von κ ergibt sich unmittelbar der folgende abstrakte **Injektivitätssatz** für étale-PL-Gruppoid-Strukturen.

SATZ. *Es seien $M \in \mathbf{P}$ eine n -dimensionale, geschlossene PL-Mannigfaltigkeit und Γ ein n -dimensionaler étale-PL-Mannigfaltigkeitsgruppoid. Dann gibt es bzgl. jeder der zwei zahmen Standardgrundstrukturen von $B^\star\Gamma$ eine kanonische Injektion*

$$\{\text{étale-PL-}\Gamma\text{-Strukturen auf } M\} / \text{Aut}^{\text{PL}} M \hookrightarrow H_n^D(P^\star\Gamma; \mathbf{Z}_2).$$

Für orientiertes M erhält man eine analoge Injektion modulo $\text{Aut}_+^{\text{PL}} M$ in $H_n^D(P^\star\Gamma)$. \triangle

8.2.3 Satz 8.2.1 läßt sich mittels Satz 3.3.3 und Beispiel 3.1.2 zu einem abstrakten Klassifikationssatz für PL-Blätterungen spezifizieren.

SATZ. *Die Inklusion $\Gamma_{\{n,q\}}^{\text{PL}} \subset \Gamma_n^{\text{PL}}$ werde mit i bezeichnet. M (mit $M \in \mathbf{P}$ o.E.) sei eine geschlossene, n -dimensionale PL-Mannigfaltigkeit mit ihrer kanonischen Γ_n^{PL} -Struktur $\sigma_M \in H^1(M; \Gamma_n^{\text{PL}})$, die durch die Abbildung $f_M : M \rightarrow B^\star\Gamma_n^{\text{PL}}$ klassifiziert werde, wobei f_M bzgl. einer ausgewählten der beiden zahmen Standardgrundstrukturen zu $t^{-1}(f_M) : M \rightarrow P^\star\Gamma_n^{\text{PL}}$ korrespondiere.*

Dann gibt es eine kanonische Bijektion

$$\text{Fol}_q^{\text{PL}}(M) / \cong \xrightarrow{\approx} \left(H_n^D(P^\star i; \mathbf{Z}_2) \right)^{-1} (f_{M,*}[M]),$$

wobei $H_n^D(P^\star i; \mathbf{Z}_2) : H_n^D(P^\star \Gamma_{\{n,q\}}^{\text{PL}}; \mathbf{Z}_2) \longrightarrow H_n^D(P^\star \Gamma_n^{\text{PL}}; \mathbf{Z}_2)$ die von $i : \Gamma_{\{n,q\}}^{\text{PL}} \hookrightarrow \Gamma_n^{\text{PL}}$ induzierte Homologieabbildung bezeichne. Ferner existiert eine surjektive Retraktion

$$\left[M, P^\star \Gamma_{\{n,q\}}^{\text{PL}} \right]_{[t^{-1}(f_M)]} / [M, M]^\simeq \longrightarrow \text{Fol}_q^{\text{PL}}(M) / \cong .$$

Eine entsprechende Aussage mit der orientierten Dipol-Homologie bzw. $[M, M]_+^\simeq$ gilt für orientiertes M und die orientierten Isomorphieklassen von $\text{Fol}_q(M)$.

Im Fall der nd -zahmen Standardgrundstruktur ist außerdem Folgerung 8.1.4 auf $\Gamma_{\{n,q\}}^{\text{PL}}$ und Γ_n^{PL} anwendbar. \triangle

8.3 Anmerkungen

Zum Schluß sollen einige Bemerkungen zum besseren Verständnis der Arbeit beitragen.

8.3.1 Warum \mathbf{P}^\downarrow -Polyeder Γ

Wir stellen uns die Frage, ob man zur Gewinnung einer abstrakten Klassifikation von gelifteten étale-PL-Gruppoid-Strukturen wie in Satz 8.2.1 wirklich nicht auch ohne Verwendung der \mathbf{P}^\downarrow -Polyeder auskommen könnte.

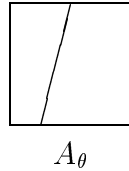
Um dies zu beantworten, müssen wir uns zunächst über die Beweisfunktion der \mathbf{P}^\downarrow -Polyeder klar werden: Damit Lemma 7.5.1 überhaupt angewandt werden kann, bedarf es letztendlich singulärer Homologie-Kobordismen in geeignete Systemkomponenten des klassifizierenden Systems, die irgendwie auf einen Vergleich der beiden Homologieenden schließen lassen.

Man könnte mutmaßen, bereits diese Vorstellung sei nicht adäquat, weil es besser wäre, mit Homologien oder noch besser Homotopien zwischen geblättern Mikroidbündeln zu arbeiten, die den klassifizierenden Abbildungen entsprechen. Bei den üblichen Bündeln ist dies natürlich der Fall, weil ihre Isomorphieklassen homotopieinvariant sind. Aber gerade diese Homotopieinvarianz ist ja für geblättern Mikroidbündel in gravierender Weise verletzt!

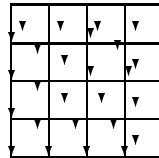
Die Möglichkeit eines noch ungenutzten Potentials der geblättern Mikroidbündel sollte durchaus nicht bestritten werden. Aber diese ist offenbar zukünftiger Forschung vorbehalten und im Rahmen dieser Arbeit nicht zu realisieren.

Damit wir o.E. von Homologien in Systemkomponenten ausgehen konnten, bedurfte es der Additivität der Homologien, d.h. der Möglichkeit, Homologie-Kobordismen aneinander zu kleben, was aufgrund der Additivität von $B^\star \Gamma$ auch kein Problem darstellt. Aber ohne weitere Zusatzbedingungen kommt im Sinne von Lemma 7.5.1 kein Vergleich der Homologieenden zustande—was seinen Grund (siehe jedoch Anmerkung 8.3.3!) in der „wilden“ Topologie (nicht Hausdorffsch) von $B\Gamma$ hat—und genau deswegen sind wir zur Einführung der zahmen Homologien und zahmen Strukturen gezwungen. Abhängig von der konkreten Gestalt der zahmen Strukturen kann dadurch aber die Additivität verloren gehen, was wir am Beispiel der Kronecker-Blätterung demonstrieren wollen:

Angenommen eine zahme Struktur für \mathbf{Top} sei wie folgt definiert: $f : P \rightarrow X$ zahm : \iff die von f induzierte bgzsh-Zerlegung \mathcal{F}_f von P ist triangulierbar. Wir zeigen, daß eine solche zahme Struktur niemals additiv sein kann: Man nehme die Kronecker-Blätterung A_θ



auf dem Torus mit irrationaler Steigung θ und der zugehörigen Blätterprojektion $\pi : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1 / A_\theta$. Wir triangulieren den Torus mit einer seiner affinen Standardzerlegungen, z.B. so:



Die Einschränkung von A_θ auf jedes Simplex ist eine affine Zerlegung und daher natürlich auf jedem Simplex triangulierbar! Daher ist $\pi|_{|\sigma|}$ für jedes Simplex σ zahm. Wäre die besagte zahme Struktur additiv, müßte daher π zahm sein, d.h. A_θ auch auf dem ganzen Torus triangulierbar, so daß nach dem Quotientensatz 1.4.2 der Blätterraum Hausdorffsch wäre, was bekanntlich ganz und gar nicht der Fall ist.

Damit ist das obige Phänomen nur beschrieben, aber nicht dessen Grund erklärt. Dieser besteht darin, daß es in \mathbf{P} keine allgemeinen Pushouts, sondern nur Pushouts von \mathbf{P} -Einbettungen gibt.

Nun ist beispielsweise die residual zahme Standardgrundstruktur nach Lemma 8.1.3 (a) zwar additiv, aber wir kommen mit der Standardgrundstruktur allein nicht aus: Ein singulärer Homologie-Kobordismus nach $B\Gamma$ mit n -dimensionalen Enden kann niemals residual lokal injektiv sein, weil er die Dimension $n+1 > n$ hat, so daß auf den $(n+1)$ -Simplizes sowieso Entartungen irgendwelcher Art auftreten *müssen*. Ohne Zusatzbedingungen an die bgzsh-Zerlegungen sind die Blätterräume (bzgl. ihrer von den Homologien induzierten Zerlegungen) solcher $(n+1)$ -Homologie-Kobordismen in der Regel nicht Hausdorffsch, womit wir natürlich nicht viel anfangen können. Daher bietet sich die sehr bequeme, wenn auch starke Forderung an, daß diese Blätterräume Polyeder seien. Damit müssen wir aber die Grundstruktur verlassen, was wir—wegen der o.g. fehlenden Pushout-Eigenschaft teuer mit dem Verlust der Additivität bezahlen.

Mit Verwendung der \mathbf{P}^\downarrow -Polyeder gewinnen wir jedoch die verloren geglaubte Additivität zumindest für \mathbf{Top} wieder zurück, indem die Pushout-Eigenschaft von Einbettungen in \mathbf{P} ausgenutzt wird. Weil aber \mathbf{Top}^\leftarrow -Faktorisierungen nicht eindeutig sind (s. Lemma und Bemerkung 7.3.2), ist damit für \mathbf{Top}^\leftarrow die Additivität immer noch nicht gesichert, was die Einführung der *variablen* \downarrow zahmen Strukturen erforderlich macht.

8.3.2 Der Brouwersche Fixpunktsatz

Das Lemma 7.5.1 wurde mit konventionellen Argumenten bewiesen. Für das Verständnis förderlicher wäre aber eine Beweismethode, die wir nun exemplarisch am Beispiel des Brouwerschen Fixpunktsatz demonstrieren.

Unser Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes verwendet lediglich simpliziale Approximation.

Bekanntlich folgt der Fixpunktsatz von Brouwer daraus, daß $S^{n-1} \subset B^n$ kein stetiger Retrakt ist. Wir führen nun folgenden Widerspruchsbeweis:

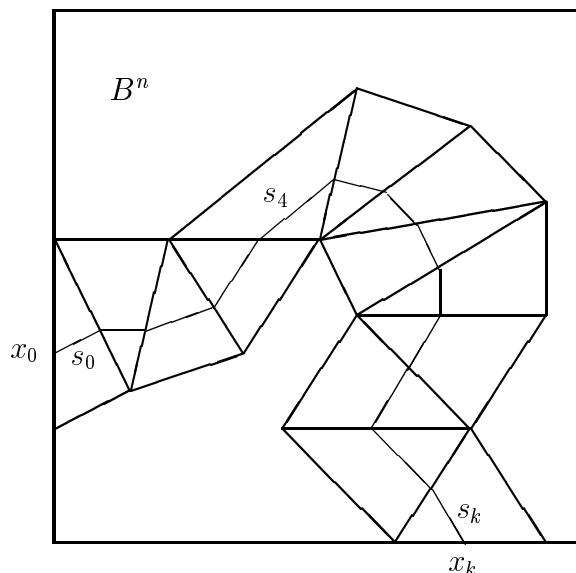
Angenommen, es gäbe einen stetigen Retrakt $f : B^n \rightarrow S^{n-1}$. Fassen wir B^n und S^{n-1} standardmäßig als Polyeder auf, so ist f wegen simplizialer Approximation ($f|_{S^{n-1}} = id_{S^{n-1}}$ ist PL) o.E. triangulierbar, so daß eine Triangulierung $|K| = B^n$ von B^n sowie ein simplizialer Unterkomplex $L \subset K$ von K existieren mit

$$|L| = S^{n-1},$$

$$f : |K| \longrightarrow |L| \text{ simplizial.}$$

Anders gesagt existiert somit ein simplizialer Retrakt $g : K \rightarrow L$ von $L \subset K$ mit $|g| = f$.

Entscheidend ist nun, daß jedes prinzipale Simplex von K Dimension n hat und jedes prinzipale Simplex von L Dimension $n - 1$. Daher wird jedes n -Simplex von K durch g entartet. Dies nutzen wir aus, um das folgende **Pfadargument** einzuführen, das im nächsten Bild anschaulich demonstriert wird.



Ein Punkt $x \in S^{n-1}$ liege im Inneren $\langle \varrho_0 \rangle$ eines eindeutig bestimmten $(n - 1)$ -Simplex $\varrho_0 \in L$. Da B^n eine n -dimensionale PL-Mannigfaltigkeit ist, existiert genau ein n -Simplex $\sigma_0 \in K$, das ϱ_0 als Seite enthält. g bildet die $(n + 1)$ -elementige Menge σ_0 auf eine Menge mit höchstens n Elementen ab. Andererseits ist g auf der n -elementigen Teilmenge $\varrho_0 \subset \sigma_0$ injektiv. Daher ist die von g auf $|\sigma_0|$ induzierte simpliziale Zerlegung 1-dimensional, und

es existiert genau eine $(n-1)$ -Seite $\varrho'_0 \subset \sigma_0$ mit $\varrho'_0 \neq \varrho_0$ und $g(\varrho'_0) = g(\varrho_0)$. Setzen wir $x_0 := x$, gibt es somit genau eine konvexe Strecke s_0 innerhalb $|\sigma_0|$, die von f entartet wird, $|\varrho_0|$ genau in x_0 trifft und $|\varrho'_0|$ in genau einem inneren Punkt $x'_0 \in \langle \varrho'_0 \rangle$. Insbesondere gilt $f(x_0) = f(x'_0)$. Jetzt gibt es die beiden Möglichkeiten

$$(1) \quad \varrho'_0 \in L,$$

$$(2) \quad \varrho'_0 \notin L.$$

Im ersten Fall ende unser Pfad und bestehe nur aus dieser Strecke s_0 in $|\sigma_0|$. Im zweiten Fall ist ϱ'_0 Seite genau eines von σ_0 verschiedenen n -Simplex $\sigma_1 \in K$. Analog zu vorhin gibt es wieder eine eindeutige $(n-1)$ -Seite $\varrho'_1 \subset \sigma_1$ mit $g(\varrho'_1) = g(\varrho_1)$, wobei $\varrho_1 := \varrho'_0$ gelte, und eine eindeutige 1-dimensionale Strecke s_1 in $|\sigma_1|$ mit Anfangspunkt $x_1 := x'_0$ und Endpunkt $x'_1 \in \langle \varrho'_1 \rangle$. Dies führen wir nun durch induktive Definition solange fort, bis der Fall (1) eintritt und mit einem Pfad s_0, \dots, s_k endet. Die Endlichkeit dieses Verfahrens ist natürlich beweisbedürftig:

Bricht das Verfahren nicht ab, haben wir einen unendlichen Pfad $s_0, s_1, s_2, s_3, \dots$ von konvexen Strecken $s_i \subset \sigma_i$, zu dem entsprechende Folgen $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ und $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \dots$ gehören. Nach Konstruktionsvorschrift liegt jedes $(n-1)$ -Simplex ϱ_i mit $i \geq 1$ *nicht* in L . Daraus leiten wir die folgenden beiden Eigenschaften der Folge $(x_i)_{i \geq 0}$ ab:

(1) Für jedes $i \geq 1$ ist die Menge $\{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$ dreielementig.

(2) Ist $x_i = x_k$ mit $i, k \geq 1$, so gilt $\{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\} = \{x_{k-1}, x_k, x_{k+1}\}$.

Liegt eine endliche Folge x_0, x_1, \dots, x_l vor, so gelten (1), (2) stattdessen für alle $1 \leq i, k \leq l-1$. Außerdem gelten noch die Eigenschaften

$$(3) \quad x_0 = x_l \Rightarrow x_1 = x_{l-1},$$

$$(4) \quad x_0, x_l \neq x_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq l-1.$$

Sei $i_0 := \min\{i \mid \exists k \neq i \text{ mit } x_i = x_k\}$. Diese Menge ist nicht leer, weil aufgrund der Endlichkeit von K die unendliche Folge (ϱ_i) nur endlich viele Werte annehmen kann, was sich auf die Folge (x_i) überträgt. Nun muß $i_0 \geq 1$ gelten, weil ϱ_0 in L liegt. Nach Eigenschaft (2) existiert somit ein $k > i_0$ mit $x_k = x_{i_0}$ und $\{x_{k-1}, x_k, x_{k+1}\} = \{x_{i_0-1}, x_{i_0}, x_{i_0+1}\}$, was sich aber nicht mit der Minimalität von i_0 vereinbaren läßt, ergo Widerspruch zur Annahme.

Wir können also mit einem endlichen Pfad x_0, \dots, x_l arbeiten. Beide Punkte x_0, x_l liegen im Rand S^{n-1} von B^n .

Behauptung: $x_0 \neq x_l$.

Beweis: Die gegenteilige Annahme $x_0 = x_l$ liefert uns wegen Eigenschaft (3) (und auch (1)) die Existenz von $i_\infty := \max\{1 \leq i \leq l-1 \mid \exists k \neq i \text{ mit } x_i = x_k\}$. Ähnlich zu oben existiert daher ein $k < i_\infty$ mit $x_k = x_\infty$. Wegen (4) ist $k \geq 1$, so daß wir mit (3) $\{x_{k-1}, x_k, x_{k+1}\} = \{x_{i_\infty-1}, x_{i_\infty}, x_{i_\infty+1}\}$ bekommen, und i_∞ daher doch nicht maximal wäre, was die Behauptung beweist.

Einerseits gilt also $x_0 \neq x_l$, aber andererseits auch $f(x_0) = f(x_l)$ nach Konstruktion des Pfades, so daß $f|_{S^{n-1}}$ nicht injektiv wäre im Widerspruch zu $f|_{S^{n-1}} = id_{S^{n-1}}$. \triangle

Obiges Pfadargument kann für *jeden* inneren Punkt $x \in \langle \varrho \rangle$ eines festen prinzipalen Simplex $\varrho \in L$ angewandt werden. Dies ist auch der Standpunkt, von dem aus wir das Pfadargument einsetzen.

Hier nun eine Sizzle des alternativen Beweises von Lemma 7.5.1. Zur Erinnerung nochmal die Behauptung, die wir nur für n -Zykel formulieren:

Q_0, Q_1 seien zwei n -Zykel, X ein n -dimensionaler PL-Raum und $f_0 : Q_0 \rightarrow X$, $f_1 : Q_1 \rightarrow X$ zwei PL-Abbildungen mit den beiden Bedingungen

- f_0 ist injektiv,
- $H_n(f_0; \mathbf{Z}_2)([Q_0]) = H_n(f_1; \mathbf{Z}_2)([Q_1])$ in $H_n(X; \mathbf{Z}_2)$.

(a) Dann gilt $\text{Bild } f_0 \subset \text{Bild } f_1$ und

$$H_n(f_0; \mathbf{Z}_2)([Q_0]) = H_n(f_1; \mathbf{Z}_2)([Q_1]) \text{ in } H_n(\text{Bild } f_1; \mathbf{Z}_2).$$

Ist zudem f_1 ebenfalls injektiv, existiert ein PL-Homöomorphismus $\varphi : Q_1 \xrightarrow{\cong} Q_0$ mit $f_1 = f_0 \circ \varphi$.

(b) Eine analoge Aussage gilt für den orientierten Fall, wobei Q_0, Q_1 als orientierte n -Zykel vorausgesetzt werden und φ orientierungserhaltend ist.

Beweisskizze: (a): Wir haben einen singulären PL-Kobordismus $H : M \rightarrow X$ mit $\partial M = Q_0 \dot{\cup} Q_1$, der durch einen simplizialen Komplex K trianguliert sei, so daß die von H induzierte Zerlegung \mathcal{F}_H simplizial bzgl. K ist. Hierbei seien Q_0, Q_1 durch simpliziale Unterkomplexe $K_0, K_1 \subset K$ von K trianguliert.

Mit dem Pfadargument gewinnen wir Pfade, die im Inneren von n -Simplizes aus K_0 starten und im Inneren von n -Simplizes aus K_1 enden. Der Abschluß aller dieser Pfade stellt einen simplizialen Unterkomplex $N \subset K$ der Karte K von M dar, der K_0 enthält. Mit $\mathcal{F}_N := \mathcal{F}_H|_{|N|}$ werden dann $\tilde{Q}_1 := Q_1 \cap |N|$ und Q_0 beide jeweils surjektiv auf den Blätterraum $|N|/\mathcal{F}_N$ abgebildet. Da H durch die Blätterprojektion faktorisiert, gilt $f_0(Q_0) = H(Q_0) \subset H(Q_1) = f_1(Q_1)$. Sind f_0 und f_1 beide injektiv, folgt die Existenz von φ wie im Beweis von Lemma 7.5.1.

Dieser alternative Beweis von Lemma 7.5.1 bringt nun das, worauf es wirklich ankommt, viel besser zum Vorschein: Gebraucht wird lediglich eine bgzsh-Zerlegung \mathcal{F} von M mit den folgenden Eigenschaften:

- (1) H faktorisiert durch die Blätterprojektion $M \rightarrow M/\mathcal{F}$,
- (2) Der Blätterraum M/\mathcal{F} ist Hausdorffsch,
- (3) Jedes Blatt $L \in \mathcal{F}$, das Q_0 trifft, schneidet auch Q_1 .

Bei einer triangulierbaren Zerlegung \mathcal{F} von M garantierte uns das Pfadargument und die Injektivität von f_0 die dritte Bedingung automatisch.

Falls auch f_1 injektiv ist, bekommen wir mit diesen Bedingungen (1)–(3) zunächst nur die Existenz eines **Top**-Homöomorphismus $\varphi : Q_1 \rightarrow Q_0$ mit $f_1 = f_0 \circ \varphi$. Dies ist aber für die PL-Anwendung unerheblich, weil der Stabilisator $\text{Aut}_f M$ bzgl. $\text{Aut}^{\text{TOP}} M$ einer klassifizierenden Abbildung $f : M \rightarrow B^* \Gamma_n^{\text{PL}}$ einer étale- Γ_n^{PL} -Struktur sowieso in $\text{Aut}^{\text{PL}} M$ enthalten ist.

Die obigen Bedingungen (1)–(3) eröffnen wahrscheinlich die Möglichkeit, das Konzept der \mathbf{P}^\downarrow -Polyeder so zu erweitern, daß mit zahmen Grundstrukturen allgemeinerer Art eine abstrakte Klassifikation innerhalb dieses methodischen Rahmens von topologischen und differenzierbaren Blätterungen sowie von exotischen Strukturen auf **Top**-Mannigfaltigkeiten denkbar erscheint.

8.3.3 Abstrakte Klassifikation triangulierbarer Blätterungen

Aus der Arbeit resultieren zwei grundlegende Einsichten:

- (1) Ohne Zähmung gibt es keine abstrakte Klassifikation.
- (2) Je weniger gezähmt werden muß, um so besser.

Das Optimum in dieser Hinsicht ist erreicht, wenn die klassifizierenden Abbildungen bereits schon zahm sind, so daß eine Zähmung gar nicht erforderlich ist. Dann würde auch das Arbeiten mit \mathbf{P}^\downarrow -Polyedern entfallen.

Es gibt auf den ersten Blick überhaupt keinen Grund, wieso diese angenehme Situation nicht für triangulierbare Blätterungen eintreten sollte. Dieser Ansicht liegt möglicherweise die Vorstellung zugrunde, das Zähmen wäre eine Folge der i.a. nicht Hausdorffschen Blätterräume.

Doch dies ist ein fundamentaler Irrtum! Selbst bei triangulierbaren Blätterungen, deren Blätterräume nach dem Quotientensatz 1.4.2 sogar Polyeder sind, kommt man ohne Zähmung nicht aus!

Begründung: Die Zähmung war im Prinzip durch die nicht separierten klassifizierenden Räume $B\Gamma$ bedingt, was an der Kegeltopologie von $\bar{C}\Gamma$ liegt. Aber $\bar{C}X$ ist für *jeden* topologischen Raum X nicht Hausdorffsch, selbst dann, wenn X ein Hausdorff-Raum ist!

Andererseits würde zur abstrakten Klassifikation triangulierbarer Blätterungen das Arbeiten in der simplizialen Kategorie ohnehin besser passen, wofür eine andere Sorte von Gruppoiden, nämlich triangulierbare und simpliziale, in Frage kämen. Hierbei sollte man besser den üblichen simplizialen oder PL-Kegel CX nehmen, was jedoch folgenden Nachteil hat: Die Dimension erhöht sich um 1. Daher brauchen die simplizialen Homologie-Kobordismen keineswegs zur n -ten Dimension entartet werden, so daß deswegen doch wieder eine n -dimensionale zahme Struktur eingeführt werden muß.

Der einzige prinzipielle Vorteil wäre der Verzicht auf \mathbf{P}^\downarrow -Polyeder, indem man in der ri-Kategorie arbeitet, was aber auch erst für simpliziale Verhältnisse sinnvoll ist. Daher wird

sich der wahre Nutzen der ri-Kategorie möglicherweise erst bei der abstrakten Klassifikation der triangulierbaren Blätterungen zeigen.

8.3.4 Wahrscheinlich keine Gruppenstruktur auf $H_n^D(P^\star\Gamma; \mathbb{Z}_2)$

Bereits an einem einfachen Beispiel sieht man, daß auf $H_n^D(P^\star\Gamma)$ eine einigermaßen natürliche \mathbb{Z}_2 -Vektorraumstruktur i.a. gar nicht existieren kann.

Für das Gegenbeispiel nehmen wir eine endliche Menge Λ von ungerader Kardinalität und eine zusammenhängende, geschlossene PL-Mannigfaltigkeit M der Dimension n , um die triviale Überlagerung

$$\varphi : M \times \Lambda \longrightarrow M$$

zu bilden. Da jeder topologische Raum X wegen $X \subset \Gamma_X$ kanonisch als étale-Gruppoid interpretiert werden kann, fassen wir M und $M \times \Lambda$ als n -dimensionale étale-PL-Gruppoid und φ als étale-PL-Gruppoidhomomorphismus auf. Dann stiftet die Identität $id : M \rightarrow M$ als M -Kozykel die étale-PL- M -Struktur σ auf M .

Weil der Gruppoid M mit seinen Einheiten übereinstimmt, sind für jeden Raum $X \in \mathbf{Top}$ die M -Strukturen von X mit den stetigen Abbildungen $X \rightarrow M$ identisch. Gleiches gilt natürlich für $M \times \Lambda$. Dies hat zweierlei Konsequenzen:

- (1) Der PL-Stabilisator Aut_σ von σ ist trivial.
- (2) Die Lifts von σ bzgl. φ modulo Aut_σ sind nichts anderes als die stetigen Schnitte von φ , die bijektiv zu Λ korrespondieren.

Nach Satz 8.2.1 läßt sich daher Λ aber auch mit einer Faser der Dipol-Homologieabbildung

$$H_n^D(P^\star\varphi; \mathbb{Z}_2) : H_n^D(P^\star(M \times \Lambda); \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_n^D(P^\star M; \mathbb{Z}_2)$$

identifizieren. Wäre es nun irgendwie möglich, auf diesen Dipol-Homologiemengen jeweils Gruppenstrukturen mit nur 2-periodischen Elementen zu definieren, so daß $H_n^D(P^\star\varphi; \mathbb{Z}_2)$ ein Gruppenhomomorphismus ist, würde Λ dem Kern von $H_n^D(P^\star\varphi; \mathbb{Z}_2)$ entsprechen, der aber als endlichdimensionaler Vektorraum über \mathbb{Z}_2 die Mächtigkeit einer Zweier-Potenz besitzt, die somit ungleich Λ wäre, was einen Widerspruch lieferte.

Damit ist zwar nicht klar, ob es allgemeinere Gruppenstrukturen als solche auf diesen Homologiemengen geben könnte. Aber das Beispiel läßt dies eher unwahrscheinlich anmuten.

Gegen eine abelsche Gruppenhomomorphie von $H_n^D(P^\star\varphi; \mathbb{Z}_2)$ spricht auch die geringe Wahrscheinlichkeit der Existenz universeller Naturkonstanten, die nur abhängig von der Dimension und Kodimension die Kardinalzahl von $\text{Fol}_q(X)/\cong$ klassifizieren würden.

Es sei darauf hingewiesen, daß zu jedem PL-additiven System $X^\star \in \mathbf{PL}^\star$, also insbesondere zu jeder $v\text{-}\downarrow$ Zählung, eine Art schwach homotopieäquivalentes CW-Substitut aus $\mathbf{PL}^\star \subset (\mathbf{PL}^\star)^\star$ existiert, das jedoch i.a. *nicht* der Coequalizer-Bedingung genügt, denn sonst wären die Dipol-Homologien der Zählungssysteme abelsche Gruppen!

8.3.5 Relative Homologie

In der Arbeit ist nur die absolute Homologie für projektive Systeme definiert worden. Für \mathbf{Top} würde dies normalerweise zur Definition der relativen Homologie auch genügen, indem man $H_n(X, A) := \tilde{H}_n(X \cup CA)$ ⁸⁾ setzt. Bei allgemeinen projektiven topologischen Systemen ist diese Methode wegen der fehlenden Pushouteigenschaft von \mathbf{Top}^\star jedoch nicht anwendbar. Außerdem ist der Begriff eines Untersystems in \mathbf{Top}^\star nicht klar, so daß i.w. nur folgendes Verfahren in Frage kommt, das auch in \mathbf{Top} zu einer alternativen Definition der relativen Homologie führt:

Sei $i : A \rightarrow X$ eine stetige Abbildung, für die die relative Homologie $H_n(i)$ definiert werden soll. Die singulären n -Zykel seien Tripel (P, f, \bar{f}) , die aus einem orientierten, berandeten n -Zykel P , einer stetigen Abbildung $f : P \rightarrow X$ und einer stetigen Abbildung $\bar{f} : \partial P \rightarrow A$ mit $i \circ \bar{f} = f|_{\partial P}$ bestehen (siehe Bild).

$$\begin{array}{ccc} \partial P & \xrightarrow{\bar{f}} & A \\ \downarrow & & \downarrow i \\ P & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Disjunkte Vereinigung und Orientierungsumkehrung versehen die Menge solcher singulären n -Zykel mit einer involutiven Monoidstruktur, so daß nur noch der Untermonoid der nullhomologen Zykel definiert werden muß: ein singuläres n -Zykel (P, f, \bar{f}) sei nullhomolog, wenn ein orientiertes, berandetes $(n+1)$ -Zykel M mit $\partial M = P \cup W$ existiert, wobei W ein berandetes n -Zykel sei mit $W \cap P = \partial P = \partial W$, sowie stetige Abbildungen $F : M \rightarrow X$ und $\bar{F} : W \rightarrow A$ mit $F|_P = f$ und $i \circ \bar{F} = F|_W$.

Dies ist eine Definition, die nur den Begriff der stetigen Abbildung verwendet und sich daher mit den nötigen Modifikationen für die Ω - und Dipol-Homologie mit der gleichen Begründung wie in 6.3.2 und 7.4.1 auf die Kategorien \mathbf{Top}^\star und \mathbf{Top}^\star_z überträgt.

8.3.6 Faserungssubstitute in $\mathbf{Top}^\star \Gamma$

Im Hinblick auf die surjektive Klassifikation gelifteter étale-PL-Gruppoid-Strukturen aus Satz 8.2.1 mittels Lifthomotopieklassen wäre die Existenz von homotopieäquivalenten Faserungssubstituten⁹⁾ angesagt.

Offensichtlich läßt sich das Standardverfahren für \mathbf{Top} nicht so ohne weiteres auf \mathbf{Top}^\star übertragen. Aber die Zähmungskonstruktion stellt prinzipiell ein gutes Vorbild für ein adäquates Verfahren in \mathbf{Top} dar, da es ohnehin nur auf schwache Homotopieäquivalenz ankommt.

Aber selbst wenn Faserungssubstitute in \mathbf{Top}^\star existieren, gibt es noch Unklarheit über den Begriff „der“ Faser einer \mathbf{Top}^\star -Serre-Faserung. Weitere Forschung wird sicherlich einiges zu diesem Thema beitragen.

⁸⁾ $\tilde{H}_n(X) = \ker(H_n(X) \rightarrow H_n(*))$.

⁹⁾ in \mathbf{Top} heißt dies, daß jede stetige Abbildung bis auf Homotopieäquivalenz durch eine Faserung ersetzt werden kann.

8.3.7 Äußere Systemeigenschaften von $P^{\leftarrow}\Gamma$

Das klassifizierende System $B^{\leftarrow}\Gamma$ bzw. $B^{\rightleftarrows}\Gamma$ eines étale-Gruppoiden Γ verfügt über feudale Systemeigenschaften, die direkt aus der internen Beschaffenheit des Systems abgeleitet werden konnten.

Man möchte natürlich gerne wissen, welche dieser Eigenschaften sich auf die Zähmung $P^{\leftarrow}\Gamma$ übertragen. Wie auch immer die Antwort lauten mag, auf jeden Fall ist es nicht sinnvoll, diese Eigenschaften aus der internen Beschaffenheit von $P^{\leftarrow}\Gamma$ herzuleiten. Stattdessen ist es sinnvoller, sich auf *äußere* Eigenschaften von $B^{\leftarrow}\Gamma$ zu beschränken, d.h. Eigenschaften, die sich rein mit stetigen Abbildungen $Q \rightarrow B^{\leftarrow}\Gamma$, Q kompaktes Polyeder, ausdrücken lassen. Die Übertragung jener äußeren Eigenschaften von $B^{\leftarrow}\Gamma$ auf $P^{\leftarrow}\Gamma$ wird dann durch die natürliche Bijektion t_Q geleistet.

Als Beispiel für eine äußere Eigenschaft sei hier die Additivität von $P^{\leftarrow}\Gamma$ innerhalb \mathbf{P}^{\leftarrow} genannt, die sich aus der Additivität der v - \downarrow zahlen Standardstrukturen ergibt.

Literaturverzeichnis

- [And] G. A. Anderson: Surgery with Coefficients,
Lect. Notes 591, Springer, 1977
- [B-N] J.-L. Brylinski, V. Nistor: Cyclic cohomology of étale groupoids,
K-Theory, 1994, 8, 341–365
- [Bra] J. Bracho: Haefliger structures and linear homotopy,
Trans. AMS. 282 (1984), 529–538
- [B-J] T. Bröcker, K. Jänich: Einführung in die Differentialtopologie,
Heidelberger Taschenbücher Band 143, Springer-Verlag, Berlin, 1973
- [B-M] M. Breuer, Ch.D. Marshall: Banachian Differentiable Spaces,
Math. Annalen, **237**, 1978, 105–120
- [B-R-S] S. Buoncristiano, C.P. Rourke, B.J. Sanderson: A Geometric Approach
to Homology Theory,
London Mathematical Society Lecture Notes Series 18, Cambridge Uni-
versity Press, Cambridge, 1976
- [Connes] A. Connes: Noncommutative geometry,
Academic Press, 1994
- [DMV] M. Kreck: Exotische Strukturen auf 4-Mannigfaltigkeiten,
in Jahresbericht der DMV **88**, 1986, 124–145
- [Dwyer] W.G. Dwyer: Tame homotopy theory,
Topology 18 (1979) 4, 321–338
- [E-S] S. Eilenberg, N. Steenrod: Foundations of Algebraic Topology,
Princeton University Press, Princeton, 1952
- [Est] W. T. van Est: Rapport sur les S-atlas,
Astérisque, 1984, **116**, 235–292 Princeton University Press, Princeton,
1952
- [Freed1] M. H. Freedman: The topology of four-manifolds,
J. Diff. Geom. **17** (1982), 357–453
- [Freed2] M. H. Freedman, F. Quinn: Topology of 4-manifolds,
Princeton Mathematical Series 39, Princeton, 1990

- [G-P] V. Guillemin, A. Pollack: Differential Topology, Prentice-Hall, New Jersey, 1974
- [Grom] M.L. Gromov: Thesis, Izv. Akad. Navk. SSSR 33(1969), 707–734
- [Haefl-D] A. Haefliger: Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoides, Comm. Math. Helv. 32 (1958), 248–329
- [Haefl-T] A. Haefliger: Feuilletages sur les variétés ouvertes, Topology 9 (1970), 183–194
- [Haefl] A. Haefliger: Homotopy and Integrability, Manifolds Amsterdam 1970, Lect. Notes 197, Springer, 1971, 133–163
- [Haef] A. Haefliger: Groupoïdes d’holonomie et classifiants, Astérisque, 1984, **116**, 70–97
- [Hirsch] M. W. Hirsch: Differential Topology, Graduate Texts in Mathematics 33, Springer-Verlag, New York, 1976
- [Hock] J. G. Hocking, G. S. Young: Topology, Addison Wesley, 1961
- [Hud] J. F. P. Hudson: Piecewise Linear Topology, W. A. Benjamin, New York, 1969
- [Huse] D. Husemoller: Fibre Bundles, Graduate Texts in Mathematics 20, Springer-Verlag, 1966
- [Kultze] R. Kultze: Garbentheorie, Teubner, Stuttgart, 1970
- [Kura] K. Kuratowski: Topology, Vol II, Academic Press, 1968
- [La] K. Lamotke: Semisimpliziale algebraische Topologie, Grundlehren der math. Wiss. 147, Springer, Berlin, 1968
- [Lang] S. Lang: Differential Manifolds, Addison Wesley, 1972
- [L-R] R. Lashof, M. Rothenberg: Microbundles and smoothing, Topology 3 (1964), 357–388
- [Laws] H. B. Lawson: Foliations, Bull. AMS 80, No. 3, 1974
- [Mar] C. D. Marshall: The De Rham Cohomology of subcartesian structures, Technical report 24, Lawrence, Kansas, 1971

- [McL] S. Mac Lane: Kategorien. Begriffssprache und mathematische Theorie, Hochschultext, Springer, Berlin, 1972
- [Mi] J. Milnor: Construction of universal bundles II, Ann. of Math. (2) 63 (1956), 430–436
- [Mi1] J. W. Milnor: Microbundles, Part I, Topology 3, Supplement 1 (1964), 53–79
- [Moer] I. Moerdijk: Proof of a conjecture of A. Haefliger, Topology, **37**, No. 4, July, 1998, 735–741
- [Pay] K. R. Payne: Smooth tame Frechet algebras and Lie groups of pseudo-differential operators, Comm. Pure-Appl. Math. 44 (1991) no. 3, 309–337
- [Per] W. J. Pervin: Foundations of General Topology, Academic Press, New York, 1964
- [Phil] A. Phillips: Smooth maps transverse to a foliation, Bull. of AMS 76 (1970), 792–797
- [Ren] J. Renault: A Groupoid Approach to C^* -algebras, Lect. Notes in Math., Vol. 793, Springer, New-York, 1980
- [R-S] C. P. Rourke, B. J. Sanderson: Introduction To Piecewise-Linear Topology, Ergeb. der Math. und ihrer Grenzgeb. 69, Springer, Berlin, 1972
- [Sch] M. Schirle: Triangulierbare Blätterungen, Sektionsvortrag der DMV-Jahrestagung 1995 in Ulm, Tagungsband S. 136
- [Schub] H. Schubert: Kategorien I, Heidelberger Taschenbücher, Springer-Verlag, Berlin, 1970
- [Se] G. Segal: Classifying spaces and spectral sequences, I.H.E.S. No. 34 (1968), 105–112
- [Spa] E. H. Spanier: Algebraic Topology, McGraw-Hill Series in higher mathematics, 1966
- [Thurs] W. Thurston: The theory of foliations of codimension greater than one, Comm. Math. Helv. vol. 49, 1974, 214–231
- [Top] M. K. Fort jr. (editor): Topology of 3-manifolds and related topics, Prentice-Hall, 1962
- [tom] T. tom Dieck: Topologie, de Gruyter, Berlin, 1991

- [Wa] F.W. Warner: Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Editorial Series of I.M. Singer; Scott, Foresman and Company, Glenview, London, 1971
- [Whd] J. H. C. Whitehead: Simplicial spaces nuclei and m -groups, Proc. London Math. Soc. **45**, 243-327 (1939)

Symbolverzeichnis

Ab	Kategorie der abelschen Gruppen	i
Cat	Kategorie der kleinen Kategorien	i
Grp	Kategorie der Gruppen	i
Grpd	Kategorie der Gruppoide	i
Mod_R	Kategorie der R -Moduln	i
PL	Kategorie der PL-Räume	i
Set	Kategorie der Mengen	i
Set₀	Kategorie der Mengen mit Basispunkt	i
SIM	Kategorie der simplizialen Komplexe	i
Top	Kategorie der topologischen Räume	i
Top₀	Kategorie der topologischen Räume mit Basispunkt	i
\mathcal{F}	Zerlegung, bgzsh-Zerlegung oder Blätterung	11,13
L	Blatt, i.e. Äquivalenzklasse, einer Zerlegung	12
$\mathcal{F} _U$	Einschränkung der Zerlegung auf U	12,14
$M/\mathcal{F}, X/\mathcal{F}$	Blätterraum oder Blätterquotient	12
$f_*(\mathcal{F})$	von der Bijektion f transportierte Zerlegung	12
$f^*(\mathcal{F})$	Pullback einer bgzsh-Zerlegung unter f	14
$\mathcal{F}_{n,q}$	Kanonische bgzsh-Zerlegung des \mathbb{R}^n der Kodimension q	15
$\sum_i \mathcal{F}_i$	Summenzerlegung der \mathcal{F}_i	13,16
$\text{Fol}_q(M)$	Menge der CAT-Blätterungen auf M der Kodimension q	22
$\text{Aut}^{\text{CAT}}(M)$	Gruppe der CAT-Automorphismen von M	24
$\text{Aut}(M)$	dito	24
$\text{Iso}^{\text{CAT}}(M)$	Gruppe der CAT-Isotopien von M	24
$\text{Iso}(M)$	dito	24

$\text{Fol}_q(M)/G$	G -Klassen der CAT-Blätterungen auf M der Kodimension q ..	24
$\text{Fol}_q(M)/\cong$	Isomorphieklassen der CAT-Blätterungen auf M der Kodimension q	24
$\text{Fol}_q(M)/\text{Isotopie}$	Isotopieklassen der CAT-Blätterungen auf M der Kodimension q	24
$\text{Bufol}_F(M)$	Menge der Bündelblätterungen von M mit Faser F	25
$\text{Bufol}_F(M)/G$	G -Klassen der Bündelblätterungen von M mit Faser F	25
$\text{Bufol}_F(M)/\cong$	Isomorphieklassen der Bündelblätterungen von M mit Faser F	25
$\text{Bufol}_F(M)/\text{Isotopie}$	Isotopieklassen der Bündelblätterungen von M mit Faser F	25
$\langle \sigma \rangle$	Träger eines Simplex σ	26
$\text{Triang}(X)$	Menge aller Triangulierungen von X	26
\mathcal{F}_f	von der Abbildung f induzierte bgzsh-Zerlegung	33
$\Gamma(\pi)$	Menge der Schnitte einer Garbe π	35
$S(M, N)$	Garbe der lokalen CAT-Homöomorphismen von M nach N ...	36
$F_q(M)$	Garbe der q -kodimensionalen CAT-Blätterungen auf M	37
$\Gamma(\pi)/G$	36
$\mathbf{L}(F; M)$	41
$B_F(M)$	Bündelgarbe über M mit Faser F	42
\mathcal{A}_{x_0}	Menge von Abbildungskeimen um x_0	50
$\tilde{\mathcal{A}}_{x_0}$	\mathcal{A}_{x_0}/\sim	50
\bar{A}	Entsprechende Äquivalenzklasse von $A \in \mathcal{A}_{x_0}$	50
$D_x^{\mathcal{A}_x}(f)$	\mathcal{A}_x -Ableitung von f in x	50
$T_x f$	Tangentialmorphismus von f in x	57
TX	Tangentialbündel von $X \in \mathbf{Top}$	58
$\tau(X)$	Tangentialmikroidbündel von X	59
ξ	meist ein Mikroidbündel oder Mikrobündel	60
$E(\xi)$	Totalraum des Mikroidbündels ξ	60
$[f, \bar{f}]$	Mikroidmorphismus	63
$f^* \xi$	Pullback eines Mikro- oder Mikroidbündels	64
ξ_f	von $f : X \rightarrow M$ induziertes Mikroidbündel	65
$\text{Aut}(\xi)$	Automorphismengruppe eines geblättertten Mikroidbündels ξ ..	73
$f^* \varphi$	66

$s(f)$	Quelle von f	90
$r(f)$	Bild von f	90
Γ^0	Einheiten einer kleinen Kategorie Γ	90
Γ_x	90
Γ^y	91
Γ_x^y	91
$\Gamma \times_{\Gamma^0} \Gamma$	90
$\pi(X)$	Fundamentalgruppoid von X	92
$G(\mathcal{F})$	Holonomiegruppoid einer Blätterung \mathcal{F}	93
Γ_F	Gruppoid eines CAT-Raumes F	94
Γ_q	Haefliger-Gruppoid	94
Γ_q^{PL}	94
Γ_q^{TOP}	94
$\Gamma_{\{\mathcal{F}\}}$	Gruppoid einer CAT-Blätterung	94
$\Gamma_{\{n,q\}}$	94
$\Gamma_{\{n,q\}}^{\text{PL}}$	94
$\Gamma_{\{n,q\}}^{\text{TOP}}$	94
$\Gamma_{\{R',F'\}}$	94
$\Gamma_{\mathcal{F}}$	94
$\Gamma_{n,q}$	95
$\Gamma_{n,q}^{\text{PL}}$	95
$\Gamma_{n,q}^{\text{TOP}}$	95
$\Gamma_{R',F'}$	95
$\Gamma\{\mathcal{F}\}$	Globaler Gruppoid einer Blätterung	95
$\Gamma\{R',F'\}$	96
$\Gamma\{n,q\}$	96
$\Gamma\{n,q\}^{\text{PL}}$	96
$\Gamma\{n,q\}^{\text{TOP}}$	96
$\Gamma(\mathcal{F})$	96
$(\mathcal{F}_{\mathcal{F}})$	96
$\Gamma(R',F')$	96

$\Gamma(n, q)$	96
$\Gamma(n, q)^{\text{PL}}$	96
$\Gamma(n, q)^{\text{TOP}}$	96
(Γ, \mathbb{N})	102
(Γ, e)	102
$Z^1(X; \Gamma)$	Γ -Kozykel	99
$H^1(X; \Gamma)$	Γ -Strukturen von X	102
$H^1(X; \Gamma, \mathbb{N})$	abzählbare Γ -Strukturen von X	102
$H^1(X; \Gamma, e)$	endliche Γ -Strukturen von X	102
$Z^1(X; \Gamma, \Lambda)$	(Γ, Λ) -Kozykel von X	102
$\Gamma(X)$	Γ -Konkordanzklassen von X	104
$\text{Aut}_\sigma X$	109
$\sigma(\xi)$	112
$k_{\Gamma_F}(X)$	Isomorphieklassen von geblättern Mikroidbündeln	114
$k_\Gamma(X)$	114
$k_g(X)$	114
$\text{Aut}_{[\xi]}(X)$	115
$[\xi, E']$	Tripelisomorphieklasse von (ξ, E')	116
$k_{\Gamma_{R', F'}}^2(X)$	116
$k_{\Gamma(R', F')}^2(X)$	118
$k_{\Gamma_{R', F'}}[\xi]$	Tripeläquivalenzklassen von Unterbündeln von ξ	118
$k_{\Gamma_{R', F'}}(\xi)$	Unterbündelkeime von ξ	119
$k_{\Gamma(R', F')}(\xi)$	Unterbündel von ξ mit globaler Faser	119
$k_{\Gamma_{\{R', F'\}}}[\xi]$	119
$k_{\Gamma_{\{R', F'\}}}(\xi)$	119
$k_{\Gamma\{R', F'\}}(\xi)$	119
A^\rightarrow	allgemeines induktives System	122
\mathcal{A}^\rightarrow	induktive Kategorie von \mathcal{A}	124
f^\rightarrow	Morphismus zwischen allgemeinen induktiven Systemen	123
$A^\rightarrow _J$	Einschränkung von A^\rightarrow auf cofinales $J \subset I$	124

$S\text{-}\varinjlim B$	induktiver S -Limes von B	125
$\lim A^\blacktriangleright$	induktiver Limes eines induktiven Systems A^\blacktriangleright	126
$\lim F^\blacktriangleright$	Limesfunktorkonv von $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$	127
$F(A^\blacktriangleright)$	127
$[X^\blacktriangleright, Y^\blacktriangleright]$	Homotopieklassen aller stetigen Abbildungen $X^\blacktriangleright \rightarrow Y^\blacktriangleright$	129
$[f^\blacktriangleright]$	Homotopieklassen von f^\blacktriangleright	129
$S(X^\blacktriangleright)$	ss. Komplex der singulären Simplizes von X^\blacktriangleright	129
$H_n(X^\blacktriangleright; R)$	n -te Homologie von X^\blacktriangleright	129
A^\blacktriangleright	allgemeines projektives System	134
$\mathcal{A}^\blacktriangleright$	projektive Kategorie von \mathcal{A}	136
f^\blacktriangleright	Morphismus zwischen allgemeinen projektiven Systemen	136
$\varinjlim A^\blacktriangleright$	induktiver Limes eines <i>projektiven</i> Systems A^\blacktriangleright	138
$[X^\blacktriangleleft, Y^\blacktriangleleft]$	Homotopieklassen aller stetigen Abbildungen $X^\blacktriangleleft \rightarrow Y^\blacktriangleleft$	141
$[f^\blacktriangleleft]$	Homotopieklassen von f^\blacktriangleleft	141
$S(X^\blacktriangleleft)$	ss. Komplex der singulären Simplizes von X^\blacktriangleleft	141
$H_n(X^\blacktriangleleft; R)$	singuläre Homologie von X^\blacktriangleleft	141
$\mathbf{Top}_{ri}^\blacktriangleright$	148
$B(\Gamma, \Lambda)$	Klassifizierender Raum	166
$[n]$	169
$B_n(\Gamma, \Lambda)$	170
$B^\blacktriangleright(\Gamma, \Lambda)$	172
$B\Gamma$	172
$B_n\Gamma$	172
$B^\blacktriangleright\Gamma$	klassifizierendes System für abzählbare Γ -Strukturen	172
alt- U_λ	alternative Darstellung von U_λ	178
$B_{\text{Milnor}}\Gamma$	üblicher klassifizierender Raum von Γ	187
$\text{Aut}_f X$	175
$H^1(\varphi, \mathbb{N})^{-1}(\sigma)$	Lifts von σ	176
\oplus	Addition in Monoiden	190
\mathbf{Mon}	Kategorie der Monoide	190
$\langle X \rangle$	Von X erzeugter Untermonoid	191

ΣN_i	Summe der Untermonoide N_i	191
$M(X)$	Freier Monoid über X	191
N^∞	Kleinster, kürzender Untermonoid, der N umfaßt	194
\sim_N	Von einem Untermonoiden N induzierte Äquivalenzrelation ..	197
M/N	197
$Z_n^\Omega(X^\leftarrow)$	n -Zykel von X^\leftarrow	199
$Z_n^{\Omega_0}(X^\leftarrow)$	zusammenhängende n -Zykel von X^\leftarrow	199
$B_n^\Omega(X^\leftarrow)$	prä-nullhomologe n -Zykel von X^\leftarrow	200
$B_n^{\Omega_0}(X^\leftarrow)$	zusammenhängende, prä-nullhomologe n -Zykel von X^\leftarrow	200
$H_n^\Omega(X^\leftarrow)$	n -te Ω -Homologie von X^\leftarrow	201
$H_n^{\Omega_{ri}}(X^\leftarrow; \mathbb{Z}_2)$	unorientierte n -te ri- Ω -Homologie von X^\leftarrow	201
$H_n^D(X^\leftarrow)$	n -te Dipol-Homologie von X^\leftarrow	205
$H_n^{D_{ri}}(X^\leftarrow)$	n -te ri-Dipol-Homologie von X^\leftarrow	205
$H_n^D(X^\leftarrow; \mathbb{Z}_2)$	unorientierte n -te Dipol-Homologie von X^\leftarrow	205
$H_n^{D_{ri}}(X^\leftarrow; \mathbb{Z}_2)$	unorientierte n -te ri-Dipol-Homologie von X^\leftarrow	205
P	Kategorie der kompakten Polyeder	210
(X, T)	zahmer Raum	211
Top_z	Kategorie der zahmen Räume	211
$\dim T$	Dimension einer zahmen Struktur	212
$P^\leftarrow(X)$	Zählung von X	214
Top_z[←]	214
$P^\leftarrow(X^\leftarrow)$	Zählung von X^\leftarrow	214
$P_{ri}^\leftarrow(X^\leftarrow)$	ri-Zählung von X^\leftarrow	215
Top_{zri}[←]	215
P[↓]	Kategorie der kompakten Polyeder mit Basis	220
$P^\leftarrow(X)$	Zählung eines \downarrow zahmen Raumes	223
Top_{↓z}	224
Top_{↓z}[←]	224
Top_{↓z}[←]	224
Top_{↓zri}	224
Top_{↓zri}[←]	224

$T_{ri}^\downarrow(X^\blacktriangleleft)$	ri- \downarrow zahme Struktur von X^\blacktriangleleft	224
$H_n^z(X^\blacktriangleleft)$	n -te zahme Ω -Homologie von X^\blacktriangleleft	226
$H_n^{D^z}(X^\blacktriangleleft)$	n -te zahme Dipol-Homologie von X^\blacktriangleleft	226
$H_n^z(X^\blacktriangleleft; \mathbb{Z}_2)$	unorientierte n -te zahme Ω -Homologie von X^\blacktriangleleft	226
$H_n^{D^z}(X^\blacktriangleleft; \mathbb{Z}_2)$	unorientierte n -te zahme Dipol-Homologie von X^\blacktriangleleft	226
$H_n^{z_{ri}}(X^\blacktriangleleft)$	n -te ri-zahme Ω -Homologie von X^\blacktriangleleft	226
$H_n^{D^z_{ri}}(X^\blacktriangleleft)$	n -te ri-zahme Dipol-Homologie von X^\blacktriangleleft	226
$H_n^{z_{ri}}(X^\blacktriangleleft; \mathbb{Z}_2)$	unorientierte n -te ri-zahme Ω -Homologie von X^\blacktriangleleft	226
$H_n^{D^z_{ri}}(X^\blacktriangleleft; \mathbb{Z}_2)$	unorientierte n -te ri-zahme Dipol-Homologie von X^\blacktriangleleft	226
$H_n^{\downarrow z}(X^\blacktriangleleft)$	n -te \downarrow zahme Ω -Homologie von X^\blacktriangleleft	227
$H_n^{D^{\downarrow z}}(X^\blacktriangleleft)$	n -te \downarrow zahme Dipol-Homologie von X^\blacktriangleleft	227
$H_n^{\downarrow z}(X^\blacktriangleleft; \mathbb{Z}_2)$	unorientierte n -te \downarrow zahme Ω -Homologie von X^\blacktriangleleft	227
$H_n^{D^{\downarrow z}}(X^\blacktriangleleft; \mathbb{Z}_2)$	unorientierte n -te \downarrow zahme Dipol-Homologie von X^\blacktriangleleft	227
$H_n^{\downarrow z_{ri}}(X^\blacktriangleleft)$	n -te ri- \downarrow zahme Ω -Homologie von X^\blacktriangleleft	227
$H_n^{D^{\downarrow z}_{ri}}(X^\blacktriangleleft)$	n -te ri- \downarrow zahme Dipol-Homologie von X^\blacktriangleleft	227
$H_n^{\downarrow z_{ri}}(X^\blacktriangleleft; \mathbb{Z}_2)$	unorientierte n -te ri- \downarrow zahme Ω -Homologie von X^\blacktriangleleft	227
$H_n^{D^{\downarrow z}_{ri}}(X^\blacktriangleleft; \mathbb{Z}_2)$	unorientierte n -te ri- \downarrow zahme Dipol-Homologie von X^\blacktriangleleft	227
$H_n^\Omega(P^\blacktriangleleft)$	n -te PL- Ω -Homologie von $P^\blacktriangleleft \in \mathbf{P}^\blacktriangleleft$	228
$H_n^D(P^\blacktriangleleft)$	n -te PL-Dipol-Homologie von $P^\blacktriangleleft \in \mathbf{P}^\blacktriangleleft$	228
$[X, X]^\simeq$	Homotopieklassen der Homotopieäquivalenzen von X	233
$[X, Y^\blacktriangleleft]/[X, X]^\simeq$	234
$[X, E^\blacktriangleleft]_{[f]}$	Homotopieliftklassen von $[f]$	234
$f_*[Q]$	234
$T_v^P(X^\blacktriangleleft)$	241
$T_v(X^\blacktriangleleft)$	variable zahme Struktur von X^\blacktriangleleft	241
$T_v^\downarrow(X^\blacktriangleleft)$	variable \downarrow zahme Struktur von X^\blacktriangleleft	243
$H_n^{D_v^{\downarrow z}}(X^\blacktriangleleft)$	n -te v- \downarrow zahme Dipol-Homologie von X^\blacktriangleleft	243
$P^\blacktriangleleft \Gamma$	Zählung einer étale-PL-Kategorie Γ	265
$P^\blacktriangleleft \varphi$	Zählung eines étale-PL-Kategoriemorphismus φ	265

Index

- Abbildung, étale- 92
 - nd- 252
 - Pseudo-PL- 34
 - triangulierbare 27
 - zahme 211
- Abbildungsgarbe 52
- Abbildungshalm 52
- Abbildungsmenge 52
- Ableitung 50
 - eines simplizialen Komplexes 27
- abzählbare Γ -Struktur 102
- abzählbares Kozykel 102
- additive Äquivalenzrelation 194
- additive Monoidabbildung 190
- additives induktives System 130
- additives induktives **Top**-System 130
- additives projektives System 151
- additiv, ri-Fall 156
- additiv, schön disjunkt 130, 151
 - ri-Fall 156
- additive ri- \downarrow zahme Struktur 223
- additive v- \downarrow zahme Grundstruktur 243
- additive v-zahme Grundstruktur 242
- additive zahme Grundstruktur 211, 215
- additive \downarrow zahme Grundstruktur 223
- Additivitätseigenschaft von Γ -Strukturen 252
- allgemeine PL-Abbildung 97
- allgemeine PL-Struktur 97
- allgemeiner PL-Raum 97
- allgemeines induktives System 122
 - gerichtetes 122
- allgemeines projektives System 134
 - gerichtetes 134
 - unvollständiges 134
 - zahmes 214
- allgemeine zahme Struktur 212
- allgemeine v- \downarrow zahme Struktur 245
- alternative Darstellung 178
- ambient zahme Struktur 212
- \mathcal{A}^\star -Morphismus 123
 - einfacher 123
- \mathcal{A}^\star -Morphismus 136
 - einfacher 135
- assozierte Basisstruktur 221
- assoziertes \mathbf{P}^\downarrow -Polyeder 221
- \mathcal{A} -System, projektives 134
- Atlas, eines Mikroidbündels 60
 - eines geblättern Mikroidbündels 72
 - eines Unterbündels 68
 - eines geblättern Mikroidbündels 75
 - bzgl. F 108
- Atlas, PL- 97
- \mathcal{A}_{x_0} -Approximation 50
- Basis, eines Mikroidbündels 60
 - eines Monoiden 192
 - eines \mathbf{P}^\downarrow -Polyeders 220
 - einer Garbe 35
- Basisstruktur 220
 - assozierte 221
- bgzsh-Zerlegung 13
 - lokal separierte 14
 - triviale 15
- Blätter 12
- Blätterkarte 22
 - kartesische 22
- Blätterprojektion 12
- Blätterquotient 12
- Blätterraum 12, 14
- blättertreu 12
- Blätterung, CAT 22
 - kartesische 22
 - lokale CAT- 23
 - parametrisierte 40
 - randtransversale 22
 - randparallele 22
 - reguläre 23

- triangulierbare 28
- Blätterungen, Klassifikationsproblem 25
- Bündelblätterung 25
- Bündelgarbe 42
- Bündelgarbenumgebung 43
- CAT-Blätterung 22
- CAT-Gruppoid 96
- CAT-Kategorie 96
- CAT-Kategoriemorphismus 96
- CAT-Mannigfaltigkeitsgruppoid 97
- CAT-Mannigfaltigkeitskategorie 97
- CAT-Mikroidbündel 60
- CAT-Mikroidunterbündel 67
- Coequalizer-Bedingung 131
- cofinal 124
- cofinal gleich 122, 134
 - ri- 145
- darstellbar 160
- darstellendes Objekt 160
- Darstellung, alternative 178
- determinierendes Paar 154
- Derivationsregel 55
- Diagonale, bei Gruppoiden 90
- Differential 50
- differenzierbar bzgl. \mathcal{A} 52
- Differenzierbarkeit bzgl. \mathcal{A} 50
- dipol-homolog 205
- Dipol-Homologie 206
 - ri- \downarrow zahme 227
 - ri-zahme 226
 - 226 v- \downarrow zahme 243
 - v-zahme 243
 - \downarrow zahme 227
 - zahme 226
- dipol-nullhomolog 205
- disjunkt additives induktives System 130
- disjunkt additives projektives System 150
- disjunkt additiv, ri-Fall 156
- Eindeutigkeitsprinzip 161
- einfacher \mathcal{A}^\rightarrow -Morphismus 123
- einfacher \mathcal{A}^\leftarrow -Morphismus 135
- einfacher ri-Repräsentant 147
- einfacher $\mathbf{Top}^\leftarrow_{ri}$ -Morphismus 147
- Einheiten 90
- Element, ri- \downarrow zahmes 223
 - v- \downarrow zahmes 243
 - v-zahmes 241
 - \downarrow zahmes 223
 - zahmes 213
- endliche Γ -Struktur 102
- Erzeugendensystem eines Monoiden 192
- étale-Abbildung 92
- étale-CAT- Γ -Kozykel 107
- étale-CAT-Gruppoid 97
- étale-CAT- Γ -Struktur 108
- étale-CAT-Kategorie 97
- étale-CAT-Mannigfaltigkeitsgruppoid 97
- étale-CAT-Mannigfaltigkeitskategorie, 97
- étale-Gruppoid 92
- étale-Gruppoidhomomorphismus 92
- étale- Γ -Struktur 108
- étale-Kategorie 92
- étale-Kategoriemorphismus 92
- Exponentialabbildung 71
- Faserung, schöne ri-Serre- 156
- \mathcal{F} -regulär 21
- Fundamentalgruppoid 92
- Fundamentalklasse 231
- Γ -Konkordanzklassen 105
- Γ -Kozykel 99
 - abzählbares 102
 - étale-CAT- 107
 - residual zahmes 252
- Γ_F^{CAT} -Struktur, kanonische 108
- Γ -Struktur 102
 - abzählbare 102
 - étale- 108
 - étale-CAT- 108
 - endliche 102
 - nd-zahme 252
 - PL-zahme 252
 - residual zahme 252
- Γ_q -Struktur, submersive 104
- Garbe 35
 - äquivariante 35
 - lokaler CAT-Blätterungen 37
- geblättert Mikroidbündel 72
 - schnittoffenes 72
- geliftete étale-Gruppoid-Struktur 176
- geliftete étale-PL-Gruppoid-Struktur 176

- geliftete Gruppoid-Struktur 175
- gesättigte Teilmenge 95
- G -Klassen, gelifteter Gruppoid-Strukturen 176
 - von Blätterungen 24
 - von Garbenschnitten 36
 - von Unterbündelkeimen 86
 - von Unterbündeln 86
 - von Zerlegungen 14
- globaler Gruppoid einer Blätterung 95
- Graph einer Blätterung 93
- Grundstruktur 211
 - additive 211, 215
 - additive v - \downarrow zahme 243
 - additive v -zahme 242
 - additive \downarrow zahme 223
 - additive zahme 211
 - nd-zahme 264
 - residuale ri-zahme 215
 - residuale zahme 212, 215
 - residual zahme 264
 - ri- \downarrow zahme 223
 - variable zahme 240
 - v - \downarrow zahme 243
 - \downarrow zahme 223
 - zahme 211
- Gruppoid 90
 - CAT- 96
 - einer Blätterung 94
 - étale 92
 - étale-CAT- 97
 - Haefliger- 94
 - prinzipaler 93
 - topologischer 91
- Gruppoidhomomorphismus 90
 - étale- 92
 - stetiger 92
- Gruppoid-Struktur, geliftete 175
 - geliftete étale- 176
 - geliftete étale-PL- 176
- gut 132, 153
- gutes projektives \mathcal{A} -System 153
- Haefliger-Gruppoid 94
- Holonomiegruppoid 93
- Homöomorphismus, lokaler 93
- homolog 201
- dipol- 205
 - streng 200
 - ri-zahm streng 226
 - zahm streng 226
- Homologie, Dipol- 206
 - induktiver Systeme 129
 - projektiver Systeme 141
 - ri-Dipol- 206
 - unorientierte Dipol- 206
 - unorientierte ri-Dipol- 206
 - zahme 225
- Homologiekategorie, Ω - 201
- homotop, stationär 158
 - streng 141
- Homotopieäquivalenz, schwache 158
 - schwache PL- n - 158
 - schwache n - 158
- Homotopie, einfacher \mathbf{Top}^* -Morphismen 141
 - von \mathbf{Top}^* -Morphismen 141
 - strenge stationäre 157
- Indexisomorphie von Familien 193
- induktiver Limes 126
- induktiver S -Limes 125
- induktives \mathcal{A} -System 122
- induktives System, additives 130
 - disjunkt additives 130
- induktives \mathbf{Top} -System, additives 130
 - schön additives 131
- induzierte Verfeinerung 17
- injektiver Morphismus von projektiven Systemen 137
- injektiver ri-Morphismus 148
- injektiver \mathbf{Top}^* -Morphismus 125
- Injektivitätssatz 270
- injektiv, kompakt 125, 137
 - ri-kompakt 150
- injektiv relativ 142
- injektiv, residual lokal 33
 - stabil residual lokal 34
- Inversion, bei Gruppoiden 90
- irreduzibel 192
- Isomorphieklassen, von Blätterungen 24
 - von Mikroidbündeln 63
- Isotopieklassen, von Blätterungen 24
- kanonische Γ_F^{CAT} -Struktur 108

- kanonischer Repräsentant 219
- kanonische zahme Struktur 212
- Karte, eines Polyeders 27
 - einer triangulierbaren Zerlegung 28
- Kategorie, CAT- 96
 - der Gruppoide 90
 - étale- 92
 - étale-CAT- 97
 - topologische 91
 - v- \downarrow zahme 243
 - v-zahme 241
- Kategoriomorphismus, CAT 96
 - étale- 92
 - stetiger 92
- Kegeleigenschaft 165
- keimäquivalent 23
- Keim, eines lokalen Homöomorphismus
 - 94
 - eines Unterbündels 69
 - einer lokalen Blätterung 23
- Kettenregel 51
- Klassifikationsproblem, von Blätterungen
 - 25
- klassifizierbar 160
 - relativ 162
 - schwach 162
- klassifizierende Abbildung 160
- klassifizierender Morphismus 160
- klassifizierendes Objekt 160
 - relativ 162
 - schwach 162
- klassifizierender Raum 161
- Klebedatum 111
- kompakte Injektivität, im ri-Fall 150
- kompakt injektiv 125, 137
- kompatibel 17
- kompatible Zerlegungsfamilie 17
- Komponente, eines \mathcal{A}^* -Morphismus 123
 - eines \mathcal{A}^* -Morphismus 136
- Konkordanzklassen, Γ - 105
- Kontrafaser 67
- Kozykel 99
 - abzählbares 102
 - Γ - 99
 - (Γ, Λ) - 102
 - eingeschränktes 100
 - étale-CAT- 107
 - indexisomorphe 99
 - kohomologe 100
- Kozykelbedingung 99
 - für Klebedaten 111
- Lift, von Gruppoid-Strukturen 175
- Liftzahm 234
- lokale CAT-Blätterung 23
- lokal isomorph 62
- lokaler Homöomorphismus 193
- lokale Unterbündeltrivialisierung 68
- lokal separierte bgzsh-Zerlegung 14
- Mannigfaltigkeitsgruppoid, CAT- 97
 - étale-CAT- 97
- Mannigfaltigkeitskategorie, CAT- 97
 - étale-CAT- 97
- Mikrobündel 60
- Mikroidbündel 60
 - CAT- 60
 - geblättert 72
 - geblättert, schnittoffenes 72
 - schnittoffenes 60
 - trivial geblättert 71
- Mikroidmorphismus 63
- Mikroidunterbündel, CAT- 67
- Mikrounterbündel 67
- Monoid 190
 - freier 191
 - involutiver 193
- monoidal 190
- Monoidmorphismus 190
 - involutiver 194
- monomorph 125
- Monomorphismus 125
 - von projektiven Systemen 137
- monotone, oberhalbstetige Zerlegungen
 - 15
- Morphismus, ri- 148
 - ri- \downarrow zahmer 223
 - v- \downarrow zahmer 243
 - v-zahmer 240
 - \downarrow zahmer 223
- nd-Abbildung 252
- nd-zahme Γ -Struktur 252
- nd-zahme Grundstruktur 264
- nullhomolog 201

- dipol- 205
- prä- 200
- ri- \downarrow zahm streng 227
- streng 199
- \downarrow zahm streng 227
- zahm streng 226
- n -Gerüst einer zahmen Struktur 212
- n -Pseudozykel 231
- n -Zykel 198
- \mathbf{P}^\downarrow - 226
- singuläres 198
 - nullhomologes 201
 - orientiertes 198
 - prä-nullhomologes 200
 - streng nullhomologes 200
 - unorientiertes 199
 - \downarrow zahmes 226
- unorientiertes 198
- Ω -Homologie 200
 - ri- \downarrow zahme 227
 - ri-zahme 226
 - v- \downarrow zahme 243
 - v-zahme 243
 - \downarrow zahme 227
 - zahme 226
- Ω -Homologieklassse 201
- orientiert 198
- Pfadargument 273
- PL-Abbildung, allgemeine 97
- PL-Ableitung 53
- PL-Atlas 97
- (PL-Diff)-Mannigfaltigkeit 54
- PL-Diffbarkeit 52
- PL-Raum, allgemeiner 97
- PL-ri-Morphismus, Pseudo- 215
- PL-Struktur, allgemeine 97
- PL-zahme Γ -Struktur 252
- Polyeder 27
- Polyederstruktur 27
- \mathbf{P}^\downarrow -Morphismus 220
- \mathbf{P}^\downarrow -Polyeder 220
 - assoziiertes 221
- \mathbf{P}^\downarrow - n -Zykel 226
- Prämorphismen, von Mikroidbündeln 63
- prä-nullhomolog 200
- projektives \mathcal{A} -System 134
 - disjunkt additives 150
- projektives System, ri-schönes 156
- projektives **Top**-System, additives 151
 - schön additives 151
- Pseudo-PL-Abbildung 34
- Pseudo-PL-ri-Morphismus 215
- Pseudozykel 231
- Pullback 12
 - einer bgzsh-Zerlegung 14
 - von Mikroidbündeln 64
 - von geblättern Mikroidbündeln 74
- punktblättertreu 94
- Punktezerlegung 15
- \mathbf{P}^\downarrow -Vereinigung 222
- Quotientensatz 28
- Raum, zahmer 211
- regulär, \mathcal{F} - 21
- relativ injektiv 142
- Repräsentant, eines \mathcal{A}^\star -Morphismus 123
 - eines \mathcal{A}^\star -Morphismus 136
 - kanonischer 219
 - v- 241
 - v- \downarrow 243
- residuale ri-zahme Grundstruktur 215
- residuale ri-zahme Struktur 215
- residuale zahme Grundstruktur 212, 215
- residuale zahme Struktur 212, 215
- residual lokal injektiv 33
- residual stabil lokal injektiv 34
- residual zahme Grundstruktur 264
- residual zahme Γ -Struktur 252
- residual zahmes Γ -Kozykel 252
- ri-cofinal gleich 145
- ri-Morphismus 148
 - injektiver 149
- ri-Repräsentant 147
 - einfacher 147
- ri-schönes projektives **Top**-System 156
- ri-Serre-Faserung, schöne 156
- ri- \downarrow zahme Dipol-Homologie 227
- ri-zahme Dipol-Homologie 226
- ri- \downarrow zahme Grundstruktur 223
 - additive 223
- ri- \downarrow zahme Ω -Homologie 227

- ri-zahme Ω -Homologie 226
- ri- \downarrow zahmer Morphismus 223
- ri- \downarrow zahmes Element 223
- ri- \downarrow zahmes projektives System 223
- ri- \downarrow zahm homotop 227
- ri- \downarrow zahm streng homotop 227
- ri- \downarrow zahm streng nullhomolog 227
- ri-zahme Struktur, residuale 215
- ri- \downarrow zahme Struktur 223

- Scheibensatz 38
- schön 155
- schön additiv, ri-Fall 156
- schön additives induktives **Top**-System 131
- schön additives projektives **Top**-System 151
- schön disjunkt additiv 130, 151
 - im ri-Fall 156
- schöne ri-Serre-Faserung 156
- schöne Serre-Faserung 151
- schön Serre-fasernd 152
- schönes induktives \mathcal{A} -System 132
- schönes projektives **Top**-System 155
 - ri- 156
- Schnittbedingung 136
- Schnitt, einer Garbe 35
- Schnittomotopie 259
- schnittoffen 59
- Schnittpaar 153
- Schnittumgebung 63
- schwache Homotopieäquivalenz 158
- schwache PL- n -Homotopieäquivalenz 158
- schwache n -Homotopieäquivalenz 158
- Serre-Faserung 157
 - schöne 151
- Simplexpermutation 213
- simpliziale Zerlegung 28
- ss-zahme Struktur 213
- stabil residual lokal injektiv 34
- Standardgrundstrukturen, zahme 264
- Standardzerlegung 71
- stetiger Kategoriemorphismus 92
- streng homolog 200
- strenge Homotopie, stationäre 157
- strenge stationäre Homotopie 157
- streng homotop 141
 - ri- \downarrow zahm 227
- streng nullhomolog 199
 - \downarrow zahm 227
 - zahm 226
- Streifenbedingung 178, 180, 181
- Strukturgruppoid 113
 - von Paaren 119
- Struktur, ss-zahme 213
 - variable zahme 240
 - v- \downarrow zahme 243
 - v-zahme 240
 - \downarrow zahme 223
 - zahme 211
 - n -dimensionale 212
- Summenzerlegung 13
- Summe, von Untermonoiden 191
- System, allgemeines induktives 122
 - allgemeines projektives 134
 - allgemeines projektives, unvollständiges 134
 - gutes projektives 153
 - projektives zahmes 214
 - schönes induktives 132
 - schönes projektives 155
 - v- \downarrow zahmes projektives 243
 - v-zahmes projektives 240

- Tangentialbündel 58
- Tangentialmikroïdbündel 59
- Tangentialmorphismus 57
- Teilmenge, gesättigte 95
- topologische Kategorie 91
- Top**^{*}_{ri}-Morphismus 147
- Top**^{*}-Morphismus, zahmer 214
- Totalraum, einer Garbe 35
 - eines Mikroïdbündels 60
 - eines \mathbf{P}^{\downarrow} -Polyeders 221
- Transport von Zerlegungen 12
- Träger 26
- triangulierbar 26
- triangulierbare Abbildung 27
- triangulierbare Blätterung 28
- triangulierbare Zerlegung 28
- tripeläquivalent 118
- Tripelisomorphieklassen 63
- Tripelisomorphie, von geblättertten Mikroïdbündeln 73

- Tripelmorphismus 63
- Tripelprämorphimus 63
- Trivialisierung 60
- Tubenblätterung 41
- Tubenumgebung 41
- unabhängig 192
- universelles Element 160
- Unterbündelkeim 69
- Unterbündel, eines geblätterten Mikroidbündels 75
 - eines schnittoffenen geblätterten Mikroidbündels 76
 - mit globaler Faser 69
 - schnittoffenes 68
 - tripeläquivalente 118
- Unterbündeltrivialisierung 68
 - globale 70
- Untergruppoid 92
- Unterkozykel 100
- Untermonoid 191
 - involutiver 196
 - kürzender 194
- Unterpolyeder 27
- Unterteilung 26
- variable zahme Grundstruktur 240
- variable \downarrow zahme Struktur 243
- Verfeinerung 17
- Verfeinerungsabbildung 17
- Verkettungs-Konvention 242, 243
- vertikal 69
- Vollständigkeit 133
- v - \downarrow Repräsentant 243
- v -Repräsentant 241
- v - \downarrow Zähmung 243
- v -Zähmung 242
- v - \downarrow zahme Dipol-Homologie 243
- v -zahme Dipol-Homologie 243
- v - \downarrow zahme Grundstruktur 243
 - additive 243
- v -zahme Grundstruktur 242
- v - \downarrow zahme Kategorie 243
- v -zahme Kategorie 241
- v - \downarrow zahme Ω -Homologie 243
- v -zahme Ω -Homologie 243
- v - \downarrow zahmer Morphismus 243
- v -zahmer Morphismus 240
- v - \downarrow zahmes Element 243
- v -zahmes Element 241
- v - \downarrow zahmes projektives System 243
- v -zahmes projektives System 240
- v -zahme Struktur 240
- v - \downarrow zahme Struktur 243
- v - \downarrow zahme Struktur, allgemeine 245
- Whitney-Summe 66
 - geblätterter Mikroidbündel 75
- Yoneda-Lemma 160
- Zähmung 214
 - einer zahmen Abbildung 214
 - eines Systems 214
 - ri- 215
 - v - 242
 - v - \downarrow 243
- zahme Abbildung 211
- \downarrow zahme Grundstruktur 223
 - additive 223
- zahme Grundstruktur 211
 - additive 211, 215
 - residuale 212, 215
 - variable 240
- \downarrow zahme Dipol-Homologie 227
- zahme Dipol-Homologie 226
- zahme Homologie 225
- \downarrow zahmer Morphismus 223
- \downarrow zahme Ω -Homologie 227
- zahme Ω -Homologie 226
- zahmer Raum 211
- \downarrow zahmes Element 223
- zahmes Element 213
- \downarrow zahmes n -Zykel 226
- \downarrow zahmes projektives System 223
- zahme Standardgrundstrukturen 264
- \downarrow zahme Struktur 223
 - faktorisierende 224
- zahme Struktur 211
 - allgemeine 212
 - ambiente 212
 - kanonische 212
 - n -dimensionale 212
 - residuale 212, 215
 - variable 240

zahn streng homolog 226

↓zahn streng nullhomolog 227

zahn streng nullhomolog 226

Zerlegung 11

 oberhalbstetige 15

 monotone, oberhalbstetige 15

 simpliciale 28

 eines Simplex 28

 eines Polyeders 28

 triangulierbare 28

Zykel 198

 Pseudo- 231

$\mathbf{P}^{\downarrow-n}$ 226

Lebenslauf

18. 12. 1962	geboren in Marburg/Lahn
1969–1973	Besuch der Grundschule Brüder–Grimm in Marburg/Lahn
1973–1982	Besuch des Gymnasiums Philippinum in Marburg/Lahn
Mai 1982	Abitur
1982–1983	Grundwehrdienst
1984–1990	Studium der Mathematik mit Nebenfach Physik an der Philipps-Universität Marburg
April 1986	Vordiplom
Dezember 1990	Diplom
1991–1994	Weiterführende Studien zur Diplomarbeit, insbesondere Entwicklung etlicher Beweisansätze zur Poincaré Vermutung
1991–1993	Stipendium der Philipps-Universität im Rahmen der Hessischen Graduiertenförderung
1995	Einführung der triangulierbaren Blätterungen und abgebrochener Beweisversuch eines analogen Gromov-Phillips Theorems
WS 1995/96 SS 1996	Wissenschaftliche Hilfskraft mit Abschluß am Fachbereich Mathematik der Philipps-Universität Marburg
Februar 1996	Promotionsbeginn