

Rayleigh-Plateau Instabilität für Flüssigkeitsfilme auf Drähten

Tomas Chladek

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel der Ausarbeitung und Fragestellung	3
2 Problemfall	3
3 Berechnung	5
3.1 Ansatz über die Navier-Stoke Gleichung	5
3.2 Bestimmung des Druckes	5
3.3 Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes \vec{u}	6
3.4 Formulierung der Nebenbedingungen	7
3.5 Gleichungen aus den Nebenbedingungen	7
3.6 Festlegung der Konstanten A, B, Π_0 und Π_1	9
3.7 Dispersionsrelation	11
4 Graphische Darstellung der Dispersionsrelation und Diskussion	13

1 Ziel der Ausarbeitung und Fragestellung

Rayleigh-Plateau Instabilität für Flüssigkeitsfilme auf Drähten bringen das Fluid zum Zerfallen. Das Ziel dieser Ausarbeitung ist die Analyse einer solchen zylindersymmetrischen Instabilität auf ein Fluid mit dem Radius R , welches ein Draht mit dem Radius $R_0 < R$ umhüllt. Interessant ist es vor allem, den Einfluss des Drahtes auf die Instabilität des Systems zu betrachten. Die vordergründige Fragestellung ist folgende:

- Von welchen Parametern hängt das gesamte System ab?
- Bei welcher Wellenzahl k erreicht das Fluid den Modus maximaler Instabilität?
- Wie ändert sich das System für verschiedene Verhältnisse $\frac{R}{R_0}$?

2 Problemfall

Der zu untersuchende Fall ist in Abbildung 1 dargestellt. An einem Rohr entlang (Medium 1) bewegt sich ein Fluid (Medium 2) mit der Geschwindigkeit v_z in Richtung der z -Achse. Dieses Fluid ist viskos und hat eine Oberflächenspannung. Von der z -Achse bis zur Wand ist der Abstand R_0 und zur ungestörten Oberfläche zwischen Medium 2 und Medium 3 beträgt der Abstand R . Wird nun eine Störung, in Form einer Modulation angelegt, so kann über den radialen Druckgradienten die Dispersionsrelation bestimmt werden. Zu beachten ist das wir den Druck von Medium 3 vernachlässigen - die errechnete Dispersionsrelation also nur für bestimmte Medien 2 und 3 gilt - außerdem soll das System nur von r und z abhängen. Aus der Dispersionsrelation erhalten wir dann für ein konkretes Fluid die Wachstumsrate s zur dazugehörigen Wellenzahl k . Interessant ist hierbei diejenige Wellenzahl für die, die Wachstumsrate s maximal wird. Denn daraus resultiert die Mode mit der maximalen Instabilität (dazu mehr im Teil Diskussion).

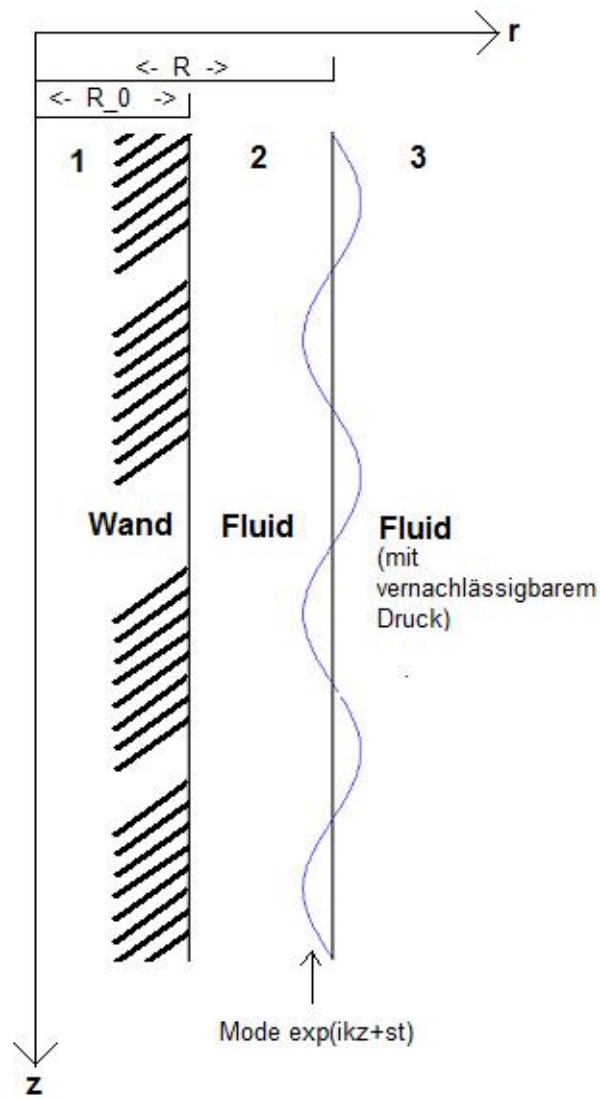


Abbildung 1: Skizze des Untersuchung

3 Berechnung

3.1 Ansatz über die Navier-Stoke Gleichung

Beginnend mit der Navier-Stokes-Gleichung

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\text{grad } \Pi + \nu \Delta \vec{u}, \quad (1)$$

für der Druck Π , die Viskosität ν mit (aus der Kontinuitätsgleichung)

$$\text{div} \vec{u} = 0 \quad (2)$$

lässt sich diese verändern zu:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\text{grad } \Pi - \nu \text{rot}^2 \vec{u} \quad (3)$$

Da das Geschwindigkeitsfeld \vec{u} divergenzfrei sein muss, können wir

$$\vec{u} = [-ikrU\vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r^2U)\vec{e}_z]e^{ikz+st} \quad (4)$$

mit $U = U(r)$ schreiben.

Als Ansatz für eine Störung an der Grenzfläche, also die symmetrische Deformation des Zylinders, da unabhängig von φ , wählen wir

$$r = R + \epsilon_0 e^{ikz+st} \quad (5)$$

wobei R den Radius des Abstandes zwischen z -Achse und der ungestörten Oberfläche darstellt. Die Wellenzahl k beschreibt die Mode der Störung in z -Richtung. Desweiteren ist ϵ_0 eine Konstante und s die Wachstumsrate der zeitlich wachsenden Mode.

3.2 Bestimmung des Druckes

Mit Gleichung 2 und Divergenz von 3 erhält man für den Druck Π

$$\nabla^2 \Pi = 0. \quad (6)$$

Überlegen wir uns außerdem, dass Π den Druck der Mode an der zylindersymmetrischen Grenzfläche (aus Gleichung 5) widerspiegeln muss, können wir Π schreiben als

$$\Pi = (\Pi_0 I_0(kr) + \Pi_1 K_0(kr))e^{ikz+st} = \frac{\partial p}{\rho}, \quad (7)$$

wobei Π_0 und Π_1 Konstanten sind. Mit I_0 und K_0 sind die modifizierten Besselfunktionen 0-ter Ordnung - da für unser Problem keine φ -Abhängigkeit existiert - gemeint.

3.3 Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes \vec{u}

Um die Gleichung 3 möglichst einfach zu lösen, zielen wir erst einmal darauf ab, die Vektoren \vec{u} und $\text{grad } \Pi$ als Rotation von anderen Vektoren dazustellen. Dadurch lässt sich eine Rotation aus der Navier-Stokes Gleichung rausnehmen. Somit hat man dann nur eine Gleichung in \vec{e}_φ -Richtung zu lösen.

Bildet man also $\text{grad } \Pi$ und versucht diesen als $\text{rot } \vec{m}$ zu schreiben, kommt man auf

$$\vec{m} = i \cdot (\Pi_0 I_1(kr) - \Pi_1 K_1(kr)) e^{ikz+st} \vec{e}_\varphi. \quad (8)$$

Das Geschwindigkeitsfeld \vec{u} lässt sich als Rotation eines anderen Vektors $\vec{\Psi}$ schreiben, sodass Gleichung 4 erfüllt ist:

$$\vec{u} = \text{rot } \vec{\Psi} = \text{rot } rU(r) e^{ikz+st} \vec{e}_\varphi \quad (9)$$

Setzt man Gleichung 8 und 9 in Gleichung 3 ein, erhält man

$$s \cdot \text{rot } \vec{\Psi} = -\vec{m} - \nu \text{rot}^3 \vec{\Psi}. \quad (10)$$

Nimmt man eine Rotation heraus, rechnet die restlichen Rotationen aus und teilt dann durch r , e^{ikz+st} und \vec{e}_φ so lässt sich die Navier-Stokes Gleichung nun als skalare Gleichung

$$sU = -\frac{i}{r}(\Pi_0 I_1(kr) - \Pi_1 K_1(kr)) + \nu \left(\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{dU}{dr} - k^2 U \right) \quad (11)$$

aufschreiben. Umstellen ergibt

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{dU}{dr} - \left(k^2 + \frac{s}{\nu} \right) U = \frac{i}{r\nu} (\Pi_0 I_1(kr) - \Pi_1 K_1(kr)). \quad (12)$$

Mithilfe der Relation (Analog für K_1)

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d}{dr} \right) \frac{I_1(\beta r)}{r} = \beta^2 \frac{I_1(\beta r)}{r} \quad (13)$$

erhalten wir einen Ausdruck für das Potential U

$$U = \frac{i}{sr} \left[A \frac{I_1(kr)}{r} - B \frac{K_1(kr)}{r} - (\Pi_0 I_1(kr) - \Pi_1 K_1(kr)) \right] \quad (14)$$

mit den Integrationskonstanten $\frac{A}{s}$ und $\frac{B}{s}$ und

$$\kappa^2 = k^2 + \frac{s}{\nu}. \quad (15)$$

Aus den Gleichungen 4 und 14 erhält man die Geschwindigkeitskomponenten

$$u_r = \frac{k}{s} [A I_1(\kappa r) - B K_1(\kappa r) - (\Pi_0 I_1(kr) - \Pi_1 K_1(kr))] e^{ikz+st} \quad (16)$$

und

$$u_z = \frac{i}{s} [\kappa \cdot (A I_0(\kappa r) + B K_0(\kappa r)) - k \cdot (\Pi_0 I_0(kr) + \Pi_1 K_0(kr))] e^{ikz+st}. \quad (17)$$

3.4 Formulierung der Nebenbedingungen

Gleichung 16 und 17 müssen mehrere Nebenbedingungen erfüllen:

1. Die radiale Komponente der Geschwindigkeit muss zum gewählten Ansatz der deformierten Oberfläche aus Gleichung 5 kompatibel sein. Also

$$\frac{d}{dt}(\text{Gleichung 5}) = (\text{Gleichung 16}). \quad (18)$$

2. Da wir annehmen das auf der Fluid-Oberfläche, durch das dritte Medium, keine Kräfte wirken, muss die tangentielle Komponente des Spannungstensors auf der Oberfläche (d.h. für $r=R$) verschwinden(siehe [2, Seite 62]):

$$p_{rz} = \rho\nu\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)_{r=R} = 0 \quad (19)$$

3. Wieder unter der Annahme das durch das dritte Medium keine Kräfte wirken, können wir für die rr -Komponente des Spannungstensors bei $r=R$ schreiben, dass der gestörte Druck des zweiten Mediums an der Oberfläche (in der Rechnung dargestellt durch die Moden), mit dem Druck, hervorgerufen durch die Oberflächenspannung, übereinstimmen muss(siehe [2, Seite 62]):

$$p_{rr} = (p_0 + \delta p - 2\nu\rho\frac{\partial u_r}{\partial r})_{r=R} = T\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad (20)$$

Dabei ist T die Oberflächenspannung und R_1 und R_2 die Hauptradien des zylindersymmetrischen Problems.

4. An der Grenzfläche Fluid-Wand müssen beide Geschwindigkeitskomponenten verschwinden, da die Fluid-Moleküle, welche sich unmittelbar an der Grenzschicht R_0 befinden durch zwischenmolekulare Kräfte an der Wand haften (No-Slip-Bedingung). D.h. es gilt

$$U(R_0) = 0 \quad (21)$$

und

$$u_z(R_0) = 0. \quad (22)$$

3.5 Gleichungen aus den Nebenbedingungen

Es wird nun folgende Notation verwendet:

$$x = kR \quad y = \kappa R \quad x_0 = kR_0 \quad y_0 = \kappa R_0 \quad (23)$$

Anknüpfend an die obige Aufzählung der Nebenbedingungen sollen nun die daraus führenden Gleichungen notiert werden :

1.

$$s\epsilon_0 = \frac{k}{s}[AI_1(y) - BK_1(y) - (\Pi_0 I_1(x) - \Pi_1 K_1(x))] \quad (24)$$

2.

$$p_{rz} = \rho v \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)_{r=R} = \rho v \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r^2 U \right) + k^2 r U \right] e^{ikz+st} \quad (25)$$

$$= \rho v r \left(\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{dU}{dr} + k^2 U \right) e^{ikz+st} = 0 \quad \text{für } r = R \quad (26)$$

Mit der Relation 13 und der Gleichung 14 können wir schreiben

$$(k^2 + \kappa^2)(AI_1(y) - BK_1(y)) - 2k^2(\Pi_0 I_1(x) - \Pi_1 K_1(x)) = 0. \quad (27)$$

3.

$$p_{rr} = (p_0 + \partial p - 2\nu\rho \frac{\partial u_r}{\partial r})_{r=R} = T \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (28)$$

Zuerst berechnen wir die rechte Seite:

$$\begin{aligned} T \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) &= T \left(\frac{1}{R + \epsilon_0 e^{ikz+st}} + \epsilon_0 k^2 e^{ikz+st} \right) \\ &= \frac{T}{R} - \frac{T}{R^2} (1 - x^2) \epsilon_0 e^{ikz+st} \end{aligned} \quad (29)$$

Mit $\frac{T}{R} = p_0$ und einsetzen in Gleichung 20 folgt

$$\frac{\partial p}{\rho} + \frac{T \epsilon_0}{R^2 \rho} (1 - x^2) e^{ikz+st} \quad (30)$$

und mit Gleichung 7 und 16 erhält man dann

$$\begin{aligned} & \left[\frac{T}{R^2 \rho} (1 - x^2) + \frac{1}{\epsilon_0} (\Pi_0 I_0(x) + \Pi_1 K_0(x)) \right] \epsilon_0 \\ &= \frac{2\nu k^2}{s} \left[\frac{\kappa}{k} (AI'_1(y) - BK'_1(y)) - (\Pi_0 I'_1(x) - \Pi_1 K'_1(x)) \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

4. Aus

$$U(R_0) = 0 \quad \text{und} \quad u_z(R_0) = 0 \quad (32)$$

erhält man über 14 und 17 folgende zwei Gleichungen bei R_0 :

$$0 = AI_1(y_0) - BK_1(y_0) - (\Pi_0 I_1(x_0) - \Pi_1 K_1(x_0)) \quad (33)$$

und

$$0 = \kappa \cdot (AI_0(y_0) + BK_0(y_0)) - k \cdot (\Pi_0 I_0(x_0) + \Pi_1 K_0(x_0)) \quad (34)$$

Unter Zuhilfenahme dieser Gleichungen können die Konstanten A , B , Π_0 und Π_1 bestimmt werden.

3.6 Festlegung der Konstanten A, B, Π_0 und Π_1

Alle vier Konstanten werden bestimmt indem wir Gleichung 24 und 27 bzw. 33 und 34 zusammenführen.

27 in 24 führt zu zwei Gleichungen:

•

$$2ks\epsilon_0 = (2k^2 - (k^2 + \kappa^2))\frac{1}{s}(AI_1(y) - BK_1(y)) \quad (35)$$

Umstellen ergibt

$$-2k\nu\epsilon_0 = \frac{1}{s}(AI_1(y) - BK_1(y)). \quad (36)$$

Daraus folgt

$$B = \frac{1}{K_1(y)}(AI_1(y) + 2ks\nu\epsilon_0). \quad (37)$$

•

$$s^2\epsilon_0 = k\left(2\frac{k^2}{(k^2 + \kappa^2)} - 1\right)(\Pi_0 I_1(x) - \Pi_1 K_1(x)) \quad (38)$$

Durch umstellen bekommt man

$$-\frac{s\nu\epsilon_0(k^2 + \kappa^2)}{k} = \Pi_0 I_1(x) - \Pi_1 K_1(x). \quad (39)$$

Dadurch erhält man

$$\Pi_1 = \frac{1}{K_1(x)}\left(\Pi_0 I_1(x) + \frac{s\nu\epsilon_0(k^2 + \kappa^2)}{k}\right). \quad (40)$$

Die Relationen 37 und 40 sollen werden jetzt in Gleichung 33 und 34 eingesetzt. Dabei wollen wir folgende abkürzende Schreibweise verwenden:

$$\Omega_{e,f,g,h,\pm} = I_g(e) \pm \frac{I_h(f)}{K_h(f)} K_g(e) \quad (41)$$

• 37 und 40 in 33:

$$0 = AI_1(y_0) - \frac{K_1(y_0)}{K_1(y)}(AI_1(y) + 2ks\nu\epsilon_0) - \left(\Pi_0 I_1(x_0) - \frac{K_1(x_0)}{K_1(x)}\left(\Pi_0 I_1(x) + \frac{s\nu\epsilon_0(k^2 + \kappa^2)}{k}\right)\right) \quad (42)$$

Durch umstellen bekommt man

$$0 = A\Omega_{y_0,y,1,1,-} - \frac{K_1(y_0)}{K_1(y)}2ks\nu\epsilon_0 - \Pi_0\Omega_{x_0,x,1,1,-} + \frac{K_1(x_0)}{K_1(x)}\frac{s\epsilon_0\nu(k^2 + \kappa^2)}{k}. \quad (43)$$

- 37 und 40 in 34:

$$0 = \kappa \cdot (AI_0(y_0) + \frac{K_0(y_0)}{K_1(y)}(AI_1(y) + 2ksv\epsilon_0)) - k \cdot (\Pi_0 I_0(x_0) + \frac{K_0(x_0)}{K_1(x)}(\Pi_0 I_1(x) + \frac{sv\epsilon_0(k^2 + \kappa^2)}{k})) \quad (44)$$

Vereinfachen führt zu

$$0 = A\kappa\Omega_{y_0,y,0,1,+} + \frac{K_0(y_0)}{K_1(y)}2k s\kappa v\epsilon_0 - k\Pi_0\Omega_{x_0,x,0,1,+} - \frac{K_0(x_0)}{K_1(x)}sv\epsilon_0(k^2 + \kappa^2). \quad (45)$$

Nun Setzen wir Gleichung 43 in 45 ein:

$$0 = ((\frac{K_1(y_0)}{K_1(y)}2k^2 - \frac{K_1(x_0)}{K_1(x)}(k^2 + \kappa^2)) \cdot \frac{sv\epsilon_0}{k} + \Pi_0\Omega_{x_0,x,1,1,-}) \cdot \Omega_{y_0,y,0,1,+} - ((-\frac{K_0(y_0)}{K_1(y)}2k^2 + \frac{K_0(x_0)}{K_1(x)}\frac{k}{\kappa}(k^2 + \kappa^2)) \cdot \frac{sv\epsilon_0}{k} + \frac{k}{\kappa}\Pi_0\Omega_{x_0,x,0,1,+}) \cdot \Omega_{y_0,y,1,1,-} \quad (46)$$

Durch Umformen nach Π_0 erhält man

$$0 = \frac{sv\epsilon_0}{k}(\frac{2k^2}{K_1(y)}(K_0(y_0)\Omega_{y_0,y,1,1,-} + K_1(y_0)\Omega_{y_0,y,0,1,+}) - \frac{(k^2 + \kappa^2)}{K_1(x)}(K_0(x_0)\frac{k}{\kappa}\Omega_{y_0,y,1,1,-} + K_1(x_0)\Omega_{y_0,y,0,1,+})) + \Pi_0(\Omega_{x_0,x,1,1,-}\Omega_{y_0,y,0,1,+} - \frac{k}{\kappa}\Omega_{x_0,x,0,1,+}\Omega_{y_0,y,1,1,-}). \quad (47)$$

Definieren wir nun

$$\bar{\Omega} := (\Omega_{x_0,x,1,1,-}\Omega_{y_0,y,0,1,+} - \frac{x}{y}\Omega_{x_0,x,0,1,+}\Omega_{y_0,y,1,1,-}), \quad (48)$$

$$\bar{L} := \frac{(x^2 + y^2)}{K_1(x)}(K_0(x_0)\frac{x}{y}\Omega_{y_0,y,1,1,-} + K_1(x_0)\Omega_{y_0,y,0,1,+}) - \frac{2x^2}{K_1(y)}(K_0(y_0)\Omega_{y_0,y,1,1,-} + K_1(y_0)\Omega_{y_0,y,0,1,+}), \quad (49)$$

und

$$h := \frac{sv\epsilon_0}{kR^2} \quad (50)$$

dann können wir alle vier Konstanten mit diesen Definitionen und Gleichung 23 bequem aufschreiben. Wir beginnen mit Π_0 bzw. Π_1 aus Gleichung 47 bzw. 40:

$$\Pi_0 = h\frac{\bar{L}}{\bar{\Omega}} \quad (51)$$

$$\Pi_1 = h \frac{1}{K_1(x)} \left(\frac{\bar{L}}{\Omega} I_1(x) + (x^2 + y^2) \right) \quad (52)$$

Durch einsetzen von 51 in 43 erhält man

$$0 = A \Omega_{y_0, y, 1, 1, -} - h \left(\frac{K_1(y_0)}{K_1(y)} 2x^2 - \frac{K_1(x_0)}{K_1(x)} (x^2 + y^2) \right) - h \frac{\bar{L}}{\Omega} \Omega_{x_0, x, 1, 1, -}. \quad (53)$$

Definiert man

$$L = \left(-\frac{K_1(y_0)}{K_1(y)} 2x^2 + \frac{K_1(x_0)}{K_1(x)} (x^2 + y^2) \right), \quad (54)$$

so kann man die Konstanten A und B mit 37 und 53 schreiben als:

$$A = h \frac{1}{\Omega_{y_0, y, 1, 1, -}} \left(\frac{\bar{L}}{\Omega} \Omega_{x_0, x, 1, 1, -} - L \right) \quad (55)$$

$$B = h \frac{1}{K_1(y)} \left(\frac{\bar{L}}{\Omega} \Omega_{x_0, x, 1, 1, -} - L \right) \frac{I_1(y)}{\Omega_{y_0, y, 1, 1, -}} + 2x^2 \quad (56)$$

Mithilfe dieser vier Konstanten, kann nun mit der Bestimmung der Dispersionsrelation fortgefahren werden.

3.7 Dispersionsrelation

Die implizite Dispersionsrelation bestimmen wir durch das einsetzen der vier Konstanten aus 51, 52, 55 und 56 in die, aus den Nebenbedingungen, übriggebliebene Gleichung 32:

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{T \epsilon_0}{R^2 \rho} (1 - x^2) + h \frac{\bar{L}}{\Omega} I_0(x) + h \frac{K_0(x)}{K_1(x)} \left(\frac{\bar{L}}{\Omega} I_1(x) + (x^2 + y^2) \right) \quad (57) \\ & - 2h \frac{k \nu \kappa}{s} \left(\frac{\bar{L}}{\Omega} \Omega_{x_0, x, 1, 1, -} - L \right) \frac{I_1'(y)}{\Omega_{y_0, y, 1, 1, -}} \\ & + \frac{K_1'(y)}{K_1(y)} 2h \frac{k \nu \kappa}{s} \left(\frac{\bar{L}}{\Omega} \Omega_{x_0, x, 1, 1, -} - L \right) \frac{I_1(y)}{\Omega_{y_0, y, 1, 1, -}} + 2x^2 \\ & + h \frac{2 \nu k^2}{s} \frac{\bar{L}}{\Omega} I_1'(x) - \frac{K_1'(x)}{K_1(x)} h \frac{2 \nu k^2}{s} \left(\frac{\bar{L}}{\Omega} I_1(x) - (x^2 + y^2) \right) \end{aligned}$$

Vereinfachen der Gleichung und multiplizieren mit $\frac{R^2}{k \nu^2 \epsilon_0}$ führt zu

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{T}{k \nu^2 \rho} (1 - x^2) + \frac{s}{k^2 \nu} \frac{\bar{L}}{\Omega} \Omega_{x, x, 0, 1, +} + \frac{K_0(x)}{K_1(x)} \frac{s}{k^2 \nu} (x^2 + y^2) \quad (58) \\ & - 2 \frac{\kappa}{k} \left(\frac{\bar{L}}{\Omega} \Omega_{x_0, x, 1, 1, -} - L \right) \frac{\Omega_{y, y, 1, 1, -}}{\Omega_{y_0, y, 1, 1, -}} + \frac{K_1'(y)}{K_1(y)} \frac{\kappa}{k} 4x^2 \\ & + 2 \frac{\bar{L}}{\Omega} \Omega_{x, x, 1, 1, -} - 2 \frac{K_1'(x)}{K_1(x)} (x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Mit dem Verhältniss $\frac{sR^2}{v} = y^2 - x^2$ lässt sich diese Gleichung umschreiben in

$$0 = \frac{TR}{xv^2\rho}(1-x^2) + \frac{(y^2-x^2)\bar{L}}{x^2}\bar{\Omega}_{x,x,0,1,+} + \frac{K_0(x)}{K_1(x)}\frac{(y^2-x^2)}{x^2}(x^2+y^2) \quad (59)$$

$$-2\frac{y}{x}\frac{\bar{L}}{\Omega}\bar{\Omega}_{x_0,x,1,1,-} - L\frac{\Omega_{y,y,1',1,-}}{\Omega_{y_0,y,1,1,-}} + \frac{K_1'(y)}{K_1(y)}4xy + 2\frac{\bar{L}}{\Omega}\bar{\Omega}_{x,x,1',1,-} - 2\frac{K_1'(x)}{K_1(x)}(x^2+y^2).$$

Multiplizieren mit x^2 und nochmaliges Vereinfachen für $J = \frac{TR}{v^2\rho}$ führt zu

$$Jx(1-x^2) = 2x^2(x^2+y^2)\frac{K_1'(x)}{K_1(x)}\left[1 - \frac{2xy}{x^2+y^2}\frac{K_1'(y)K_1(x)}{K_1'(x)K_1(y)}\right] + (x^4-y^4)\frac{K_0(x)}{K_1(x)} \quad (60)$$

$$-(y^2-x^2)\frac{\bar{L}}{\Omega}\bar{\Omega}_{x,x,0,1,+} + 2xy\left(\frac{\bar{L}}{\Omega}\bar{\Omega}_{x_0,x,1,1,-} - L\right)\frac{\Omega_{y,y,1',1,-}}{\Omega_{y_0,y,1,1,-}} - 2x^2\frac{\bar{L}}{\Omega}\bar{\Omega}_{x,x,1',1,-}.$$

Lässt man für diese implizite Dispersionsrelation $R_0 \rightarrow 0$ laufen, so erhält man eine Dispersionsrelation die sich mit früheren theoretischen Ergebnissen deckt (siehe z.B. [1, Seite 541]).

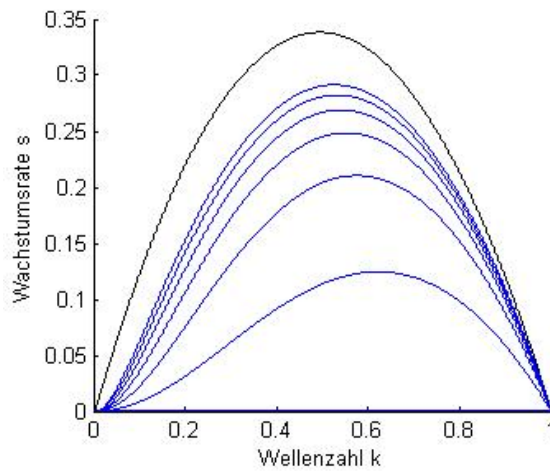


Abbildung 2: Die Dispersionsrelation für verschiedene Verhältnisse $\frac{R}{R_0}$; Die höchste schwarze Linie stellt einen Grenzwert für $\frac{R}{R_0} = 10^{100}$ dar. Die blauen Linien fangen unten bei $\frac{R}{R_0} = 1.1$ an und erhöhen das Verhältniss jeweils um 500 Prozent. (siehe Tabelle 1)

4 Graphische Darstellung der Dispersionsrelation und Diskussion

Die Dispersionsrelation aus Gleichung 60 hängt von den Parametern $s, k, j, \frac{R}{R_0}$ ab. Deshalb werden für die implizite Funktion $s(k)$ zwei Abbildungen gezeigt. Die Abbildung 2 für verschiedene Verhältnisse $\frac{R}{R_0}$ mit der Tabelle 1 und die Abbildung 3 für verschiedene J mit der Tabelle 2.

Da der Effekt in Abbildung 3 schon in anderen Veröffentlichungen analysiert wurde, wollen wir im Folgenden explizit nur die Abbildung 2 diskutieren:

$\frac{R}{R_0}$	Wachstumsrate s	Wellenzahl k
10^{100}	0.3383	0.4919
15000	0.2914	0.5238
3000	0.2822	0.5298
600	0.2689	0.5382
125	0.2485	0.5508
25	0.2104	0.5731
5	0.1245	0.6196
1.1	0.0002	0.7057

Tabelle 1: Die Tabelle zu Graphn 2; zu beachten ist, das die Wachstumsrate mit $\frac{R^2}{v}$ und die Wellenzahl mit R skaliert; die Einheiten sind genau reziprok dazu.

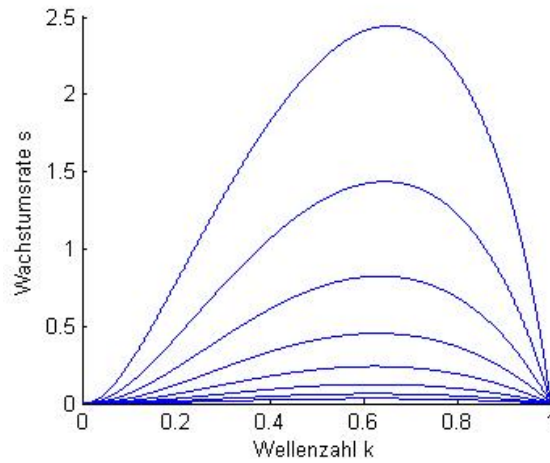


Abbildung 3: Die Dispersionsrelation für verschiedene J; die Linien fangen unten bei J=1 an und erhöhen das Verhältniss jeweils um 100 Prozent. (siehe Tabelle 2)

$\frac{R}{R_0}$	Wachstumsrate s	Wellenzahl k
132	2.4432	0.6538
64	1.4354	0.6434
32	0.8245	0.6344
16	0.4536	0.6273
8	0.2407	0.6225
4	0.1245	0.6196
2	0.0634	0.6179
1	0.0320	0.6171

Tabelle 2: Die Tabelle zu Graph 3; zu beachten ist, das die Wachstumsrate mit $\frac{R^2}{v}$ und die Wellenzahl mit R skaliert; die Einheiten sind genau reziprok dazu.

- In Abbildungen 2 lässt sich für jede Kurve ein Maximum erkennen. Das Maximum stellt aufgrund der höchsten Wachstumsrate für ein bestimmtes k den dazugehörigen Modus für die Maximale Instabilität dar, da die Wachstumsrate multipliziert mit der Zeit im Exponenten der Exponentialfunktion auftaucht (siehe Gleichung 5) und dadurch im Vergleich mit anderen (kleineren) Wachstumsraten für lange Zeitabschnitte die anderen Moden dominiert.
- Aus dem Bild 2 entnimmt man, dass für immer größer werdendes $\frac{R}{R_0}$ die Wachstumsrate für alle k steigt. Das bedeutet, dass die Instabilität des Systems steigt, umso weniger das Fluid von dem Draht spürt. Somit wirkt der Draht stabilisierend auf das von ihm umgebene Fluid, indem es den Zerfall des Fluids verlangsamt, umso kleiner das Verhältnis für $\frac{R}{R_0}$ ist. Dies liegt an der Haftung der Fluidteilchen an der Grenzschicht Wand-Fluid, wodurch die unmittelbaren Nachbarfluidteilchen auch eine sehr starke Reibung erfahren und dadurch das Ausbilden von Moden Allgemein erschwert wird. Dieser Effekt sinkt natürlich nicht linear, da die Fluidteilchen an der Oberfläche, für große R , von dieser inneren Reibung fast nichts mehr spüren, was die genannte Abbildung auch bestätigt, da die blauen Linien eine regelmäßige Erhöhung um 500 Prozent zeigen, aber trotzdem nicht linear anwachsen!
- In Abbildungen 2 erkennt man, dass die blauen Kurven bei ca. $k=0.05$ einen kleinen Bogen in Richtung $s=0$ einschlagen. Die innere Reibung, verstärkt durch die Wand, wird gerade für große Wellenlängen dominanter, da die einzelnen Fluidteilchen pro Wellenlänge nun einen längeren Weg zurücklegen müssen. Der längere Weg der Welle wiederum kostet jedes einzelne Fluidteilchen mehr Energie und somit wird der Zerfall des Systems verlangsamt; d.h. die Wachstumsrate geht gegen 0.
- Beide Bilder zeigen für $k \rightarrow 1$, also für sehr kleine Wellenlängen, dass die Wachstumsrate gegen 0 geht. Das liegt an den hohen Energiekosten für höhere Wellenzahlen, da die Oberflächenspannung der Vergrößerung der Wellenzahl k , d.h. der Vergrößerung der Oberfläche, entgegen arbeitet. Umgerechnet bedeutet es, dass dieses System für Wellenlängen größer als $2\pi R$ instabil ist. Dies deckt sich mit früheren Ergebnissen (siehe [3, Seite 9]). Aufgrund der Oberflächenspannung verschiebt sich auch das Maximum in Bild 2 für große Verhältnisse $\frac{R}{R_0}$ in Richtung $k=0$. Das System spürt nicht mehr soviel Reibung vom Draht wie zuvor und kann dadurch bequem zu größeren Wellenlängen übergehen, um so Energie aus der Verkleinerung der Oberfläche zu gewinnen.

Literatur

- [1] CHANDRASEKHAR Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability
- [2] L.D. LANDAU; E.M. LIFSHITZ Lehrbuch der theoretischen Physik Bd.6, Hydrodynamik
- [3] A. CHAUHAN; C. MALDARELLI; D.T. PAPAGEORGIOU; D.S. RUMSCHITZKI Temporal instability of compound threads and jets