Skalierungstechniken für k-bestimmte Verzweigungsprobleme und Iterationsmethoden für große, dünn besetzte Eigenwertprobleme

Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades

der Naturwissenschaften

(Dr. rer. nat.)

dem Fachbereich Mathematik

der Philipps-Universität Marburg

vorgelegt von

Andreas Schwarzer

aus Wiesbaden

Marburg/Lahn 1997

Vom Fachbereich Mathematik der Philipps-Universität Marburg

als Dissertation am 24. Januar 1997 angenommen.

Erstgutachter: Prof. Dr. K. Böhmer
Zweitgutachter: Prof. Dr. B. Schmitt

Tag der Disputation am 23. April 1997.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **4**

1 Kurven als Nullstellenmengen von Abbildungen **10**

1.1 Affin-algebraische Kurven 10

1.2 Potenzreihen 13

1.3 Weierstraßscher Approximationssatz 17

1.4 Teilbarkeit bei Potenzreihen und Mengenkeime 20

1.5 Die Parametrisierung mit Puiseux-Reihen 23

2 Adaptive Skalierung in 2 Dimensionen **25**

2.1 Beispiele für Singularitäten 25

2.2 Blowing-Up und Skalierung von Keimen in 2 Dimensionen 28

2.3 Auszeichnung einer Variablen 40

2.4 Anwendung auf einfache Singularitäten 42

2.5 Äquivalenz von Approximationen 53

3 Klassifikation von einfachen Singularitäten **56**

3.1 Allgemeine Singularitäten 56

3.2 Allgemeine Singularitäten mit $\mathbb{Z}_2$-Symmetrie 74

4 Adaptive Skalierung in n+1 Dimensionen **91**

4.1 Blowing-Up und Skalierung in n+1 Dimensionen 92
4.2 Auszeichnung einer Variablen 102
4.3 Beispiele mit unterschiedlichem Defekt 104

5 Unendlichdimensionale Probleme 110

5.1 Lyapunov-Schmidt-Reduktion 110
5.2 Adaptive Skalierung der Lösungen 113
5.3 Kern-Dimension 1 121

6 Eigenwertbestimmung bei großen Matrizen 142

6.1 Überblick über bekannte Verfahren 143
6.2 Varianten des Arnoldi-Verfahrens 144
6.2.1 Expliziter Arnoldi-Neustart 148
6.2.2 Impliziter Arnoldi-Neustart 155
6.3 Präkonditionierung mit iterierten Ritz-Polynomen 160
6.3.1 Bestimmung der iterierten Ritz-Polynome 164
6.3.2 Auswertung der iterierten Ritz-Polynome 170
6.3.3 Anwendung auf Eigenwertprobleme 171
6.3.4 Beispiele 175
6.3.5 Anwendung auf lineare Gleichungssysteme 194

7 Erkennung von Singularitäten 200

7.1 Eine Testfunktion für Singularitäten 200
7.2 Anwendung der Testfunktion 204
7.2.1 Anwendung auf ein algebraisches Gleichungssystem 206
7.2.2 Anwendung auf eine partielle Differentialgleichung 214

Ausblick **219**

A Gestalt der Komponenten von F **221**

B Automatische Analyse mit MAPLE **223**

C Erkennung von äquivalenten Approximationen **270**

Abbildungsverzeichnis **274**

Tabellenverzeichnis **277**

Index **278**

Literaturverzeichnis **282**

Einleitung

Die Verzweigungstheorie beschäftigt sich mit der Analyse von singulären Punkten nichtlinearer Gleichungen in Banachräumen. Es werden glatte Abbildungen der Art $F : X \times \mathbb{R}^p \to Y$ betrachtet. Dabei seien X, Y Banach-Räume und $p \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Parameter des Systems bzw. der Abbildung. Von Interesse sind nun Lösungen der Gleichung

$$F(x) = F(z, \lambda) = 0, \qquad x = (z, \lambda) \in X \times \mathbb{R}^p,\ p \in \mathbb{N} \tag{0.0.1}$$

in einer Umgebung eines Punktes $(z, \lambda) = (z_0, \lambda_0) =: x_0$. z bezeichnet dabei die **Zustandsvariablen**, während λ die **(Verzweigungs-)Parameter** darstellen soll. Falls die Fréchet-Ableitung

$$F_z^0 := F_z(z_0, \lambda_0)$$

ein Homöomorphismus von X nach Y ist, hat man nach dem Satz über implizite Funktionen eine hinreichende Bedingung für die Existenz genau einer glatten Mannigfaltigkeit $(z(\lambda), \lambda)$ von Lösungen von (0.0.1) durch (z_0, λ_0), d.h.: $F(z(\lambda), \lambda) = 0$, mit $z(\lambda_0) = z_0$, für $|\lambda - \lambda_0| < \epsilon_0 > 0$. Verfolgt man nun Lösungskurven mit Hilfe von Fortsetzungsverfahren, etwa Prädiktor-Korrektor-Verfahren, und dem Satz über implizite Funktionen als theoretischen Hintergrund, so stößt man in praktischen Anwendungen auf Punkte der Kurve, in denen F_z^0 nicht invertierbar ist. Da an solchen Punkten, auf Grund der Nichtanwendbarkeit des Satzes über implizite Funktionen, die üblichen Fortsetzungsmethoden zusammenbrechen, müssen solche Punkte speziell behandelt werden. Bei **Umkehrpunkten** kann man sich relativ leicht durch Wahl einer anderen Parametrisierungsrichtung helfen, bzgl. der die Kurve keinen Umkehrpunkt hat. Bei **Verzweigungspunkten** allerdings, in denen sich mehrere Kurven treffen, braucht man spezielle mathematische Theorien und Verfahren, um die Richtung und Anzahl der Kurven, ausgehend vom Verzweigungspunkt zu bestimmen. Die Bereitstellung solcher Mittel ist die Aufgabe der **Verzweigungstheorie** .

Probleme der Form (0.0.1) treten in vielen Bereichen auf. Z.B.:

Gewöhnliche Differentialgleichungen: schwingende Saiten, Oszillation in chemischen Reaktionen, Biologie und Medizin etc.

Elliptische Differentialgleichungen: schwingende Platten und Hüllen, das Taylor Problem, das Bénard Problem, thermische Zündprobleme etc.

Parabolische Differentialgleichungen: nichtlineare Wärmeerzeugung, Neutronen-Transport (erster Ordnung) etc.

Parabolische Differentialgleichungssysteme : Probleme der Lasertheorie, Dynamo-Probleme der Geophysik etc.

Desweiteren treten auch Variationsprobleme, Variationsungleichungen, nichtlineare Integralgleichungen, Funktional-Differentialgleichungen, nichtlineare Randwertprobleme in der komplexen Funktionentheorie usw. auf. Wichtige Beispiele für die genannten Arten sind etwa die Navier-Stokes-Gleichungen (Strömungsdynamik), die Ginzburg-Landau-Gleichung (Supraleitfähigkeit), van der Pol-Gleichung (Oszillationen in Vakuumröhren) u.v.a.m. Ein anderes Anwendungsgebiet sind Homotopieverfahren, bei denen von geeigneten Problemen ausgehend, unbekannte und nicht unmittelbar bestimmbare Lösungen von schwierigen Problemen gesucht werden. Hierbei wird ein Parameter eingeführt, um die beiden Arten von Lösungen durch Lösungskurven zu verbinden, die dann mit Fortsetzungsverfahren verfolgt werden können. Hier kann es allerdings auf den Lösungskurven zu Verzweigungen kommen, die dann speziell analysiert werden müssen.

Bei der Behandlung von Verzweigungsproblemen treten unter anderen folgende Probleme auf:

1. Wo sind die Verzweigungs- und Umkehrpunkte und wie können sie bestimmt werden?
2. Wie viele Zweige entspringen dem Verzweigungspunkt und in welche Richtung bzgl. λ laufen diese, falls $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt?
3. Können die Zweige bgzl. λ parametrisiert werden oder sollten zusätzliche oder andere Parameter eingeführt werden?
4. Welcher der Zweige ist der stabile, d.h. welchem Zweig würde das (z.B. physikalische) System folgen, wenn der Parameter über den Verzweigungspunkt hinaus variiert würde?

5. Treten weitere (sekundäre) Verzweigungen auf?

6. Wie verhält sich die Lösungsmenge von (0.0.1) bzgl. kleinen Störungen?

Diese und andere Punkte sind für eine Klärung des Verzweigungsverhaltens wichtige Faktoren, die bestimmt werden müssen, um das Verhalten der Lösungen von (0.0.1) auch über solche Verzweigungspunkte hinaus bzw. im Umfeld solcher kritischen, singulären Punkte bestimmen zu können.

Die wohl wichtigste Methode, um das Verzweigungsverhalten an einem Verzweigungspunkt zu untersuchen ist die wohlbekannte **Lyapunov-Schmidt-Methode**, siehe [GS86], [GSS88], [Sta71]. Bei ihr wird vorausgesetzt, daß F_z^0 ein Fredholm-Operator vom Index 0 ist, mit Kern der Dimension $n \in \mathbb{N}$, n 'klein', und abgeschlossenem Bild der Kodimension n. Es ist nun möglich, die Gleichung (0.0.1) im Verzweigungspunkt, unter Kenntnis einer Basis dieser Räume, auf ein Gleichungssystem mit $n+p$ Unbekannten und n Gleichungen

$$f(z,\lambda) = 0,\ f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n \tag{0.0.2}$$

zu reduzieren. f wird hierbei die **reduzierte Verzweigungsgleichung** genannt. Aus den Lösungen von (0.0.2) kann man dann die Lösungen von (0.0.1) bestimmen. Eine Variante dieser Methode, die eine sukzessive Berechnung der reduzierten Verzweigungsgleichung erlaubt, ist die iterative Lyapunov-Schmidt-Methode, siehe [Ash91],[Ash92] und deren Anwendung z.B. in [AABM93],[ABM95],[AM92]. Diese Methode läßt sich erweitern zur **verallgemeinerten Lyapunov-Schmidt-Methode** , bei der die Basen von Kern F_z^0 und dem Komplement von Bild $F_z^0 M$ nicht bekannt sein müssen, sondern nur Räume, die an der gesamten Basis dieser Räume beteiligt sind, siehe [JS89] oder [Gov91]. Insbesondere diese Verallgemeinerung eignet sich gut für numerische Berechnungen, da hier auch mit Näherungen der betreffenden Räume gearbeitet werden kann. Bei diesen numerischen Berechnungen von Lösungen (partieller Differentialgleichungen) sind allerdings zusätzliche Vorsichtsmaßnahmen zu treffen, so daß die numerischen Ergebnisse auch den analytischen Lösungen entsprechen, siehe [Böh89]. Von besonderer Wichtigkeit ist dabei die Wahl der Diskretisierungsgitter oder die Wahl der diskreten Differentialoperatoren, siehe etwa [ABGM92], [ABM91b], [Ast91].

In der oben dargestellten 'traditionellen' Vorgehensweise werden reguläre Kurvenpunkte (also Punkte, in denen $F_z(z_0, \lambda_0)$ ein Homöomorphismus ist) und singuläre Punkte (nichtreguläre Punkte) mit verschiedenen Methoden behandelt. Es sind dadurch mehrere mathematische Theorien und numerische Verfahren notwendig. Zum einen die Verfolgung von Lösungskurven (reguläre Lösungen), siehe [AG90], zum anderen die Erkennung von

singulären und Umkehrpunkten, siehe [AB88], [ABHJ], [DK81], [Gov91], [Mei89b], [SJ82], sowie die Analysierung der Singularität mit Hilfe von Lyapunov-Schmidt-Verfahren, siehe [ABM90a], [ABM93c], [ABM95], [Böh89], [Böh93], [BM89], [BM90], [BM91], [BM92], [Mei89b] [Mei89a], [Mei91b] oder auch unter symmetrischen Bedingungen (z.B. mit Hilfe von Varianten des äquivarianten Verzweigungslemmas), siehe [ABM90a], [ABM91c], [ABM92b], [ABM92a], [ABM93a], [AKS90], [Ash90], [Ast91], [HK90], [HK91], [HK92], [Hon91], [Mei91c], [Mei92b]. Mit Hilfe der gewonnenen Information über die abzweigenden Lösungen kann dann eine Pfadverfolgung in die entsprechenden Richtungen durchgeführt werden, siehe [ABM90b].

Diese getrennte Vorgehensweise behindert die Bereitstellung von Algorithmen, die in der Lage sind, Kurven auch über Verzweigungspunkte hinaus zu verfolgen und die auftretenden singulären Punkte zu analysieren.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Verfahren angegeben, das die oben genannten Verfahren vereinigen soll. Da hier der wesentliche Faktor die Nichtgültigkeit des Satzes über implizite Funktionen in singulären Punkten ist, gilt es diesen zu verallgemeinern, so daß diese Verallgemeinerung in der Lage ist, reguläre und singuläre Punkte auf Lösungskurven zu analysieren. Während in regulären Punkten das Ergebnis eine eindeutige Kurve sein muß, müssen in Verzweigungspunkten mehrere Kurven eindeutig bestimmt sein. Diese Verallgemeinerung wird mit Hilfe von **angepaßten Skalierungen** und einer bestimmten Art von 'aufblasen', sogenanntem **Blowing-up** der Gleichung erreicht. Erste Ansätze in diese Richtung finden sich in [Böh89], [BMS83], [KL72], [Mei89b]. Dazu ein Beispiel:

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(z, \lambda) = z^2 - \lambda^3; \tag{0.0.3}$$

Für dieses f (man spricht von *asymmetrischer Kuspe* oder *Neilscher Parabel*) ist im Punkt $(0, 0)$ der Satz über implizite Funktionen in keiner Komponente anwendbar und man müßte hier eine Verzweigungsanalyse starten. Skaliert man jedoch die verschiedenen Achsen in nichtlinearer Weise:

$$z \to t^3\tilde{z} \text{ und } \lambda \to t^2\tilde{\lambda} \qquad \text{mit } \tilde{z}, \tilde{\lambda} \in \mathbb{C} \ (bzw.\mathbb{R}) \tag{0.0.4}$$

so ergibt sich

$$f(t^3\tilde{z}, t^2\tilde{\lambda}) = t^6(\tilde{z}^2 - \tilde{\lambda}^3) \tag{0.0.5}$$

Betrachtet man nun (0.0.5) als Funktion von $t, \tilde{z}, \tilde{\lambda}$ und bläst f durch Division mit t^6 (Blowing-up) auf und normiert z.B. $\tilde{\lambda}^2 = 1$, so ergibt sich für

$$\tilde{f}(t, \tilde{z}, \tilde{\lambda}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t^6} f(t^3\tilde{z}, t^2\tilde{\lambda}) \\ \tilde{\lambda}^2 - 1 \end{pmatrix} = 0 \tag{0.0.6}$$

die Aussage: $\tilde{f}$ ist in $t = 0$, definiert durch den Limes, stetig bzgl. t differenzierbar. Weiterhin hat $\tilde{f}$ im Punkte $t = 0$ die Lösungen $(\tilde{z}, \tilde{\lambda}) = (\pm 1, 1)$ und $(\pm i, -1)$, wobei i die imaginäre Einheit sei. In diesen Lösungen ist $D_{(\tilde{z},\tilde{\lambda})}\tilde{f}$ im (Verzweigungs-)Punkt $t = 0$ regulär und somit kann für jede der Lösungen der Satz über implizite Funktionen angewendet werden, um auf eine abzweigende Kurve schließen zu können, die bzgl. t parametrisiert werden kann und deren Approximation $(t^2\tilde{z}, t^3\tilde{\lambda})$ in einer Umgebung des Verzweigungspunktes $(0, 0)$ lautet. Da die Kurven von f und $\tilde{f}$ die gleichen sind, hat man auf diese Weise die abzweigenden Kurven bestimmt. In praktischen Fällen werden hier nur die reellen Lösungen interessieren. Interessant ist jedoch, daß hier auch zwei imaginäre Lösungen auftreten, die vom mathematischen Standpunkt aus den reellen Lösungen gleichgestellt sind.

In Kapitel 1 werden die wesentlichen Hilfsmittel zur Diskussion von Parametrisierungen eingeführt. Insbesondere wird dabei die Parametrisierung mit Puiseux-Reihen von besonderem Interesse für die späteren Überlegungen sein.

In Kapitel 2 wird diskutiert, wie im Fall von 2 Variablen obige Skalierungs- und Blowing-up-Strategie automatisch mit Hilfe eines Algorithmus an das gegebene Verzweigungsproblem angepaßt werden kann. Insbesondere wird dieser Algorithmus als eine Verallgemeinerung des Satzes über implizite Funktionen angesehen. Da dieser Algorithmus in regulären wie in singulären Punkten die Kurven, die durch den vorliegenden Punkt laufen, bestimmen kann, ist er in idealer Weise geeignet, parameterabhängige Probleme zu analysieren.

In Kapitel 3 wird der entwickelte Algorithmus zur Klassifikation von einfachen Singularitäten eingesetzt. Dabei wird eine Singularitätenhierarchie für allgemeine sowie für $\mathbb{Z}_2$-symmetrische Keime bestimmt.

Die Ergebnisse und Methoden aus Kapitel 2 werden in Kapitel 4 auf höherdimensionale Verzweigungsprobleme übertragen. Einige Beispiele werden dazu diskutiert.

In Kapitel 5 wird dargestellt, wie die Ergebnisse der vorangegangenen Kapitel auf Verzweigungsprobleme für allgemeine Operatorgleichungen $F(z, \lambda) = 0$, z.B. gewöhnliche

oder partielle Differentialgleichungen, übertragen werden können. Der dort aufgestellte Algorithmus wird für den Fall von eindimensionalen Kernen dazu benutzt, eine Singularitätenhierarchie analog zu Kapitel 2 zu entwickeln. Hier können jedoch die definierenden Bedingungen für die jeweiligen Singularitäten direkt in Termen des Operators F angegeben werden. Diese Darstellung ist besonders für numerische Berechnungen wichtig.

Während der angesprochene Algorithmus in der Lage sein wird, Kurvendaten zu liefern, fehlt jedoch noch der numerische Teil, der benötigt wird, um auch tatsächlich Ergebnisse zu berechnen und Kurvenpunkte zu bestimmen. Dies soll den zweiten Hauptteil der vorliegenden Arbeit darstellen. Im numerischen Teil gilt es im wesentlichen, lineare Gleichungssysteme (etwa beim Fortsetzungsverfahren) zu lösen und Eigenwerte zu berechnen, um singuläre Punkte zu bestimmen. Zwar gibt es andere Methoden, um singuläre Punkte zu bestimmen (oft mit Hilfe von zusätzlichen Gleichungen, die nur in Verzweigungspunkten erfüllt sind), doch soll hier mit Eigenwerten gearbeitet werden. Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, daß beide Komponenten (das Lösen der linearen Gleichungssysteme sowie das Berechnen von ausgewählten Eigenwerten) mit Hilfe von **Krylov-Verfahren** durchgeführt werden können. Dies sind iterative Methoden, die einen relativ geringen Speicherplatzbedarf haben und Möglichkeiten zur Parallelisierung bieten. Z.B. können bei der im wesentlichen den Aufwand bestimmenden Matrix-Vektor-Multiplikation auf einfache Weise alle Prozessoren voll ausgelastet werden, falls eine entsprechende Verteilung der Daten gewährleistet ist.

In Kapitel 6 wird zur effizienten Bestimmung der Eigenwerte bei großen, dünn besetzten Matrizen eine neue Klasse von Präkonditionierungspolynomen eingeführt. Mit dieser Klasse ist es in Kombination mit Iterationsverfahren möglich, die gewünschten Eigenwerte zu berechnen.

In Kapitel 7 wird eine Testfunktion für Singularitäten eingeführt. Mit ihr gelingt es, allgemeine Singularitäten (auch Hopf-Verzweigungen) zu erkennen und während der Pfadverfolgung vorauszusagen. Dadurch läßt sich die Schrittweite entsprechend anpassen, so daß die Pfadverfolgung stabiler wird.

Mit der Kombination dieser Krylov-Methoden und des oben genannten Algorithmus werden Techniken vorgestellt, die sehr allgemein anwendbar, schnell, parallelisierbar und sicher sind.

Zum Schluß wird noch ein Ausblick auf mögliche Weiterentwicklungen der Themen dieser Arbeit gegeben.

Kapitel 1

Kurven als Nullstellenmengen von Abbildungen

In diesem Kapitel werden diejenigen Hilfsmittel eingeführt, die benötigt werden, um dem Ziel einer Verallgemeinerung des Satzes über implizite Funktionen, die auf Verzweigungsprobleme anwendbar ist, näher zu kommen. Die hier gewählte Darstellung folgt im Wesentlichen [Fis94]. Siehe aber auch [BK81].

1.1 Affin-algebraische Kurven

Wie in der Einleitung schon erwähnt wurde, kann man mit Hilfe der Lyapunov-Schmidt-Methode Probleme der Form (0.0.1) unter bestimmten Voraussetzungen (Fredholm-Alternative) auf einfachere Probleme der Form (0.0.2) reduzieren. Um die Arten von Nullstellenmengen besser zu verstehen, soll zunächst der Fall $n = p = 1$ betrachtet werden. So erhält man eine Gleichung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, deren Nullstellenmenge mit den abzweigenden Kurven von (0.0.1) in direktem Zusammenhang steht. Diese Nullstellenmenge hat in der Theorie der affin-algebraischen Kurven einen Namen:

Definition 1.1.1 *Sei $f \in \mathbb{R}[x_1, x_2]$. Dann heißt*

$$V(f) := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : f(x_1, x_2) = 0\}$$

die **Varietät** *von f.*

Beispiele dafür sind:

- $V(x_1^2 + x_2^2 - 1)$ (Kreis)
- $V(x_1^2 + x_2^2)$ (Punkt)
- $V(x_1^2 + x_2^2 + 1)$ (leere Menge)
- $V(x_1^2 - x_2^3)$ (Neilsche Parabel)

Wie schon an diesen einfachsten Beispielen klar wird, genügt es nicht, die Nullstellenmengen in $\mathbb{R}$ zu betrachten, um von Kurven sprechen zu können, die durch f gegeben sind. Dies ist auch nicht verwunderlich, da schon bei simplen Polynomen die Nullstellentheorie in der Algebra auf den Körper $\mathbb{C}$ angewiesen ist. Aus diesem Grund wird die Theorie der affin-algebraischen Kurven in $\mathbb{C}$ entwickelt (siehe z.B. [Fis94, BK81]). Gegebenenfalls kann man bei praktischen Beispielen zu den reellen Zahlen zurückkehren. In $\mathbb{C}$ kann man nun definieren:

Definition 1.1.2 *Eine Teilmenge $C \subset \mathbb{C}^2$ heißt* **affin-algebraische Kurve** *, wenn es ein Polynom $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$ gibt mit* $\deg f \geq 1$ *und*

$$C = V(f) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 : f(x_1, x_2) = 0\}$$

Das Polynom ist dabei nicht eindeutig für eine gegebene Varietät. Es gilt für $\mu \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash 0$ und $k \in \mathbb{N}$:

$$V(f) = V(\mu f) = V(f^k)$$

Da die reduzierte Verzweigungsgleichung alle diejenigen Kurven beschreibt, die durch den Verzweigungspunkt laufen, muß man sich Gedanken machen, wie sich diese Mehrfachheit in f widerspiegelt. Hierfür macht man sich zunutze, daß der Polynomring faktoriell ist. Es gilt: Ist f ein Teiler von g, d.h. $g = f \cdot h$, so ist $V(f) \subset V(g)$. Im umgekehrten Fall gilt:

Lemma 1.1.3 Lemma von Study. *Seien $f, g \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$. Ist f irreduzibel vom Grad ≥ 1 und $V(f) \subset V(g)$, so ist f Teiler von g.*

Die Anzahl der Kurven muß sich also in den Faktoren von g widerspiegeln. Da Polynomringe über Körpern faktoriell sind (Satz von Gauß), gibt es bis auf Einheiten und Reihenfolge eine eindeutige Zerlegung

$$f = f_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot f_r^{k_r}$$

mit irreduziblen f_μ. Deswegen gilt:

$$V(f) = V(f_1) \cup \ldots \cup V(f_r).$$

Die $V(f_\mu)$ werden **Komponenten** von $V(f)$ genannt. Man kann nun definieren:

Definition 1.1.4 *Eine algebraische Kurve $C \subset \mathbb{C}^2$ heißt* **reduzibel**, *wenn es algebraische Kurven C_1, C_2 gibt mit $C_1 \neq C_2$ und $C = C_1 \cup C_2$.* **Irreduzibel** *heißt nicht reduzibel.*

Algebraisch kann man dies wie folgt formulieren:

Lemma 1.1.5 *Eine algebraische Kurve $C = V(f) \subset \mathbb{C}^2$ ist genau dann irreduzibel, wenn es ein irreduzibles $g \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$ und $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $f = g^k$.*

Nach dem Lemma von Study, Lemma 1.1.5 und der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung gilt:

Satz 1.1.6 *Jede algebraische Kurve $C \subset \mathbb{C}^2$ gestattet eine bis auf Reihenfolge eindeutige Darstellung*

$$C = C_1 \cup \ldots \cup C_r$$

mit irreduziblen algebraischen Kurven $C_1, \ldots, C_r$. Diese heißen **algebraische Komponenten**.

Daraus ergibt sich folgendes

Korollar 1.1.7 *Sei $C = V(f) \subset \mathbb{C}^2$ eine algebraische Kurve und $f = f_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot f_r^{k_r}$ eine Primfaktorzerlegung, so gilt: Für jedes Polynom $g \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$ mit $C = V(g)$ existiert ein $\mu \in \mathbb{C}^*$ und $l_1, \ldots, l_r \in \mathbb{N}$ mit $g = \mu \cdot f_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot f_r^{l_r}$.*

Somit hat man die vollständige Übersicht über die möglichen Gleichungen von C und kann definieren:

Definition 1.1.8 *Sei* $f = f_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot f_r^{k_r}$, *dann nennt man* $\tilde{f} = f_1 \cdot \ldots \cdot f_r$ *das* **Minimalpolynom** *der Kurve* C.

Nach dem obigen Korollar ist das Minimalpolynom bis auf Einheiten eindeutig bestimmt. Da die Theorie der Kurven letztlich auf Gleichungen der Form (0.0.2) angewendet werden soll, ist es sinnvoll, von Polynomen auf allgemeinere Abbildungen überzugehen. Wie im nächsten Abschnitt gezeigt werden wird, sind die geeigneten Abbildungen die (konvergenten) Potenzreihen.

1.2 Potenzreihen

Bisher wurden die Varietäten mit Hilfe von Polynomen definiert. Da, wie oben schon erwähnt, die reduzierte Verzweigungsgleichung, die die abzweigenden Kurven definiert, im allgemeinen kein Polynom sondern eine Funktion ist, die die Differenzierbarkeitseigenschaften von (0.0.1) erbt, muß die Theorie dahingehend erweitert werden. Hier soll vorerst vorausgesetzt werden, daß F und somit auch f in C^∞ in einer Umgebung des Punktes x_0 sind. Später wird sich zeigen, daß im wesentlichen nur die stetige Differenzierbarkeit bis zum Grad der Bestimmtheit+1 gebraucht wird. Zudem sei angenommen, daß sich f in x_0 in eine Taylorreihe entwickeln läßt. Somit ist f in x_0 eine konvergente Potenzreihe und es läßt sich mit Hilfe der Theorie der konvergenten Potenzreihen die Theorie der Nullstellen von Polynomen auf die Nullstellenmengen von konvergenten Potenzreihen übertragen (siehe auch hier z.B. [Fis94, BK81]). Bei dieser Übertragung kommt man von der globalen Betrachtung der Kurven zu lokalen Aussagen, da die Potenzreihen nur in einer bestimmten Umgebung eines Punktes definiert sind. Diese Einschränkung ist jedoch für die Anwendung auf reduzierte Verzweigungsgleichungen genau die passende, da diese Verzweigungsgleichung auch nur in einer bestimmten Umgebung des Verzweigungspunktes definiert ist und Aussagen über die abzweigenden Kurven liefert. Außerhalb dieser Umgebung kann man mit Hilfe der reduzierten Verzweigungsgleichung keine Aussagen über die Lösungen von (0.0.1) erlangen. Dies ist dann auch nicht mehr notwendig, da dort F wieder regulär ist. Der Vorteil in der Betrachtung der konvergenten Potenzreihen liegt darin, daß mit ihnen global irreduzible Kurven (Polynome) lokal in einzelne Zweige reduziert werden können. Betrachtet man z.B. den Newtonschen Knoten,

$$f(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^2(x_1 + 1) \tag{1.2.1}$$

so ist dieser global irreduzibel, jedoch zerfällt er in einer kleinen Umgebung des Ursprungs

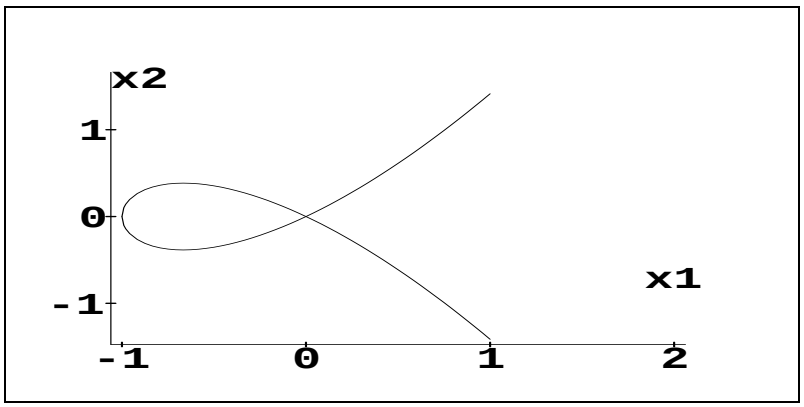

Abbildung 1.2.1: Newtonscher Knoten

in lokale Zweige. Diese Zweige können im Ursprung separat durch konvergente Potenzreihen dargestellt werden. Es gilt:

$$f(x_1, x_2) = (x_2 + x_1\sqrt{x_1+1})(x_2 - x_1\sqrt{x_1+1}) =: f_1 \cdot f_2 \tag{1.2.2}$$

Der Konvergenzbereich der Wurzelfunktion ist $|x_1| < 1$. Also sind f_1 und f_2 dort analytisch und die lokalen Zweige sind die Nullstellenmengen der dort definierten (im Sinne der konvergenten Potenzreihen irreduziblen) Faktoren f_1 und f_2. Für die formale Einführung der Potenzreihen definiert man:

Definition 1.2.1 *Der* **Ring der formalen Potenzreihen** *ist definiert als*

$$\mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]] := \left\{ f = \sum_{(\nu_1,\ldots,\nu_n)\in\mathbb{N}^n} a_{(\nu_1,\ldots,\nu_n)} x_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\nu_n} : a_{(\nu_1,\ldots,\nu_n)} \in \mathbb{C} \right\}$$

Zur einfacheren Schreibweise wird definiert:

Definition 1.2.2 *Multiindizes:*

$$\begin{aligned} \nu &:= (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n \\ x &:= (x_1, \ldots, x_n) \\ |\nu| &:= \nu_1 + \ldots + \nu_n \\ x^\nu &:= x_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\nu_n} \end{aligned}$$

Somit kann man schreiben:

$$f = \sum_{\nu} a_\nu x^\nu \in \mathbb{C}[[x]]$$

Weiterhin definiert man:

Definition 1.2.3 *Sei $d \in \mathbb{N}$, so ist der* **homogene Bestandteil** *vom Grad d von f:*

$$f_{(d)} := \sum_{|\nu|=d} a_\nu x^\nu \in \mathbb{C}[x]$$

Wie die Definition schon ausdrückt, ist dieser ein Polynom in x. Dagegen ist der **polynomiale Bestandteil** *vom Grad $\leq k$ definiert als:*

$$f^{(k)} := \sum_{d=0}^{k} f_{(d)} \in \mathbb{C}[x]$$

Um den Ring der Polynome zu einem Ring von Potenzreihen zu erweitern, setzt man:

Definition 1.2.4 *Sei $f, g \in \mathbb{C}[[x]]$. So sind Addition und Multiplikation von Potenzreihen definiert als:*

$$\begin{aligned} f + g &:= \sum_{d=0}^{\infty} (f_{(d)} + g_{(d)}) \\ f \cdot g &:= \sum_{d=0}^{\infty} \left(\sum_{k+l=d} f_{(k)} g_{(l)} \right) \end{aligned}$$

Damit erhält man die Ringerweiterung

$$\mathbb{C}[x] \subset \mathbb{C}[[x]]$$

Ein neuer Begriff, der zur theoretischen Behandlung von Potenzreihen wichtig ist, ist die Ordnung:

Definition 1.2.5 *Für $f \in \mathbb{C}[[x]]$ ist*

$$ord\, f := \begin{cases} min\{d : f_{(d)} \neq 0\} \text{ für } f \neq 0, \\ \infty \text{ für } f = 0 \end{cases}$$

Damit ist $\mathbb{C}[[x]]$ ein **Integritätsring**!

Nun kann man die sehr wichtigen Ideale $\mathcal{M}^k$ definieren:

Definition 1.2.6

$$\mathcal{M}^k = \{f \in \mathbb{C}[[x]] : ord\, f \geq k\}$$

Es gilt:

Lemma 1.2.7 *$\mathcal{M} := \mathcal{M}^1$ ist das einzige maximale Ideal in $\mathbb{C}[[x]]$.*

Bis hierher wurde noch kein Konvergenzbegriff für die Elemente des Potenzreihenringes eingeführt. Wie sich herausstellen wird ist es nützlich, zwei verschiedene Topologien und damit Konvergenzbegriffe einzuführen. Zum einen definiert man:

Definition 1.2.8 *Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt* **formal konvergent** *gegen $f \in \mathbb{C}[[x]]$, wenn es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, mit:*

$$f - f_n \in \mathcal{M}^k \text{ für } n \geq N$$

und **Cauchy-Folge**, *wenn es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit:*

$$f_m - f_n \in \mathcal{M}^k \text{ für } m, n \geq N$$

Diese Topologie nennt man **Krull-Topologie.**

Damit gilt, daß jede Cauchy-Folge in $\mathbb{C}[[x]]$ formal konvergiert. Diese Topologie wird ihre Anwendung in der Konstruktion von formalen Potenzreihen finden, die die abzweigenden Lösungen beschreiben. Die andere Möglichkeit von Konvergenz zu sprechen, ist die in der Analysis übliche (absolute) Konvergenz. Auf die Definition sei hier verzichtet. Mit dieser Konvergenz kann man definieren:

Definition 1.2.9 *Die Menge der (absolut)* **konvergenten Potenzreihen** *wird mit*

$$\mathbb{C}\langle x\rangle \subset \mathbb{C}[[x]]$$

bezeichnet.

Bemerkung 1.2.10 *Die Reihen aus $\mathbb{C}\langle x\rangle$ haben im allgemeinen keinen gemeinsamen Konvergenzbereich.*

Bei Polynomen kann man für die Variablen andere Polynome substituieren. Dieses ist bei Potenzreihen wegen des möglichen Wegfalls der formalen Konvergenz nicht immer möglich. Es gilt jedoch:

Satz 1.2.11 *Für $g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{C}[[y]]$ mit ord $g_j \geq 1$ gibt es einen* **Substitutionshomomorphismus** *von $\mathbb{C}$-Algebren*

$$H_g : \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]] \to \mathbb{C}[[y_1, \ldots, y_m]], f \mapsto f(g) =: f(g_1, \ldots, g_n),$$

Dieser Homomorphismus setzt für den Fall, daß $g_1, \ldots, g_n$ Polynome sind, den Substitutionshomomorphismus für Polynome fort. Außerdem gilt: Sind $g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{C}\langle y \rangle$, so ist

$$H_g(\mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_n \rangle) \subset \mathbb{C}\langle y_1, \ldots, y_m \rangle$$

Diese Tatsche ist wesentlich für die Überlegungen im Hinblick auf Funktionen g, für die $f(g) \equiv 0$ gilt . Wie in der Einführung schon angedeutet, wird es ein wesentliches Ziel dieser Überlegungen sein, den Satz über implizite Funktionen zu verallgemeinern. Auch hier müssen Potenzreihen in andere Potenzreihen eingesetzt werden.

1.3 Auszeichnung von Variablen und Weierstraßscher Approximationssatz

Da das Ziel ist, implizit definierte Kurven mit Hilfe von Potenzreihen bzw. Polynomen zu approximieren, müssen bestimmte Variablen ausgezeichnet werden können. Diese Variablen können dann entweder substituiert werden oder als Parametrisierungsvariablen für die Kurven dienen. Dies ist ebenso im Satz über implizite Funktionen wichtig. Formal definiert man deswegen:

Definition 1.3.1 *Soll o.B.d.A. die n-te Variable ausgezeichnet werden, so kann man schreiben:*

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} f_j x_n^j \ \textit{mit} \ f_j \in \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_{n-1}]]$$

Es gilt:

Lemma 1.3.2 *Ist $f \in \mathbb{C}\langle x \rangle$, so ist auch $f_j \in \mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_{n-1} \rangle$.*

Man definiert nun:

Definition 1.3.3 *Sei* $f \in \mathbb{C}[[x]]$ *und* $\tilde{f}(x_n) := f(0,\ldots,0,x_n) \in \mathbb{C}[[x_n]]$. *Dann heißt* f x_n**-allgemein** , *wenn* $\tilde{f} \neq 0$ *ist, und* x_n**-allgemein von der Ordnung** k , *wenn*

$$ord\,\tilde{f} = k$$

Bemerkung 1.3.4 *Ist* f x_n*-allgemein von der Ordnung* k*, so gilt:*

$$\tilde{f} = b_k x_n^k + \ldots \quad mit\ b_k \neq 0$$

Ist weiterhin $k = 1$*, so gilt*

$$\frac{\partial}{\partial x_n} f(0) = b_1 \neq 0$$

Somit ließe sich hier der Satz über implizite Funktionen anwenden, um eine Funktion g *zu erhalten für die gilt:*

$$f(x_1,\ldots,x_{n-1},g(x_1,\ldots,x_{n-1})) \equiv 0$$

Somit kann der Begriff der x_n*-Allgemeinheit als Verallgemeinerung der Ableitungsbedingung im Satz über implizite Funktionen angesehen werden. Dies ist ein erster Schritt auf dem Weg zu dessen Verallgemeinerung!*

Leider sind nicht alle Potenzreihen x_n-allgemein oder auch nur x_j-allgemein für eine bestimmte Unbekannte x_j. Z.B. sind alle Reihen der Form:

$$f(x) = x_j g(x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n) \text{ mit } g(0) = 0,\ g \not\equiv 0 \text{ und } j \in \{1,\ldots,n\}$$

für keine Unbekannte allgemein, wie sich leicht zeigen läßt. Es gibt aber für jedes f einen Koordinatenwechsel, der f allgemein macht. Es gilt der

Satz 1.3.5 *Ist* $0 \neq f \in \mathbb{C}[[x]]$ *mit* $k := ord\,f$*, so gibt es eine* **Scherung** $x = x(y)$ *mit:*

$$x_i = y_i + c_i y_n \text{ für } i = 1,\ldots,n-1 \text{ und } x_n = y_n,$$

so daß,

$$g(y) = f(x(y)) \in \mathbb{C}[[y]]$$

y_n*-allgemein von der Ordnung* k *ist. Weiterhin gilt:*

$$g \in \mathbb{C}\langle y\rangle \Leftrightarrow f \in \mathbb{C}\langle x\rangle$$

Um die Betrachtung von lokalen Nullstellenmengen (o.B.d.A in einer Umgebung von 0) zu vereinfachen, führt man folgende wichtigen Polynome ein:

Definition 1.3.6 *Falls gilt:* $f \in \mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle[x_n]$, $f = \sum_{j=0}^{k} f_j x_n^j$ *und* $f_0(0) = \cdots = f_{k-1}(0) = 0$, $f_k = 1$, *so heißt* f **Weierstraßpolynom** .

Diese Weierstraßpolynome haben nun eine entscheidende Eigenschaft. Man kann nämlich die Nullstellen einer x_n-allgemeinen Potenzreihe $g \in \mathbb{C}\langle x\rangle$ bzw. $g \in \mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle[x_n]$ in einer Umgebung des Ursprungs auf die Nullstellen eines bestimmten Weierstraßpolynoms zurückführen. Es gilt der

Satz 1.3.7 Weierstraßscher Vorbereitungssatz. *Es sei* $g \in \mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ x_n-*allgemein von der Ordnung* k. *Dann gibt es genau eine Darstellung*

$$g = e \cdot p = e(x_1, \ldots, x_n) \cdot \left(x_n^k + a_1(x_1, \ldots, x_{n-1}) x_n^{k-1} + \ldots + a_k(x_1, \ldots, x_{n-1})\right),$$

wobei $e \in \mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ *eine Einheit und* $p \in \mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle[x_n]$ *ein Weierstraßpolynom vom Grad* k *ist (damit gilt* $a_i(0) = 0$ *für* $i = 1, \ldots, k$*). Weiterhin gilt sogar: Ist* $g \in \mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle[x_n]$, *so ist* $e \in \mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle[x_n]$.

Wie schon in Bemerkung 1.3.4 angedeutet, ist der Spezialfall, daß f die Ordnung 1 hat, sehr interessant. Setzt man nämlich diese Bedingung im Weierstraßschen Vorbereitungssatz voraus, so ergibt sich die Aussage des Satzes über implizite Funktionen. Dieses kann man wie folgt nachweisen:

Sei $f \in \mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_n, y\rangle$ y-allgemein von der Ordnung 1. Dann existiert nach dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz ein $a \in \mathbb{C}\langle x\rangle$ mit $a(0) = 0$ und

$$f = e(y - a)$$

Also

$$f(x, a(x)) = e(x, a(x))(a(x) - a(x)) = 0$$

Ist $b \in \mathbb{C}\langle x\rangle$ eine weitere Reihe mit $b(0) = 0$ und $f(x, b(x)) = 0$, so gilt:

$$0 = f(x, b(x)) = e(x, b(x))(b(x) - a(x))$$

Da e eine Einheit bzgl. 0 ist, gilt $e(0, b(0)) = e(0, 0) \neq 0$. Da dies auf Grund der Stetigkeit auch in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{C}^n$ gilt, folgt für diese Umgebung $a(x) = b(x)$. Mit Hilfe des Identitätssatzes für Potenzreihen folgt somit formal der

Satz 1.3.8 Satz über implizite Funktionen. *Sei $f \in \mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_n, y\rangle$ mit $f(0) = 0$ und $\frac{\partial}{\partial y} f(0) \neq 0$. Dann gibt es genau eine Reihe $b \in \mathbb{C}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ mit*

$$b(0) = 0 \text{ und } f(x, b(x)) = 0$$

in einer Umgebung von 0.

Bemerkung 1.3.9

- *Durch Induktion über die Anzahl der y-Variablen kann man Satz 1.3.8 auf Systeme impliziter Funktionen verallgemeinern. Man erhält damit genau den formalen Teil des Satzes über implizite Funktionen der Analysis. Solche Systeme sind von der Form, wie sie bei reduzierten Verzweigungsgleichungen auftreten.*

1.4 Teilbarkeit im Ring der konvergenten Potenzreihen und Mengenkeime

In diesem Kapitel werden grundlegende Aussagen über die Teilbarkeitseigenschaften von Elementen im Ring der konvergenten Potenzreihen formuliert. Dabei werden die Aussagen von Polynomringen auf diese Ringe übertragen. Die algebraische Teilbarkeit in Faktoren einer Potenzreihe liefert als geometrische Anwendung die lokale Zerlegung der Kurve in lokale Zweige, sogenannte **Keime** (siehe z.B. der Newtonsche Knoten in der Umgebung von 0 bei (1.2.1) und (1.2.2)).

Es gilt das

Theorem 1.4.1 *Der Ring $\mathbb{C}\langle x\rangle$ ist faktoriell.*

Da Polynome auf ganz $\mathbb{C}^n$, Potenzreihen jedoch nur in Nullumgebungen definiert sind, müssen zur Übertragung der Eigenschaften von Polynomen geeignete Begriffe eingeführt werden:

Definition 1.4.2 *Sei $D = \{x \in \mathbb{C}^n : 0 \leq |x_i| < \rho_i\}$ ein Polyzylinder und $M \subset D$ eine Teilmenge. M heißt* **prinzipal-analytisch**, *wenn es ein $f \in \mathbb{C}\langle x\rangle$ gibt, das auf ganz D konvergiert und mit dem gilt*

$$M = \{x \in D : f(x) = 0\} =: V_D(f)$$

Falls f für $n = 2$ ein Polynom ist, so ist dies die Definition einer algebraischen Kurve. Ist f zudem noch eine Einheit in $\mathbb{C}[x_1, x_2]$, so ist $V(f) = \emptyset$. Bei Potenzreihen hingegen bedeutet 'Einheit' $f(0) \neq 0$ und somit $0 \notin V_D(f)$. Da hier nur kleine Umgebungen von 0 interessieren, ist es für einen Vergleich von verschiedenen prinzipal-analytischen Mengen nur wichtig, wie diese sich auf einer gemeinsamen Umgebung von 0 verhalten. Um diese Eigenschaft mathematisch zu erfassen, definiert man:

Definition 1.4.3 *Seien $M_1 \subset D_1$ und $M_2 \subset D_2$ prinzipal-analytisch. M_1 und M_2 heißen* **äquivalent**, *wenn es einen Polyzylinder $D \subset D_1 \cap D_2$ gibt, so daß gilt:*

$$M_1 \cap D = M_2 \cap D$$

Eine Äquivalenzklasse prinzipal-analytischer Mengen heißt **Mengenkeim**. *Für $n = 2$ spricht man auch von* **Kurvenkeim**. *In Analogie zu den Varietäten bei Polynomen wird der durch $V_D(f) \subset D$ definierte Keim durch $V(f)$ bezeichnet.*

Bemerkung 1.4.4 *$V(f)$ ist keine Teilmenge von D. Man kann aber $V(f)$ durch eine Teilmenge repräsentieren und definieren:*

$$V(f_1) \subset V(f_2)$$

$$:\Leftrightarrow \exists \text{ ein Repräsentant } V_{D_i}(f_i) \text{ und } D \subset D_1 \cap D_2, \text{ mit}$$

$$V_{D_1}(f_1) \cap D \subset V_{D_2}(f_2) \cap D$$

Analog definiert man $V(f_1) \cup V(f_2)$ und $V(f_1) \cap V(f_2)$. Damit gilt:

$$V(f) = \emptyset \Leftrightarrow 0 \notin V_D(f) \text{ für einen Repräsentanten}$$

Damit gilt: $V(f) = \emptyset \Leftrightarrow f$ ist eine Einheit in $\mathbb{C}\langle x\rangle$

Mit dieser Nomenklatur läßt sich das Lemma von Study (Lemma 1.1.3) auf Mengenkeime übertragen:

Lemma 1.4.5 Lemma von Study für Mengenkeime. *Seien $f, g \in \mathbb{C}\langle x\rangle$. Dann gilt:*

$$f \text{ irreduzibel}, V(f) \subset V(g) \Rightarrow f \text{ ist Teiler von } g \text{ in } \mathbb{C}\langle x\rangle.$$

Mit Hilfe dieses Lemmas läßt sich die Komponentenzerlegung einer algebraischen Kurve auf die eines Mengenkeimes übertragen:

Definition 1.4.6 *Ein prinzipal-analytischer Mengenkeim $V(f)$ heißt* **reduzibel**, *wenn es $V(f_1)$ und $V(f_2)$ gibt mit $V(f_i) \neq \emptyset$, $V(f_1) \neq V(f_2)$ und $V(f) = V(f_1) \cup V(f_2)$.*

Lemma 1.4.7 *Ein prinzipal-analytischer Mengenkeim $V(f)$ ist genau dann irreduzibel, wenn es ein irreduzibles $g \in \mathbb{C}\langle x\rangle$ und $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $f = g^k$.*

Nun kann Satz 1.1.6 auf Mengenkeime übertragen werden:

Satz 1.4.8 *Jeder prinzipal-analytische Mengenkeim $V(f)$ gestattet eine bis auf Reihenfolge eindeutige Zerlegung*

$$V(f) = V(f_1) \cup \ldots \cup V(f_r)$$

mit irreduziblen $V(f_\nu)$. Diese heißen die **irreduziblen Komponenten** .

In Analogie zu Definition 1.1.8 sagt man auch hier:

Definition 1.4.9 *Die Reihe $f \in \mathbb{C}\langle x\rangle$ heißt* **minimal**, *wenn alle Primfaktoren f_ν von f nur einfach vorkommen. In diesem Fall nennt man $ord(V(f)) = ord(f)$ die* **Ordnung des Keims**.

Bemerkung 1.4.10 *In den Kapiteln 2-5 werden Mittel zur Analyse von minimalen f entwickelt und angewandt. Nichtminimale Reihen sind problematisch, da einzelne Zweige in ihnen doppelt vorkommen und eine Identifikation mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen nicht möglich ist. In diesem Sinne sind nichtminimale f nicht endlich bestimmt, denn jede Störung beliebig hoher Ordnung trennt die mehrfach vorkommenden Lösungen auf. In Lemma 1.4.11 wird für den Fall $n = p = 1$ diese Tatsache mit Hilfe der Terminologie aus [GS86, GSS88] bewiesen.*

Lemma 1.4.11 *Sei $f \in \mathcal{E}_{z,\lambda}$ ein nichtminimaler Keim. Dann ist f nicht endlich bestimmt.*

Beweis: (Die Notationen finden sich in [GS86])

Es gilt: $RT(f) =< f, zf_z, \lambda f_\lambda >$. Da f nicht minimal ist, kann f in der Form $f(z,\lambda) = g^2(z,\lambda)p(z,\lambda)$ mit $g, p \in \mathcal{E}_{z,\lambda}$ geschrieben werden. Damit gilt:

$$\begin{aligned} RT(f) &= < g^2p, z(2gg_zp + g^2p_z), \lambda(2gg_\lambda p + g^2p_\lambda) > & (1.4.1)\\ &\stackrel{!}{=} < g > . & (1.4.2)\end{aligned}$$

Nach Korollar 5.8, Seite 74 in [GS86], hat ein Ideal, das von einem einzigen Keim erzeugt wird, unendliche Kodimension. Damit ist f nicht endlich bestimmt. ■

Hiermit liegt die mathematische Theorie vor, welche besagt, daß es in jedem Punkt einer Kurve eine Zerlegung in lokale Zweige gibt. Berechnen lassen sich diese lokalen Zweige theoretisch mit Hilfe der Primfaktorzerlegung eines Repräsentanten f, entwickelt im Punkte 0. Im Zusammenhang mit numerischen Rechnungen ist jedoch weniger die (algebraische) Primfaktorzerlegung zur Angabe der lokalen Zweige interessant, sondern eine Parametrisierung dieser Zweige zur Approximation und weiteren Verfolgung der Zweige. Aus diesem Grund soll im nächsten Abschnitt speziell auf Parametrisierungen mit Hilfe von Puiseux-Reihen eingegangen werden.

1.5 Die Parametrisierung mit Puiseux-Reihen

In diesem Abschnitt wird die Parametrisierung von Kurvenzweigen mit Hilfe von Puiseux-Reihen eingeführt. Diese Art der Parametrisierung von Kurvenzweigen wird später auch benutzt werden, um die einzelnen abzweigenden Lösungskurven anzugeben. Zunächst definiert man ganz elementar in zwei Dimensionen:

Definition 1.5.1 *Sei $f \in \mathbb{C}[[x,y]]$ und $f(0,0) = 0$. Dann heißt $(\varphi, \psi \in \mathbb{C}[[t]]$ eine* **formale Parametrisierung** *von f, wenn $(\varphi,\psi) \neq (0,0)$, $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ und*

$$f(\varphi(t), \psi(t)) = 0 \text{ in } \mathbb{C}[[t]]$$

gilt. Das Einsetzen ist dabei im Sinne von Satz 1.2.11 zu verstehen.

Die entscheidende Aussage ist nun die, daß es unter bestimmten Voraussetzungen immer eine formale Parametrisierung der Kurvenzweige gibt und daß es immer eine Parametrisierung gibt, bei der φ oder ψ besonders einfach wird. Dies besagt das

Theorem 1.5.2 Theorem über die Puiseux-Reihe. *Die Reihe $f \in \mathbb{C}[[x,y]]$ sei y-allgemein von der Ordnung $k \geq 1$ und $f(0,0) = 0$. Dann gibt es eine natürliche Zahl $n \geq 1$ und $\psi \in \mathbb{C}[[t]]$ mit $\psi(0) = 0$ und*

$$f(t^n, \psi(t)) = 0 \text{ in } \mathbb{C}[[t]] \tag{1.5.1}$$

Ist $f \in \mathbb{C}\langle x,y\rangle$, so auch ψ. Analog gilt das Theorem auch für x-allgemeine Reihen. Da wiederum alle $f \neq 0$ mit Hilfe eines linearen Koordinatenwechsels (siehe Scherung in Definition 1.3.5) auf x-oder y-Allgemeinheit transformiert werden können, ist es für alle Reihen $f \in \mathbb{C}[[x,y]]$ möglich, eine solche Parametrisierung zu finden.

Bemerkung 1.5.3 *Wendet man nun dieses Theorem über die Puiseux-Reihe mit Hilfe von Satz 1.4.8 auf jede irreduzible Komponente f_μ von f an, so ist es theoretisch möglich, alle Zweige, die durch den Nullpunkt gehen, formal zu parametrisieren. Damit ist die mathematische Basis vorhanden, mit der nun in Kapitel 2 gezeigt werden soll, wie mit Hilfe dieser formalen Puiseux-Parametrisierungen der Satz über implizite Funktionen verallgemeinert und somit auch auf singuläre Punkte angewendet werden kann. Ziel wird es dabei sein, alle $k,l \in \mathbb{N}$, $z_1,\ldots,z_k,\lambda_1,\ldots,\lambda_l \in \mathbb{C}$ zu bestimmen, so daß für minimale k,l und geeignet normierte $z_1,\ldots,z_k$ bzw. $\lambda_1,\ldots,\lambda_l$ alle eindeutig bestimmten Lösungen in der Umgebung von (z_0,λ_0) in der Form*

$$(z(t),\lambda(t)) = (z_k t^k, \lambda_1 t + \ldots + \lambda_l t^l) + O(t^{k+1}, t^{l+1}) \tag{1.5.2}$$

oder

$$(z(t),\lambda(t)) = (z_1 t + \ldots + z_k t^k, \lambda_l t^l) + O(t^{k+1}, t^{l+1}) \tag{1.5.3}$$

dargestellt werden können.

Kapitel 2

Adaptive Skalierung in 2 Dimensionen

In diesem Kapitel soll besprochen werden, wie man zu formalen Parametrisierungen der Form (1.5.1) kommen kann. In der Theorie der Puiseux-Parametrisierung geschieht dies mit Hilfe von Newton-Diagrammen. Es werden jeweils die 'niedrigsten' quasihomogenen Bestandteile von f separat betrachtet. Die Exponenten der auftretenden Monome werden in ein Koordinatensystem eingetragen, worauf die geeignete Parametrisierung für den quasihomogenen Teil mit Hilfe von geometrischen Methoden an dem Koordinatensystem abgelesen werden kann. Hat man somit diesen quasihomogenen Anteil eliminiert, kann man mit dem nächsten fortfahren. Auf diese Weise entsteht die formale Parametrisierung als beliebig weit entwickelbare Reihen φ, ψ. Der Nachteil bei dieser Vorgehensweise ist, daß es kein unmittelbares mathematisches Argument gibt, das es erlaubt, die Approximation von φ, ψ abzubrechen mit der Gewißheit, daß damit alle Zweige gefunden und auch eindeutig bestimmt wurden. Diese Problematik soll anhand einiger Beispiele im nächsten Abschnitt verdeutlicht werden.

2.1 Beispiele für Singularitäten

Das erste einfache Beispiel sei:

Beispiel 2.1.1

$$f(z, \lambda) = z^2 - \lambda z \in \mathbb{C}[z, \lambda]$$

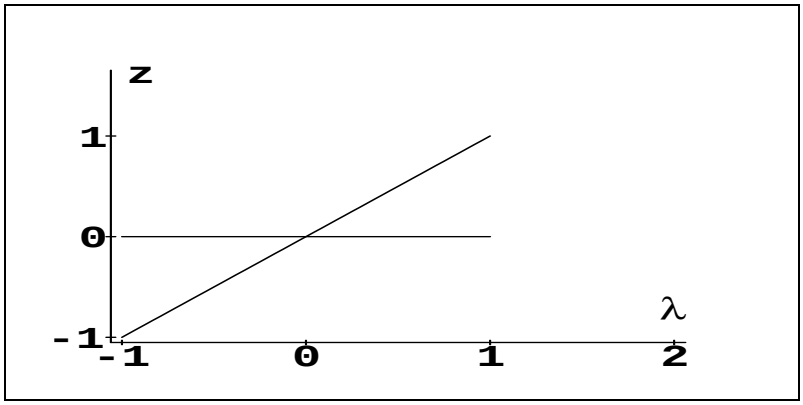

Abbildung 2.1.1: Transkritische Verzweigung

Die Zerlegung in irreduzible Komponenten liefert

$$f(z,\lambda) = z(z-\lambda)$$

und die geeigneten Parametrisierungen lauten

$$\varphi(t) = 0 \quad \textit{und} \quad \psi(t) = t,$$

sowie

$$\varphi(t) = t \quad \textit{und} \quad \psi(t) = t$$

In diesem Fall sind alle abzweigenden Lösungen bestimmt und man spricht von einer **transkritischen Verzweigung**.

Ein Problem, das bei der formalen Berechnung der Puiseux-Reihe nicht auftaucht, ist der Abbruch der Berechnung, falls eine eindeutige Approximation der einzelnen Zweige bestimmt wurde. Um dies zu verdeutlichen, betrachte man folgendes Beispiel:

Beispiel 2.1.2

$$f(z,\lambda) = (z-\lambda)^2 - z^4 \in \mathbb{C}[z,\lambda] \tag{2.1.1}$$

In erster Approximation für φ, ψ würde sich hier ergeben:

$$\varphi(t) = \psi(t) = t$$

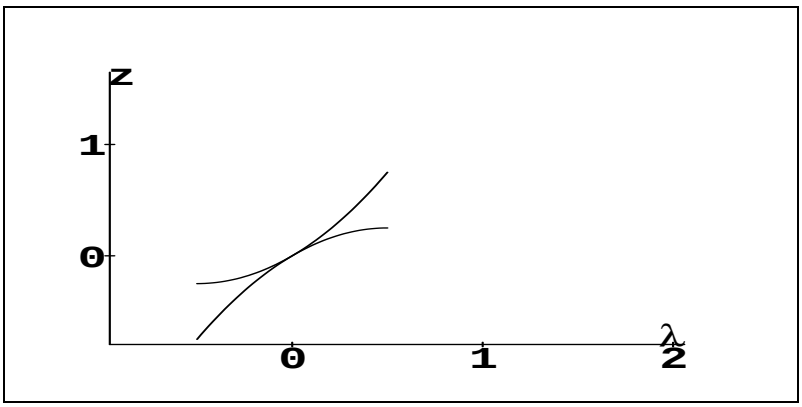

Abbildung 2.1.2: Doppeltangente

Damit gilt:

$$f(\varphi(t), \psi(t)) = O(t^4)$$

Diese vermeintlich gute Approximation spiegelt jedoch das Verzweigungsverhalten bzw. die lokalen Zweige in keinster Weise wider. Das Problem liegt in der Tatsache, daß es hier zwei Kurven gibt, die den gleichen linearen Anteil haben. Richtig und vollständig müßte die Parametrisierung lauten:

$$\begin{aligned} z = \varphi(t) &= t \\ \lambda = \psi(t) &= t + t^2 \ \textit{und}\ t - t^2 \end{aligned}$$

Wie an Beispiel 2.1.2 klar wird, ist es unerläßlich, ein mathematisches Kriterium zu haben, das den Abbruch der formalen Berechnung der Parametrisierung rechtfertigt und damit Gewißheit darüber gibt, alle abzweigenden Kurven getrennt zu haben. Desweiteren sollte dieses Kriterium mit einem Verfahren gekoppelt werden, das sukzessive die Reihen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ berechnet, wobei das Abbruchkriterium bei jeder besseren Approximation überprüft werden muß. Bevor beschrieben werden soll, wie diese Anforderungen in einem Algorithmus zusammengefaßt und erfüllt werden können, soll im nächsten Abschnitt das Problem in ein äquivalentes überführt werden, welches insbesondere dazu dienen soll, das Abbruchkriterium zu integrieren.

2.2 Blowing-Up und Skalierung von Keimen in 2 Dimensionen

In diesem Kapitel wird eine spezielle Form des Blowing-Up eingeführt. Diese Form wird es ermöglichen, die Singularität von einem Punkt auf einen Kreis 'aufzublasen', ähnlich wie es bei polarem blowing-up geschieht (zum Thema blowing-up siehe z.B. [AP92, GH83, vSuF91] und speziell für Verzweigungsprobleme [ABM90a], [ABM93c], [ABM95], [Böh89], [Böh93], [BM89], [BM90], [BM91], [Mei89b], [Mei89a], [Mei91b]). Zugrunde liegt nach wie vor die (reduzierte Verzweigungs-)Gleichung:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \text{ also } f \in \mathbb{R}\langle x_1, x_2\rangle, \text{ da } f \in C^\infty. \tag{2.2.1}$$

Zusätzlich zu den vorhandenen Variablen wird nun eine neue **Parametrisierungsvariable** t eingeführt, mit der, wie auch schon in Kapitel 1.5, die Lösungen (φ, ψ) parametrisiert werden. Nach dem Satz von Puiseux wissen wir, daß alle Lösungen mit $\varphi j, \psi j \in C\langle t\rangle$ dargestellt werden können. Wir können also **ohne Beschränkung der Allgemeinheit** folgenden Ansatz für abzweigende Lösungen setzen:

Ansatz 2.2.1 *Sei* $\Phi := (\varphi, \psi) \in \mathbb{C}\langle t\rangle \times \mathbb{C}\langle t\rangle$ *eine Lösungskurve mit* $(\varphi, \psi) \neq (0,0)$, $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ *und*

$$f(\Phi(t)) = f(\varphi(t), \psi(t)) = 0, \ \forall t \in U(0) \subset \mathbb{R}$$

Es gilt nun, alle möglichen (φ, ψ) zu finden. Dazu werden folgende Bezeichnungen einführt:

Definition 2.2.2 *Sei* $\varphi, \psi \in \mathbb{C}\langle t\rangle$ *mit:*

$$\varphi(t) =: \sum_{j=1}^{m_1} \varphi_j t^j, \quad \varphi_j \in \mathbb{C}, \ m_1 \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \tag{2.2.2}$$

$$\psi(t) =: \sum_{j=1}^{m_2} \psi_j t^j, \quad \psi_j \in \mathbb{C}, \ m_2 \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \tag{2.2.3}$$

$$f(\varphi(t), \psi(t)) =: \sum_{j=1}^{m} T_j\left(\varphi_{1,\ldots,k_j}, \psi_{1,\ldots,l_j}\right) t^j + O(t^{m+1}), \tag{2.2.4}$$
$$k_j, l_j, m \in \mathbb{N}$$

Hierbei und im folgenden bezeichne $\varphi_{1,\ldots,l} := \varphi_1, \ldots, \varphi_l$ *bzw.* $\psi_{1,\ldots,l} := \psi_1, \ldots, \psi_l$.

Die Werte m_1, m_2 seien dabei hinreichend groß gewählt. Für k-bestimmte Verzweigungsprobleme bedeutet dies, daß sich die Lösungskurven eindeutig über (2.2.2) und (2.2.3) mit $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ identifizieren lassen. Der Term T_j bezeichnet den Anteil von f, der bzgl. t die Ordnung j hat und kann als Funktion von den φ_μ, ψ_μ aufgefaßt werden. Für die Werte k_j, l_j gilt das folgende

Lemma 2.2.3 *Es gilt:*

$$k_j, l_j \leq j \quad \forall j \in \mathbb{N} \tag{2.2.5}$$

Beweis: Annahme: Es existiert $j \in \mathbb{N}$, so daß T_j von φ_l mit $l > j$ abhängig ist. Der Summand in T_j, in dem φ_l vorkommt, ist somit mindestens von der Ordnung $l > j$, da nur ganze Potenzen und Produkte der φ_μ, ψ_μ auftreten. Dies ist ein Widerspruch zu der Annahme, daß T_j nur Terme der Ordnung j enthält. Analog argumentiert man für ψ_l. ■

Es gilt nun nach diesen allgemeinen Bezeichnungen eine Strategie zu entwickeln, mit der es möglich ist, die Werte φ_μ, ψ_μ zu berechnen. Dabei sollten alle Möglichkeiten erfaßt werden, um alle abzweigenden Lösungen zu erhalten. Betrachtet man dazu die Gleichung (2.2.4), so ist klar, daß, falls (φ, ψ) eine Lösung für alle t in einer ganzen Umgebung von 0 sein soll, alle $T_j = 0$ sein müssen. Somit ergeben sich theoretisch beliebig viele Bestimmungsgleichungen für die φ_μ, ψ_μ. Will man jedoch die Gleichungen

$$T_j\left(\varphi_{1,\ldots,k_j}, \psi_{1,\ldots,l_j}\right) = 0 \tag{2.2.6}$$

für aufsteigende j von $j = 1$ an lösen, so ergibt sich das Problem, daß es zu viele Unbekannte φ_μ, ψ_ν gibt. Diesem Problem kann wie folgt begegnet werden: Da es darum geht, k-bestimmte Verzweigungen zu berechnen (siehe für eine genaue Definition [GS86, GSS88]), kann davon ausgegangen werden, daß eine endliche Entwicklung von f und φ, ψ ausreicht, um das Verzweigungsverhalten zu approximieren. Desweiteren sollen die Entwicklungen für f und φ, ψ, die das Verzweigungsverhalten bestimmen, so kurz wie möglich sein. Zu diesem Zweck wird zu Anfang davon ausgegangen, daß schon die Entwicklung bis zur ersten Ordnung in t genügt, um das Verzweigungsverhalten zu beschreiben. Falls sich herausstellt, daß dadurch das Verzweigungsverhalten noch nicht bestimmbar ist, müssen sukzessive Terme höhere Ordnung hinzugenommen werden. Im folgenden soll nun gezeigt werden, daß diese Situation genau in regulären Punkten der Lösungskurve vorliegt. Ebenso wird aus dieser Zusammenhangsbetrachtung die Strategie zu erkennen sein, die benötigt wird, um auch Singularitäten, sprich Verzweigungen, zu betrachten:

Es gilt:

$$f(0,0) = 0 \tag{2.2.7}$$

$$f(\Phi(t)) = f(\varphi(t),\psi(t)) = 0 \text{ in } U(0) \subset \mathbb{R} \tag{2.2.8}$$

Betrachte nun mit $\Phi(t) = (\varphi_1 t, \psi_1 t)$ die Abbildung:

$$\tilde{f}_1 : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2 : \tilde{f}_1(\varphi_1,\psi_1,t) := \begin{pmatrix} \frac{1}{t} f(\Phi(t)) \\ N(\varphi_1,\psi_1) \end{pmatrix},\ t \neq 0, \tag{2.2.9}$$

wobei $N(\varphi_1,\psi_1)$ eine Normierung für φ_1, ψ_1 sein soll, z.B. der Form[1]:

$$N(\varphi_1,\psi_1) = (\varphi_1)^2 + (\psi_1)^2 - c,\ c \in \mathbb{R}^+ \tag{2.2.10}$$

Für diese Abbildung gilt:

Satz 2.2.4

$$\lim_{t\to 0} \tilde{f}_1(\varphi_1,\psi_1,t) = \begin{pmatrix} T_1(\varphi_1,\psi_1) \\ N(\varphi_1,\psi_1) \end{pmatrix} \tag{2.2.11}$$

$$= \begin{pmatrix} D_1 f(\Phi(0))\varphi_1 + D_2 f(\Phi(0))\psi_1 \\ N(\varphi_1,\psi_1) \end{pmatrix} \tag{2.2.12}$$

$$= \begin{pmatrix} Df^0 \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix} \\ N(\varphi_1,\psi_1) \end{pmatrix} \tag{2.2.13}$$

$$=: B_1(\varphi_1,\psi_1) \tag{2.2.14}$$

Desweiteren gilt somit $\tilde{f}_1 \in C^1(U(0))$ bzgl. t.

[1]Diese Normierung wird später je nach vorliegender Verzweigungsart durch andere Normierungen ersetzt, die gewisse Einschränkungen bzgl. der einzelnen Variablen ergeben. An dieser Stelle soll jedoch noch keine Variable besonders ausgezeichnet werden.

Beweis: Da $f(0) = 0$ vorausgesetzt wurde, hat f kein absolutes Glied in t. Der niedrigste Term in t ist somit T_1. Da alle höheren Terme beim Grenzübergang $t \to 0$ gegen 0 gehen, bleibt nur $\frac{1}{t}tT_1(\varphi_1, \psi_1) = T_1(\varphi_1, \psi_1)$ übrig.

Die zweite Aussage $\tilde{f}_1 \in C^1(U(0))$ bzgl. t ergibt sich per definitionem von $\tilde{f}_1$. ■

Der Zusammenhang zwischen f und $\tilde{f}_1$ ist nun im folgenden Lemma dargestellt:

Lemma 2.2.5 *Falls für* $\tilde{f}_1(\pm\tilde{\varphi}_1, \pm\tilde{\psi}_1, 0) = 0$ *die Regularitätsbedingung*

$$D_{(\varphi_1,\psi_1)}\tilde{f}_1(\pm\tilde{\varphi}_1, \pm\tilde{\psi}_1, 0) \text{ regulär} \tag{2.2.15}$$

erfüllt ist, so ist $(0,0)$ *eine reguläre Lösung von* $f = 0$ *und die eindeutig bestimmte Tangente der Lösungskurve durch* $(0,0)$ *lautet* $(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\psi}_1)$*, d.h.*

$$f(\tilde{\varphi}_1 t, \tilde{\psi}_1 t)) = 0 + O(t^2).$$

Beweis: Sei $\tilde{f}_1(\pm\tilde{\varphi}_1, \pm\tilde{\psi}_1, 0) = 0$ und (2.2.15) erfüllt und o.B.d.A $\tilde{\varphi}_1 \neq 0$. Damit setze man die Normierung in (2.2.9) auf

$$\tilde{N}(\varphi_1, \psi_1) = (\varphi_1)^2 - (\tilde{\varphi}_1)^2. \tag{2.2.16}$$

Mit dieser Normierung gilt dann per definitionem:

$$\tilde{f}_1(\pm\tilde{\varphi}_1, \pm\tilde{\psi}_1, 0) = B_1(\pm(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\psi}_1)) = 0$$

und

$$DB_1(\pm\tilde{\varphi}_1, \pm\tilde{\psi}_1) = \begin{pmatrix} D_1 f(\Phi(0)) & D_2 f(\Phi(0)) \\ \pm 2\tilde{\varphi}_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2.17}$$

Da diese Matrix nach Voraussetzung (2.2.15) regulär ist, muß $D_2 f(\Phi(0)) \neq 0$ gelten. Damit gilt auch $Df(\Phi(0)) \neq (0,0)$ und $(0,0)$ ist eine reguläre Lösung von $f = 0$. Damit existiert eine eindeutige Lösungskurve durch $(0,0)$, deren Tangente per Konstruktion (siehe (2.2.13)) gerade $(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\psi}_1)$ ist. Damit gilt dann $f(\tilde{\varphi}_1 t, \tilde{\psi}_1 t) = 0 + O(t^2)$ für $t \in U(0)$. ■

Bemerkung 2.2.6 *In der Kurvenapproximation $(\tilde{\varphi}_1 t, \tilde{\psi}_1 t)$ wurden die $\pm$-Zeichen weggelassen, da dadurch lediglich 2 Kurven in verschiedener Durchlaufrichtung beschrieben würden. Im allgemeinen ist klar, daß immer dann, wenn die $\pm$-Varianten als Faktoren von t^{2j-1}, $j \in \mathbb{N}$ auftreten, diese Lösungen zusammengefasst werden können, da auch hier gleiche Lösungen in verschiedenen Durchlaufrichtungen beschrieben werden.*

Bemerkung 2.2.7 *Es ist also mit Hilfe der Funktion $\tilde{f}_1$ gelungen, die Parametrisierungsvariable mit aufzunehmen und bei geeigneten Normierungen wieder den Satz über implizite Funktionen zu erhalten. An dieser Stelle wurden somit noch keine neuen Ergebnisse bzw. Aussagen gewonnen. Der Vorteil dieser Parametrisierungsversion des Satzes über implizite Funktionen liegt nun darin, daß diese auch auf nichtlinear bestimmte, also singuläre Probleme verallgemeinerbar ist. Dies wird in der folgenden Definition realisiert.*

Definition 2.2.8 *Es seien die $\varphi_1, \ldots, \varphi_{k_j-1}$ und $\psi_1, \ldots, \psi_{l_j-1}$ als bekannt vorausgesetzt. Das sei in Verallgemeinerung von $\tilde{f}_1$ definiert:*

$$\Phi(t) = (\sum_{l=1}^{k_j} \varphi_l t^l, \sum_{l=1}^{l_j} \psi_l t^l) \tag{2.2.18}$$

$$\tilde{f}_j : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2 :$$

$$\tilde{f}_j(\varphi_{k_j}, \psi_{l_j}, t) := \begin{pmatrix} \frac{1}{t^j} f(\Phi(t)) \\ N(\varphi_{k_j}, \psi_{l_j}) \end{pmatrix}, \; t \neq 0 \tag{2.2.19}$$

$$\textit{wobei } k_1, l_1 := 1 \textit{ gelte} \tag{2.2.20}$$

Es soll nun dargestellt werden, wie man mit Hilfe von $\tilde{f}_j$ die Entwicklung aller möglichen $(\varphi(t), \psi(t))$, also aller abzweigenden Kurven, in regulären wie in singulären Punkten berechnen kann. Da, wie oben schon angesprochen, für Lösungen $(\varphi(t), \psi(t))$ alle $T_j = 0$ sein müssen, bietet es sich an, diese der Reihe nach zu eliminieren:

Zu Anfang sei $j = 1$: Dann gilt (2.2.11)-(2.2.14).

Damit keine Einschränkungen bzgl. einer Variablen getroffen werden, kann hier die Normierung (2.2.10) genommen werden. Es gibt nun zwei Möglichkeiten:

A.) $(0, 0)$ ist ein regulärer Punkt der Lösungskurve von f. Damit gilt:

$$Df(0) \neq (0, 0) \tag{2.2.21}$$

Somit hat $B_1 = 0$ aus (2.2.14) isolierte Nullstellen und man erhält mit der passenden Normierung, analog zu (2.2.16), für die Lösung $\pm(\tilde{\varphi}_{k_1}, \tilde{\psi}_{l_1})$ eine reguläre Matrix (vgl. (2.2.17)):

$$D_{(\varphi_{k_1},\psi_{l_1})}B_1(\pm(\tilde{\varphi}_{k_1}, \tilde{\psi}_{l_1})) \text{ regulär} \tag{2.2.22}$$

Man hat also, analog zum Satz über implizite Funktionen, auf eine eindeutige Lösungskurve geschlossen und gleichzeitig eine Approximation dieser Kurve von erster Ordnung bzgl. t erhalten. Sie lautet ausgehend vom regulären Punkt $(0,0)$:

$$(\varphi(t), \psi(t)) = \pm t(\varphi_{k_1}, \psi_{l_1}) + O(t^2) = \pm t(\varphi_1, \psi_1) + O(t^2) \tag{2.2.23}$$

Im Gegensatz zu Beispiel 2.1.2 hat man hier die Gewißheit, daß diese Approximation genau einer Lösungskurve entspricht.

Hat man jedoch einen singulären Punkt vorliegen, so ergibt sich der zweite Fall B.

B.) $(0,0)$ ist ein singulärer Punkt der Lösungskurve von f. Da hier noch φ und ψ als Parametrisierungsrichtungen zur Verfügung stehen, bedeutet dies

$$Df(0) = (0,0) \tag{2.2.24}$$

Somit ergibt sich als Lösung von B_1 der gesamte Einheitskreis (mit der Normierung (2.2.10) und $c = 1$). Damit sind die Lösungen nicht isoliert und es ergibt sich infolgedessen auch keine reguläre Ableitungsmatrix wie in (2.2.22). Analog zum Satz über implizite Funktionen würde hier auch die parametrisierte Variante versagen. Jedoch sind an dieser Stelle noch nicht alle Bedingungen verbraucht. In der Tat gibt es noch mehr Bedingungen für die Unbekannten φ_j, ψ_j, nämlich die Bedingungen $T_j = 0,\ j = 2, 3, \ldots$. Folgerichtig wird j um 1 erhöht und man betrachtet nun:

$$\tilde{f}_2 = 0 \tag{2.2.25}$$

Wegen $T_1 = 0$ ergibt sich nun beim Grenzübergang zu $t = 0$ das Gleichungssystem:

$$\lim_{t\to 0} \tilde{f}_2(\varphi_1, \psi_1, t) \tag{2.2.26}$$

$$= \begin{pmatrix} T_2(\varphi_1, \psi_1) \\ N(\varphi_1, \psi_1) \end{pmatrix} \tag{2.2.27}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(D_1^2 f(\Phi(0))\varphi_1{}^2 + \right. \\ \qquad \left. 2D_1D_2 f(\Phi(0))\varphi_1\psi_1 + D_2^2 f(\Phi(0))\psi_1{}^2\right) \\ N(\varphi_1,\psi_1) \end{pmatrix} \tag{2.2.28}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}D^2 f^0 \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix}^2 \\ N(\varphi_1,\psi_1) \end{pmatrix} \tag{2.2.29}$$

$$=: \; B_2(\varphi_1,\psi_1) = 0 \tag{2.2.30}$$

Gleichung (2.2.30) ist nun eine **nichtlineare** Gleichung für die Unbekannten (φ_1,ψ_1). Wie man sieht, besteht (2.2.29) aus zwei quadratischen Gleichungen und hat somit für nichtverschwindende Diskriminante $(D_1D_2f(\Phi(0)))^2 - D_1f(\Phi(0))D_2f(\Phi(0))$ von T_2 vier isolierte Lösungen, für die mit der entsprechenden Normierung (siehe (2.2.16))

$$D_{(\varphi_{k_1},\psi_{l_1})}B_2(\tilde{\varphi}_{k_1},\tilde{\psi}_{l_1}) \tag{2.2.31}$$

regulär wird (siehe Satz 2.2.13). Damit kann separat für jede Lösung der Satz über implizite Funktionen auf die Variable t für $\tilde{f}_2$ angewendet werden. Für jede dieser Lösungen ergibt sich also ein Lösungszweig. Da mit $(\tilde{\varphi}_{k_1},\tilde{\psi}_{l_1})$ auch $(-\tilde{\varphi}_{k_1},-\tilde{\psi}_{l_1})$ eine Lösung von (2.2.30) ist, kann somit auf zwei Lösungskurven durch den Verzweigungspunkt $(0,0)$ geschlossen werden. Es liegt also eine transkritische Verzweigung vor. Die Approximationen für die Lösungskurven lauten aus den obigen Ergebnissen:

$$t(\tilde{\varphi}_{k_1},\tilde{\psi}_{l_1}) + O(t^2), \tag{2.2.32}$$

wobei jeweils die Lösungen aus $B_2(\tilde{\varphi}_{k_1},\tilde{\psi}_{l_1}) = 0$ einzusetzen sind.

Ist hingegen die Diskriminante der quadratischen Gleichung gleich 0, so muß mit den hier gewonnenen Bedingungen für $(\tilde{\varphi}_{k_1},\tilde{\psi}_{l_1})$ die Ordnung j weiter erhöht werden. Dies wird analog für alle nichtbestimmten Lösungen, d.h. Lösungen, die nicht isoliert sind und damit deren Ableitungsmatrix auch nicht regulär ist, weitergeführt.

Mit der in A.) und B.) aufgezeigten Vorgehensweise kann nun ein Algorithmus aufgestellt werden, der die Abarbeitung der einzelnen Fälle beschreibt. Dazu sei zunächst allgemein definiert:

Definition 2.2.9 *Seien für geeignete* $k_j, l_j \in \mathbb{N}$ *die Werte* $\tilde{\varphi}_{1,\ldots k_j-1}, \tilde{\psi}_{1,\ldots l_j-1} \in \mathbb{C}$ *so gewählt, daß* $T_1 = \ldots = T_{j-1} = 0$ *gilt.*

Dann existiert der Limes $\lim_{t\to 0}\tilde{f}_j$ *(siehe Satz 2.2.13) und es wird definiert:*

$$\lim_{t\to 0}\tilde{f}_j(\varphi_{k_j},\psi_{l_j},t) = \begin{pmatrix} T_j(\tilde{\varphi}_{1,\ldots k_j-1},\varphi_{k_j},\tilde{\psi}_{1,\ldots l_j-1},\psi_{l_j}) \\ N(\varphi_{k_j},\psi_{l_j}) \end{pmatrix} =: B_j(\varphi_{k_j},\psi_{l_j}) = 0 \tag{2.2.33}$$

Die Werte k_j, l_j *geben dabei an, wie weit die* i*-te Komponente der Lösung* $(\varphi(t),\psi(t))$ *bei der Betrachtung der Ordnung* j *bzgl.* t *entwickelt werden soll. Man wird in der Regel nur einen Wert* k_j *oder* l_j *gegenüber* k_{j-1} *oder* l_{j-1} *erhöhen.*

Im folgenden werden die schon bekannten Werte $\tilde{\varphi}_{1,\ldots k_j-1}$ *und* $\tilde{\psi}_{1,\ldots l_j-1}$ *in der Darstellung weggelassen.*

Mit Definition 2.2.9 kann nun der Algorithmus formuliert werden:

Algorithmus 2.2.10 Adaptive Skalierung von Keimen

1. Schritt: *Setze* $j := 1$ *und* $k_1 = l_1 = 1$.

2. Schritt: *Die Werte von* $\tilde{\varphi}_{1,\dots k_j-1}, \tilde{\psi}_{1,\dots l_j-1} \in \mathbb{C}$ *seien durch den Algorithmus schon so gewählt, daß bereits* $T_1 = \dots = T_{j-1} = 0$ *und* $J_1 = \dots = J_{j-1} = 0$ *(siehe (2.2.35)) gilt.*

Bestimme alle $(\tilde{\varphi}_{k_j}, \tilde{\psi}_{l_j}) \in \mathbb{C}^2$ *für die gilt:*

$$B_j(\tilde{\varphi}_{k_j}, \tilde{\psi}_{l_j}) = 0 \tag{2.2.34}$$

3. Schritt: *Führe folgende Schritte für alle Lösungen* $(\tilde{\varphi}_{k_j}, \tilde{\psi}_{l_j})$ *aus:*

Sei o.B.d.A[2] $\tilde{\psi}_{l_j} \neq 0$. *Berechne*

$$J_j(\tilde{\varphi}_{k_j}, \tilde{\psi}_{l_j}) := D_{\varphi_{k_j}} T_j(\tilde{\varphi}_{k_j}, \tilde{\psi}_{l_j}) \tag{2.2.35}$$

Falls: $J_j(\tilde{\varphi}_{k_j}, \tilde{\psi}_{l_j}) \neq 0$*:*

Diese Lösung bestimmt eine abzweigende Kurve (siehe Satz 2.2.13). Ihre Approximation lautet für geeignetes a*:*

$$(\sum_{\mu=1}^{k_j} \tilde{\varphi}_\mu t^\mu, \sum_{\mu=1}^{l_j} \tilde{\psi}_\mu t^\mu) \subset \mathbb{C}^2 \text{ für } t \in [-a, a], a \in \mathbb{R}^+ \tag{2.2.36}$$

Stopp für diese Lösung.

sonst: $J_j(\tilde{\varphi}_{k_j}, \tilde{\psi}_{l_j}) = 0$*:*

Wegen $T_j(\tilde{\varphi}_{k_j}, \tilde{\psi}_{l_j}) = 0$ *gibt es (möglicherweise triviale) Bedingungen für die* $(\tilde{\varphi}_{k_j}, \tilde{\psi}_{l_j})$*. Diese seien formuliert als*[3]*:*

$$\tilde{\varphi}_{k_j} = P_1(\tilde{\varphi}_{1,\dots k_j}, \tilde{\psi}_{1,\dots l_j}), \qquad \tilde{\psi}_{l_j} = P_2(\tilde{\varphi}_{1,\dots k_j}, \tilde{\psi}_{1,\dots l_j}). \tag{2.2.37}$$

Ersetze $\tilde{\varphi}_{k_j}$ *und* $\tilde{\psi}_{l_j}$ *durch* P_1 *bzw.* P_2*. Setze*

$$k_{j+1} = \max\{0, i \in \mathbb{N} \mid \exists \text{ Bedingung für } \varphi_i\} + 1 \text{ und} \tag{2.2.38}$$

$$l_{j+1} = \max\{0, i \in \mathbb{N} \mid \exists \text{ Bedingung für } \psi_i\} + 1. \tag{2.2.39}$$

Damit sind wieder 2 Unbekannte gegeben.

Erhöhe j *um 1 und gehe zu Schritt 2.*

---

[2] Z.B. die betragsgrößere Lösung.

[3] Falls keine Bedingungen für φ bzw. ψ vorliegen, sei $P_1 :\equiv \tilde{\varphi}_{k_j}$ bzw. $P_2 :\equiv \tilde{\psi}_{l_j}$.

Bemerkung 2.2.11 *Im Algorithmus wird vorausgesetzt, daß sich das polynomiale Gleichungssystem (2.2.34) lösen läßt. Analog setzt man auch bei der klassischen Lyapunov-Schmidt-Methode voraus, daß sich die Lösungen der reduzierten Verzweigungsgleichung berechnen lassen. Während bei dieser Methode jedoch die gesamte Gleichung gelöst werden muß, wird hier über die Gleichungen $B_j = 0$ eine Aufspaltung in die einzelnen Terme verschiedener Ordnung erreicht. Diese Gleichungen können als Teilgleichungen der reduzierten Verzweigungsgleichung angesehen werden, und sind damit im allgemeinen auch leichter zu lösen (siehe [Sch93] und Bemerkung 2.2.15).*

Definition 2.2.12 *Lösungen, die mit Hilfe von Algorithmus 2.2.10 berechnet worden sind, für die also in einer bestimmten Stufe eine reguläre Ableitungsmatrix J_j existiert, werden* **bestimmt** *genannt.*

Die Behauptung im 1. Fall, Schritt 3 des Algorithmus 2.2.10, soll nun in einem Satz bewiesen werden.

Satz 2.2.13 *Sei $f \in C^{j+1}$ und für geeignete $k_j, l_j \in \mathbb{N}$ die Werte $\tilde{\varphi}_{1,\ldots,k_{j-1}}, \tilde{\psi}_{1,\ldots,l_{j-1}} \in \mathbb{C}$ so gewählt, daß $T_1 = \ldots = T_{j-1} = 0$ und $J_1 = \ldots = J_{j-1} = 0$ gilt. Dann existiert der Limes $\lim_{t\to 0} \tilde{f}_j$. Gilt weiterhin für eine Lösung $0 \neq (\tilde{\varphi}_{k_j}, \tilde{\psi}_{l_j}) \in \mathbb{C}^2$ von $B_j = 0$ o.B.d.A. $\tilde{\psi}_{l_j} \neq 0$ und ist $J_j(\tilde{\varphi}_{k_j}, \tilde{\psi}_{l_j})$ ungleich 0, so bestimmt diese Lösung genau eine abzweigende Lösungskurve, deren Approximation*

$$(\sum_{\mu=1}^{k_j} \tilde{\varphi}_\mu t^\mu, \sum_{\mu=1}^{l_j} \tilde{\psi}_\mu t^\mu) \subset \mathbb{C}^2 \text{ für } t \in [-a, a], a \in \mathbb{R}^+ \tag{2.2.40}$$

lautet. Desweiteren kann mit Hilfe von Algorithmus 2.2.10 jede abzweigende Kurve, deren Primfaktor einfach im Keim f vorkommt, bestimmt werden.

Beweis: Falls $T_1 = \ldots = T_{j-1} = 0$ und $J_1 = \ldots = J_{j-1} = 0$ gilt, so folgt:

$$f(\varphi(t), \psi(t)) = T_j \left(\varphi_{1,\ldots,k_j}, \psi_{1,\ldots,l_j}\right) t^j + O(t^{j+1})$$

Als geeignete Normierung in $\tilde{f}_j$ (siehe Definition 2.2.8) wird hier

$$\tilde{N}(\varphi_{k_j}, \psi_{l_j}) = (\psi_{l_j})^2 - (\tilde{\psi}_{l_j})^2 \tag{2.2.41}$$

gewählt. Damit ergibt sich:

$$\lim_{t\to 0} \tilde{f}_j(\varphi_{k_j}, \psi_{l_j}, t) = \begin{pmatrix} T_j(\varphi_{k_j}, \psi_{l_j}) \\ \tilde{N}(\varphi_{k_j}, \psi_{l_j}) \end{pmatrix} = B_j(\varphi_{k_j}, \psi_{l_j})$$

Der Limes existiert somit und es gilt insbesondere mit $\tilde{f}_j(\varphi_{k_j}, \psi_{l_j}, 0) := \lim_{t\to 0} \tilde{f}_j(\varphi_{k_j}, \psi_{l_j}, t)$, daß $\tilde{f}_j(.,.,t) \in C^1$ bzgl. t ist. Der Satz über implizite Funktionen wird nun auf $\tilde{f}_j(\varphi_{k_j}, \psi_{l_j}, t)$ bzgl. φ_j und ψ_j angewandt. Es bleibt zu zeigen, daß $D_{(\varphi_{k_j}, \psi_{l_j})} \tilde{f}_j(\varphi_{k_j}, \psi_{l_j}, 0)$ regulär ist. Nach den Voraussetzungen gilt jedoch mit der geeigneten Normierung (2.2.41):

$$\begin{aligned} & D_{(\varphi_{k_j}, \psi_{l_j})} \tilde{f}_j(\tilde{\varphi}_{k_j}, \tilde{\psi}_{l_j}, 0) && (2.2.42) \\ = \quad & D_{(\varphi_{k_j}, \psi_{l_j})} B_j(\tilde{\varphi}_{k_j}, \tilde{\psi}_{l_j}) && (2.2.43) \\ = \quad & D_{(\varphi_{k_j}, \psi_{l_j})} \begin{pmatrix} T_j(\tilde{\varphi}_{k_j}, \tilde{\psi}_{l_j}) \\ \tilde{N}(\tilde{\varphi}_{k_j}, \tilde{\psi}_{l_j}) \end{pmatrix} && (2.2.44) \\ \overset{(2.2.35)}{=} \quad & \begin{pmatrix} J_j(\tilde{\varphi}_{k_j}, \tilde{\psi}_{l_j}) & D_{\psi_{l_j}} T_j(\tilde{\varphi}_{k_j}, \tilde{\psi}_{l_j}) \\ 0 & 2\tilde{\psi}_{l_j} \end{pmatrix} && (2.2.45) \end{aligned}$$

Wegen $J_j(\tilde{\varphi}_{k_j}, \tilde{\psi}_{l_j}) \neq 0$ und $\tilde{\psi}_{l_j} \neq 0$ ist also $D_{(\varphi_{k_j}, \psi_{l_j})} \tilde{f}_j(\varphi_{k_j}, \psi_{l_j}, 0)$ für die Lösung $(\tilde{\varphi}_{k_j}, \tilde{\psi}_{l_j})$ regulär. Somit existiert nach dem Satz über implizite Funktionen eine abzweigende Lösung $(\varphi(t), \psi(t))$ mit $(\varphi(0), \psi(0)) = (0, 0)$, deren Approximation für $t \to 0$ lautet:

$$(\sum_{\mu=1}^{k_j} \tilde{\varphi}_\mu t^\mu, \sum_{\mu=1}^{l_j} \tilde{\psi}_\mu t^\mu) \subset \mathbb{C}^2 \text{ für } t \in [-a, a], a \in \mathbb{R}^+ \text{ geeignet} \qquad (2.2.46)$$

Weiterhin ergibt sich, daß durch den Algorithmus die verschiedenen Lösungen bei wachsendem j 'getrennt' werden. D.h., da die Lösungen von $B_j = 0$ den Koeffizienten der Entwicklungen bzgl. t der abzweigenden Lösungen entsprechen, zwangsläufig diese Lösungen getrennt werden, wenn die Kurven sich ab einer bestimmten Ordnung trennen (also deren Entwicklung auseinanderläuft). Ist nun der Primfaktor einer abzweigenden Kurve einfach in f, so ergibt sich auch eine einfache Lösung für B_j und somit ein reguläres J_j. ■

Korollar 2.2.14 *Ist f minimal, so lassen sich in k-bestimmten Problemen alle abzweigenden Lösungen im Punkt $(0,0)$ mit Hilfe von Algorithmus 2.2.10 bestimmen. Ist f nicht minimal, so können die doppelt vorkommenden Lösungskurven nicht mit obigem Algorithmus bestimmt werden, da alle Komponenten φ_j, ψ_j der Lösung mindestens als doppelte Nullstellen in den Gleichungen auftreten würden. Diese Lösungen wären also nie isoliert. Solche f wären auch von unendlicher Kodimension, siehe [GS86, GSS88] und Bemerkung 1.4.10, Seite 22.*

Beweis: Da bei minimalem f alle Faktoren einfach vorkommen, sind nach Satz 2.2.13 alle Zweige bestimmbar. ■

Bemerkung 2.2.15 *Im Algorithmus 2.2.10 müssen im wesentlichen Lösungen der Gleichung $T_j(\varphi_{k_j}, \psi_{l_j}) = 0$ bestimmt werden. Dies kann entweder von Hand oder besser mit Hilfe von Computer-Algebra-Programmen wie Maple, Reduce oder Mathematica durchgeführt werden. Da die auftretenden Gleichungen mit steigender Ordnung komplizierter werden, ist es angebracht, Möglichkeiten der Vereinfachung der Gleichungen zu nutzen. Eine wesentliche Möglichkeit soll nun aufgezeigt werden. Aufgrund der Tatsache, daß sich homogene, bzw. quasihomogene Gleichungen leichter lösen lassen als beliebige Gleichungen, ist es sinnvoll, $T_j(\varphi_{k_j}, \psi_{l_j}) = 0$ in eine homogene Gleichung umzuformen. Setzt man nämlich*

$$\vartheta^{k_j} := \varphi_{k_j}, \tag{2.2.47}$$

$$\xi^{l_j} := \psi_{l_j} \tag{2.2.48}$$

so ist $T_j(\vartheta^{k_j}, \xi^{l_j})$ homogen vom Grad j in (ϑ, ξ), d.h. es folgt:

$$T_j((\delta\vartheta)^{k_j}, (\delta\xi)^{l_j}) = \delta^j T_j(\vartheta^{k_j}, \vartheta^{l_j}) = 0 \tag{2.2.49}$$

Durch diese Substitution werden auch die Möglichkeiten verbessert, mit Algebra-Programmen Lösungen zu finden, falls spezielle Algorithmen für homogene Polynome implementiert sind. Nachdem das Gleichungssystem (2.2.49) für (ϑ, ξ) gelöst wurde, kann durch Auswertung der Beziehung (2.2.47-2.2.48) zu den ursprünglichen Unbekannten zurückgekehrt werden.

2.3 Auszeichnung einer Variablen

In Abschnitt 2.2 wurde ein Algorithmus vorgestellt, der es ermöglicht, die abzweigenden Lösungen in regulären wie in singulären Punkten zu berechnen. Dabei wurde keine Variable bzw. Koordinate besonders ausgezeichnet. Betrachtet man jedoch konkrete Beispiele, z.B. aus der Physik, so ist es sinnvoll, einen Parameter auszuzeichnen. Im allgemeinen unterscheidet man 3 Arten von Variablen:

Zustandsvariablen z: Diese beschreiben den momentanen Zustand des betrachteten Systems. Z.B. die Form eines Bauteils in der Mechanik, die Größe einer Population in einem Räuber-Beute-Modell oder den Blutdruck eines Menschen bei der Einnahme einer bestimmten Dosis eines Medikamentes. Diese Komponente wird hier mit z bezeichnet.

Kontroll-Parameter oder Bifurkations-Parameter λ: Diese Parameter beschreiben die Komponenten eines Systems, die von außen verändert werden können und bzgl. derer man die Änderung von Lösungen bestimmen möchte. Dies könnte z.B. die Kraft sein, die auf ein Bauteil einwirkt oder die Dosis eines Medikamentes usw. Diese Komponenten werden hier mit λ bezeichnet.

Feste Parameter α (Auch **zusätzliche Parameter** oder **Hilfsparameter** genannt): Diese Parameter werden per Definition in dem betrachteten System festgehalten, sind aber nicht grundsätzlich unveränderbar. Beispiele dafür sind etwa die Steifigkeit eines Bauteils, die Größe eines Gefäßes etc. Diese Komponente wird hier mit α bezeichnet.

Wie in der Beschreibung angedeutet, wird es in praktischen Beispielen oft darum gehen, einen Kontroll-Parameter auszuzeichnen und das Lösungsverhalten bzgl. dieses Parameters zu studieren. Tritt also nun in Algorithmus 2.2.10 der Fall auf, daß in einer Skalierung die Komponente der Zustandsvariablen ungleich 0 ist, während die Komponente des Kontroll-Parameters gleich Null ist, so sagt diese Lösung nichts über das Verhalten bzgl. des Kontroll-Parameters aus. In diesem Sinne ist das Lösungsverhalten nicht bestimmt. Man ist deswegen an Lösungen interessiert, die eine nichtverschwindende Komponente in Richtung des Kontroll-Parameters haben, um die Lösungen bzgl. dieser Komponente parametrisieren zu können. Um diese zusätzliche Forderung erfüllen zu können, muß Algorithmus 2.2.10 entsprechend abgeändert werden. Diese Version lautet wie folgt: O.B.d.A. sei die zweite Komponente ausgezeichnet:

Algorithmus 2.3.1 Adaptive λ-Skalierung von Keimen

1. Schritt: *Setze* $j := 1$ *und* $k_1 = l_1 = 1$.

2. Schritt: *Die Werte von* $\tilde{\varphi}_{1,\dots k_{j-1}}, \tilde{\psi}_{1,\dots l_{j-1}} \in \mathbb{C}$ *seien durch den Algorithmus schon so gewählt, daß bereits* $T_1 = \dots = T_{j-1} = 0$ *und* $J_1 = \dots = J_{j-1} = 0$ *(siehe (2.3.2)) gilt.*

Bestimme alle $(\tilde{\varphi}_{k_j}, \tilde{\psi}_{l_j}) \in \mathbb{C}^2$ *für die gilt:*

$$B_j(\tilde{\varphi}_{k_j}, \tilde{\psi}_{l_j}) = 0 \tag{2.3.1}$$

3.Schritt: *Führe folgende Schritte für alle Lösungen* $(\tilde{\varphi}_{k_j}, \tilde{\psi}_{l_j})$ *aus: Betrachte:*

$$J_j(\tilde{\varphi}_{k_j}, \tilde{\psi}_{l_j}) := D_{\varphi_{k_j}} T_j(\tilde{\varphi}_{k_j}, \tilde{\psi}_{l_j}) \tag{2.3.2}$$

Falls: $J_j(\tilde{\varphi}_{k_j}, \tilde{\psi}_{l_j}) * \tilde{\psi}_{l_j} \neq 0$*:*

Diese Lösung bestimmt eine abzweigende Kurve (siehe Satz 2.2.13), die wegen $\tilde{\psi}_{l_j} \neq 0$ *bzgl. der zweiten Komponente parametrisiert werden kann. Ihre Approximation lautet für geeignetes a:*

$$(\sum_{\mu=1}^{k_j} \tilde{\varphi}_\mu t^\mu, \sum_{\mu=1}^{l_j} \tilde{\psi}_\mu t^\mu) \subset \mathbb{C}^2 \text{ für } t \in [-a, a],\ a \in \mathbb{R}^+ \tag{2.3.3}$$

Stopp für diese Lösung.

sonst: $J_j(\tilde{\varphi}_{k_j}, \tilde{\psi}_{l_j}) * \tilde{\psi}_{l_j} = 0$*:*

Wegen $T_j(\tilde{\varphi}_{k_j}, \tilde{\psi}_{l_j}) = 0$ *gibt es (möglicherweise triviale) Bedingungen für die* $(\tilde{\varphi}_{k_j}, \tilde{\psi}_{l_j})$*. Diese seien formuliert als*[4]*:*

$$\tilde{\varphi}_{k_j} = P_1(\tilde{\varphi}_{1,\dots k_j}, \tilde{\psi}_{1,\dots l_j}), \qquad \tilde{\psi}_{l_j} = P_2(\tilde{\varphi}_{1,\dots k_j}, \tilde{\psi}_{1,\dots l_j}). \tag{2.3.4}$$

Ersetze $\tilde{\varphi}_{k_j}$ *und* $\tilde{\psi}_{l_j}$ *durch* P_1 *bzw.* P_2*. Setze*

$$k_{j+1} = \max\{0, i \in \mathbb{N} \mid \exists \text{ Bedingung für } \varphi_i\} + 1 \text{ und} \tag{2.3.5}$$

$$l_{j+1} = \max\{0, i \in \mathbb{N} \mid \exists \text{ Bedingung für } \psi_i\} + 1. \tag{2.3.6}$$

Damit sind wieder 2 Unbekannte gegeben.

Erhöhe j *um* 1 *und gehe zu Schritt 2.*

Bemerkung 2.3.2 *Der Grad der (k−)Bestimmtheit , wie er z.B. in Golubitsky/Schaeffer/Stewart [GS86, GSS88] verwendet wird, kann aus obigem Algorithmus abgelesen werden. Er ist gleich dem höchsten in* B_j *vorkommenden Ableitungsgrad von* f.

[4]Falls keine Bedingungen für φ bzw. ψ vorliegen, sei $P_1 :\equiv \tilde{\varphi}_{k_j}$ bzw. $P_2 :\equiv \tilde{\psi}_{l_j}$.

Dieser Algorithmus berechnet analog zu Algorithmus 2.2.10 die abzweigenden Lösungen mit dem Unterschied, daß er nur solche Lösungen zuläßt, die eine Komponente in Richtung des Kontroll-Parameters haben. Dieser Parameter war hier die zweite Variable. Analog läßt sich der Algorithmus für die erste Komponente formulieren.

Definition 2.3.3 *Lösungen, die mit Hilfe von Algorithmus 2.3.1 berechnet worden sind, für die also in einer bestimmten Stufe eine reguläre Ableitungsmatrix J_j existiert, werden hier* **λ-bestimmt** *genannt.*

Die Mächtigkeit dieser Algorithmen soll nun im nächsten Abschnitt am Verzweigungsverhalten einiger Keime dargestellt werden.

2.4 Anwendung auf einfache Singularitäten

Zur einfacheren Handhabung der Variablen sei definiert:

$$z(t) := \sum_{\mu=0}^{m_1} z_j t^\mu, \; m_1 \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \tag{2.4.1}$$

$$\lambda(t) := \sum_{\mu=0}^{m_2} \lambda_j t^\mu, \; m_2 \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \tag{2.4.2}$$

$$\tag{2.4.3}$$

Beispiel 2.4.1 Umkehrpunkt

Ein oft beobachtetes Phänomen ist, daß die Lösungskurve einen Umkehrpunkt bzgl. λ hat. Ein Beispiel dafür ist:

$$\boxed{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(z,\lambda) = z^2 - \lambda;} \tag{2.4.4}$$

Es ergibt sich

$\boxed{j=1}$ $T_1(z_1, \lambda_1) = \lambda_1$.

Mit Hilfe der Normierung (2.2.10) und $c = 1$ ergibt sich als Lösungsmenge für $B_1(z_1, \lambda_1) = 0$:

$$(\tilde{z}_1, \tilde{\lambda}_1) = (\pm 1, 0) \tag{2.4.5}$$

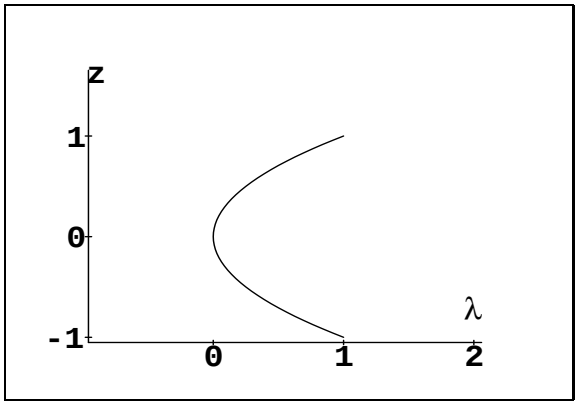

Abbildung 2.4.3: Umkehrpunkt: Normalform $\pm z^2 \pm \lambda$

Damit würde gelten: $\frac{\partial}{\partial \lambda_1} T_1(\tilde{z}_1, \tilde{\lambda}_1) = 1 \neq 0$. *Würde man die Kurve bzgl. z parametrisieren, so würde sich auf diese Weise eine Approximation der Form:*

$$(z(t), \lambda(t)) = (t, 0) + O(t^2) \text{ für } t \in [-a, a] \subset \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}^+$$

ergeben. Dies wäre das Ergebnis von Algorithmus 2.2.10. Verlangt man hingegen die Parametrisierung bzgl. λ*, so muß Algorithmus 2.3.1 angewandt werden. Dabei wird nun mit* $\lambda_1 = 0$ *zu* $j = 2$ *und* $l_2 = 2$ *übergegangen.*

$\boxed{j = 2}$ $T_2(z_1, \lambda_2) = z_1^2 - \lambda_2$

Mit Hilfe der Normierung $\lambda_2^2 - 1$ *ergibt sich als Lösungsmenge für* $B_2(z_1, \lambda_2) = 0$*:*

$$(\tilde{z}_1, \tilde{\lambda}_2) = (\pm 1, 1) \text{ und} \tag{2.4.6}$$

$$(\tilde{z}_1, \tilde{\lambda}_2) = (\pm i, -1) \tag{2.4.7}$$

Es gibt also zwei reelle und zwei imaginäre Lösungen! Da uns jedoch (oft) nur die reellen Lösungen interessieren, ergeben sich als Approximation an die reellen Lösungskurven:

$$(z(t), \lambda(t)) = (\pm t, t^2) + (O(t^2), O(t^3)), \quad \text{mit } t \in [-a, a] \subset \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}^+ \tag{2.4.8}$$

Da das $\pm$*-Zeichen nur vor einer ungeraden Potenz steht, kann es auch weggelassen*

werden, denn für $t \in [-a,a]$ werden hier lediglich zwei Kurven in verschiedenen Durchlaufrichtungen beschrieben[5]*. Damit erhält man die Lösung:*

$$\begin{aligned}(z(t),\lambda(t)) &= (t,t^2)+(O(t^2),O(t^3)), \qquad (2.4.9)\\ &\quad mit\ t\in[-a,a]\subset\mathbb{R},\ a\in\mathbb{R}^+\end{aligned}$$

Wiederum kann man erkennen, daß durch eine andere Normierung, etwa

$$N(z_1,\lambda_2)=|z_1|^2+|\lambda_2|^2-1 \qquad (2.4.10)$$

die Lösungen von komplizierterer Gestalt sein würden. Hier ergäbe sich an Stelle von (2.4.6)-(2.4.7):

$$(\tilde{z}_1,\tilde{\lambda}_2) = (\pm\frac{1}{2}\sqrt{-2+2\sqrt{5}},-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5})\ \textit{und} \qquad (2.4.11)$$

$$(\tilde{z}_1,\tilde{\lambda}_2) = (\pm\frac{1}{2}\sqrt{-2-2\sqrt{5}}\,i,-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}) \qquad (2.4.12)$$

und damit die reellen, abzweigenden Kurven

$$\begin{aligned}(z(t),\lambda(t)) &= (\pm\frac{1}{2}\sqrt{-2+2\sqrt{5}}t,-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)t^2) \qquad (2.4.13)\\ &\quad +(O(t^2),O(t^3)), \qquad (2.4.14)\\ &\quad mit\ t\in[-a,a]\subset\mathbb{R},\ a\in\mathbb{R}^+\end{aligned}$$

Durch geschickte Normierung kann man also die Lösungsstruktur beeinflussen und vereinfachen. Eine Methode dafür läßt sich jedoch nicht allgemein formulieren. Es muß vielmehr von Fall zu Fall entschieden werden, wie die Lösungen am besten zu normieren sind. Dabei können auch bestimmte Komponenten von Anfang an ausgeschlossen werden. In diesen Fällen ist in den Algorithmen 2.2.10 und 2.3.1 die Normierung 2.2.10 durch eine andere zu ersetzen. Beispiele dafür sind schon in den Normierungen (2.2.16) und (2.2.41) gegeben worden.

[5] Allgemein können Lösungen, die sich nur bei ungeraden Potenzen durch das Vorzeichen unterscheiden, zu einer Lösung zusammengefaßt werden, da wegen $t \in [-a,a]$ diese Lösungen sich nur in der Durchlaufrichtung unterscheiden.

Beispiel 2.4.2 Transkritische Verzweigung

$$\boxed{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(z,\lambda) = z^2 - z\lambda;} \tag{2.4.15}$$

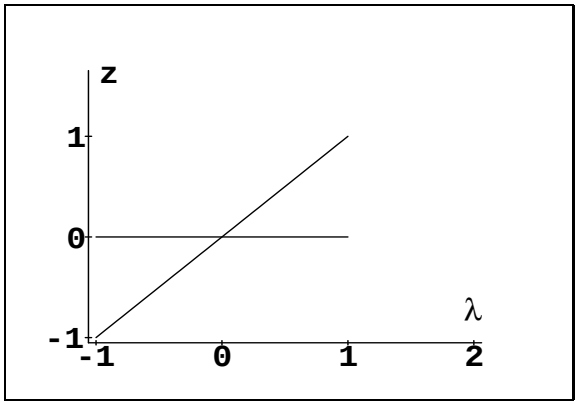

Abbildung 2.4.4: Transkritische Verzweigung: Normalform $\pm z^2 \pm \lambda z$

Es ergibt sich

$\boxed{j=1}$ $T_1(z_1,\lambda_1) = 0.$

Keine Einschränkung für z_1, λ_1. *Weiter mit* $k_2 = l_2 = 1$ *und* $j = 2$.

$\boxed{j=2}$ $T_2(z_1,\lambda_1) = z_1^2 - \lambda_1 z_1 = z_1(z_1 - \lambda_1) = 0$

Mit Hilfe der Normierung $\lambda_1^2 - 1$ *ergibt sich als Lösungsmenge für* $B_2(z_1,\lambda_1) = 0$*:*

$$(\tilde{z}_1, \tilde{\lambda}_1) = (0, \pm 1) \text{ und} \tag{2.4.16}$$

$$(\tilde{z}_1, \tilde{\lambda}_1) = (\pm 1, \pm 1) \tag{2.4.17}$$

Weiterhin gilt für die Ableitung $J_2 = 2z_1 - \lambda_1$*:*

$$J_2(\tilde{z}_1, \tilde{\lambda}_1) = \pm 1 \neq 0.$$

Da damit alle Lösungen bestimmt sind, gibt es nach Satz 2.2.13 genau 4 abzweigende Lösungen, die 2 Kurven entsprechen. Ihre Approximation lautet:

$$(z(t), \lambda(t)) = (0, \pm t) + O(t^2) \text{ und} \tag{2.4.18}$$

$$(z(t), \lambda(t)) = (\pm t, \pm t) + O(t^2) \tag{2.4.19}$$

$$\text{mit } t \in [-a, a] \subset \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}^+$$

Diese Lösungskurven hätte man auch schreiben können als:

$$(z(t), \lambda(t)) = (0, t) + O(t^2) \text{ und} \tag{2.4.20}$$
$$(z(t), \lambda(t)) = (t, t) + O(t^2) \tag{2.4.21}$$
$$\text{mit } t \in [-a, a] \subset \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}^+$$

Beispiel 2.4.3 Pitchfork Verzweigung

$$\boxed{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(z, \lambda) = z^3 - z\lambda} \tag{2.4.22}$$

Es ergibt sich:

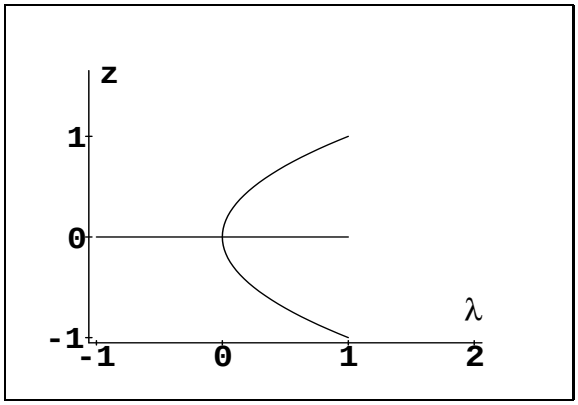

Abbildung 2.4.5: Pitchfork Verzweigung: Normalform $\pm z^3 \pm \lambda z$

$\boxed{j = 1}$ $T_1(z_1, \lambda_1) = 0$.
Keine Einschränkung für z_1, λ_1. *Weiter mit* $k_2 = l_2 = 1$ *und* $j = 2$.

$\boxed{j = 2}$ $T_2(z_1, \lambda_1) = z_1\lambda_1 = 0$

Mit Hilfe der Normierung (2.2.10) und $c = 1$ *ergibt sich als Lösungsmenge für* $B_2(z_1, \lambda_1) = 0$*:*

$$(\tilde{z}_1, \tilde{\lambda}_1) = (0, \pm 1) \text{ und} \tag{2.4.23}$$
$$(\tilde{z}_1, \tilde{\lambda}_1) = (\pm 1, 0) \tag{2.4.24}$$

Im Sinne von Algorithmus 2.2.10 sind alle Lösungen bestimmt. Die zweite Lösung ist jedoch nicht im Sinne von Algorithmus 2.3.1 bestimmt, da die λ*-Komponente gleich Null ist. Es ergibt sich also zum einen die bestimmte Lösung:*

$$(z(t), \lambda(t)) = (0, \pm t) + O(t^2) \quad \text{mit } t \in [-a, a] \subset \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}^+ \tag{2.4.25}$$

Zum anderen muß mit der zweiten Lösung (2.4.24) bei $j = 3$ mit $l_3 = 2$ weitergerechnet werden.

$\boxed{j=3}$ $T_3(z_1, \lambda_2) = z_1^3 - z_1\lambda_2 = 0$

Setze hier die Normierung auf die geeignetere Normierung: $\lambda_2^2 = 1$.

Mit Hilfe dieser Normierung ergibt sich als Lösungsmenge für $B_3(z_1, \lambda_2) = 0$:

$$(\tilde{z}_1, \tilde{\lambda}_2) = (\pm 1, 1) \text{ und} \tag{2.4.26}$$
$$(\tilde{z}_1, \tilde{\lambda}_2) = (\pm i, -1) \text{ sowie} \tag{2.4.27}$$
$$(\tilde{z}_1, \tilde{\lambda}_2) = (0, \pm 1) \tag{2.4.28}$$

Diese Lösungen sind nun genau eine Kombination der Lösung (2.4.23) und des Umkehrpunktes (2.4.6), aus denen sich in der Tat die Pitchfork Verzweigung zusammensetzt. Die Lösung (2.4.28) ist lediglich eine andere Parametrisierung für die Lösung aus (2.4.25). Man erhält damit die reellen, abzweigenden Lösungskurven:

$$(z(t), \lambda(t)) = (\pm t, t^2) + (O(t^2), O(t^3)) \tag{2.4.29}$$
und
$$(z(t), \lambda(t)) = (0, \pm t) + O(t^2) \quad \text{mit } t \in [-a, a] \subset \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}^+ \tag{2.4.30}$$

bzw.

$$(z(t), \lambda(t)) = (t, t^2) + (O(t^2), O(t^3)) \tag{2.4.31}$$
und
$$(z(t), \lambda(t)) = (0, t) + O(t^2) \quad \text{mit } t \in [-a, a] \subset \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}^+ \tag{2.4.32}$$

Beispiel 2.4.4 Asymmetrische Kuspe / Neilsche Parabel: *Die Gleichung dieser Singularität lautet (siehe auch (0.0.3):*

$$\boxed{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(z,\lambda) = z^2 - \lambda^3} \tag{2.4.33}$$

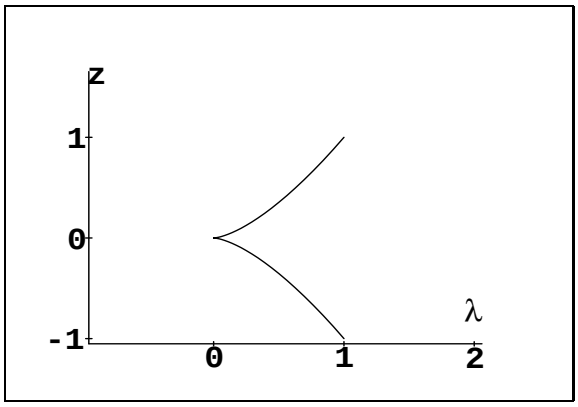

Abbildung 2.4.6: Asymmetrische Kuspe / Neilsche Parabel: Normalform $\pm z^2 \pm \lambda^3$

Es ergibt sich

$\boxed{j=1}$ $T_1(z_1,\lambda_1) = 0.$

Keine Einschränkung für z_1, λ_1. *Weiter mit* $k_2 = l_2 = 1$ *und* $j = 2$.

$\boxed{j=2}$ $T_2(z_1,\lambda_1) = z_1^2 = 0$

Also $z_1 = 0$, *aber nicht bestimmt (doppelte Nullstelle* $\Rightarrow$ *Ableitung an dieser Lösung gleich Null).*

Weiter bei $j = 3$ *mit* $k_3 = 2$.

$\boxed{j=3}$ $T_3(z_2,\lambda_1) = \lambda_1^3 = 0$

Also $\lambda_1 = 0$, *nicht bestimmt. Weiter bei* $j = 4$ *mit* $l_4 = 2$.

$\boxed{j=4}$ $T_4(z_2,\lambda_2) = z_2^2 = 0$

Also $z_2 = 0$, *nicht bestimmt. Weiter bei* $j = 5$ *mit* $k_5 = 3$.

$\boxed{j=5}$ $T_5(z_3,\lambda_2) = 0$

Keine Einschränkung für z_3, λ_2. *Weiter bei* $j = 6$.

$\boxed{j=6}$ $T_6(z_3,\lambda_2) = z_3^2 - \lambda_2^3 = 0$

Mit Hilfe der Normierung

$$N(z_3,\lambda_2) = \lambda_2^2 - 1 \tag{2.4.34}$$

ergibt sich für die Lösungen:

$$(\tilde{z}_3, \tilde{\lambda}_2) = (\pm 1, 1) \text{ sowie} \tag{2.4.35}$$
$$(\tilde{z}_1, \tilde{\lambda}_2) = (\pm i, -1) \tag{2.4.36}$$

Diese Lösungen sind alle bestimmt, wie sich leicht anhand der Ableitungen nachrechnen läßt. Es ergeben sich demnach zwei reelle, abzweigende Lösungskurven:

$$(z(t), \lambda(t)) = (\pm t^3, t^2) + (O(t^4), O(t^3)) \quad \text{mit } t \in [-a, a] \subset \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}^+ \tag{2.4.37}$$

bzw.

$$(z(t), \lambda(t)) = (t^3, t^2) + (O(t^4), O(t^3)) \quad \text{mit } t \in [-a, a] \subset \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}^+ \tag{2.4.38}$$

Insbesondere kann hier von 'einer' Kurve gesprochen werden, da das '$\pm$'-Zeichen in (2.4.37) wegen der ungeraden Potenz auch weggelassen werden kann.

Beispiel 2.4.5 Umkehrpunkt vierter Ordnung

In Kapitel 3 werden diverse Singularitäten klassifiziert. Notwendig dafür ist es, daß die Erkennung der Bestimmtheit einer Singularität nicht davon abhängt, daß diese in einer Normalform vorliegt. In diesem Beispiel soll demonstriert werden, daß die Algorithmen auch solche Singularitäten bestimmen können. Es wird betrachtet:

$$\boxed{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(z, \lambda) = [\lambda + \lambda^2 + z\lambda + \lambda^3 + \lambda^2 z + \lambda\, z^2 + \lambda^3 z + \lambda^2 z^2 + \lambda\, z^3 + z^4]} \tag{2.4.39}$$

Es ergibt sich:

$\boxed{j = 1}$ $T_1(z_1, \lambda_1) = \lambda_1 = 0.$
Somit ist $\lambda_1 = 0$. Diese Lösung ist aber nicht λ-bestimmt. Weiter mit $k_2 = 1$, $l_2 = 2$ und $j = 2$.

$\boxed{j = 2}$ $T_2(z_1, \lambda_2) = \lambda_2 = 0$

Nun ist $\lambda_2 = 0$. Diese Lösung ist wiederum nicht λ-bestimmt. Weiter mit $k_3 = 1$, $l_3 = 3$ und $j = 3$.

$\boxed{j = 3}$ $T_3(z_1, \lambda_3) = \lambda_3 = 0$

Nun ist $\lambda_3 = 0$. *Diese Lösung ist nicht* λ*-bestimmt. Weiter mit* $k_4 = 1$, $l_4 = 4$ *und* $j = 4$.

$\boxed{j=4}$ $T_4(z_1, \lambda_4) = \lambda_4 + z_1^4 = 0$

Setze hier die Normierung auf die Normierung $\lambda_4^2 = 1$.

Mit Hilfe dieser Normierung ergibt sich als Lösungsmenge für $B_4(z_1, \lambda_4) = 0$*:*

$$(\tilde{z}_1, \tilde{\lambda}_4) = (\pm i, 1) \text{ und} \tag{2.4.40}$$

$$(\tilde{z}_1, \tilde{\lambda}_4) = (\pm 1, -1) \tag{2.4.41}$$

Man erhält damit die reelle Lösungskurve:

$$(z(t), \lambda(t)) = (t, -t^4) + (O(t^2), O(t^5)) \tag{2.4.42}$$

Neben diesen klassischen Beispielen lassen sich aber auch wesentlich exotischere Singularitäten behandeln:

Beispiel 2.4.6

$$\boxed{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(z, \lambda) = (\lambda - z)(2\lambda - z)(3\lambda - z)} \tag{2.4.43}$$

Es ergibt sich

$\boxed{j=1}$ $T_1(z_1, \lambda_1) = 0$.

Keine Einschränkung für z_1, λ_1. *Weiter mit* $k_2 = l_2 = 1$ *und* $j = 2$.

$\boxed{j=2}$ $T_2(z_1, \lambda_1) = 0$

Keine Einschränkung für z_1, λ_1. *Weiter mit* $k_3 = l_3 = 1$ *und* $j = 3$.

$\boxed{j=3}$ $T_3(z_1, \lambda_1) = -z_1^3 + 6\lambda_1 z_1^2 - 11\lambda_1^2 z + 6\lambda_1^3 = (\lambda_1 - z_1)(2\lambda_1 - z_1)(3\lambda_1 - z_1)$

Mit der Normierung

$$N(z_1, \lambda_1) = \lambda_1^2 - 1 \tag{2.4.44}$$

ergeben sich als Lösungen für $B_3(z_1, \lambda_1) = 0$*:*

$$(\tilde{z}_1, \tilde{\lambda}_1) = (\pm 1, \pm 1), \tag{2.4.45}$$

$$(\tilde{z}_1, \tilde{\lambda}_1) = (\pm 2, \pm 1) \text{ sowie} \tag{2.4.46}$$

$$(\tilde{z}_1, \tilde{\lambda}_1) = (\pm 3, \pm 1) \tag{2.4.47}$$

Wie sich nachrechnen läßt, sind alle diese Lösungen im Sinne von Algorithmus 2.2.10 und 2.3.1 bestimmt. Die Lösungskurven zu diesen Lösungen lauten:

$$(z(t), \lambda(t)) = (t, t) + O(t^2) \tag{2.4.48}$$
$$(z(t), \lambda(t)) = (2t, t) + O(t^2), \quad \textit{sowie} \tag{2.4.49}$$
$$(z(t), \lambda(t)) = (3t, t) + O(t^2), \tag{2.4.50}$$
$$\textit{mit } t \in [-a, a] \subset \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}^+.$$

Als letztes Beispiel soll noch eine komplizierte Singularität dargestellt werden, in der verschiedene, abzweigende Kurven die gleichen Tangenten haben:

Beispiel 2.4.7

$$\boxed{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(z, \lambda) = z^7 + z^4\lambda + z^2\lambda^3 + z\lambda^5 + \lambda^9} \tag{2.4.51}$$

Falls die λ-Komponente ungleich 0 ist, wird die Normierung $\lambda_\nu^2 - 1$ gewählt. Andernfalls wird die Normierung $z_\mu - 1$ gewählt.

Es ergibt sich

$\boxed{j = 1 \ldots 4}\ T_j(z_1, \lambda_1) = 0.$

Keine Einschränkung für z_1, λ_1. Weiter mit $k_5 = l_5 = 1$ und $j = 5$.

$\boxed{j = 5}\ T_5(z_1, \lambda_1) = z_1^2\lambda_1(z_1^2 + \lambda_1^2)$

Die Lösungen lauten

1. $\lambda_1 = 0$ *einfach, aber nicht im Sinne von Algorithmus 2.3.1 bestimmt. Weiter bei $j = 6$ und $l_6 = 2$. Siehe Punkt* [**A**].
2. $z_1 = 0$ *doppelt, also nicht bestimmt. Weiter bei $j = 6$ mit $k_6 = 2$. Siehe Punkt* [**B**].
3. $(z_1, \lambda_1) = (\pm i, \pm 1)$. *Imaginäre Lösungen müssen für praktische Beispiele nicht weiterverfolgt werden.*

[**A**] $T_6(z_1, \lambda_2) = z_1^4\lambda_2 = 0$

1. $\lambda_2 = 0$ *einfach, aber nicht im Sinne von Algorithmus 2.3.1 bestimmt. Weiter bei $j = 7$ und $l_7 = 3$. siehe Punkt* [**C**].
2. $z_1 = 0$ *Diese Lösung ist schon in $j = 5$, Fall $z_1 = 0$, beinhaltet.*

[B] $T_6(z_2, \lambda_1) = 0$

$T_7(z_2, \lambda_1) = z_2\lambda_1(\lambda_1^2 + z_2) = 0$

1. $(z_2, \lambda_1) = (0, \pm 1)$ *einfache Nullstellen*
   $\Rightarrow \boxed{(0, t) + (O(t^3), O(t^2))}$ *ist Lösung.*
2. $\lambda_1 = 0$. *Diese Lösung ist schon in* $j = 5$, *Fall* $\lambda_1 = 0$, *beinhaltet.*
3. $(z_2, \lambda_1) = (-1, \pm 1)$ *einfache Nullstellen*
   $\Rightarrow \boxed{(-t^2, t) + (O(t^3), O(t^2))}$ *ist Lösung.*
4. $(z_2, \lambda_1) = (1, \pm i)$ λ*-bestimmte komplexe Lösung.*

[C] $T_7(z_1, \lambda_3) = z_1^4(z_1^3 + \lambda_3) = 0$

1. $z_1 = 0$. *Diese Lösung ist schon in* $j = 5$, *Fall* $z_1 = 0$, *beinhaltet.*
2. $(z_1, \lambda_3) = (1, -1)$ *und* $(-1, 1)$ *sind einfache Nullstellen*
   $\Rightarrow \boxed{(t, -t^3) + (O(t^2), O(t^4))}$ *ist Lösung.*

Damit sind alle abzweigenden Lösungen gefunden. Insbesondere ist diese Singularität 7*-bestimmt.*

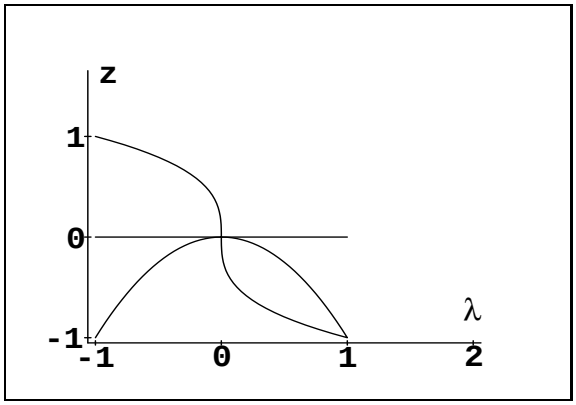

Abbildung 2.4.7: Singularität $z^7 + z^4\lambda + z^2\lambda^3 + z\lambda^5 + \lambda^9$

Diese Beispiele zeigen, wie die Algorithmen 2.2.10 und 2.3.1 auf konkrete Singularitäten angewendet werden können. In der Singularitätentheorie möchte man aber nicht nur spezielle Fälle diskutieren können. Vielmehr ist es wünschenswert, alle möglichen Arten von Singularitäten zu klassifizieren. Dieses Problem soll in Kapitel 3 angegangen werden. Zuvor soll jedoch die Frage diskutiert werden, auf welche Weise sich verschiedene Approximationen aus (2.2.46) auf Äquivalenz überprüfen lassen.

2.5 Äquivalenz von Approximationen

In den Algorithmen 2.2.10 und 2.3.1 müssen im 2. Schritt die Gleichungssysteme $B_j = 0$ gelöst werden. Dabei ist nicht vorgeschrieben, nach welchen Variablen aufgelöst werden soll. Die verschiedenen Möglichkeiten führen dabei auf verschiedene Parametrisierungen der abzweigenden Lösungen. Dazu sei wiederum das Beispiel 2.1.1, Seite 26, betrachtet:

Mit Algorithmus 2.2.10 ergibt sich folgende Rechnung:

Beispiel 2.5.1 *:*

$$\boxed{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(z, \lambda) = (z - \lambda)^2 - z^4} \tag{2.5.1}$$

Siehe Abbildung 2.1.2, Seite 27.

Es ergibt sich:

$\boxed{j = 1}$ $T_1(z_1, \lambda_1) = 0.$

Keine Einschränkung für z_1, λ_1*. Weiter mit* $k_2 = l_2 = 1$ *und* $j = 2$*.*

$\boxed{j = 2}$ $T_2(z_1, \lambda_1) = (z_1 - \lambda_1)^2 = 0$

Also $z_1 = \lambda_1$*, aber nicht bestimmt (doppelte Nullstelle* $\Rightarrow$ *Ableitung an dieser Lösung gleich Null).*

Hier ergeben sich zwei Möglichkeiten:

Entweder: Weiter bei $j = 3$ *mit* $k_3 = 2$ *und* $z_1 = \lambda_1$

oder: Weiter bei $j = 3$ *mit* $l_3 = 2$ *und* $\lambda_1 = z_1$*.*

Im ersten Fall ergeben sich die λ*-bestimmten Approximationen:*

$$(z(t), \lambda(t)) = (t \pm t^2, t) \tag{2.5.2}$$

Im zweiten Fall erhält man:

$$(\tilde{z}(t), \tilde{\lambda}(t)) = (t, t \pm t^2) \tag{2.5.3}$$

Es stellt sich nun die Frage, ob die Parametrisierungen äquivalent sind, d.h. ob sie die gleiche abzweigende Kurve charakterisieren. Dazu muß dieser Begriff definiert werden.

Definition 2.5.2 *Es seien* $\Phi = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \in \mathbb{C}[t]^2$ *und* $\Psi = (\psi_1(t), \psi_2(t)) \in \mathbb{C}[t]^2$ *zwei Approximationen von abzweigenden Lösungen die z.B. mit Hilfe von Algorithmus*

2.2.10 berechnet wurden. Die Kurve Ψ ist zur Kurve Φ **äquivalent**, *wenn es eine Parametertransformation $\beta \in \mathbb{C}[t]$ gibt, so daß entweder*

$$\Phi(\beta(t)) = (\psi_1(t) + O(t^{grad(\psi_1)+1}), \psi_2(t) + O(t^{grad(\psi_2)+1})) \tag{2.5.4}$$

oder

$$\Psi(\beta(t)) = (\varphi_1(t) + O(t^{grad(\varphi_1)+1}), \varphi_2(t) + O(t^{grad(\varphi_2)+1})) \tag{2.5.5}$$

gilt. D.h. zwei Approximationen sind äquivalent, falls sie sich mittels einer Parametertransformation bis zu jenen Ordnungen ineinander überführen lassen, welche für die Bestimmtheit der Kurven hinreichend waren.

Im obigen Beispiel kann gewählt werden:

$$\beta(t) = t \pm t^2 \tag{2.5.6}$$

Damit ergibt sich

$$(\tilde{z}(\beta(t)), \tilde{\lambda}(\beta(t))) = (t \pm t^2, t + O(t^2))$$

Somit sind beide Approximationen äquivalent. Zur Berechnung der Parametertransformation ist in Anhang C ein Maple V, Release 3 Programm angegeben.

Den theoretischen Hintergrund zur Rechtfertigung obiger Definition liefert der nächste Satz:

Satz 2.5.3 *Jeder irreduzible Kurvenkeim $V(g)$ gestattet eine lokale Parametrisierung. Je zwei lokale Parametrisierungen $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$ und $\Psi = (\psi_1, \psi_2)$ desselben Keimes $V(g)$ sind äquivalent (im Sinne von Definition 1.4.3), d.h. es gibt eine Reihe $\beta \in \mathbb{C}\langle t \rangle$ mit ord $\beta = 1$ und $\psi_i(\beta(t)) = \varphi_i(t)$ für $i = 1, 2$.*

Beweis: Siehe [Fis94], Seite 120. ■

Mit Hilfe dieses Satzes ist es also möglich, zwei verschiedene lokale Parametrisierungen eines Kurvenkeims mit Hilfe einer Parametertransformation ineinander zu überführen. Da im Falle der k-Bestimmtheit prinzipiell der endliche Anfang der Potenzreihendarstellung der Parametrisierungen für die Bestimmung des Keimes ausreicht, muß die Parametertransformation nur die bestimmungsrelevanten Anteile ineinander überführen, um auf Äquivalenz zu schließen. Diese Überlegung führt auf Definition 2.5.2.

Bemerkung 2.5.4

Der in diesem Abschnitt benutzte Äquivalenzbegriff ist nicht zu verwechseln mit dem Begriff der Kontaktäquivalenz zweier Keime (siehe etwa [GS86, GSS88]). Offensichtlich läßt sich zum Beispiel für die zwei Kurven $\Phi(t) = (t, t)$ *und* $\Psi(t) = (t, 2t)$ *kein* $\beta(t)$ *finden, das (2.5.4) oder (2.5.5) erfüllt. Hier sind also zwei Kurven nur äquivalent, wenn sie tatsächlich mit identisch anfangenden Entwicklungen bis zum Bestimmtheitsgrad dargestellt werden können.*

Eine Klassifikation mit Hilfe des Äquivalenzbegriffes nach [GS86, GSS88] soll im nächsten Kapitel durchgeführt werden. Dabei wird Algorithmus 2.3.1 zum Einsatz kommen.

Kapitel 3

Klassifikation von einfachen Singularitäten

3.1 Allgemeine Singularitäten

In Kapitel 2 wurde beschrieben, wie die Algorithmen 2.2.10 und 2.3.1 zur adaptiven Parametrisierung von Kurvenzweigen genutzt werden können. Dabei wurden spezielle Beispiele behandelt. Es stellt sich nun die Frage, ob es möglich ist, anhand von bestimmten Eigenschaften, die Singularität zu klassifizieren, d.h. einer bestimmten Art zuzuordnen. Um solche allgemeinen Betrachtungen durchführen zu können, muß es möglich sein, beliebige Keime f zu betrachten und anhand von Bedingungen an deren Ableitungen die durch f gegebene Singularität zu bestimmen. In diesem Kapitel soll nun gezeigt werden, wie die vorgestellten Algorithmen eingesetzt werden können, um solche Bedingungen zu berechnen. In [GS86, GSS88] sowie [Gov91] sind bereits solche Bedingungen für bestimmte Singularitäten (bis Kodimension 3 und einige andere) berechnet worden, jedoch auf andere Arten. Insbesondere sind diese Berechnungsarten gar nicht oder nur schwierig auf kompliziertere Singularitäten anwendbar. Der hier vorgestellten Vorgehensweise stehen jedoch keine grundsätzlichen Probleme für eine weitere Anwendung im Wege. Insbesondere läßt sich schon an Beispiel 2.4.6 und 2.4.7 die allgemeine Anwendbarkeit der Algorithmen erkennen. Im folgenden werden nun alle möglichen Singularitäten bis Kodimension 3 behandelt. Dabei wird von einem allgemeinen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(0,0) = 0, \qquad (z, \lambda) \mapsto f(z, \lambda) \tag{3.1.1}$$

ausgegangen. Weiterhin seien wieder definiert:

$$z(t) := \sum_{\mu=0}^{m_1} z_\mu t^\mu,\ m_1 \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \tag{3.1.2}$$

$$\lambda(t) := \sum_{\mu=0}^{m_2} \lambda_\mu t^\mu,\ m_2 \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \tag{3.1.3}$$

Da die Ableitungen von f nicht als konkrete Zahlen vorliegen, sei zu deren Bezeichnung definiert:

$$f^0_{z^i\lambda^j} = f^{(0)}_{\underbrace{z\ldots z}_{i-mal}\underbrace{\lambda\ldots\lambda}_{j-mal}} := \frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i \partial \lambda^j} f(z,\lambda)|_{(0,0)} \tag{3.1.4}$$

Es gilt nun, die entsprechenden T_j mit Hilfe der Algorithmen zu diskutieren. Da z.B. bei naturwissenschaftlichen Problemen oft die Abhängigkeit der Lösung bzgl. des Kontroll-Parameters λ von Interesse ist, wird hier, wie auch in [GS86, GSS88, Gov91], dieser Parameter speziell ausgezeichnet. Das bedeutet, daß nur Algorithmus 2.3.1, Seite 41, zum Einsatz kommt. Die Notation $z_j = z_j$ bzw. $\lambda_i = \lambda_i$ in einer Lösung soll dabei bedeuten, daß in der betrachteten Gleichung $T_\mu(z_j, \lambda_i) = 0$ diese Komponente beliebig gewählt werden kann.

Es ergeben sich folgende Fälle [1]: Zu Anfang des Algorithmus ist $j = 1$:

$T_1(z_1, \lambda_1) = f^0_z z_1 + f^0_\lambda \lambda_1 = 0$

$\underline{f^0_z \neq 0}$**:** Dies ist der Spezialfall eines regulären Punktes auf der Lösungskurve. Die eindeutige Lösung lautet hier

$$(z_1, \lambda_1) = (\mp\frac{f^0_\lambda}{f^0_z}, \pm 1) \tag{3.1.5}$$

[1] Die auftretenden T_j sind mit MAPLE V, Release 3 berechnet worden. Der Einsatz von Computer-Algebra-Programmen ist für deren Berechnung dringend zu empfehlen, da die auftretenden Terme sehr groß und unübersichtlich werden können. Prinzipiell jedoch sind es lediglich Ableitungen von f an der Stelle $(0,0)$ und somit mit den Algebra-Programmen einfach berechen- und manipulierbar.

und somit die Lösungskurve[2]:

$$\begin{array}{rcl} (z(t),\lambda(t)) & = & (\frac{f^0_\lambda}{f^0_z}t,t)+O(t^2) \\ \text{Normalform} & = & z \textbf{ regulärer Punkt} \\ \text{Kodimension} & = & -1 \\ \text{Bedingungen} & : & f^0_z \neq 0 \\ \text{Beispiel} & : & \text{siehe Abb. 3.1.1} \end{array} \tag{3.1.6}$$

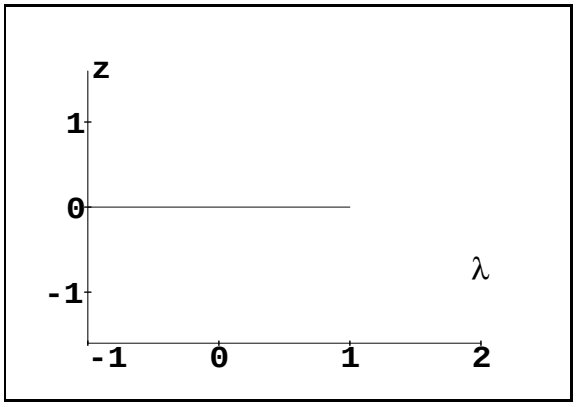

Abbildung 3.1.1: Regulärer Punkt: Normalform z

$\underline{f^0_z = 0}$**:**

$\underline{f^0_\lambda \neq 0}$**:** $(z_1,\lambda_1) = (z_1,0)$ ist bestimmt, aber nicht λ-bestimmt. Weiter bei $j=2$ mit $l_2 = 2$, siehe Punkt **[A]**.

$\underline{f^0_\lambda = 0}$**:** $(z_1,\lambda_1) = (z_1,\lambda_1)$ unbestimmt. Weiter bei $j=2$, siehe Punkt **[B]**.

[A] Es gilt: $f^0_z = 0, f^0_\lambda \neq 0, \lambda_1 = 0$

$T_2(z_1,\lambda_2) = \frac{1}{2}f^0_{zz}z_1^2 + f^0_\lambda\lambda_2 = 0$

$\underline{f^0_{zz} \neq 0}$**:** $z_1 = \pm\sqrt{-2\frac{f^0_\lambda}{f^0_{zz}}\lambda_2}$ ist λ-bestimmt. Dies ergibt mit $\delta := \sqrt{|2\frac{f^0_\lambda}{f^0_{zz}}|}$ die reellen

[2]Zum Begriff der Kodimension sei auf die Literatur verwiesen. Siehe z.B. [GS86, GSS88], [Arn83]

Kurven:

$$\begin{array}{rcl} (z(t),\lambda(t)) & = & (\delta t, \operatorname{sgn}\left(-\frac{f^0_\lambda}{f^0_{zz}}\right)t^2) + (O(t^2), O(t^3)) \\ \text{Normalform} & = & \pm z^2 \pm \lambda \ \textbf{Umkehrpunkt} \\ \text{Kodimension} & = & 0 \\ \text{Bedingungen} & : & f^0_z = 0 \\ & & f^0_{zz} \neq 0,\ f^0_\lambda \neq 0 \\ \text{Beispiel} & : & \text{siehe Abb. 3.1.2} \end{array} \tag{3.1.7}$$

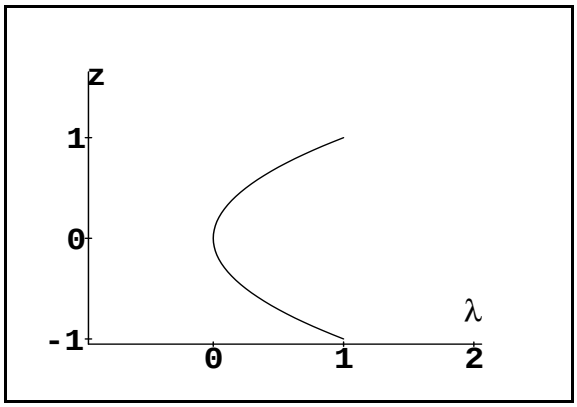

Abbildung 3.1.2: Umkehrpunkt: Normalform $\pm z^2 \pm \lambda$

$\underline{f^0_{zz} = 0}$**:** $(z_1, \lambda_2) = (z_1, 0)$ bestimmt, aber nicht λ-bestimmt. Weiter bei $j = 3$ mit $l_3 = 3$, siehe Punkt **[C]**.

[B] Es gilt: $f^0_z = f^0_\lambda = 0$

$T_2(z_1, \lambda_1) = \frac{1}{2} f^0_{zz} z_1^2 + f^0_{z\lambda} z_1 \lambda_1 + \frac{1}{2} f^0_{\lambda\lambda} \lambda_1^2 = \frac{1}{2}(D^2 f^0)(z_1, \lambda_1)^2 = 0$

$\underline{f^0_{zz} \neq 0}$**:** Sei $\boxed{\triangle_2 := (f^0_{z\lambda})^2 - f^0_{zz} f^0_{\lambda\lambda}}$

$\underline{\triangle_2 < 0}$**:** Vier isolierte imaginäre Lösungen. Es bleibt nur der Punkt $(0, 0)$

als reelle Lösung.

$$\begin{array}{rcl} (z(t),\lambda(t)) & = & (0,0)+O(t^2) \\ \text{Normalform} & = & \pm(z^2+\lambda^2)\ \textbf{isolierter Punkt} \\ \text{Kodimension} & = & 1 \\ \text{Bedingungen} & : & f_z^0 = f_\lambda^0 = 0, \\ & & f_{zz}^0 \neq 0, \triangle_2 < 0 \end{array} \tag{3.1.8}$$

$\underline{\triangle_2 > 0\textbf{:}}$ $\quad z_1 = \delta_{1,2}\lambda_1,\ \delta_{1,2} := \frac{-f_{z\lambda}^0 \pm \sqrt{\triangle_2}}{f_{zz}^0};\ \delta_1 \neq \delta_2$

Diese Lösungen sind bestimmt und es ergibt sich:

$$\begin{array}{rcl} (z(t),\lambda(t)) & = & (\delta_{1,2}t,t)+O(t^2) \\ \text{Normalform} & = & \pm(z^2-\lambda^2)\ \textbf{transkritisch} \\ \text{Kodimension} & = & 1 \\ \text{Bedingungen} & : & f_z^0 = f_\lambda^0 = 0, \\ & & f_{zz}^0 \neq 0, \triangle_2 > 0 \\ \text{Beispiel} & : & \text{siehe Abb. 3.1.3} \end{array} \tag{3.1.9}$$

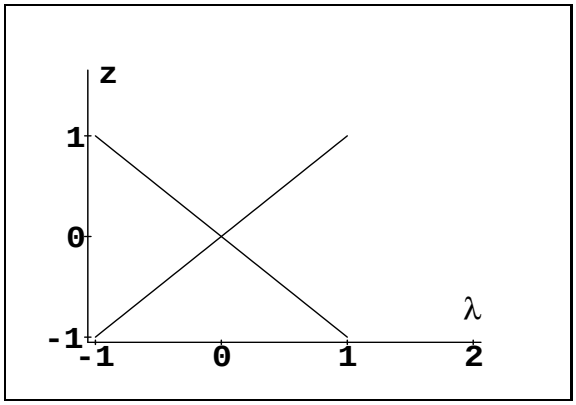

Abbildung 3.1.3: Transkritisch oder isolierter Punkt: Normalform $\pm z^2 \pm \lambda^2$

$\underline{\triangle_2 = 0\textbf{:}}$ $\quad z_1 = -\frac{f_{z\lambda}^0}{f_{zz}^0}\lambda_1$ ist doppelte Nullstelle von $T_2(z_1,\lambda_1) \stackrel{!}{=} (z_1 + \frac{f_{z\lambda}^0}{f_{zz}^0}\lambda_1)^2$. Somit ist die Ableitung gleich Null in diesen Werten und es geht weiter bei $j = 3$ mit $k_3 = 2,\ l_3 = 1$ und $z_1 = -\frac{f_{z\lambda}^0}{f_{zz}^0}\lambda_1$. Siehe Punkt **[D]**. (Bemerkung:

An dieser Stelle wäre es auch möglich, bei $j = 3$ mit $k_3 = 1$, $l_3 = 2$ und $\lambda_1 = -\frac{f^0_{zz}}{f^0_{z\lambda}} z_1$ weiterzurechnen).

$\underline{f^0_{zz} = 0}$**:**

$\underline{f^0_{z\lambda} \neq 0}$**:** $z_1 = -\frac{f^0_{\lambda\lambda}}{2f^0_{z\lambda}}\lambda_1$ sowie $\lambda_1 = 0$ Beide Lösungen sind bestimmt. Die zweite jedoch ist noch nicht λ-bestimmt. Diese wird weiterberechnet bei $j = 3$ mit $k_3 = 1, l_3 = 2$. Siehe Punkt [**E**].

$\underline{f^0_{z\lambda} = 0}$**:**

$\underline{f^0_{\lambda\lambda} \neq 0}$**:** $\lambda_1 = 0$ ist doppelte Nullstelle und somit nicht bestimmt. Weiter bei $j = 3$ mit $k_3 = 1, l_3 = 2$. Siehe Punkt [**F**].

$\underline{f^0_{\lambda\lambda} = 0}$**:** (z_1, λ_1) beliebig wegen $T_2(z_1, \lambda_1) \equiv 0$ und somit nicht bestimmt. Weiter bei $j = 3$ mit $k_3 = 1, l_3 = 1$. Siehe Punkt [**G**].

[**C**] Es gilt: $f^0_z = f^0_{zz} = 0, f^0_\lambda \neq 0, \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$T_3(z_1, \lambda_3) = \frac{1}{6} f^0_{zzz} z_1^3 + f^0_\lambda \lambda_3 = 0$

$\underline{f^0_{zzz} \neq 0}$**:** $z_1^3 = -\frac{6f^0_\lambda}{f^0_{zzz}}\lambda_3$. Dies sind zwei konjugiert komplexe und eine reelle Lösung, die alle bestimmt sind. Sei $\delta = \sqrt[3]{\frac{6f^0_\lambda}{f^0_{zzz}}}$. Damit ergibt sich die Lösung:

$(z(t), \lambda(t))$	=	$(\delta t, t^3) + (O(t^2), O(t^4))$
Normalform	=	$\pm z^3 \pm \lambda$ **Hysteresis**
Kodimension	=	1
Bedingungen	:	$f^0_z = f^0_{zz} = 0,$
		$f^0_{zzz} \neq 0, f^0_\lambda \neq 0$
Beispiel	:	siehe Abb. 3.1.4

(3.1.10)

$\underline{f^0_{zzz} = 0}$**:**

Lemma 3.1.1 *Seien für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ die Voraussetzungen $f^0_z = \ldots = f^0_{z^{n-1}} = 0, f^0_\lambda \neq 0$ erfüllt, so ergibt sich mit Algorithmus 2.3.1 der Ausdruck $T_n(z_1, \lambda_n) = \frac{1}{n!} f^0_{z^n} z_1^n + f^0_\lambda \lambda_n$ sowie $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$ und $k_n = 1, l_n = n$.*

Beweis: Mit Induktion: Für $n = 2, 3$ siehe Punkte [A] und [C].

Sei nun vorausgesetzt: $f^0_z = \ldots = f^0_{z^{n-1}} = 0, f^0_\lambda \neq 0$ und $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-2} = 0$. Wegen Induktionsvoraussetzung ist

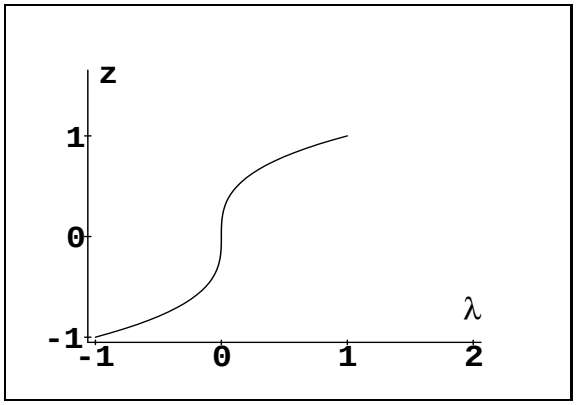

Abbildung 3.1.4: Hysteresis Punkt: Normalform $\pm z^3 \pm \lambda$

$$T_{n-1}(z_1, \lambda_{n-1}) = \frac{1}{(n-1)!} f^0_{z^{n-1}} z_1^{n-1} + f^0_\lambda \lambda_{n-1} = f^0_\lambda \lambda_{n-1}$$

Damit ist also auch $\lambda_{n-1} = 0$ und es geht bei $j = n$ weiter mit $k_n = 1, l_n = n$. Bei Ordnung n sind nun die einzigen Unbekannten z_1 und λ_n. Da die Ordnung von $z_1^l \lambda_n^s$ gleich $l + sn$ ist, muß gelten $l + sn = n$. Dies ist nur für $l = 0, s = 1$ und $l = n, s = 0$ der Fall. Damit sind die einzigen Terme, die in der Taylorentwicklung bzgl. t von f in der Ordnung n auftreten, die beiden folgenden:

$$T_n(z_1, \lambda_n) = \frac{1}{n!} f^0_{z^n} z_1^n + f^0_\lambda \lambda_n$$

Damit ist das Lemma bewiesen. ■

Sei nun für ein $n \in \mathbb{N}$ gegeben: $f^0_z = \ldots = f^0_{z^{n-1}} = 0, f^0_{z^n} \neq 0, f^0_\lambda \neq 0$. So ergibt sich nach dem Lemma bis Ordnung $n-1$ keine λ-Bestimmtheit. Bei Ordnung n hat man $T_n(z_1, \lambda_n) = \frac{1}{n!} f^0_{z^n} z_1^n + f^0_\lambda \lambda_n = 0$. Die Lösung lautet nun hier wie folgt:

1.): n gerade.

Es gibt zwei reelle Lösungen $z_1 = \pm \sqrt[n]{|\frac{n! f^0_\lambda}{f^0_{z^n}}|} =: \pm\delta$, $\lambda = \pm 1$ und $n-2$ komplexe Lösungen.

2.): n ungerade.

Es gibt eine reelle Lösung $z_1 = \sqrt[n]{|\frac{n! f^0_\lambda}{f^0_{z^n}}|} = \delta$, $\lambda = \pm 1$ und $n-1$ komplexe Lösungen.

Beide abzweigenden Kurven lassen sich für beide Fälle darstellen als:

$$\begin{array}{rcl} (z(t),\lambda(t)) & = & (\delta t, t^n) + (O(t^2), O(t^{n+1})) \\ \text{Normalform} & = & \pm z^n \pm \lambda \\ \text{Kodimension} & = & n-2 \\ \text{Bedingungen} & : & f^0_z = f^0_{zz} = \ldots = f^0_{z^{n-1}} = 0, \\ & & f^0_{z^n} \neq 0, f^0_\lambda \neq 0 \\ \text{Beispiele} & : & \text{siehe Abb. 3.1.5 und 3.1.6} \end{array} \tag{3.1.11}$$

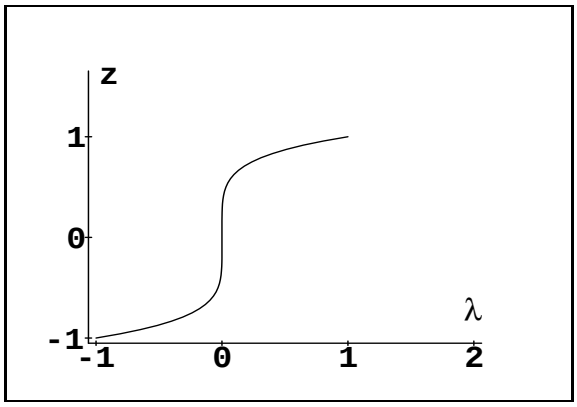

Abbildung 3.1.5: Hysteresis: Normalform $\pm z^{2m+1} \pm \lambda,\ m \in \mathbb{N}$

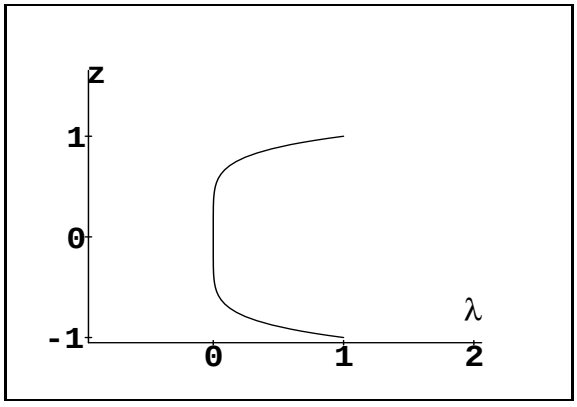

Abbildung 3.1.6: Umkehrpunkt: Normalform $\pm z^{2m} \pm \lambda,\ m \in \mathbb{N}$

[D] Es gilt: $f_z^0 = f_\lambda^0 = \triangle_2 = 0, f_{zz}^0 \neq 0, z_1 = -\frac{f_{z\lambda}^0}{f_{zz}^0}\lambda_1$

$T_3(z_2, \lambda_1) = \frac{1}{6}D^3 f^0(-\frac{f_{z\lambda}^0}{f_{zz}^0}, 1)^3\lambda_1^3 = 0$ (z_2 tritt nicht auf!)

Sei $\boxed{\triangle_3 := \frac{1}{6}D^3 f^0(-\frac{f_{z\lambda}^0}{f_{zz}^0}, 1)^3 \in \mathbb{R}}$

$\underline{\triangle_3 \neq 0}$**:** $\lambda_1 = 0$ dreifache Nullstelle und somit unbestimmt. Weiter bei $j = 4$ mit $k_4 = l_4 = 2$. Siehe Punkt **[H]**.

$\underline{\triangle_3 = 0}$**:** (z_2, λ_1) beliebig wegen $T_3(z_2, \lambda_1) = 0$.

Somit ist die Ableitung gleich Null in diesen Werten und es geht weiter bei $j = 4$ mit $k_4 = 2,\ l_4 = 1$ und $z_1 = -\frac{f_{z\lambda}^0}{f_{zz}^0}\lambda_1$ aus [B]. Siehe Punkt **[I]**.

[E] Es gilt: $f_z^0 = f_\lambda^0 = f_{zz}^0 = \lambda_1 = 0, f_{z\lambda}^0 \neq 0$

$T_3(z_1, \lambda_2) = \frac{1}{6}f_{zzz}^0 z_1^3 + f_{z\lambda}^0 z_1\lambda_2 = 0$

$\underline{f_{zzz}^0 \neq 0}$**:** $z_1 = \pm\sqrt{-6\frac{f_{z\lambda}^0}{f_{zzz}^0}\lambda_2}$ und $z_1 = 0$. Alle drei Lösungen sind λ-bestimmt. Dies ergibt mit $\delta := \sqrt{|6\frac{f_{z\lambda}^0}{f_{zzz}^0}|}$ die Kurven:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} (z(t), \lambda(t)) & = & (\delta t, \operatorname{sgn}\left(-\frac{f_{z\lambda}^0}{f_{zzz}^0}\right)t^2) + (O(t^2), O(t^3)) \text{ und} \\ (z(t), \lambda(t)) & = & (0, \pm t^2) + (O(t^2), O(t^3) \\ \text{Normalform} & = & \pm z^3 \pm \lambda z \ \textbf{Pitchfork} \\ \text{Kodimension} & = & 2 \\ \text{Bedingungen} & : & f_z^0 = f_\lambda^0 = f_{zz}^0 = 0, \\ & & f_{zzz}^0 \neq 0, f_{z\lambda}^0 \neq 0 \\ \text{Beispiel} & : & \text{siehe Abb. 3.1.7} \end{array}} \qquad (3.1.12)$$

$\underline{f_{zzz}^0 = 0}$**:** $z_1 = 0$ und $\lambda_2 = 0$. Die triviale Lösung $(0, \lambda)$ ist hierbei λ-bestimmt. Die zweite Lösung $\lambda_2 = 0$ ist zwar bestimmt, aber nicht λ-bestimmt. Diese muß somit weiter approximiert werden bei $j = 4$ mit $k_4 = 1$ und $l_4 = 3$. Siehe Punkt **[J]**.

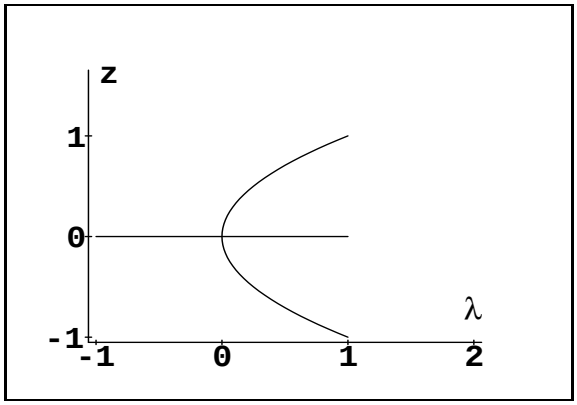

Abbildung 3.1.7: Pitchfork Verzweigung: Normalform $\pm z^3 \pm \lambda z$

[F] Es gilt: $f_z^0 = f_\lambda^0 = f_{zz}^0 = f_{z\lambda}^0 = \lambda_1 = 0, f_{\lambda\lambda}^0 \neq 0$

$T_3(z_1, \lambda_2) = \frac{1}{6} f_{zzz}^0 z_1^3$

$\underline{f_{zzz}^0 \neq 0}$**:** $x_1 = 0$ dreifache Lösung, also unbestimmt, da Ableitung gleich Null an dieser Stelle. Also weiter bei $j = 4$ mit $k_4 = 2$ und $l_4 = 2$. Dies ergibt:

$T_4(z_2, \lambda_2) = \frac{1}{2} f_{\lambda\lambda}^0 \lambda_2^2 = 0$

Also $\lambda_2 = 0$ doppelt. Weiter bei $j = 5$ mit $k_5 = 2$ und $l_5 = 3$. Dies ergibt:

$T_5(z_2, \lambda_3) = 0$

Hier ist (z_2, λ_3) beliebig. Weiter bei $j = 6$ mit $k_6 = 2$ und $l_6 = 3$. Dies ergibt:

$T_6(z_2, \lambda_3) = \frac{1}{6} f_{zzz}^0 z_2^3 + \frac{1}{2} f_{\lambda\lambda}^0 \lambda_3^2 = 0$

Die reelle Lösung ist $z_2 = \sqrt[3]{-\frac{3 f_{\lambda\lambda}^0}{f_{zzz}^0}} \lambda_3^2$. Mit $\delta := \sqrt[3]{-\frac{3 f_{\lambda\lambda}^0}{f_{zzz}^0}}$ ergeben sich somit die Lösungen

$$
\begin{array}{rcl}
(z(t), \lambda(t)) & = & (\pm\delta t^2, t^3) + (O(t^3), O(t^4)) \\
\text{Normalform} & = & z^3 \pm \lambda^2 \ \textbf{Kuspe} \\
\text{Kodimension} & = & 3 \\
\text{Bedingungen} & : & f_z^0 = f_\lambda^0 = f_{z\lambda}^0 = f_{zz}^0 = 0, \\
 & & f_{zzz}^0 \neq 0, f_{\lambda\lambda}^0 \neq 0 \\
\text{Beispiel} & : & \text{siehe Abb. 3.1.8}
\end{array}
\tag{3.1.13}
$$

$\underline{f_{zzz}^0 = 0}$**:** (z_1, λ_2) beliebig. Kodimension ≥ 4. Diese Singularitäten werden nicht weiter verfolgt.

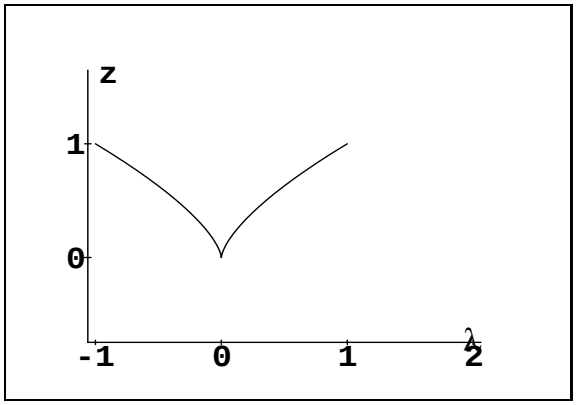

Abbildung 3.1.8: Kuspe: Normalform $\pm z^3 \pm \lambda^2$

[G] Es gilt: $f^0_z = f^0_\lambda = f^0_{zz} = f^0_{z\lambda} = f^0_{\lambda\lambda} = 0$

$T_3(z_1, \lambda_1) = \frac{1}{6} D^3 f^0(z_1, \lambda_1) = 0$

<u>1.*Fall*</u>**:** T_3 hat 3 verschiedene reelle Nullstellen, etwa $z_1 = \delta_{1,2,3}\lambda_1$. Dann ergeben sich die drei Kurven:

$$\begin{array}{rcl} (z(t), \lambda(t)) & = & (\delta_{1,2,3}t, t) + O(t^2) \\ \text{Normalform} & = & z(z^2 - \lambda^2) \ \textbf{multiple Verzweigung} \\ \text{Kodimension} & \geq & 4 \\ \text{Bedingungen} & : & f^0_z = f^0_\lambda = f^0_{zz} = f^0_{z\lambda} = f^0_{\lambda\lambda} = 0, \\ & & T_3 \text{ hat 3 verschiedene reelle Nullstellen} \\ \text{Beispiel} & : & \text{siehe Abb. 3.1.9} \end{array} \tag{3.1.14}$$

<u>2.*Fall*</u>**:** T_3 hat 2 konjugiert komplexe und eine reelle Nullstelle $z_1 = \delta\lambda_1$. Dann ergibt sich eine reelle Kurve:

$$\begin{array}{rcl} (z(t), \lambda(t)) & = & (\delta t, t) + O(t^2) \\ \text{Normalform} & = & z(z^2 + \lambda^2) \\ \text{Kodimension} & \geq & 4 \\ \text{Bedingungen} & : & f^0_z = f^0_\lambda = f^0_{zz} = f^0_{z\lambda} = f^0_{\lambda\lambda} = 0, \\ & & T_3 \text{ hat eine reelle Nullstelle} \end{array} \tag{3.1.15}$$

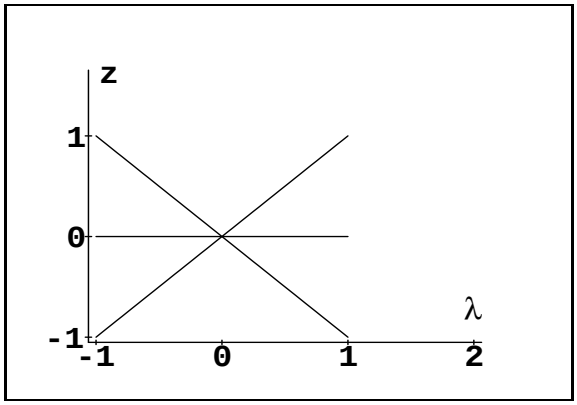

Abbildung 3.1.9: Dreifache Verzweigung: Normalform $z(z^2 - \lambda^2)$

3.*Fall*: T_3 hat doppelte Nullstellen. $\Rightarrow$ höhere Kodimension. Wird nicht weiterverfolgt.

4.*Fall*: $T_3(z_1, \lambda_1) = 0$ Weiter bei $j = 4$.

Man kann sich leicht (wie etwa in Lemma 3.1.1) überlegen, daß, falls $T_1 = \ldots = T_{n-1} = 0$ und $T_n \neq 0$ ist, eine n-fache Verzweigung vorliegt mit $T_n(z_1, \lambda_1) = \frac{1}{n!} D^n f^0(z_1, \lambda_1)$ mit der Normalform

$$f(z, \lambda) = z \prod_{l=1}^{n-1} (z - \delta_l \lambda), \ \delta_l \in \mathbb{C}, l = 1, \ldots, n-1. \tag{3.1.16}$$

Da die komplexen Nullstellen von T_n nur konjugiert auftreten, ist die Normalform ausmultipliziert reell. Dies zeigt, wie schon im 1-ten und 2-ten Fall, daß nicht alle Zweige reell sein müssen. Es können sogar alle Zweige, wie im 1-ten Fall bei $T_n(z_1, \lambda_1) = z_1^{2n} + \lambda_1^{2n}$; $n \geq 1$ imaginär sein.

[**H**] Es gilt: $f_z^0 = f_\lambda^0 = \triangle_2 = \lambda_1 = z_1 = 0, f_{zz}^0 \neq 0, \triangle_3 \neq 0$

$T_4(z_2, \lambda_2) = \frac{1}{2} f_{zz}^0 z_2^2 + f_{z\lambda}^0 z_2 \lambda_2 + \frac{1}{2} f_{\lambda\lambda}^0 \lambda_2^2 = \frac{1}{2} D^2 f^0(z_2, \lambda_2) \stackrel{[B]}{=} \frac{1}{2}(z_2 + \frac{f_{z\lambda}^0}{f_{zz}^0} \lambda_2)^2 = 0$

Die einzige Nullstelle ist $z_2 = -\frac{f_{z\lambda}^0}{f_{zz}^0} \lambda_2$. Da sie doppelt ist, ist diese Lösung noch nicht bestimmt. Weiter bei $j = 5$ mit $k_5 = 3, l_5 = 2$ und $z_2 = -\frac{f_{z\lambda}^0}{f_{zz}^0} \lambda_2$. Das ergibt:

$T_5(z_3, \lambda_2) \equiv 0$.

Keine Informationen. Weiter bei $j = 6$ mit $k_6 = 3, l_6 = 2$ und $z_2 = -\frac{f_{z\lambda}^0}{f_{zz}^0} \lambda_2$. Das ergibt:

$T_6(z_3, \lambda_2) = \frac{1}{2} f_{zz}^0 z_3^2 + \triangle_3 \lambda_2^3 = 0$

Wegen [D] ist $\triangle_3 \neq 0$ und wegen [B] ist $f^0_{zz} \neq 0$. Damit gibt es die Lösungen $z_3 = \pm\sqrt{\frac{2\triangle_3}{f^0_{zz}}\lambda_2^3}$. Sei $\delta := \sqrt{|\frac{2\triangle_3}{f^0_{zz}}|}$. Dann lauten die Kurven:

$$
\begin{array}{rcl}
(z(t),\lambda(t)) & = & (\delta t^3, -\mathrm{sgn}(\delta)t) + (O(t^4,),O(t^2)) \\
\text{Normalform} & = & \pm z^2 \pm \lambda^3 \\
 & & \textbf{Asymmetrische Kuspe / Neilsche Parabel} \\
\text{Kodimension} & = & 2 \\
\text{Bedingungen} & : & f^0_z = f^0_\lambda = \triangle_2 = 0, \\
 & & f^0_{zz} \neq 0, \triangle_3 \neq 0 \\
\text{Beispiel} & : & \text{siehe Abb. 3.1.10}
\end{array}
\tag{3.1.17}
$$

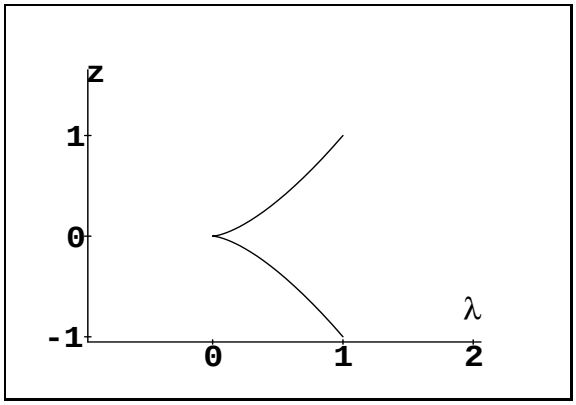

Abbildung 3.1.10: Asymmetrische Kuspe / Neilsche Parabel: Normalform $\pm z^2 \pm \lambda^3$

[I] Es gilt: $f^0_z = f^0_\lambda = \triangle_2 = \triangle_3 = 0, f^0_{zz} \neq 0, z_1 = -\frac{f^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}}\lambda_1$

$T_4(z_2,\lambda_1) = \frac{1}{24}D^4f^0(-\frac{f^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}},1)\lambda_1^4 + \frac{1}{2}D_zD^2f^0(-\frac{f^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}},1)z_2\lambda_1^2 + \frac{1}{2}f^0_{zz}z_2^2$

Sei $\boxed{\triangle_4 := 3\left(D_zD^2f^0(-\frac{f^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}},1)\right)^2 - f^0_{zz}D^4f^0(-\frac{f^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}},1) =: 3{f^0_{zvv}}^2 - f^0_{zz}f^0_{vvvv}}$

$\frac{1}{12\lambda_1^4}\triangle_4$ ist die Diskriminante der quadratischen Gleichung $T_4(z_2,\lambda_1) = 0$ bzgl. z_2.

Nach [B] gilt: $f^0_{zz} \neq 0$. Es muß nur $\triangle_4$ betrachtet werden:

$\underline{\triangle_4 \neq 0}$**:** Die Lösung ist $z_2 = \left(-\frac{1}{2}\frac{f^0_{vv}}{f^0_{zz}} \pm \frac{\sqrt{3\triangle_4}}{6f^0_{zz}}\right)\lambda_1^2 =: \delta_{1,2}\lambda_1^2$. Diese Lösungen sind einfach, also bestimmt und insbesondere λ-bestimmt. Als abzweigende Kurven

ergeben sich somit:

$$\begin{array}{rcl} (z(t),\lambda(t)) & = & (\delta_{1,2}t^2,t)+(O(t^3,),O(t^2)) \\ \text{Normalform} & = & \pm z^2 \pm \lambda^4 \\ \text{Kodimension} & = & 3 \\ \text{Bedingungen} & : & f_z^0 = f_\lambda^0 = \triangle_2 = \triangle_3 = 0, \\ & & \triangle_4 \neq 0, f_{zz}^0 \neq 0 \\ \text{Beispiel} & : & \text{siehe Abb. 3.1.11} \end{array} \tag{3.1.18}$$

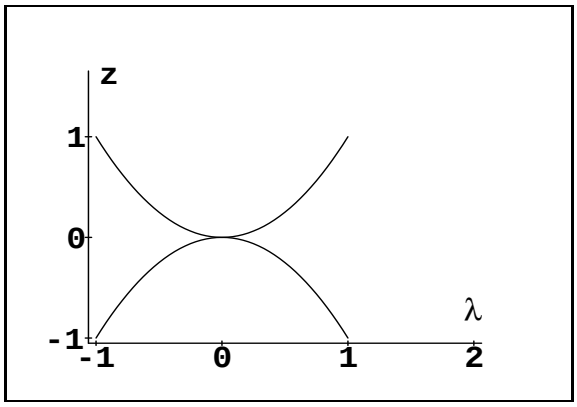

Abbildung 3.1.11: Normalform $\pm z^2 \pm \lambda^4$

$\underline{\triangle_4 = 0}$**:** $z_2 = \left(-\frac{1}{2}\frac{f_{vv}^0}{f_{zz}^0}\right)\lambda_1^2$ doppelt und somit nicht bestimmt. Wegen $f_\lambda^0 = \triangle_2 = \triangle_3 = \triangle_4 = 0$ ist die Kodimension mindestens 4. Diese Singularitäten werden hier nicht weiter verfolgt.

[J] Es gilt: $f_z^0 = f_\lambda^0 = f_{zz}^0 = f_{zzz}^0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0, f_{z\lambda}^0 \neq 0$

$T_4(z_1,\lambda_3) = \frac{1}{24}f_{z^4}^0 z_1^4 + f_{z\lambda}^0 z_1\lambda_3 = 0$

$\underline{f_{z^4}^0 \neq 0}$**:** Es gilt nach [B]: $f_{z\lambda}^0 \neq 0$. Damit gibt es die Lösungen $z_1 = \sqrt[3]{-\frac{24f_{z\lambda}^0}{f_{z^4}^0}}\lambda_3$ und $z_1 = 0$. Diese sind alle einfach. Mit $\delta := \sqrt[3]{|\frac{24f_{z\lambda}^0}{f_{z^4}^0}|}$ lauten die reellen

Kurven:

$$\begin{array}{rcl}
(z(t),\lambda(t)) & = & (\delta t, -\mathrm{sgn}(\delta)t^3) + (O(t^2,),O(t^4)) \text{ und} \\
(z(t),\lambda(t)) & = & (0,t^3) + O(t^2,),O(t^4)) \\
\text{Normalform} & = & \pm z^4 \pm \lambda z \\
\text{Kodimension} & = & 3 \\
\text{Bedingungen} & : & f_z^0 = f_\lambda^0 = f_{zz}^0 = f_{zzz}^0 = 0, \\
 & & f_{z^4}^0 \neq 0, f_{z\lambda}^0 \neq 0 \\
\text{Beispiel} & : & \text{siehe Abb. 3.1.12}
\end{array} \tag{3.1.19}$$

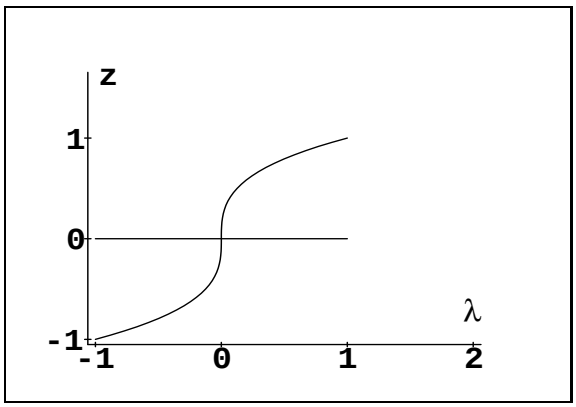

Abbildung 3.1.12: Normalform $\pm z^4 \pm \lambda z$

$\underline{f_{z^4}^0 = 0}$**:** $z_1 = 0$ und $\lambda_3 = 0$. Die triviale Lösung $(0,\lambda)$ ist hier schon durch die erste Lösung bestimmt. Die zweite Lösung ist zwar bestimmt, aber noch nicht λ-bestimmt. Weiter bei $j = 5$ mit $k_5 = 1$ und $l_5 = 4$.

Lemma 3.1.2 *Seien für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ die Voraussetzungen $f_z^0 = \ldots = f_{z^{n-1}}^0 = f_\lambda^0 = 0, f_{z\lambda}^0 \neq 0$ erfüllt, so ergibt sich mit Algorithmus 2.3.1 $T_n(z_1,\lambda_{n-1}) = \frac{1}{n!}f_{z^n}^0 z_1^n + f_{z\lambda}^0 z_1\lambda_{n-1}$ sowie $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-2} = 0$ und $k_n = 1, l_n = n-1$.*

Beweis: Mit Induktion: Für $n = 4$ siehe Punkt [**J**].

Sei nun vorausgesetzt: $f_z^0 = \ldots = f_{z^{n-1}}^0 = f_\lambda^0 = 0, f_{z\lambda}^0 \neq 0$ und $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-3} = 0$. Wegen Induktionsvoraussetzung ist

$$T_{n-1}(z_1,\lambda_{n-2}) = \frac{1}{(n-1)!}f_{z^{n-1}}^0 z_1^{n-1} + f_{z\lambda}^0 z_1\lambda_{n-2} = f_{z\lambda}^0 z\lambda_{n-2}$$

Damit ist auch $\lambda_{n-2} = 0$ und es geht bei $j = n$ weiter mit $k_n = 1, l_n = n-1$. Bei Ordnung n sind nun die einzigen Unbekannten z_1 und λ_{n-1}. Da die Ordnung von $z_1^l \lambda_{n-1}^s$ gleich $l + s(n-1)$ ist, muß gelten $l + s(n-1) = n$. Das geht nur für $l = n, s = 0$ und $l = 1, s = 1$. Damit sind die einzigen Terme, die in der Taylorentwicklung bzgl. t von f in der Ordnung n auftreten, die beiden folgenden:

$$T_n(z_1, \lambda_{n-1}) = \frac{1}{n!} f^0_{z^n} z_1^n + f^0_{z\lambda} z_1 \lambda_{n-1}$$

Damit ist das Lemma bewiesen. ■

Betrachte nun $T_n(z_1, \lambda_{n-1}) = \frac{1}{n!} f^0_{z^n} z_1^n + f^0_{z\lambda} z_1 \lambda_{n-1}$

$\underline{f^0_{z^n} \neq 0}$**:** Die Lösungen sind $z_1 = 0$ und $\lambda_{n-1} = -\frac{f^0_{z^n}}{n! f^0_{z\lambda}} z_1^{n-1}$. Dann lauten mit $\delta := -\frac{f^0_{z^n}}{n! f^0_{z\lambda}}$ die Kurven:

$(z(t), \lambda(t))$	$=$	$(t, \delta t^{n-1}) + (O(t^2,), O(t^n))$ und
$(z(t), \lambda(t))$	$=$	$(0, \pm t^{n-1}) + O(t^2,), O(t^n))$
Normalform	$=$	$\pm z^n \pm \lambda z$
Kodimension	$\geq$	$n-1$
Bedingungen	:	$f^0_z = f^0_\lambda = f^0_{zz} = \ldots = f^0_{z^{n-1}} = 0,$
		$f^0_{z^n} \neq 0, f^0_{z\lambda} \neq 0$
Beispiele	:	siehe Abb. 3.1.12 und 3.1.7

(3.1.20)

$\underline{f^0_{z^n} = 0}$**:** Gehe wie im Lemma 3.1.2 beschrieben weiter.

Damit sind alle einfachen Singularitäten bis Kodimension 3 und einige andere bestimmt. Stellt man diese Ergebnisse in einem Schema zusammen, so ergibt sich Tabelle 3.1.1. Diese Tabelle ist von oben nach unten durchzugehen. Ist ein Term an den Pfeilen gleich Null, so muß diesem Weg gefolgt werden, bis beide Terme ungleich Null sind. Es liegt dann die Verzweigung/Singularität vor, bei der dieser Prozeß endete. Sind beide Terme an den Pfeilen gleich Null, kann, wie sich leicht nachprüfen läßt, einer der zwei Wege beliebig ausgewählt werden. Diese Tabelle findet sich auch analog in [GS86] oder in [SJ85]. Zu dem Thema 'multiple Verzweigungen', also Verzweigungen, bei denen sich, wie in Punkt [G], mehrere Kurven treffen, siehe z.B. [DK80a]. Alle diese Betrachtungen von Singularitäten

zeichnen λ als Kontroll-Parameter aus. Fällt diese besondere Auszeichnung jedoch weg, kann man mit dem gleichen Vorgehen wie oben eine Singularitätenhierarchie aufbauen, wenn man dafür statt des Algorithmus 2.3.1 Algorithmus 2.2.10 einsetzt. Überlegungen zu diesem Thema finden sich z.B. in [Bey84].

Im nächsten Abschnitt sollen nun einfache Singularitäten mit $\mathbb{Z}_2$-Symmetrie in der z-Komponente klassifiziert werden.

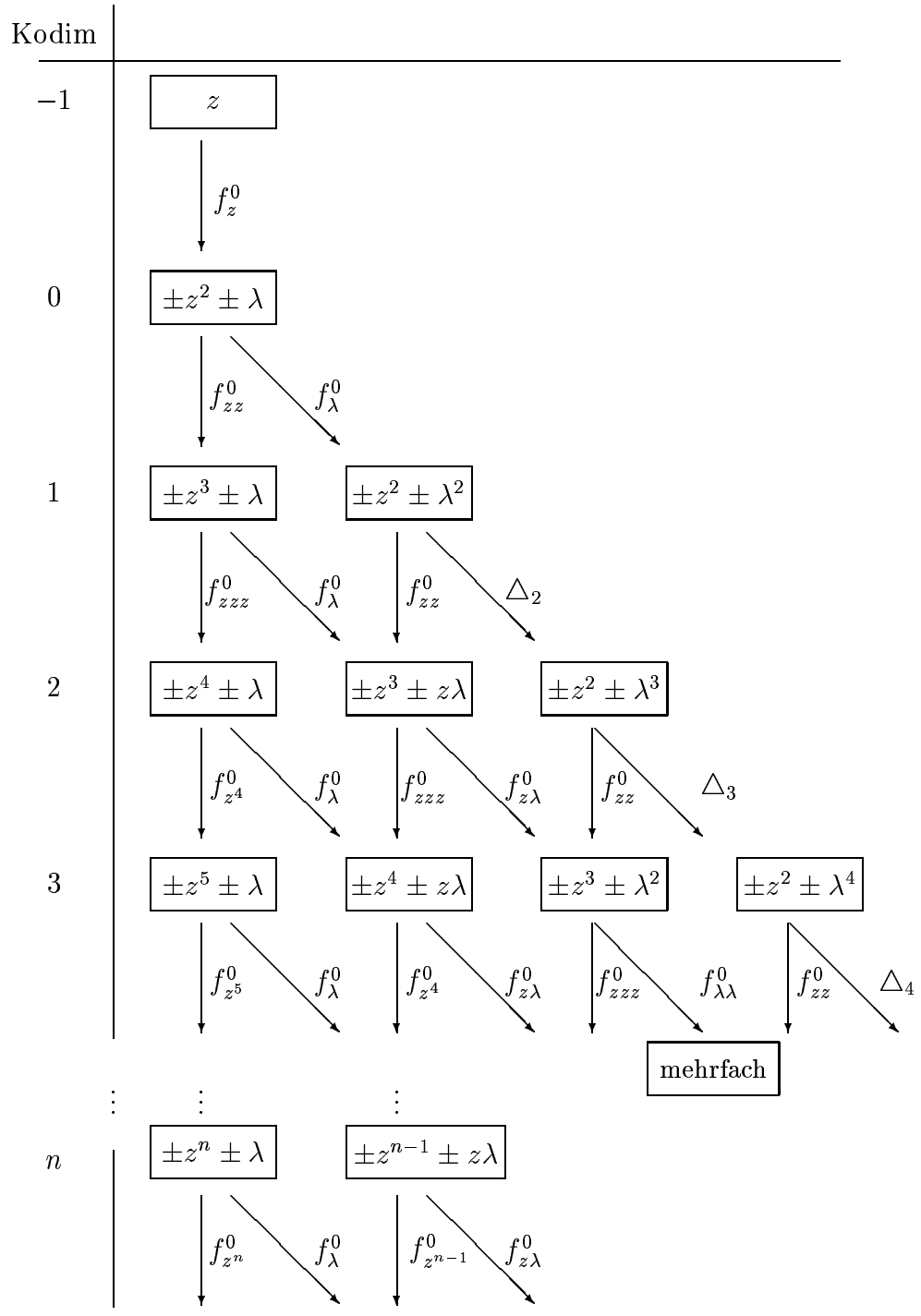

Tabelle 3.1.1: Singularitätenordnung ohne vorgegebene Symmetrie, λ-orientiert

3.2 Allgemeine Singularitäten mit $\mathbb{Z}_2$-Symmetrie

In diesem Kapitel wird die gleiche Strategie wie in Abschnitt 3.1 angewandt. Zusätzlich soll hier jedoch der allgemeine Keim f bzgl. z eine $\mathbb{Z}_2$-Symmetrie erfüllen. D.h.:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (z, \lambda) \mapsto f(z, \lambda) \tag{3.2.1}$$

$$f(0,0) = 0 \text{ und } f(-z, \lambda) = -f(z, \lambda) \tag{3.2.2}$$

Auf welche Weise die zusätzliche Forderung der Symmetrie mit aufgenommen werden kann, soll nun beschrieben werden. Wegen (3.2.2) gilt für die Ableitungen von f in $(0,0)$:

$$f^0_{z^{2n}\lambda^m} = 0, \ \forall n, m \in \mathbb{N} \tag{3.2.3}$$

Diese Bedingungen werden nun einfach von Beginn an angenommen, womit für f automatisch nur die $\mathbb{Z}_2$-symmetrischen Keime diskutiert werden. Praktisch realisieren kann man die folgenden Berechnungen der T_j wieder mit Hilfe von Computer-Algebra-Programmen. Um (3.2.3) für f zu berücksichtigen, kann man ein $\mathbb{Z}_2$-symmetrisches f z.B. erzeugen durch die allgemeine Wahl eines $\tilde{f}$ mit:

$$f(z, \lambda) := z\hat{f}(z^2, \lambda) =: z\hat{f}(\hat{z}, \lambda), \ \tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \hat{z} := z^2, \qquad f(0,0) = 0 \tag{3.2.4}$$

Auf diese Weise werden alle $\mathbb{Z}_2$-symmetrischen f erzeugt (siehe zur Erzeugung symmetrischer Keime [GS86], sowie zu deren Verwendung [BGJ96], [SJ91]). Es ergeben sich auf diese Weise folgende Fälle[3]:

$T_1(z_1, \lambda_1) = f^0_z z_1 = 0$

$\underline{f^0_z \neq 0}$**:** $(z_1, \lambda_1) = (0, \lambda_1)$ ist λ-bestimmt. Die zugehörige Kurvenapproximation lautet:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} (z(t), \lambda(t)) & = & (0, t) + O(t^2) \\ \text{Normalform} & = & z \\ \text{Kodimension} & = & -1 \\ \text{Beispiel} & : & \text{siehe Abb. 3.1.1} \end{array}} \tag{3.2.5}$$

[3]Zum Begriff der $\mathbb{Z}_2$-Kodimension sei auch auf die Literatur verwiesen. Siehe z.B. [GS86, GSS88], [SJ91]

$\underline{f_z^0 = 0}$**:** (z_1, λ_1) beliebig. Weiter bei $j = 2$. Siehe [**A**].

[**A**] Es gilt: $f_z^0 = 0$

$T_2(z_1, \lambda_1) = f_{z\lambda}^0 z_1 \lambda_1 = 0$

$\underline{f_{z\lambda}^0 \neq 0}$**:** $(z_1, \lambda_1) = (0, la_1)$ ist λ-bestimmt.

$\lambda_1 = 0$ ist bestimmt, aber nicht λ-bestimmt. Weiter für diese Lösung bei $j = 3$ mit $l_3 = 2$. Siehe [**B**].

$\underline{f_{z\lambda}^0 = 0}$**:** (z_1, λ_1) beliebig. Weiter bei $j = 3$. Siehe [**C**].

[**B**] Es gilt: $f_z^0 = \lambda_1 = 0, f_{z\lambda}^0 \neq 0$

$T_3(z_1, \lambda_2) = \frac{1}{6} f_{zzz}^0 z_1^3 + f_{z\lambda}^0 z_1 \lambda_2 = 0$

Wegen [A] ist $f_{z\lambda}^0 \neq 0$. Es bleibt zu unterscheiden:

$\underline{f_{zzz}^0 \neq 0}$**:** $(z_1, \lambda_2) = (0, \lambda_2)$ ist λ-bestimmt.

$z_1 = \pm\sqrt{-\frac{6 f_{z\lambda}^0}{f_{zzz}^0} \lambda_2}$ ist auch λ-bestimmt. Damit ergeben sich mit $\delta := \sqrt{|6\frac{f_{z\lambda}^0}{f_{zzz}^0}|}$ folgende reelle Kurven:

$$
\begin{array}{rcl}
(z(t), \lambda(t)) & = & (0, \pm t^2) + (O(t^2), O(t^3)) \text{ und} \\
(z(t), \lambda(t)) & = & (\delta t, \operatorname{sgn}\left(-\frac{f_{z\lambda}^0}{f_{zzz}^0}\right) t^2) + (O(t^2), O(t^3)) \\
\text{Normalform} & = & \pm z^3 \pm \lambda z \ \textbf{Pitchfork} \\
\mathbb{Z}_2\text{-Kodimension} & = & 0 \\
\text{Bedingungen} & : & f_z^0 = 0, f_{z\lambda}^0 \neq 0, f_{zzz}^0 \neq 0 \\
\text{Beispiel} & : & \text{siehe Abb. 3.1.7}
\end{array}
\tag{3.2.6}
$$

$\underline{f_{zzz}^0 = 0}$**:** $(z_1, \lambda_2) = (0, \lambda_2)$ ist λ-bestimmt.

$\lambda_2 = 0$ ist bestimmt, aber noch nicht λ-bestimmt. Weiter für diese Lösung bei $j = 4$ mit $l_4 = 3$. Dieser und weitere auftretende Fälle können auch hier wieder zusammengefaßt werden:

Lemma 3.2.1 *Seien für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ die Voraussetzungen $f_z^0 = \ldots = f_{z^{2n-1}}^0 = f_\lambda^0 = 0, f_{z\lambda}^0 \neq 0$ erfüllt, so ergibt sich mit Algorithmus 2.3.1*
$T_{2n+1}(z_1, \lambda_{n-1}) = \frac{1}{(2n+1)!} f_{z^{2n+1}}^0 z_1^{2n+1} + f_{z\lambda}^0 z_1 \lambda_{2n}$
sowie $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{2n-1} = 0$ und $k_{2n+1} = 1, l_{2n+1} = 2n$.

Beweis: Mit Induktion: Für $n = 1$ siehe Punkt [B].

Sei nun fur $n > 1$ vorausgesetzt: $f^0_z = \ldots = f^0_{z^{2n-1}} = f^0_\lambda = 0, f^0_{z\lambda} \neq 0$ und $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{2n-3} = 0$. Wegen Induktionsvoraussetzung ist

$$T_{2n-1}(z_1, \lambda_{2n-2}) = \frac{1}{(2n-1)!} f^0_{z^{2n-1}} z_1^{2n-1} + f^0_{z\lambda^{2n-2}} z_1 \lambda_{2n-2} = f^0_{z\lambda^{2n-2}} z_1 \lambda_{2n-2}$$

Damit ist also auch $\lambda_{2n-2} = 0$ und es geht bei $j = 2n$ weiter mit $k_{2n} = 1, l_{2n} = 2n - 1$. Da die Ordnung von $z_1^l \lambda_{2n-1}^s$ gleich $l + s(2n-1)$ ist, muß gelten $l + s(2n-1) = 2n$. Das geht nur für $l = 1, s = 1$. Damit ist der einzige Term, der in der Taylorentwicklung bzgl. t von f in der Ordnung n auftritt, der folgende:

$$T_{2n}(z_1, \lambda_{2n-1}) = \frac{1}{(2n-1)!} f^0_{z\lambda} z_1 \lambda_{2n-1}$$

Nach Voraussetzung ist $f^0_{z\lambda} \neq 0$ und somit ergibt sich hier wieder die λ-bestimmte Lösung $(z_1, \lambda_{2n-1}) = (0, \lambda_{2n-1})$ und die nicht λ-bestimmte Lösung $\lambda_{2n-1} = 0$. Diese Lösung muß weiter approximiert werden bei $j = 2n + 1$ mit $k_{2n+1} = 1$ und $l_{2n+1} = 2n$. Bei dieser Ordnung sind nun die einzigen Unbekannten z_1 und λ_{2n}. Da die Ordnung von $z_1^l \lambda_{2n}^s$ gleich $l + s2n$ ist, muß gelten $l + 2sn = 2n + 1$. Das geht nur für $l = 2n + 1, s = 0$ und $l = 1, s = 1$. Damit sind die einzigen Terme, die in der Taylorentwicklung bzgl. t von f in der Ordnung n auftreten, die beiden folgenden:

$$T_{2n+1}(z_1, \lambda_{2n}) = \frac{1}{(2n+1)!} f^0_{z^{2n+1}} z_1^{2n+1} + f^0_{z\lambda} z_1 \lambda_{2n}$$

Damit ist das Lemma bewiesen. ■

Betrachte nun $T_{2n+1}(z_1, \lambda_{2n}) = \frac{1}{(2n+1)!} f^0_{z^{2n+1}} z_1^{2n+1} + f^0_{z\lambda} z_1 \lambda_{2n}$

$\underline{f^0_{z^{2n+1}} \neq 0}$**:** Die Lösungen sind $(z_1, \lambda_{2n}) = (0, \lambda_{2n})$ und $\lambda_{2n} = -\frac{f^0_{z^{2n+1}}}{(2n+1)! f^0_{z\lambda}} z_1^{2n}$. Dann lauten mit $\delta := -\frac{f^0_{z^{2n+1}}}{(2n+1)! f^0_{z\lambda}}$ die Kurven:

$$\begin{array}{rcl}
(z(t), \lambda(t)) & = & (t, \delta t^{2n}) + (O(t^2), O(t^{2n+1})) \text{ und} \\
(z(t), \lambda(t)) & = & (0, \pm t^{2n}) + (O(t^2), O(t^{2n+1})) \\
\text{Normalform} & = & \pm z^{2n+1} \pm \lambda z \\
\mathbb{Z}_2\text{-Kodimension} & = & n-1 \\
\text{Bedingungen} & : & f^0_z = f^0_{z^3} = \ldots = f^0_{z^{2n-1}} = 0, \\
 & & f^0_{z^{2n+1}} \neq 0, f^0_{z\lambda} \neq 0 \\
\text{Beispiele} & : & \text{siehe Abb. 3.1.12 und 3.1.7}
\end{array} \tag{3.2.7}$$

$\underline{f^0_{z^{2n+1}} = 0}$**:** Gehe wie im Lemma 3.2.1 beschrieben weiter.

[C] Es gilt: $f^0_z = f^0_{z\lambda} = 0$

$T_3(z_1, \lambda_1) = \frac{1}{6} f^0_{zzz} z_1^3 + \frac{1}{2} f^0_{z\lambda\lambda} z_1 \lambda_1^2 = 0$

$\underline{f^0_{zzz} \neq 0}$**:**

$\underline{f^0_{z\lambda\lambda} \neq 0}$**:** $(z_1, \lambda_1) = (0, \lambda_1)$ und $z_1 = \pm\sqrt{-3\frac{f^0_{z\lambda\lambda}}{f^0_{zzz}}\lambda_1^2}$ sind λ-bestimmte Lösungen. Die zugehörigen (evtl. reellen) Kurven lauten mit $\delta := \sqrt{-3\frac{f^0_{z\lambda\lambda}}{f^0_{zzz}}} \in \mathbb{C}$

$$\begin{array}{rcl}
(z(t), \lambda(t)) & = & (0, \pm t) + O(t^2) \text{ und} \\
(z(t), \lambda(t)) & = & (\pm\delta t, t) + O(t^2) \\
\text{Normalform} & = & z(z^2 \pm \lambda^2) \\
\mathbb{Z}_2\text{-Kodimension} & = & 1 \\
\text{Bedingungen} & : & f^0_z = f^0_{z\lambda} = 0, \\
 & & f^0_{zzz} \neq 0, f^0_{z\lambda\lambda} \neq 0 \\
\text{Beispiele} & : & \text{siehe Abb. 3.2.13 und 3.2.14}
\end{array} \tag{3.2.8}$$

$\underline{f^0_{z\lambda\lambda} = 0}$**:** $z_1 = 0$ dreifache Nullstelle, somit unbestimmt. Weiter bei $j = 4$ mit $k_4 = 2$. Siehe **[D]**.

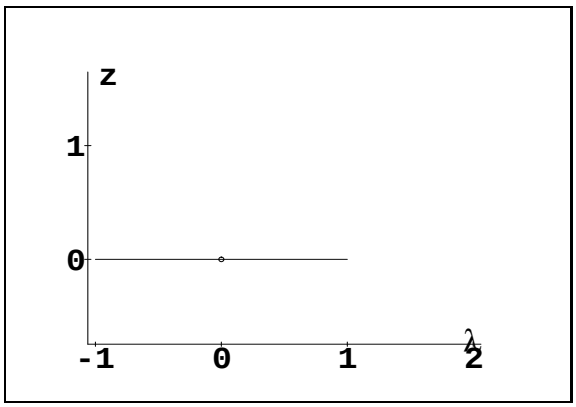

Abbildung 3.2.13: Normalform $z(z^2+\lambda^2)$

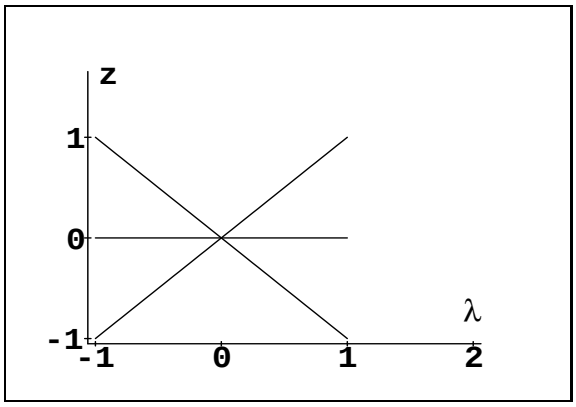

Abbildung 3.2.14: Normalform $z(z^2-\lambda^2)$

$\underline{f^0_{zzz}=0}$**:**

$\underline{f^0_{z\lambda\lambda}\neq 0}$**:** $(z_1,\lambda_1)=(0,\lambda_1)$ ist λ-bestimmt.
$\lambda_1=0$ ist jedoch eine doppelte Nullstelle, also nicht bestimmt. Weiter mit dieser Lösung bei $j=4$ mit $l_4=2$. Siehe [**E**].

$\underline{f^0_{z\lambda\lambda}=0}$**:** (z_1,λ_1) unbestimmt. weiter bei $j=4$. Siehe [**F**].

[**D**] Es gilt: $f^0_z=f^0_{z\lambda}=f^0_{z\lambda\lambda}=z_1=0$

$T_4(z_2,\lambda_1)=0$ Weiter bei $j=5$.

$T_5(z_2,\lambda_1)=\frac{1}{6}f^0_{z\lambda^3}z_2,\lambda_1^2=0$

$\underline{f^0_{z\lambda^3}\neq 0}$**:** $\lambda_1=0$ ist dreifache Nullstelle, also unbestimmt. Weiter bei $j=6$ mit $l_6=2$. Siehe [**G**].

$\underline{f^0_{z\lambda^3}=0}$**:** (z_2,λ_1) unbestimmt. Weiter bei $j=6$. Siehe [**H**].

[E] Es gilt: $f_z^0 = f_{z\lambda}^0 = f_{zzz}^0 = \lambda_1 = 0, f_{z\lambda\lambda}^0 \neq 0$

$T_4(z_1, \lambda_2) = 0$ Weiter bei $j = 5$.

$T_5(z_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} f_{z\lambda\lambda}^0 z_1 \lambda_2^2 + \frac{1}{6} f_{z^3\lambda}^0 z_1^3 \lambda_2 + \frac{1}{120} f_{z^5}^0 z_1^5 = 0$

Sei $\boxed{\triangle_2^{\mathbb{Z}_2} := 5\left(f_{z^3\lambda}^0\right)^2 - 3 f_{z^5}^0 f_{z\lambda\lambda}^0 \stackrel{!}{=} \left(\hat{f}_{\hat{z}\lambda}^0\right)^2 - \hat{f}_{\hat{z}\hat{z}}^0 \hat{f}_{\lambda\lambda}^0}$

Weiterhin gilt wegen [C] bereits $f_{z\lambda\lambda}^0 \neq 0$. Es bleibt zu unterscheiden:

$\underline{f_{z^5}^0 \neq 0}$**:**

$\underline{\triangle_2^{\mathbb{Z}_2} \neq 0}$**:** $(z_1, \lambda_2) = (0, \lambda_2)$ ist λ-bestimmt. Die Lösung $\lambda_2 = -\frac{f_{z^5}^0}{10 f_{z^3\lambda}^0 \pm \sqrt{5\triangle_2^{\mathbb{Z}_2}}} z_1^2$ ist ebenfalls λ-bestimmt. Damit ergeben sich mit $\delta_{1,2} := -\frac{f_{z^5}^0}{10 f_{z^3\lambda}^0 \pm \sqrt{5\triangle_2^{\mathbb{Z}_2}}}$ die (evtl.) reellen Kurven:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} (z(t), \lambda(t)) & = & (0, \pm t^2) + (O(t), O(t^3)) \text{ und} \\ (z(t), \lambda(t)) & = & (t, \delta_{1,2} t^2) + (O(t^2), O(t^3)) \\ \text{Normalform} & = & z^5 + 2mz^3\lambda + d\lambda^2 z, \\ & & m := \frac{\tilde{f}_{\tilde{z}\tilde{\lambda}}^0}{|\tilde{f}_{\tilde{z}\tilde{z}}^0 \tilde{f}_{\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}}^0|^{\frac{1}{2}}},\ m^2 \neq d = \pm 1 \\ \mathbb{Z}_2\text{-Kodimension} & = & 3^* \text{ (Modalparameter)} \\ \text{Bedingungen} & : & f_z^0 = f_{z\lambda}^0 = f_{zzz}^0 = 0, \\ & & f_{z\lambda\lambda}^0 \neq 0, f_{z^5}^0 \neq 0, \triangle_2^{\mathbb{Z}_2} \neq 0 \\ \text{Beispiel} & : & \text{siehe Abb. 3.2.15} \end{array}} \tag{3.2.9}$$

Hier treten zum ersten Mal Modalparameter auf. Zu deren weiteren Erklärung siehe z.B. [GS86, GSS88] oder [SJ91].

$\underline{\triangle_2^{\mathbb{Z}_2} = 0}$**:** Damit gilt auch $f_{z^3\lambda}^0 \neq 0$, da sonst $\triangle_2^{\mathbb{Z}_2}$ nicht gleich 0 sein könnte. Die Lösung $(z_1, \lambda_2) = (0, \lambda_2)$ ist λ-bestimmt. Die Lösung $\lambda_2 = -\frac{f_{z^5}^0}{10 f_{z^3\lambda}^0} z_1^2$ ist doppelte Nullstelle, also nicht bestimmt. Weiter für diese Lösung bei $j = 6$ mit $l_6 = 3$ und $\lambda_2 = -\frac{f_{z^5}^0}{10 f_{z^3\lambda}^0} z_1^2$. Siehe **[I]**.

$\underline{f_{z^5}^0 = 0}$**:**

$\underline{f_{z^3\lambda}^0 \neq 0}$**:** Die Lösungen $(z_1, \lambda_2) = (0, \lambda_2)$ und $z_1^2 = -\frac{3 f_{z\lambda\lambda}^0}{f_{z^3\lambda}^0} \lambda_2$ sind λ-bestimmt. Die Lösung $\lambda_2 = 0$ ist zwar bestimmt, aber nicht λ-bestimmt. Weiter für diese Lösung bei $j = 6$ mit $l_6 = 3$. Siehe **[J]**.

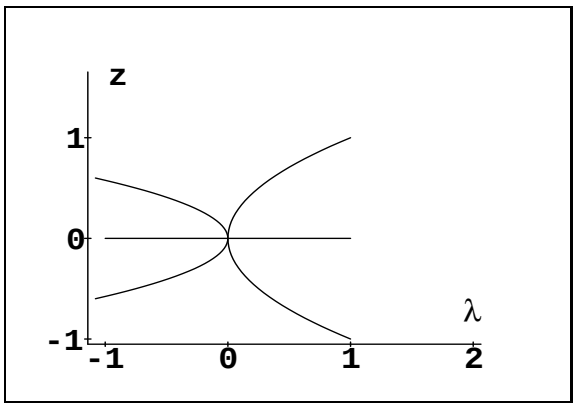

Abbildung 3.2.15: Normalform $z^5 + 2mz^3\lambda + d\lambda^2 z$

$\underline{f^0_{z^3\lambda} = 0}$**:** $\lambda_2 = 0$ ist doppelte Lösung, also nicht bestimmt. Weiter bei $j = 6$ mit $l_6 = 3$. Hier wird die Berechnung gestoppt, da sich wegen mehr als 3 unabhängigen Bedingungen eine Kodimension ≥ 4 ergeben würde.

[F] Es gilt: $f^0_z = f^0_{z\lambda} = f^0_{zzz} = f^0_{z\lambda\lambda} = 0$

$T_4(z_1, \lambda_1) = \frac{1}{6} f^0_{z^3\lambda} z_1^3 \lambda_1 + \frac{1}{6} f^0_{z\lambda^3} z_1 \lambda_1^3 = 0$

$\underline{f^0_{z^3\lambda} \neq 0}$**:**

$\underline{f^0_{z\lambda^3} \neq 0}$**:** Die Lösungen $(z_1, \lambda_1) = (0, \lambda_1)$ und $z_1 = \pm\sqrt{-\frac{f^0_{z\lambda^3}}{f^0_{z^3\lambda}}\lambda_1^2}$ sind λ-bestimmt. Die Lösung $\lambda_1 = 0$ jedoch noch nicht. Weiter für diese Lösung bei $j = 5$ mit $l_5 = 2$. Siehe **[K]**.

$\underline{f^0_{z\lambda^3} = 0}$**:** (z_1, λ_1) unbestimmt. Also Kodimension ≥ 4. Die Berechnung wird gestoppt.

$\underline{f^0_{z^3\lambda} = 0}$**:**

Kodimension ≥ 4. Die Berechnung wird gestoppt.

[G] Es gilt: $f^0_z = f^0_{z\lambda} = f^0_{z\lambda\lambda} = z_1 = \lambda_1 = 0, f^0_{z\lambda} \neq 0$

$T_6(z_2, \lambda_2) = \frac{1}{6} f^0_{zzz} z_2^3 = 0$

Wegen [C] ist $f^0_{zzz} \neq 0$ und somit gibt es nur die dreifache Lösung $z_2 = 0$. Diese ist wegen ihrer Vielfachheit nicht bestimmt und muß somit weiter approximiert werden bei $j = 7$ und $k_7 = 3$. Das ergibt:

$T_7(z_3, \lambda_2) = 0$ Weiter bei $j = 8$.

$T_8(z_3, \lambda_2) = 0$ Weiter bei $j = 9$.

$T_9(z_3, \lambda_2) = \frac{1}{6} f^0_{zzz} z_3^3 + \frac{1}{6} f^0_{z\lambda^3} z_3 \lambda_2^3 = 0$

Wegen [C] gilt $f^0_{zzz} \neq 0$ und wegen [D] ist $f^0_{z\lambda^3} \neq 0$. Damit gibt es die Lösungen $(z_3, \lambda_2) = (0, \lambda_2)$, sowie $z_3 = \pm\sqrt{-\frac{f^0_{z\lambda^3}}{f^0_{zzz}}\lambda_2^3}$. Diese Lösungen sind alle λ-bestimmt. Mit $\delta := \sqrt{|\frac{f^0_{z\lambda^3}}{f^0_{zzz}}|}$ ergibt das die Kurven:

$$
\begin{array}{rcl}
(z(t),\lambda(t)) & = & (0,\pm t^2) + (O(t^4), O(t^3)) \text{ und} \\
(z(t),\lambda(t)) & = & (\delta t^3, \operatorname{sgn}\Big(-\frac{f^0_{z\lambda^3}}{f^0_{zzz}}\Big) t^2) + (O(t^4), O(t^3)) \\
\text{Normalform} & = & z^3 \pm \lambda^3 z \\
\mathbb{Z}_2\text{-Kodimension} & = & 2 \\
\text{Bedingungen} & : & f^0_z = f^0_{z\lambda} = f^0_{z\lambda\lambda} = 0, \\
 & & f^0_{zzz} \neq 0, f^0_{z\lambda^3} \neq 0 \\
\text{Beispiel} & : & \text{siehe Abb. 3.2.16}
\end{array}
\tag{3.2.10}
$$

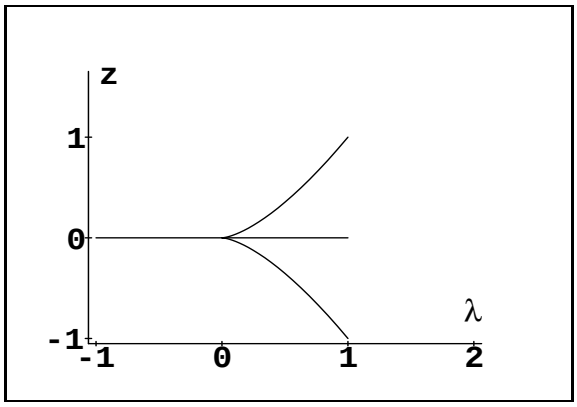

Abbildung 3.2.16: Normalform $z^3 \pm \lambda^3 z$

[H] Es gilt: $f^0_z = f^0_{z\lambda} = f^0_{z\lambda\lambda} = f^0_{z\lambda^3} = z_1 = 0$

$T_6(z_2, \lambda_1) = \frac{1}{6} f^0_{zzz} z_2^3 + \frac{1}{24} f^0_{z\lambda^4} z_2 \lambda_1^4 = 0$

Wegen [C] ist $f^0_{zzz} \neq 0$. Es bleibt zu unterscheiden:

$\underline{f^0_{z\lambda^4} \neq 0}$**:** Es treten die Lösungen $(z_2, \lambda_1) = (0, \lambda_1)$, sowie $z_2 = \pm\sqrt{-\frac{1}{4}\frac{f^0_{z\lambda^4}}{f^0_{zzz}}\lambda_1^4}$ auf. Diese Lösungen sind alle λ-bestimmt. Es ergeben sich mit $\delta := \sqrt{-\frac{1}{4}\frac{f^0_{z\lambda^4}}{f^0_{zzz}}} \in \mathbb{C}$

die (evtl. reellen) Kurven:

$$\begin{array}{rcl} (z(t),\lambda(t)) & = & (0,t)+(O(t^3),O(t^2)) \text{ und} \\ (z(t),\lambda(t)) & = & (\pm\delta t^2,t)+(O(t^3),O(t^2)) \\ \text{Normalform} & = & z^3 \pm \lambda^4 z \\ \mathbb{Z}_2\text{-Kodimension} & = & 3 \\ \text{Bedingungen} & : & f_z^0 = f_{z\lambda}^0 = f_{z\lambda\lambda}^0 = f_{z\lambda^3}^0 = 0, \\ & & f_{zzz}^0 \neq 0, f_{z\lambda^4}^0 \neq 0 \\ \text{Beispiele} & : & \text{siehe Abb. 3.2.17 und 3.2.18} \end{array} \tag{3.2.11}$$

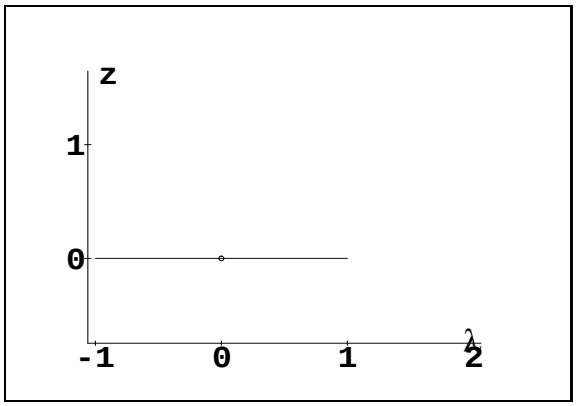

Abbildung 3.2.17: Normalform $z^3 + \lambda^4 z$

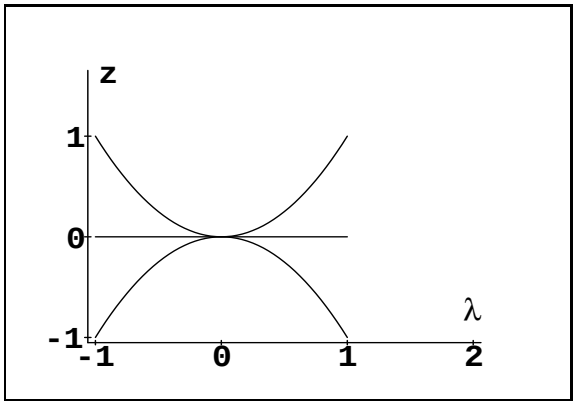

Abbildung 3.2.18: Normalform $z^3 - \lambda^4 z$

$\underline{f^0_{z\lambda^4} = 0}$**:** (z_2, λ_1) unbestimmt.

Es gilt aber allgemein:

Lemma 3.2.2 *Seien für $m \in \mathbb{N},\ m \geq 1$ die Voraussetzungen $f^0_z = f^0_{z\lambda} = \ldots = f^0_{z\lambda^{m-1}} = 0, f^0_{zzz} \neq 0$ erfüllt, so ergeben sich mit Algorithmus 2.3.1 folgende Bestimmungsgleichungen: Sei $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$:*

$\underline{m = 2n}$**:** $T_{3n}(z_n, \lambda_1) = \frac{1}{6} f^0_{zzz} z_n^3 + \frac{1}{m!} f^0_{z\lambda^m} z_n \lambda_1^m = 0$,
wobei $z_1, \ldots, z_{n-1} = 0$ gilt.

$\underline{m = 2n-1}$**:** $T_{3m}(z_m, \lambda_2) = \frac{1}{6} f^0_{zzz} z_m^3 + \frac{1}{m!} f^0_{z\lambda^m} z_m \lambda_2^m = 0$,
wobei $z_1, \ldots, z_{m-1} = \lambda_1 = 0$ gilt.

Beweis: Mit Induktion:

Zuerst für $\underline{m = 2n}$: Für $n = 1, 2$ siehe Punkt [C] und [H].

Sei nun für $n > 2$ vorausgesetzt: $f^0_z = f^0_{z\lambda} = \ldots = f^0_{z\lambda^{m-1}} = 0, f^0_{zzz} \neq 0$. Wegen Induktionsvoraussetzung ist $z_1, \ldots, z_{n-2} = 0$ und

$$T_{3(n-1)}(z_{n-1}, \lambda_1) = \frac{1}{6} f^0_{zzz} z_{n-1}^3 + \frac{1}{(m-2)!} f^0_{z\lambda^{m-2}} z_{n-1} \lambda_1^{m-2} = \frac{1}{6} f^0_{zzz} z_{n-1}^3 = 0$$

Damit ist also auch $z_{n-1} = 0$ und es geht bei $j = 3n-2$ weiter mit $k_{3n-2} = n, l_{3n-2} = 1$. Es stellt sich nun die Frage, welche Terme der Form $z_n^l \lambda_1^s$ bei der Ordnung $3n-2$ auftreten können. Da die Ordnung von $z_n^l \lambda_1^s$ gleich $ln + s$ ist, muß gelten $ln + 2 = 3n - 2$. Wegen (3.2.3) kommt nur $l = 1$ in Frage und damit ist $s = 2n - 2$. Da aber nach Voraussetzung $f^0_{z\lambda^{2n-2}} = 0$ ist, ergibt sich:

$$T_{3n-2}(z_n, \lambda_1) \equiv 0$$

Also weiter bei $j = 3n - 1$. Hier ergibt sich analog wegen $f^0_{z\lambda^{2n-1}} = 0$:

$$T_{3n-1}(z_n, \lambda_1) \equiv 0$$

Analog überlegt man sich, daß bei der Ordnung $3n$ nur $l = 3, s = 0$ und $l = 1, s = 2n = m$ in Frage kommen. Damit ergibt sich:

$$T_{3n}(z_n, \lambda_1) = \frac{1}{6} f^0_{zzz} z_n^3 + \frac{1}{m!} f^0_{z\lambda^m} z_n \lambda_1^m = 0$$

Damit ist das Lemma für $m = 2n$ bewiesen.

Nun für $\underline{m = 2n-1}$: Für $n = 1, 2$ siehe Punkt [B] und [G].

Sei nun für $n > 2$ vorausgesetzt: $f^0_z = f^0_{z\lambda} = \ldots = f^0_{z\lambda^{m-1}} = 0, f^0_{zzz} \neq 0$. Wegen Induktionsvoraussetzung ist $z_1, \ldots, z_{m-3} = \lambda_1 = 0$ und

$$T_{3(m-2)}(z_{m-2},\lambda_2) = \frac{1}{6}f^0_{zzz}z^3_{m-2} + \frac{1}{m-2!}f^0_{z\lambda^{m-2}}z_{m-2}\lambda_2^{m-2} = \frac{1}{6}f^0_{zzz}z^3_{m-2} = 0$$

Damit ist also auch $z_{m-2} = 0$ und es geht bei $j = 3m-5$ weiter mit $k_{3m-5} = m-1, l_{3m-5} = 2$. Analog zu oben gilt:

$$\begin{aligned} T_{3m-5}(z_{m-1},\lambda_2) &\equiv 0 && (3.2.12)\\ T_{3m-4}(z_{m-1},\lambda_2) &\equiv 0 && (3.2.13)\\ T_{3m-3}(z_{m-1},\lambda_2) &= \frac{1}{6}f^0_{zzz}z^3_{m-1} && (3.2.14) \end{aligned}$$

Damit ist also auch $z_{m-1} = 0$ und es geht bei $j = 3m-2$ weiter mit $k_{3m-2} = m, l_{3m-2} = 2$. Damit gilt dann :

$$\begin{aligned} T_{3m-2}(z_m,\lambda_2) &\equiv 0 && (3.2.15)\\ T_{3m-1}(z_m,\lambda_2) &\equiv 0 && (3.2.16)\\ T_{3m}(z_m,\lambda_2) &= \frac{1}{6}f^0_{zzz}z^3_m + \frac{1}{m!}f^0_{z\lambda^m}z_m\lambda_2^m && (3.2.17) \end{aligned}$$

Damit ist das Lemma auch für $m = 2n-1$ bewiesen. ■

Ist nun für ein $m \in \mathbb{N},\ m \geq 1$ der Term $f^0_{z\lambda^m} \neq 0$, so ergeben sich folgende abzweigende Kurven:

<u>m=2n</u>

$(z(t),\lambda(t))$	=	$(0,t) + (O(t^{n+1}), O(t^2))$ und	
$(z(t),\lambda(t))$	=	$(\pm\delta t^n, t) + (O(t^{n+1}), O(t^2))$	
Normalform	=	$z^3 \pm \lambda^m z$	
$\mathbb{Z}_2$-Kodimension	=	$m-1$	(3.2.18)
Bedingungen	:	$f^0_z = f^0_{z\lambda} = \ldots = f^0_{z\lambda^{m-1}} = 0,$	
		$f^0_{zzz} \neq 0, f^0_{z\lambda^m} \neq 0$	
Beispiele	:	siehe Abb. 3.2.17 und 3.2.18	

m=2n-1

$$\begin{array}{rcl}
(z(t),\lambda(t)) & = & (0,\pm t^2)+(O(t^{m+1}),O(t^3)) \text{ und} \\
(z(t),\lambda(t)) & = & (\delta t^m, \operatorname{sgn}\left(-\frac{f^0_{z\lambda^m}}{f^0_{zzz}}\right)t^2)+(O(t^{m+1}),O(t^3)) \\
\text{Normalform} & = & z^3 \pm \lambda^m z \\
\mathbb{Z}_2\text{-Kodimension} & = & m-1 \\
\text{Bedingungen} & : & f^0_z = f^0_{z\lambda} = \ldots = f^0_{z\lambda^{m-1}} = 0, \\
 & & f^0_{zzz} \neq 0, f^0_{z\lambda^m} \neq 0 \\
\text{Beispiel} & : & \text{siehe Abb. 3.2.16}
\end{array} \tag{3.2.19}$$

[I] Es gilt: $f^0_z = f^0_{z\lambda} = f^0_{zzz} = \triangle_2^{\mathbb{Z}_2} = \lambda_1 = 0, f^0_{z\lambda\lambda} \neq 0, \lambda_2 = -\frac{f^0_{z^5}}{10 f^0_{z^3\lambda}} z_1^2$

$T_6(z_1,\lambda_3) = \frac{z_1^3\lambda_3\triangle_2^{\mathbb{Z}_2}}{30 f^0_{z^3\lambda}} \equiv 0$ wegen $\triangle_2^{\mathbb{Z}_2} = 0$ aus [E]. Weiter bei $j=7$. Das ergibt:

$T_7(z_1,\lambda_3) = \frac{\triangle_3^{\mathbb{Z}_2}}{f^0_{z^3\lambda}} z_1^7 + \frac{1}{2} f^0_{z\lambda\lambda} z_1 \lambda_3^2 = 0$ mit

$$\boxed{\triangle_3^{\mathbb{Z}_2} := -\frac{f^0_{z^5\lambda} f^0_{z^5}}{1200 f^0_{z^3\lambda}} + \frac{f^0_{z^7}}{5400} - \frac{f^0_{z\lambda^3}(f^0_{z^5})^3}{6000(f^0_{z^3\lambda})^3} + \frac{f^0_{z^3\lambda^2}(f^0_{z^5})^2}{1200(f^0_{z^3\lambda})^2}}$$

Wegen [C] ist $f^0_{z\lambda\lambda} \neq 0$ und es muß unterschieden werden:

$\underline{\triangle_3^{\mathbb{Z}_2} \neq 0}$**:** Es treten die Lösungen $(z_1,\lambda_3) = (0,\lambda_3)$, sowie $z_1 = \pm\sqrt[6]{-\frac{f^0_{z\lambda\lambda}}{2\triangle_3^{\mathbb{Z}_2}}\lambda_3^2}$ auf.

Ist $-\frac{f^0_{z\lambda\lambda}}{2\triangle_3^{\mathbb{Z}_2}} > 0$, so sind die Lösungen mit $\delta_1 := \sqrt[6]{-\frac{f^0_{z\lambda\lambda}}{2\triangle_3^{\mathbb{Z}_2}}}$ und der Bedingung

$\delta_2 = -\frac{f^0_{z^5}}{10 f^0_{z^3\lambda}} z_1^2$ aus [E] reell, andernfalls entsteht nur die reelle, triviale Lösung:

$$\begin{array}{rcl}
(z(t),\lambda(t)) & = & (0,t^3)+(O(t^2),O(t^4)) \text{ und} \\
(z(t),\lambda(t)) & = & (\pm\delta_1 t, \delta_2 t^2 \pm t^3)+(O(t^2),O(t^4)) \\
\text{Normalform} & = & \pm z^7 + z^5 + 2d\lambda z^3 \pm \lambda^2 z,\ d=\pm 1 \\
\mathbb{Z}_2\text{-Kodimension} & = & 3 \\
\text{Bedingungen} & : & f^0_z = f^0_{z\lambda} = f^0_{zzz} = \triangle_2^{\mathbb{Z}_2} = 0, \\
 & & \triangle_3^{\mathbb{Z}_2} \neq 0, f^0_{z\lambda\lambda} \neq 0, f^0_{z^5} \neq 0 \\
\text{Beispiele} & : & \text{siehe Abb. 3.2.19 für } -\frac{f^0_{z\lambda\lambda}}{2\triangle_3^{\mathbb{Z}_2}} > 0 \\
 & & \text{siehe Abb. 3.2.20 für } -\frac{f^0_{z\lambda\lambda}}{2\triangle_3^{\mathbb{Z}_2}} < 0
\end{array} \tag{3.2.20}$$

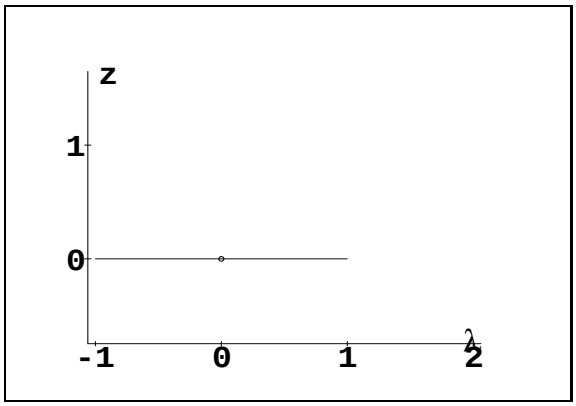

Abbildung 3.2.19: Normalform $-z^7 + z^5 - 2d\lambda z^3 \pm \lambda^2 z$

$\underline{\triangle_3^{\mathbb{Z}_2} = 0}$**:** (z_1, λ_3) unbestimmt. Also Kodimension ≥ 4 und die Berechnung wird gestoppt.

[J] Es gilt: $f^0_z = f^0_{z\lambda} = f^0_{zzz} = f^0_{z^5} = \lambda_1 = \lambda_2 = 0, f^0_{z\lambda\lambda} \neq 0, f^0_{z^3\lambda} \neq 0$

$T_6(z_1,\lambda_3) = \frac{1}{6} f^0_{z^3\lambda} z_1^3 \lambda_3 = 0$

Wegen [E] ist $f^0_{z^3\lambda} \neq 0$ und somit ist $z_1 = 0$ dreifache Lösung. Diese wurde jedoch schon in [E] erkannt. Weiterhin ist $\lambda_3 = 0$ zwar bestimmte, aber nicht λ-bestimmte Lösung. Weiter für diese Lösung bei $j = 7$ mit $l_7 = 4$. Dies ergibt:

$T_7(z_1,\lambda_4) = \frac{1}{6} f^0_{z^3\lambda} z_1^3 \lambda_4 + \frac{1}{5040} f^0_{z^7} z_1^7 = 0$

Es bleibt zu unterscheiden:

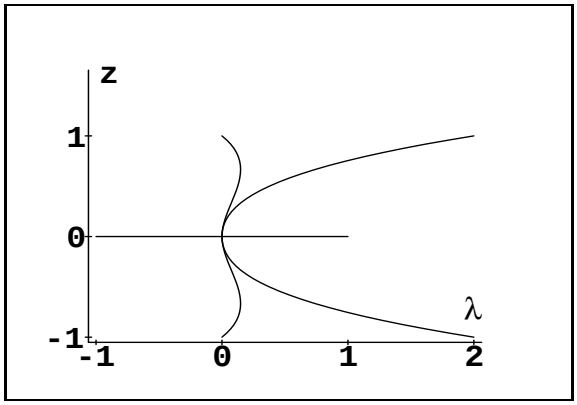

Abbildung 3.2.20: Normalform $z^7 + z^5 - 2d\lambda z^3 \pm \lambda^2 z$

$\underline{f^0_{z^7} \neq 0}$**:** $z_1 = 0$ ist dreifache Lösung, die aber schon in [E] erkannt wurde. Die andere Lösung ist $z_1 = \sqrt[4]{-\frac{840 f^0_{z^3\lambda}}{f^0_{z^7}}\lambda_4}$. Diese ist auch λ-bestimmt. Damit sind die reellen Kurven mit $\delta := \sqrt[4]{|\frac{840 f^0_{z^3\lambda}}{f^0_{z^7}}|}$:

$$
\begin{array}{rcl}
(z(t),\lambda(t)) & = & (0,\pm t^2) + (O(t^2), O(t^3)) \text{ aus [E]} \\
(z(t),\lambda(t)) & = & (\frac{3 f_{z\lambda\lambda}}{f^0_{z^3\lambda}} t, \pm t^2) + (O(t^2), O(t^3)) \text{ aus [E]} \\
(z(t),\lambda(t)) & = & (\delta t, \operatorname{sgn}\left(-\frac{f^0_{z^3\lambda}}{f^0_{z^7}}\right) t^4) + (O(t^2), O(t^5)) \\
\text{Normalform} & = & z^7 + \lambda z^3 \pm \lambda^2 z \\
\mathbb{Z}_2\text{-Kodimension} & = & 3 \\
\text{Bedingungen} & : & f^0_z = f^0_{z\lambda} = f^0_{zzz} = f^0_{z^5} = 0, \\
 & & f^0_{z\lambda\lambda} \neq 0, f^0_{z^3\lambda} \neq 0, f^0_{z^7} \neq 0 \\
\text{Beispiel} & : & \text{siehe Abb. 3.2.21}
\end{array}
\tag{3.2.21}
$$

$\underline{f^0_{z^7} = 0}$**:** (z_1, λ_4) unbestimmt. Also Kodimension ≥ 4 und die Berechnung wird gestoppt.

[K] $T_5(z_1,\lambda_2) = \frac{1}{6} f^0_{z^3\lambda} z_1^3 \lambda_2 + \frac{1}{120} f^0_{z^5} z_1^5 = 0$

Wegen [E] ist schon $f^0_{z^3\lambda} \neq 0$. Es bleibt zu unterscheiden:

$\underline{f^0_{z^5} \neq 0}$**:** $z_1 = 0$ ist dreifache Lösung, die aber schon in [F] erkannt wurde. Die

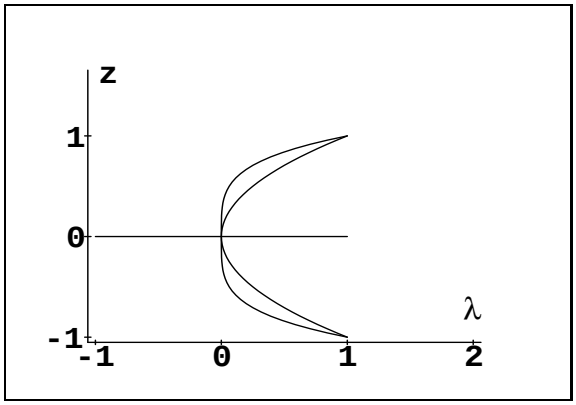

Abbildung 3.2.21: Normalform $z^7 + \lambda z^3 \pm \lambda^2 z$

andere Lösung ist $z_1 = \sqrt{-\frac{20 f^0_{z^3\lambda}}{f^0_{z^5}}\lambda_2}$. Diese sind auch λ-bestimmt. Damit sind die reellen Kurven mit $\delta_1 := \sqrt{|\frac{20 f^0_{z^3\lambda}}{f^0_{z^5}}|}$ und $\delta_2 := \sqrt{-\frac{f^0_{z\lambda^3}}{f^0_{z^3\lambda}}} \in \mathbb{C}$

$$
\begin{array}{rcl}
(z(t),\lambda(t)) & = & (0,t) + O(t^2) \text{ aus [F] sowie} \\
(z(t),\lambda(t)) & = & (\pm\delta_2 t, t) + O(t^2) \text{ aus [F] und} \\
(z(t),\lambda(t)) & = & (\delta_1 t, \operatorname{sgn}\left(-\frac{f^0_{z^3\lambda}}{f^0_{z^5}}\right)t^2) + (O(t^2), O(t^3)) \\
\text{Normalform} & = & z^5 + \lambda z^3 \pm \lambda^3 z \\
\mathbb{Z}_2\text{-Kodimension} & = & 3 \\
\text{Bedingungen} & : & f^0_z = f^0_{z\lambda} = f^0_{zzz} = f^0_{z\lambda\lambda} = 0, \\
 & & f^0_{z^3\lambda} \neq 0, f^0_{z\lambda^3} \neq 0, f^0_{z^5} \neq 0 \\
\text{Beispiele} & : & \text{siehe Abb. 3.2.22 und 3.2.23}
\end{array}
\tag{3.2.22}
$$

$\underline{f^0_{z^5} = 0}$**:** (z_1, λ_2) unbestimmt. Also Kodimension ≥ 4 und die Berechnung wird gestoppt.

Damit sind alle einfachen $\mathbb{Z}_2$-symmetrischen Singularitäten bis Kodimension 3 und einige andere bestimmt. Stellt man diese Ergebnisse in einem Schema zusammen, so ergibt sich, analog zu Tabelle 3.1.1, die Tabelle 3.2.2. Eine ähnliche Tabelle findet sich in [SJ91], bzw. in [GS86], Kapitel IV.

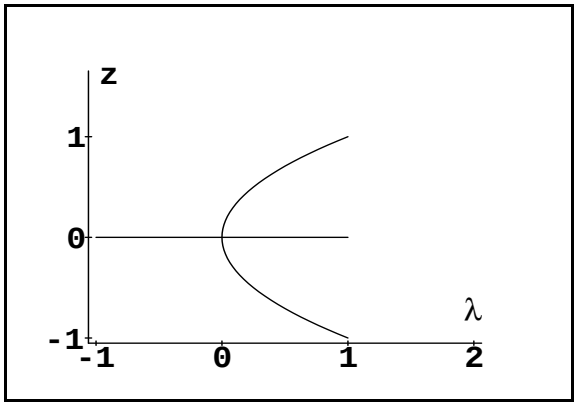

Abbildung 3.2.22: Normalform $z^5 + \lambda z^3 + \lambda^3 z$

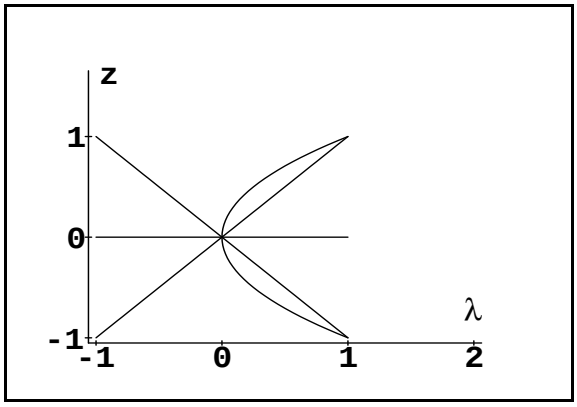

Abbildung 3.2.23: Normalform $z^5 + \lambda z^3 - \lambda^3 z$

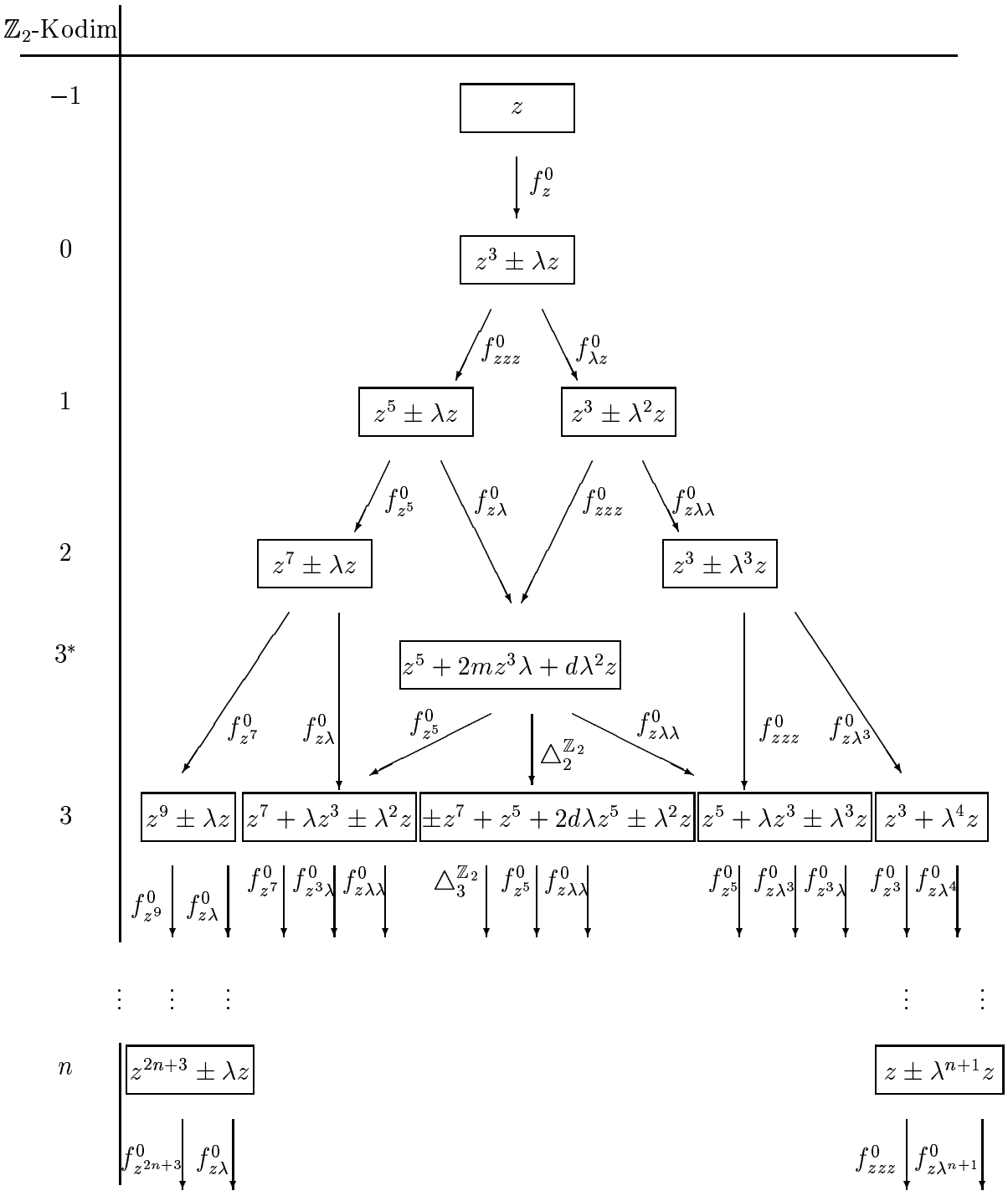

Tabelle 3.2.2: Singularitätenordnung mit $\mathbb{Z}_2$-Symmetrie, λ-orientiert

Kapitel 4

Adaptive Skalierung in n+1 Dimensionen

In diesem Kapitel soll besprochen werden, wie die Ergebnisse und Algorithmen aus Kapitel 2 auf Verzweigungsprobleme in höheren Dimensionen übertragen werden können. Dabei wird sich herausstellen, daß diese Verallgemeinerung im wesentlichen den Formalismus aus Kapitel 2 beibehalten wird. Da jedoch diese Darstellung etwas komplizierter und der Fall $n = 1$ von besonderem Interesse ist, wurde diese Methodik zuerst in 2 Dimensionen eingeführt, denn es ist wohlbekannt, daß im Fall allgemeiner Verzweigungen generisch dieser Fall auftritt. Höhere Kerndimensionen treten generisch nur im Fall von Symmetrien oder bei Mehrparameter-Modellen ($p > 1$) auf. Speziell im Falle von Symmetrien ist es oft von entscheidender Bedeutung, diese bei den Berechnungen zu berücksichtigen, z.B. zur Reduzierung auf Fundamentaldomänen, bei der Diskussion der Verzweigungsgleichungen oder ähnlichen Aufgaben, siehe etwa [ABGM92], [ABM90a], [ABM91b], [Ast91], [GS86], [GSS88], [Hea88a], [Hea88b], [Hon91], [MI91]. Da es hier jedoch primär um die Verallgemeinerung der im Kapitel 2 vorgestellten Algorithmen geht, die unabhängig von diesen Eigenschaften formuliert werden können, wird hier kein Gebrauch davon gemacht. Bei praktischen Beispielen können dann die wohlbekannten Methoden zusätzlich genutzt werden.

4.1 Blowing-Up und Skalierung von Keimen in $n+1$ Dimensionen

Wie in der Einleitung schon angesprochen, ist das Ziel dieser Arbeit, eine Methode bereitzustellen, mit der es möglich ist, Verzweigungsprobleme der Art (0.0.1) oder auch (0.0.2) zu berechnen, d.h., alle Lösungen in einer bestimmten Umgebung eines Lösungspunktes zu bestimmen. Für den Fall $n = 1,\ p = 1$ wurde dies bereits in Kapitel 2 und 3 durchgeführt. Es soll nun gezeigt werden, wie dies mit den beschriebenen Mitteln auch im Fall $n > 1$ möglich ist.

Zugrunde liegt die (reduzierte Verzweigungs-) Gleichung:

$$f(z,\lambda) = 0,\ f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \text{ mit } f(0,\ldots,0) = 0 \tag{4.1.1}$$

Analog zu Ansatz 2.2.1, Seite 28, wird nun der folgende Lösungsansatz aufgestellt, bei dem φ mit φ^1 und mit ψ mit φ^2 identifiziert wird[1]:

Ansatz 4.1.1 *Sei* $\Phi := (\varphi^1,\ldots,\varphi^{n+1}) \in (\mathbb{C}\langle t\rangle)^{n+1}$ *eine Lösungskurve mit*

$$\Phi \not\equiv 0,\ \Phi(0) = 0 \tag{4.1.2}$$

und

$$f(\Phi(t)) = f(\varphi^1(t),\ldots,\varphi^{n+1}(t)) = 0 \quad \forall t \in U(0) \subset \mathbb{R} \tag{4.1.3}$$

Es gilt, alle möglichen $(\varphi^1,\ldots,\varphi^{n+1})$ zu finden. Dazu werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

Definition 4.1.2 *Sei* $\varphi^i \in \mathbb{C}\langle t\rangle$ *für* $i = 1,\ldots,n+1$ *mit:*

$$\varphi^i(t) =: \sum_{j=1}^{m_i} \varphi^i_j t^j, \quad \varphi^i_j \in \mathbb{C},\ m_i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \text{ und} \tag{4.1.4}$$

$$f(\varphi^1(t),\ldots,\varphi^{n+1}(t)) =: \sum_{j=1}^{m} T_j\left(\varphi^1_{1,\ldots,k_{1,j}},\ldots,\varphi^{n+1}_{1,\ldots,k_{n+1,j}}\right) t^j + O(t^{m+1}) \tag{4.1.5}$$

$$k_{1,j},\ldots,k_{n+1,j},m \in \mathbb{N} \tag{4.1.6}$$

[1] Die oberen Indizes entsprechen dabei der Nummer der Komponente von Φ.

Die Werte $m_1, \ldots, m_{n+1}$ seien auch hier hinreichend groß gewählt. Der Term T_j bezeichnet den Anteil von f, der bzgl. t die Ordnung j hat und kann als Funktion von den $\varphi^1_{1,\ldots,k_{1,j}}, \ldots, \varphi^{n+1}_{1,\ldots,k_{n+1,j}}$ aufgefaßt werden. Für die Werte $k_{1,j}, \ldots, k_{n+1,j}$ gilt analog zu Lemma 2.2.3 das folgende

Lemma 4.1.3 *Es gilt:*

$$k_{1,j}, \ldots, k_{n+1,j} \leq j \quad \forall j \in \mathbb{N} \tag{4.1.7}$$

Beweis: Analog zu Lemma 2.2.3. ■

Analog zu Kapitel 2 wird nun eine Strategie eingeführt, die es erlaubt, die Unbekannten φ^μ_ν zu berechnen, bis die Kurven, die durch den vorliegenden Lösungspunkt gehen, eindeutig bestimmt sind. Dazu werden wieder nacheinander die Gleichungen

$$T_j\left(\varphi^1_{1,\ldots,k_{1,j}}, \ldots, \varphi^{n+1}_{1,\ldots,k_{n+1,j}}\right) = 0 \tag{4.1.8}$$

gelöst.

Es gilt:

$$f(0,0) = 0 \tag{4.1.9}$$

$$f(\Phi(t)) = f(\varphi^1(t), \ldots, \varphi^{n+1}(t)) = 0 \quad \forall t \in U(0) \subset \mathbb{R} \tag{4.1.10}$$

Betrachte nun für $t \neq 0$ und $\Phi(t) = (\varphi^1(t), \ldots, \varphi^{n+1}(t))$ die Abbildung:

$$\tilde{f}_1 : \mathbb{R}^{n+2} \mapsto \mathbb{R}^{n+1} : \tilde{f}_1(\varphi^1_1, \ldots, \varphi^{n+1}_1, t) := \begin{pmatrix} \frac{1}{t} f(\Phi(t)) \\ \\ N(\varphi^1_1, \ldots, \varphi^{n+1}_1) \end{pmatrix}, \tag{4.1.11}$$

wobei $N(\varphi^1_1, \ldots, \varphi^{n+1}_1)$ eine Normierung für die $\varphi^1_1, \ldots, \varphi^{n+1}_1$ sein soll, z.B. der Form:

$$N(\varphi^1_1, \ldots, \varphi^{n+1}_1) = \left(\sum_{\mu=0}^{n+1} \left(\varphi^\mu_1\right)^2\right) - c, \; c \in \mathbb{R}^+ \tag{4.1.12}$$

Für diese Abbildung gilt:

Satz 4.1.4

$$\lim_{t\to 0} \tilde{f}_1(\varphi_1^1,\ldots,\varphi_1^{n+1},t) \tag{4.1.13}$$

$$= \begin{pmatrix} T_1(\varphi_1^1,\ldots,\varphi_1^{n+1}) \\ N(\varphi_1^1,\ldots,\varphi_1^{n+1}) \end{pmatrix} \tag{4.1.14}$$

$$= \begin{pmatrix} D_1 f(\Phi(0))\varphi_1^1 + \ldots + D_{n+1} f(\Phi(0))\varphi_1^{n+1} \\ N(\varphi_1^1,\ldots,\varphi_1^{n+1}) \end{pmatrix} \tag{4.1.15}$$

$$= \begin{pmatrix} Df^0 \begin{pmatrix} \varphi_1^1 \\ \vdots \\ \varphi_1^{n+1} \end{pmatrix} \\ N(\varphi_1^1,\ldots,\varphi_1^{n+1}) \end{pmatrix} \tag{4.1.16}$$

$$=: B_1(\varphi_1^1,\ldots,\varphi_1^{n+1}) \tag{4.1.17}$$

Desweiteren gilt somit $\tilde{f}_1 \in C^1(U(0))$ bzgl. t.

Beweis: Da $f(0) = 0$ vorausgesetzt wurde, hat f kein absolutes Glied in t. Der niedrigste Term in t ist somit T_1. Da alle höheren Terme beim Grenzübergang $t \to 0$ gegen 0 gehen, bleibt nur $\frac{1}{t} t T_1(\varphi_1^1,\ldots,\varphi_1^{n+1}) = T_1(\varphi_1^1,\ldots,\varphi_1^{n+1})$ übrig.

Die zweite Aussage $\tilde{f}_1 \in C^1(U(0))$ bzgl. t ergibt sich per definitionem von $\tilde{f}_1$. ■

Der Zusammenhang zwischen f und $\tilde{f}_1$ ist nun im folgenden Lemma dargestellt:

Lemma 4.1.5 *Falls für $\tilde{f}_1(\pm\tilde{\varphi}_1^1,\ldots,\pm\tilde{\varphi}_1^{n+1},0) = 0$ die Regularitätsbedingung*

$$D_{(\varphi_1^1,\ldots,\varphi_1^{n+1})} \tilde{f}_1(\pm\tilde{\varphi}_1^1,\ldots,\pm\tilde{\varphi}_1^{n+1},0) \text{ regulär} \tag{4.1.18}$$

erfüllt ist, so ist $(0,\ldots,0)$ eine reguläre Lösung von $f = 0$ und die eindeutig bestimmte Tangente der Lösungskurve durch $(0,\ldots,0)$ lautet $(\tilde{\varphi}_1^1,\ldots,\tilde{\varphi}_1^{n+1})$, d.h.

$$f(\tilde{\varphi}_1^1 t,\ldots,\tilde{\varphi}_1^{n+1} t) = 0 + O(t^2).$$

Beweis: Sei $\tilde{f}_1(\pm\tilde{\varphi}_1^1,\ldots,\pm\tilde{\varphi}_1^2,0) = 0$ und (4.1.18) erfüllt und o.B.d.A $\tilde{\varphi}_1^{n+1} \neq 0$. Damit setze man die Normierung auf

$$\tilde{N}(\varphi_1^1, \ldots, \varphi_1^{n+1}) = (\varphi_1^{n+1})^2 - (\tilde{\varphi}_1^{n+1})^2 \tag{4.1.19}$$

Mit dieser Normierung gilt dann per definitionem:

$$\tilde{f}_1(\pm\tilde{\varphi}_1^1, \ldots, \pm\tilde{\varphi}_1^{n+1}, 0) = B_1(\pm(\tilde{\varphi}_1^1, \ldots, \tilde{\varphi}_1^{n+1})) = 0$$

und mit $L := (D_1, \ldots, D_n)f(\Phi(0))$

$$\begin{aligned} DB_1(\pm(\tilde{\varphi}_1^1, \ldots, \tilde{\varphi}_1^{n+1})) &= (\frac{\partial}{\partial\varphi_1^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial\varphi_1^{n+1}})B_1(\pm(\tilde{\varphi}_1^1, \ldots, \tilde{\varphi}_1^{n+1})) \\ &= \begin{pmatrix} (D_1, \ldots, D_n)f(\Phi(0)) & D_{n+1}f(\Phi(0)) \\ 0 & 2\tilde{\varphi}_1^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} L & D_{n+1}f(\Phi(0)) \\ 0 & 2\tilde{\varphi}_1^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da diese Matrix nach Voraussetzung (4.1.18) regulär ist, muß L regulär sein. Damit sind die Voraussetzungen für den Satz über implizite Funktionen erfüllt und $(0, \ldots, 0)$ ist eine reguläre Lösung von $f = 0$. Insbesondere existiert eine eindeutige Lösungskurve durch $(0, \ldots, 0)$, deren Tangente per Konstruktion (siehe (4.1.16)) gerade $(\tilde{\varphi}_1^1, \ldots, \tilde{\varphi}_1^{n+1})$ ist. Damit gilt dann $f(\tilde{\varphi}_1^1 t, \ldots, \tilde{\varphi}_1^{n+1} t)) = 0 + O(t^2)$ für $t \in U(0)$. ■

Da uns der reguläre Fall nur sekundär interessiert, gilt es nun diesen Blowing-Up-Ansatz auf höhere Ordnungen zu übertragen, um auch Singularitäten analysieren zu können. Dazu sei analog zu Definition 2.2.8, Seite 32, definiert:

Definition 4.1.6 *Es seien die* φ_l^i, $i = 1, \ldots, n+1$, $l = 1, \ldots, k_{i,j} - 1$ *als bekannt vorausgesetzt. In Verallgemeinerung von* $\tilde{f}_1$ *wird definiert:*

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= (\sum_{l=1}^{k_{1,j}} \varphi_l^1 t^l, \ldots, \sum_{l=1}^{k_{n+1,j}} \varphi_l^{n+1} t^l) \\ \tilde{f}_j : \mathbb{R}^{n+2} &\mapsto \mathbb{R}^{n+1} : \\ \tilde{f}_j(\varphi^1_{k_{1,j}}, \ldots, \varphi^{n+1}_{k_{n+1,j}}, t) &:= \begin{pmatrix} \frac{1}{t^j} f(\Phi(t)) \\ N(\varphi^1_{k_{1,j}}, \ldots, \varphi^{n+1}_{k_{n+1,j}}) \end{pmatrix}, \quad t \neq 0 \\ \text{wobei } k_{1,1}, \ldots, k_{n+1,1} &:= 1 \text{ gelte.} \end{aligned} \tag{4.1.20}$$

Es soll nun dargestellt werden, wie man mit Hilfe von $\tilde{f}_j$ die Taylorentwicklung aller möglichen $(\varphi^1(t), \ldots, \varphi^{n+1}(t))$, also aller abzweigenden Kurven, in regulären wie in singulären Punkten für $n \geq 1$ berechnen kann. Da, wie oben schon angesprochen, für Lösungen $(\varphi^1(t), \ldots, \varphi^{n+1}(t))$ alle $T_j = 0$ sein müssen, werden diese wieder der Reihe nach eliminiert:

Zu Anfang sei $j = 1$: Dann gilt (4.1.14)-(4.1.17).

Damit keine Einschränkungen bzgl. einer Variablen getroffen werden, kann hier die Normierung (4.1.12) genommen werden. Es gibt nun zwei Möglichkeiten:

A.) $(0, 0)$ ist ein regulärer Punkt der Lösungskurve von f. Damit gilt:

$$\text{Rang } Df(0) = n \tag{4.1.21}$$

Somit kann $B_1 = 0$ aus (4.1.17) eindeutig gelöst werden und man erhält für die Lösung $(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,1}}, \ldots, \tilde{\varphi}^{n+1}_{k_{n+1,1}})$ mit der passenden Normierung wie in (4.1.19) eine reguläre Matrix

$$D_{(\varphi^1_{k_{1,1}}, \ldots, \varphi^{n+1}_{k_{n+1,1}})} B_1(\pm(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,1}}, \ldots, \tilde{\varphi}^{n+1}_{k_{n+1,1}})) \tag{4.1.22}$$

Man hat also, analog zum Satz über implizite Funktionen, auf eine eindeutige Lösungskurve geschlossen und auch gleichzeitig eine Approximation dieser Kurve von erster Ordnung bzgl. t bekommen. Sie lautet, ausgehend vom Verzweigungspunkt $(0, \ldots, 0)$,

$$(\varphi^1(t), \ldots, \varphi^{n+1}(t)) = \pm t(\varphi^1_{k_{1,1}}, \ldots, \varphi^{n+1}_{k_{n+1,1}}) + O(t^2) \tag{4.1.23}$$

$$= \pm t(\varphi^1_1, \ldots, \varphi^{n+1}_1) + O(t^2) \tag{4.1.24}$$

Hat man jedoch einen singulären Punkt vorliegen, so ergibt sich der zweite Fall B.

B.) $(0,\ldots,0)$ ist ein singulärer Punkt der Lösungskurve von f. Das bedeutet:

$$\text{Rang } Df(0) < n \tag{4.1.25}$$

Somit ergeben sich als Lösung von B_1 keine isolierten Punkte und es ergibt sich infolgedessen auch keine reguläre Ableitungsmatrix wie in (4.1.22). Analog zum Satz über implizite Funktionen würde hier auch die parametrisierte Variante versagen. Jedoch sind an dieser Stelle noch nicht alle Bedingungen verbraucht. In der Tat gibt es wieder weitere Bedingungen für die Unbekannten φ_ν^μ, nämlich die $T_j = 0$. Folgerichtig werden die Bedingungen für die $\varphi_1^1,\ldots,\varphi_1^{n+1}$ zur Elimination von T_1 übernommen und die entsprechenden Werte von $k_{\mu,\nu}$ der fixierten φ_1^μ um 1 erhöht. Sodann wird j um 1 erhöht und man betrachtet nun:

$$\tilde{f}_2 = 0 \tag{4.1.26}$$

Wegen $T_1 = 0$ ergibt sich nun beim Grenzübergang zu $t = 0$ das Gleichungssystem:

$$\lim_{t\to 0}\tilde{f}_2(\varphi_2^1,\ldots,\varphi_2^{n+1},t) = \begin{pmatrix} T_2(\varphi_{k_{1,2}}^1,\ldots,\varphi_{k_{n+1,2}}^{n+1}) \\ N(\varphi_{k_{1,2}}^1,\ldots,\varphi_{k_{n+1,2}}^{n+1}) \end{pmatrix} \tag{4.1.27}$$

$$=: B_2(\varphi_{k_{1,2}}^1,\ldots,\varphi_{k_{n+1,2}}^{n+1}) = 0 \tag{4.1.28}$$

Gleichung (4.1.28) ist nun eine **nichtlineare** Gleichung für die Unbekannten $(\varphi_{k_{1,2}}^1,\ldots,\varphi_{k_{n+1,2}}^{n+1})$. Auch hier untersucht man wieder die Ableitungsmatrix von B_2 an dessen Lösungen, um auf Bestimmtheit zu schließen. Liegt keine Bestimmtheit vor, müssen die Werte wieder übernommen und zu $j = 3$ übergegangen werden usw.

Mit der in A.) und B.) aufgezeigten Vorgehensweise kann nun ein Algorithmus aufgestellt werden, der die Abarbeitung der einzelnen Fälle vorgibt. Dazu sei zunächst allgemein definiert:

Definition 4.1.7

Seien für geeignete $k_{1,j},\ldots,k_{n+1,j} \in \mathbb{N}$ die Werte $\varphi_{1,\ldots k_{1,j-1}}^1,\ldots,\varphi_{1,\ldots k_{n+1,j-1}}^{n+1} \in \mathbb{C}$ so gewählt, daß $T_1 = \ldots = T_{j-1} = 0$ gilt. Dann existiert der Limes $\lim_{t\to 0}\tilde{f}_j$ (siehe Satz 4.1.10) und es wird definiert:

$$\lim_{t\to 0} \tilde{f}_j(\varphi^1_{k_{1,j}}, \ldots, \varphi^{n+1}_{k_{n+1,j}}, t) \tag{4.1.29}$$

$$= \begin{pmatrix} T_j(\varphi^1_{k_{1,j}}, \ldots, \varphi^{n+1}_{k_{n+1,j}}) \\ N(\varphi^1_{k_{1,j}}, \ldots, \varphi^{n+1}_{k_{n+1,j}}) \end{pmatrix} \tag{4.1.30}$$

$$=: \; B_j(\varphi^1_{k_{1,j}}, \ldots, \varphi^{n+1}_{k_{n+1,j}}) = 0 \tag{4.1.31}$$

Die Werte $k_{i,j}$ geben dabei an, wie weit die i-te Komponente der Lösung $(\varphi^1(t), \ldots, \varphi^{n+1}(t))$ bei der Betrachtung der Ordnung j bzgl. t entwickelt werden soll.

Mit Definition 4.1.7 ergibt sich folgender Algorithmus:

Algorithmus 4.1.8 Adaptive Skalierung von Keimen in $n+1$ Dimensionen

1. **Schritt:** *Setze* $j := 1$ *und* $k_{1,1} = \ldots = k_{n+1,1} = 1$.

2. **Schritt:** *Die Werte von* $\tilde{\varphi}^1_{1,\ldots k_{1,j-1}}, \ldots, \tilde{\varphi}^{n+1}_{1,\ldots k_{n+1,j-1}} \in \mathbb{C}$ *seien durch den Algorithmus schon so gewählt, daß bereits* $T_1 = \ldots = T_{j-1} = 0$ *gilt und* $J_1, \ldots, J_{j-1}$ *singulär sind.*

   Bestimme alle $(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}}, \ldots, \tilde{\varphi}^{n+1}_{k_{n+1,j}}) \in \mathbb{C}^{n+1}$ *für die gilt:*

$$B_j(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}}, \ldots, \tilde{\varphi}^{n+1}_{k_{n+1,j}}) = 0 \tag{4.1.32}$$

3. **Schritt:** *Führe folgende Schritte für alle Lösungen* $(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}}, \ldots, \tilde{\varphi}^{n+1}_{k_{n+1,j}})$ *aus:*

   Sei o.B.d.A. $\varphi^l_{k_{l,j}} \neq 0$. *Betrachte die* $n \times n$*-Matrix:*

$$\begin{aligned} & J_j(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}}, \ldots, \tilde{\varphi}^{n+1}_{k_{n+1,j}}) \\ & := \; D_{(\varphi^1_{k_{1,j}}, \ldots, \varphi^{l-1}_{k_{l-1,j}}, \varphi^{l+1}_{k_{l+1,j}}, \ldots, \varphi^{n+1}_{k_{n+1,j}})} T_j(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}}, \ldots, \tilde{\varphi}^{n+1}_{k_{n+1,j}}) \end{aligned} \tag{4.1.33}$$

   Falls: $J_j(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}}, \ldots, \tilde{\varphi}^{n+1}_{k_{n+1,j}})$ *ist* **regulär***:*

   Diese Lösung bestimmt eindeutig eine abzweigende Kurve (siehe Satz 4.1.10). Ihre Approximation lautet für geeignetes a*:*

$$\left(\sum_{\mu=1}^{k_{1,j}} \tilde{\varphi}^1_\mu t^\mu, \ldots, \sum_{\mu=1}^{k_{n+1,j}} \tilde{\varphi}^{n+1}_\mu t^\mu\right) \subset \mathbb{C}^{n+1} \;\; \text{für } t \in [-a, a], a \in \mathbb{R}^+ \tag{4.1.34}$$

   Stopp für diese spezielle Lösung.

   sonst: $J_j(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}}, \ldots, \tilde{\varphi}^{n+1}_{k_{n+1,j}})$ *ist* **singulär***:*

   Wegen $T_j(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}}, \ldots, \tilde{\varphi}^{n+1}_{k_{n+1,j}}) = 0$ *gibt es (möglicherweise triviale) Bedingungen für die* $(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}}, \ldots, \tilde{\varphi}^{n+1}_{k_{n+1,j}})$. *Diese seien formuliert als*[2]*:*

$$\tilde{\varphi}^\mu_{k_{\mu,j}} = P_\mu(\tilde{\varphi}^1_{1,\ldots k_{1,j}}, \ldots, \tilde{\varphi}^{n+1}_{1,\ldots k_{n+1,j}}), \;\; \mu = 1, \ldots, n+1 \tag{4.1.35}$$

   Ersetze alle $\tilde{\varphi}^\mu_{k_{\mu,j}}$ *durch* $P_\mu(\tilde{\varphi}^1_{1,\ldots,k_{1,j}}, \ldots, \tilde{\varphi}^{n+1}_{1,\ldots,k_{n+1,j}})$.
   Setze $k_{\mu,j+1} = \max\{0, l \in \mathbb{N} \mid \exists$ *Bedingung für* $\varphi^\mu_l\} + 1, \quad \mu = 1, \ldots, n+1$.
   Damit sind wieder $n+1$ *Unbekannte gegeben.*
   Erhöhe j *um* 1 *und gehe zu Schritt 2.*

Definition 4.1.9 *Lösungen, die mit Hilfe von Algorithmus 4.1.8 berechnet worden sind, für die also in einer bestimmten Stufe eine reguläre Ableitungsmatrix* J_j *existiert, werden auch hier* **bestimmt** *genannt.*

[2]Falls keine Bedingungen für eine Variable $\tilde{\varphi}^\mu_{k_{\mu,j}}$ vorliegen, sei $P_\mu :\equiv \tilde{\varphi}^\mu_{k_{\mu,j}}$.

In Algorithmus 4.1.8 wird wie in Algorithmus 2.2.10 im 3. Schritt behauptet, daß eine reguläre Matrix J_j auf eine abzweigende Lösung und somit auf Bestimmtheit schließen läßt. Dies soll nun analog zu Satz 2.2.13 bewiesen werden:

Satz 4.1.10 *Sei $f \in C^{j+1}$ und für geeignete $k_{1,j}, \ldots, k_{n+1,j} \in \mathbb{N}$ die Werte $\tilde{\varphi}^1_{1,\ldots,k_{1,j-1}}, \ldots, \tilde{\varphi}^{n+1}_{1,\ldots,k_{n+1,j-1}} \in \mathbb{C}$ so gewählt, daß $T_1 = \ldots = T_{j-1} = 0$ gilt und $J_1, \ldots, J_{j-1}$ singulär sind. Dann existiert der Limes $\lim_{t\to 0}\tilde{f}_j$. Gilt weiterhin für eine Lösung $0 \neq (\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}}, \ldots, \tilde{\varphi}^{n+1}_{k_{n+1,j}}) \in \mathbb{C}^{n+1}$ von $B_j = 0$ o.B.d.A. $\tilde{\varphi}^{n+1}_{k_{n+1,j}} \neq 0$ und ist mit der entsprechenden Normierung (4.1.37) $J_j(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}}, \ldots, \tilde{\varphi}^{n+1}_{k_{n+1,j}})$ regulär, so bestimmt diese Lösung genau eine abzweigende Lösungskurve, deren Approximation*

$$(\sum_{\mu=1}^{k_{1,j}} \tilde{\varphi}^1_\mu t^\mu, \ldots, \sum_{\mu=1}^{k_{n+1,j}} \tilde{\varphi}^{n+1}_\mu t^\mu) \subset \mathbb{C}^{n+1} \quad \text{für } t \in [-a,a], a \in \mathbb{R}^+ \tag{4.1.36}$$

lautet.

Beweis: Falls $T_1 = \ldots = T_{j-1} = 0$ gilt, so folgt:

$$f(\varphi^1(t), \ldots, \varphi^{n+1}(t)) = T_j\left(\varphi^1_{1,\ldots,k_{1,j}}, \ldots, \varphi^{n+1}_{1,\ldots,k_{n+1,j}}\right) t^j + O(t^{j+1})$$

Als geeignete Normierung in $\tilde{f}_j$ (siehe Definition 4.1.6) wird hier

$$\tilde{N}(\varphi^1_{k_{1,j}}, \ldots, \varphi^{n+1}_{k_{n+1,j}}) = (\varphi^{n+1}_{k_{n+1,j}})^2 - (\tilde{\varphi}^{n+1}_{k_{n+1,j}})^2 \tag{4.1.37}$$

gewählt. Damit ergibt sich:

$$\lim_{t\to 0} \tilde{f}_j(\varphi^1_{k_{1,j}}, \ldots, \varphi^{n+1}_{k_{n+1,j}}, t) = \begin{pmatrix} T_j(\varphi^1_{k_{1,j}}, \ldots, \varphi^{n+1}_{k_{n+1,j}}) \\ \tilde{N}(\varphi^1_{k_{1,j}}, \ldots, \varphi^{n+1}_{k_{n+1,j}}) \end{pmatrix} = B_j(\varphi^1_{k_{1,j}}, \ldots, \varphi^{n+1}_{k_{n+1,j}})$$

Somit existiert der Limes und es gilt insbesondere mit $\tilde{f}_j(\varphi^1_{k_{1,j}}, \ldots, \varphi^{n+1}_{k_{n+1,j}}, 0) := \lim_{t\to 0}\tilde{f}_j(\varphi^1_{k_{1,j}}, \ldots, \varphi^{n+1}_{k_{n+1,j}}, t)$, daß $\tilde{f}_j(\varphi^1_{k_{1,j}}, \ldots, \varphi^{n+1}_{k_{n+1,j}}, t) \in C^1$ bzgl. t ist.

Nun wird der Satz über implizite Funktionen auf $\tilde{f}_j(\varphi^1_{k_{1,j}}, \ldots, \varphi^{n+1}_{k_{n+1,j}}, t)$ bzgl. $\varphi^1_{k_{1,j}}, \ldots, \varphi^{n+1}_{k_{n+1,j}}$ im Punkte $t = 0$ angewendet. Es bleibt zu zeigen, daß $D_{(\varphi^1_{k_{1,j}}, \ldots, \varphi^{n+1}_{k_{n+1,j}})}\tilde{f}_j(\varphi^1_{k_{1,j}}, \ldots, \varphi^{n+1}_{k_{n+1,j}}, 0)$ regulär ist. Nach den Voraussetzungen gilt aber mit der geeigneten Normierung (4.1.37):

$$
\begin{aligned}
& D_{(\varphi^1_{k_{1,j}},\ldots,\varphi^{n+1}_{k_{n+1,j}})}\hat{F}_j(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}},\ldots,\tilde{\varphi}^{n+1}_{k_{n+1,j}},0) \\
&= \quad D_{(\varphi^1_{k_{1,j}},\ldots,\varphi^{n+1}_{k_{n+1,j}})}B_j(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}},\ldots,\tilde{\varphi}^{n+1}_{k_{n+1,j}}) && (4.1.38)\\
&= \quad D_{(\varphi^1_{k_{1,j}},\ldots,\varphi^{n+1}_{k_{n+1,j}})}\begin{pmatrix} T_j(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}},\ldots,\tilde{\varphi}^{n+1}_{k_{n+1,j}}) \\ \tilde{N}(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}},\ldots,\tilde{\varphi}^{n+1}_{k_{n+1,j}}) \end{pmatrix} && (4.1.39)\\
&\overset{(4.1.33)}{=} \quad \begin{pmatrix} J_j(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}},\ldots,\tilde{\varphi}^{n+1}_{k_{n+1,j}}) & D_{n+1}T_j(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}},\ldots,\tilde{\varphi}^{n+1}_{k_{n+1,j}}) \\ 0 & 2\tilde{\varphi}^{n+1}_{k_{n+1,j}} \end{pmatrix} && (4.1.40)
\end{aligned}
$$

Da $J_j(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}},\ldots,\tilde{\varphi}^{n+1}_{k_{n+1,j}})$ regulär ist und $\tilde{\varphi}^{n+1}_{k_{n+1,j}} \neq 0$ gilt, ist auch

$$D_{(\varphi^1_{k_{1,j}},\ldots,\varphi^{n+1}_{k_{n+1,j}})}\hat{F}_j(\varphi^1_{k_{1,j}},\ldots,\varphi^{n+1}_{k_{n+1,j}},0)$$

für die Lösung $(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}},\ldots,\tilde{\varphi}^{n+1}_{k_{n+1,j}})$ regulär. Somit existiert nach dem Satz über implizite Funktionen eine abzweigende Lösung $(\varphi^1(t),\ldots,\varphi^{n+1}(t))$ mit $(\varphi^1(0),\ldots,\varphi^{n+1}(0)) = (0,\ldots,0)$. Deren Approximation für $t \to 0$ lautet:

$$(\sum_{\mu=1}^{k_{1,j}}\tilde{\varphi}^1_\mu t^\mu,\ldots,\sum_{\mu=1}^{k_{n+1,j}}\tilde{\varphi}^{n+1}_\mu t^\mu) \subset \mathbb{C}^{n+1} \text{ für } t \in [-a,a], a \in \mathbb{R}^+ \text{ geeignet} \qquad (4.1.41)$$

Weiterhin ergibt sich, daß durch den Algorithmus die verschiedenen Lösungen bei wachsendem j 'getrennt' werden. Dies folgt aus der Tatsache, daß die Lösungen von $B_j = 0$ den Koeffizienten der Entwicklungen bzgl. t der abzweigenden Lösungen entsprechen. Dadurch werden die Lösungen getrennt, wenn die Kurven sich ab einer bestimmten Ordnung trennen (d.h. deren Reihenentwicklung auseinanderläuft). ■

Bemerkung 4.1.11 *Analog zu Bemerkung 2.2.15 kann auch im höherdimensionalen Fall eine Homogenisierung der Gleichungen erreicht werden. Setzt man auch hier:*

$$\left(\vartheta^{(\mu)}\right)^{k_{\mu,j}} := \varphi^\mu_{k_{\mu,j}},\ \mu = 1,\ldots,n+1, \qquad (4.1.42)$$

so ist $T_j((\vartheta^{(1)})^{k_{1,j}},\ldots,(\vartheta^{(n+1)})^{k_{n+1,j}})$ *homogen vom Grad* j *in* ϑ*, d.h.:*

$$T_j((\delta\vartheta^{(1)})^{k_{1,j}},\ldots,(\delta\vartheta^{(n+1)})^{k_{n+1,j}}) = \delta^j T_j((\vartheta^{(1)})^{k_{1,j}},\ldots,(\vartheta^{(n+1)})^{k_{n+1,j}}) \qquad (4.1.43)$$

Nachdem das Gleichungssystem (4.1.43) für $(\vartheta^{(1)}, \ldots, \vartheta^{(n+1)})$ gelöst wurde, kann auch hier durch Auswertung der Beziehung (4.1.42) zu den ursprünglichen Unbekannten zurückgekehrt werden.

4.2 Auszeichnung einer Variablen

In diesem Abschnitt soll kurz dargestellt werden, wie Algorithmus 4.1.8 analog zur Übertragung von Algorithmus 2.2.10 auf 2.3.1 spezialisiert werden kann, um eine Variable als Parameter auszuzeichnen. Da diese Spezialisierung völlig analog zu der in 2 Dimensionen verläuft, wird diese Version von Algorithmus 4.1.8 ohne besondere Herleitung angegeben. O.B.d.A. soll hier die $n+1$-te Variable als Parametrisierungsvariable dienen. Diese wird auch hier λ genannt:

Algorithmus 4.2.1 Adaptive λ-Skalierung von Keimen in $n+1$ Dimensionen

1. **Schritt:** *Setze* $j := 1$ *und* $k_{1,1} = \ldots = k_{n+1,1} = 1$.

2. **Schritt:** *Die Werte von* $\tilde{\varphi}^1_{1,\ldots k_{1,j-1}}, \ldots, \tilde{\varphi}^{n+1}_{1,\ldots k_{n+1,j-1}} \in \mathbb{C}$ *wurden durch den Algorithmus so gewählt, daß bereits* $T_1 = \ldots = T_{j-1} = 0$ *gilt und* $J_1, \ldots, J_{j-1}$ *singulär (siehe (4.2.2) sind.*

   Bestimme alle $(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}}, \ldots, \tilde{\varphi}^{n+1}_{k_{n+1,j}}) \in \mathbb{C}^{n+1}$ *für die gilt:*

$$B_j(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}}, \ldots, \tilde{\varphi}^{n+1}_{k_{n+1,j}}) = 0 \tag{4.2.1}$$

3. **Schritt:** *Führe folgende Schritte für alle Lösungen* $(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}}, \ldots, \tilde{\varphi}^{n+1}_{k_{n+1,j}})$ *aus: Betrachte:*

$$J_j(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}}, \ldots, \tilde{\varphi}^{n+1}_{k_{n+1,j}}) := D_{(\varphi^1_{k_{1,j}}, \ldots, \varphi^n_{k_{n,j}})} T_j(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}}, \ldots, \tilde{\varphi}^{n+1}_{k_{n+1,j}}) \tag{4.2.2}$$

   Falls: $\det(J_j(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}}, \ldots, \tilde{\varphi}^{n+1}_{k_{n+1,j}})) * \tilde{\varphi}^{n+1}_{k_{n+1,j}} \neq 0$*:*

   Diese Lösung bestimmt eindeutig eine abzweigende Kurve (siehe Satz 4.1.10), die wegen $\tilde{\varphi}^{n+1}_{k_{n+1,j}} \neq 0$ *bzgl. der letzten Komponente parametrisiert werden kann. Ihre Approximation lautet für geeignetes a:*

$$(\sum_{\mu=1}^{k_{1,j}} \tilde{\varphi}^1_\mu t^\mu, \ldots, \sum_{\mu=1}^{k_{n+1,j}} \tilde{\varphi}^{n+1}_\mu t^\mu) \subset \mathbb{C}^{n+1} \text{ für } t \in [-a, a], a \in \mathbb{R}^+ \tag{4.2.3}$$

   Stopp für diese spezielle Lösung.

   sonst: $\det(J_j(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}}, \ldots, \tilde{\varphi}^{n+1}_{k_{n+1,j}})) * \tilde{\varphi}^{n+1}_{k_{n+1,j}} = 0$*:*

   Wegen $T_j(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}}, \ldots, \tilde{\varphi}^{n+1}_{k_{n+1,j}}) = 0$ *gibt es (möglicherweise triviale) Bedingungen für die* $(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}}, \ldots, \tilde{\varphi}^{n+1}_{k_{n+1,j}})$*. Diese seien formuliert als*[3]*:*

$$\tilde{\varphi}^\mu_{k_{\mu,j}} = P_\mu(\tilde{\varphi}^1_{1,\ldots k_{1,j}}, \ldots, \tilde{\varphi}^{n+1}_{1,\ldots k_{n+1,j}}),\ \mu = 1, \ldots, n+1 \tag{4.2.4}$$

   Ersetze alle $\tilde{\varphi}^\mu_{k_{\mu,j}}$ *durch* $P_\mu(\tilde{\varphi}^1_{1,\ldots,k_{1,j}}, \ldots, \tilde{\varphi}^{n+1}_{1,\ldots,k_{n+1,j}})$.
   Setze $k_{\mu,j+1} = \max\{0, l \in \mathbb{N} \mid \exists$ *Bedingung für* $\varphi^\mu_l\} + 1, \quad \mu = 1, \ldots, n+1$.
   Damit sind wieder $n+1$ *Unbekannte gegeben.*
   Erhöhe j *um* 1 *und gehe zu Schritt 2.*

Dieser Algorithmus berechnet analog zu Algorithmus 4.1.8 die abzweigenden Lösungen mit dem Unterschied, daß er nur solche Lösungen zuläßt, die eine Komponente in Richtung des Kontroll-Parameters λ haben. Diese Lösungen sollen auch hier **λ-bestimmt** genannt werden. Dieser Parameter war hier die $n+1$-te Variable. Analog läßt sich der Algorithmus für die anderen Komponenten formulieren.

[3]Falls keine Bedingungen für eine Variable $\tilde{\varphi}^\mu_{k_{\mu,j}}$ vorliegen, sei $P_\mu :\equiv \tilde{\varphi}^\mu_{k_{\mu,j}}$.

Definition 4.2.2 *Lösungen, die mit Hilfe von Algorithmus 4.2.1 berechnet wurden, für die also in einer bestimmten Stufe eine reguläre Ableitungsmatrix J_j existiert, werden* **λ-bestimmt** *genannt.*

Bemerkung 4.2.3 *In der Verzweigungstheorie wird oft angenommen, daß gilt:*

$$Df(0) \equiv 0 \in \mathbb{R}^{n \times n} \tag{4.2.5}$$

Diese Annahme ist sinnvoll, da es mit Hilfe der schon angesprochenen Lyapunov-Schmidt-Reduktion möglich ist, die Bedingung (4.2.5) für die reduzierte Verzweigungsgleichung zu erreichen. Die numerisch günstigere verallgemeinerte Lyapunov-Schmidt-Reduktion (siehe [JS89]) kann jedoch diese Bedingung nicht erreichen, wenn die Reduktion nicht voll ist (siehe z.B. [Yan96]). In diesem Zusammenhang ist es wichtig zu erkennen, daß die in den Kapiteln 2.2, 2.3, 4.1 und 4.2 vorgestellten Algorithmen diese Voraussetzung **nicht** *benötigen. Die dort angewandte adaptive Skalierung wird vielmehr automatisch den 'singulären' Teil der Lösung, also denjenigen, auf den mittels der Lyapunov-Schmidt-Reduktion reduziert wird, von höherer Ordnung skalieren, als den 'regulären' Anteil. Damit lassen sich die Algorithmen auf alle Probleme von Rang $Df(0) = 0$ bis Rang $Df(0) = n$ anwenden. Ist die Dimension n sehr groß, ist es empfehlenswert, mit Hilfe der Lyapunov-Schmidt-Reduktion das Problem auf ein nieder-dimensionales Problem zu reduzieren.*

4.3 Beispiele mit unterschiedlichem Defekt

Es soll nun anhand einiger Beispiele die in Bemerkung 4.2.3 angesprochene Universalität der Algorithmen verdeutlicht werden:

Beispiel 4.3.1

$$f(x, y, \lambda) := \begin{pmatrix} x + \lambda + x^2 + y^2 \\ y + 2xy \end{pmatrix} \tag{4.3.1}$$

$$Rang\, D_{(x,y)} f(0) = 2$$

Es ergibt sich

$$T_1(x_1, y_1, \lambda_1) = \begin{pmatrix} x_1 + \lambda_1 \\ y_1 \end{pmatrix}. \tag{4.3.2}$$

Die Lösungen lauten mit der Normierung $\lambda_1^2 - 1$*:*

$$(x_1, y_1, \lambda_1) = (\pm 1, 0, \mp 1) \tag{4.3.3}$$

Diese Lösungen sind isoliert und λ*-bestimmt. Es ergibt sich somit folgende Approximation der Kurven:*

$$\begin{aligned} (x(t)), y(t)), \lambda(t))) &= (\pm t, 0, \mp t) + O(t^2) && (4.3.4) \\ &= (t, 0, -t) + O(t^2) \text{ für } t \in [-a, a], a \in \mathbb{R}^+ && (4.3.5) \end{aligned}$$

Beispiel 4.3.2

$$f(x, y, \lambda) := \begin{pmatrix} \lambda + x^2 + y^2 \\ y + 2xy \end{pmatrix} \tag{4.3.6}$$

$$Rang\ D_{(x,y)} f(0) = 1$$

Es ergibt sich

$$T_1(x_1, y_1, \lambda_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \tag{4.3.7}$$

Die Lösung

$$(x_1, y_1, \lambda_1) = (x_1, 0, 0) \tag{4.3.8}$$

ist nicht λ*-bestimmt. Diese wird bei* $j = 2$ *mit* $k_{2,2} = k_{3,2} = 2$ *weiterbestimmt:*

$$T_2(x_1, y_2, \lambda_2) = \begin{pmatrix} \lambda_2 + x_1^2 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{4.3.9}$$

Die Lösungen lauten mit der Normierung $\lambda_2^2 - 1$

$$(x_1, y_2, \lambda_2) = (\pm 1, 0, -1), \quad (\pm i, 0, 1) \tag{4.3.10}$$

Diese Lösungen sind isoliert und λ*-bestimmt. Es ergibt sich somit folgende Approximation der reellen Kurven:*

$$(x(t)), y(t)), \lambda(t))) = (\pm t, 0, -t) + O(t^2) \ \textit{für} \ t \in [-a, a], a \in \mathbb{R}^+ \tag{4.3.11}$$

Beispiel 4.3.3

$$f(x, y, \lambda) := \begin{pmatrix} \lambda + x^2 + y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \tag{4.3.12}$$

$$Rang \ D_{(x,y)} f(0)) = 0$$

Es ergibt sich

$$T_1(x_1, y_1, \lambda_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.3.13}$$

Die Lösung

$$(x_1, y_1, \lambda_1) = (x_1, y_1, 0) \tag{4.3.14}$$

ist nicht λ*-bestimmt. Diese wird bei* $j = 2$ *mit* $k_{3,2} = 2$ *weiterbestimmt:*

$$T_2(x_1, y_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} \lambda_2 + x_1^2 + y_1^2 \\ 2x_1 y_1 \end{pmatrix} \tag{4.3.15}$$

Die Lösungen lauten mit der Normierung $\lambda_2^2 - 1$

$$\begin{aligned} (x_1, y_1, \lambda_2) \ &= \ (0, \pm 1, -1), && (4.3.16) \\ &\quad\ (\pm 1, 0, -1), && (4.3.17) \\ &\quad\ (0, \pm i, 1), && (4.3.18) \\ &\quad\ (\pm i, 0, 1) && (4.3.19) \end{aligned}$$

Diese Lösungen sind isoliert und λ-bestimmt. Es ergibt sich somit folgende Approximation der reellen Kurven:

$$\begin{aligned}(x(t)), y(t)), \lambda(t))) &= (\pm t, 0, -t) + O(t^2) \text{ und} && (4.3.20)\\ &\quad (0, \pm t, -t) + O(t^2) && (4.3.21)\\ &\quad \text{für } t \in [-a, a], a \in \mathbb{R}^+\end{aligned}$$

Beispiel 4.3.4

Dieses Beispiel stammt aus der Verzweigungsanalyse bei Untersuchungen zum hydrodynamischen Fluß im Erdinneren, siehe [GRD96]. Die dabei auftretende $O(3)$-Symmetrie der Erdkugel wurde auf den Orbitraum reduziert. Daraus resultiert die folgende Verzweigungsgleichung:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (u_1, u_2, \lambda) \mapsto \begin{bmatrix} (\sigma\lambda + \varepsilon u_1)u_1 + (\alpha + \delta u_1 + b u_2)u_2 \\ (\sigma\lambda + \varepsilon u_1)u_2 + \frac{5}{49\pi}(\alpha + \delta u_1 + b u_2){u_1}^2 \end{bmatrix} \quad (4.3.22)$$

Dabei gilt generisch:

$$\varepsilon, \delta \in \{+1, -1\}, \quad b \neq 0. \quad (4.3.23)$$

Zusätzlich wird $\alpha \neq 0$ angenommen.

Zur einfacheren Notation werden die folgenden Bezeichungen für die Reihen in (2.2.2) eingeführt:

$$\begin{aligned}\varphi^1(t) &=: u(t) := \sum_{\mu=0}^{m_1} u_j t^\mu, \quad m_1 \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\\ \varphi^2(t) &=: v(t) := \sum_{\mu=0}^{m_2} v_j t^\mu, \quad m_2 \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\\ \varphi^3(t) &=: \lambda(t) := \sum_{\mu=0}^{m_3} \lambda_j t^\mu, \quad m_3 \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\end{aligned} \quad (4.3.24)$$

Mit Algorithmus 4.2.1 folgt:

$\boxed{j=1}$ $T_1(u_1, v_1, \lambda_1) = \{0, \alpha v_1\} = 0$

Die Lösung ist $(u_1, v_1, \lambda_1) = (u_1, 0, \lambda_1)$. *Für diese Lösung ist die Jacobimatrix von* T_1 *bzgl.* (u_1, v_1) *singulär. Somit ist diese Lösung nicht bestimmt. Es wird bei* $j = 2$ *mit* $[u_1, v_2, l_1]$ *weitergerechnet.*

$\boxed{j=2}$ $T_2\,(u_1, v_2, l_1) = \left\{ (\sigma\, l_1 + \varepsilon\, u_1)\; u_{11} + \alpha\, v_2, \frac{5}{49}\,\frac{\alpha\, {u_1}^2}{\pi} \right\} = 0.$

Die Lösung ist $\{v_2 = 0, l_1 = l_1, u_1 = 0\}$. *Diese Lösung ist nicht bestimmt. Weiter bei* $j = 3$ *mit* $[u_2, v_3, l_1]$.

$\boxed{j=3}$ $T_3\,(u_2, v_3, l_1) = \{0, \sigma\, l_1\, u_2 + \alpha\, v_3\} = 0.$

Die Lösung ist $\left\{ l_1 = l_1, v_3 = -\,\frac{\sigma\, l_1\, u_2}{\alpha}, u_2 = u_2 \right\}.$

Diese Lösung ist nicht bestimmt. Weiter bei $j = 4$ *mit* $[u_2, v_4, l_1]$.

$\boxed{j=4}$ $T_4\,(u_2, v_4, l_1) = \left\{ -\,\frac{\sigma^2\, {l_1}^2\, u_2}{\alpha} + \frac{5}{49}\,\frac{\alpha\, {u_2}^2}{\pi}, \varepsilon\, {u_2}^2 + \alpha\, v_4 \right\} = 0.$

Die Gleichung hat 2 Lösungen. Die erste ist

$$\left\{ v_4 = -\,\frac{2401}{25}\,\frac{\varepsilon\,\sigma^4\, {l_1}^4\, \pi^2}{\alpha^5}, l_1 = l_1, u_2 = \frac{49}{5}\,\frac{\sigma^2\, {l_1}^2\, \pi}{\alpha^2} \right\}.$$

Die Determinante der Jacobimatrix von T_4 *ist* $-\sigma^2\, {l_1}^2$. *Somit ist diese Lösung* λ*-bestimmt, da die* λ*-Komponente z.B. mit der Normierung* $\lambda_1^2 - 1$ *normiert werden kann. Die dazugehörige Approximation lautet:*

$$u = \frac{49}{5}\,\frac{\sigma^2\, {l_1}^2\, \pi}{\alpha^2} t^2 + O(t^3) \tag{4.3.25}$$

$$v = -\,\frac{49}{5}\,\frac{\sigma^3\, {l_1}^3\, \pi}{\alpha^3} t^3 - \frac{2401}{25}\,\frac{\varepsilon\,\sigma^4\, {l_1}^4\, \pi^2}{\alpha^5} t^4 + O(t^5) \tag{4.3.26}$$

$$\lambda = l_1 t + O(t^2) \tag{4.3.27}$$

Die zweite Lösung von $T_4 = 0$ *ist* $\{l_1 = l_1, v_4 = 0, u_2 = 0\}$.

Diese Lösung ist ebenfalls λ*-bestimmt, da die Determinante der Jacobimatrix* $\sigma^2\, {l_1}^2$ *ist.*

Zu dieser Lösung gehört die Approximation:

$$u(t) = 0 + O(t^3) \tag{4.3.28}$$

$$v(t) = 0 + O(t^5) \tag{4.3.29}$$

$$\lambda(t) = l_1\, t + O(t^2). \tag{4.3.30}$$

Da damit alle Lösungen bestimmt sind, wurden alle abzweigenden Kurven gefunden. Die Grafik 4.3.1 zeigt das Verzweigungsbild..

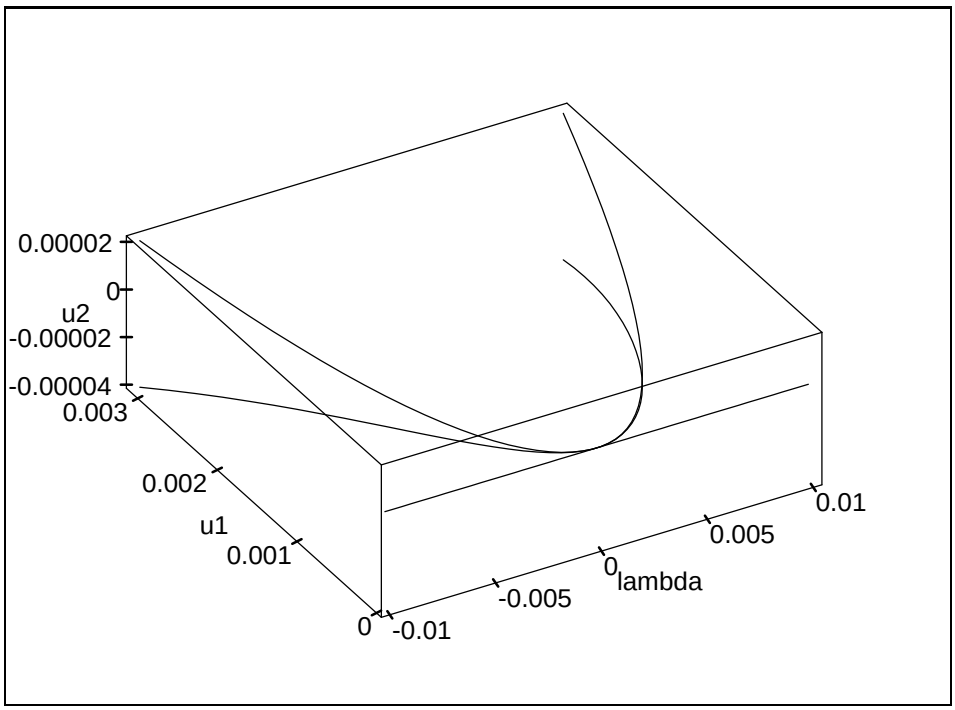

Abbildung 4.3.1: Lösungsstruktur eines 2-dimensionalen Gleichungssystems

Wie schon angesprochen, ist es bei großen Dimensionen n sinnvoll, die Gleichung mittels der (verallgemeinerten) Lyapunov-Schmidt-Methode zu reduzieren. Dies ist insbesondere bei partiellen Differentialgleichungen notwendig, da das Ursprungsproblem in einem unendlichdimensionalen Raum formuliert ist und hier die Algorithmen nicht mehr anwendbar sind. Aus diesem Grund soll im nächsten Kapitel gezeigt werden, wie die Lyapunov-Schmidt-Methode mit dem aufgezeigten Skalierungsprozeß gekoppelt werden kann, so daß auch unendlichdimensionale Probleme analysierbar sind.

Kapitel 5

Adaptive Skalierung unendlichdimensionaler Probleme

Die Berechnung von Lösungskurven in unendlichdimensionalen Problemen, insbesondere partiellen Differentialgleichungen, wird im allgemeinen durch Diskretisierung auf ein endlichdimensionales Problem zurückgeführt. Die Lösungskurven werden dann mit den verschiedensten Methoden berechnet. Oft handelt es sich im wesentlichen um Skalierungsmethoden, wie sie in dieser Arbeit vereinheitlicht und verallgemeinert werden, vgl. etwa [ABM91a], [ABM93b], [ABM93c], [BM90], [BM91], [Mei91b], [Mei91c], [Mei92a], [Mei92b], [Mei93], [MLZ85] [MS96], [SKN88]. Ein wesentlicher Schritt bei der Berechnung der Lösungen ist der Einsatz der **Lyapunov-Schmidt-Reduktion (LSR)**. Obwohl der Algorithmus aus Kapitel 4 auch für große Werte von n richtig wäre, ist es sinnvoller, mit Hilfe der LSR das Problem auf eines mit niederer Dimension zu reduzieren. In diesem Kapitel wird dargestellt, wie die LSR in die Skalierungsalgorithmen eingebaut werden kann.

5.1 Lyapunov-Schmidt-Reduktion

Bei der numerischen Lösung von partiellen Differentialgleichungen treten i.a. sehr große Werte von n auf. Da hierbei der Algorithmus aus Kapitel 4 aus Komplexitätsgründen nicht mehr sinnvoll ist, muß eine zusätzliche Reduktionsstufe in diesen Prozeß eingebaut werden, die die entscheidenden Informationen aus dem großen System herausfiltert. Zu diesem Zweck wird hier kurz die wohlbekannte Lyapunov-Schmidt-Reduktion[1] dargestellt,

[1] siehe z.B. [GS86], Kapitel VII

um in Kombination mit den Algorithmen allgemeine Probleme der Art

$$F : X \times \mathbb{R}^p \to Y; \quad F(x) = F(z, \lambda) = 0, \quad p \geq 1 \tag{5.1.1}$$

in allen Lösungspunkten $x_0 = (z_0, \lambda_0) \in X \times \mathbb{R}^p$ analysieren zu können. Hierbei sind die einzigen Bedingungen an F und X, Y diejenigen, die durch die Lyapunov-Schmidt-Methode gegeben sind, d.h. es wird vorausgesetzt:

1.) F ist hinreichend glatt (bzw. eine Ordnung glatter als die Bestimmtheitsordnung)

2.) X und Y sind Banachräume, die in einen Hilbertraum H eingebettet sind[2].

3.) Die Ableitung $F_0' := (D_z F_0, D_\lambda F_0) := (D_z F(x_0), D_\lambda F(x_0)) = DF(x_0)$ ist ein Fredholm-Operator vom Index p mit dim Kern $D_z F_0 = n$ oder dim Kern $DF_0 = n + p$.

Da es bei Problemen der Art (5.1.1) wenig Sinn machen würde, die Lösung bzgl. einer Komponente von z zu parametrisieren, werden hier von Anfang an die Kontroll-Parameter λ ausgezeichnet [3]. Unter diesen Voraussetzungen lassen sich die Räume X und Y zerlegen in[4]:

$$X = \text{Kern } D_z F_0 \oplus M \tag{5.1.2}$$

$$Y = N \oplus \text{ Bild } D_z F_0 \tag{5.1.3}$$

Dabei bezeichnet $\oplus$ die Orthogonalität bzgl. dem inneren Produktes $< ., . >$ von H.

Da nach Voraussetzung 3 die Dimension von Kern $D_z F_0 = n$ ist, existieren Basen, für die gilt:

$$\text{Kern } D_z F_0 = [\phi_1, \ldots, \phi_n] \text{ und} \tag{5.1.4}$$

$$N = [\hat{\phi}_1, \ldots, \hat{\phi}_n] \tag{5.1.5}$$

[2]Für Differentialoperatoren sind X und Y typischerweise Unterräume von $L^2(\Omega)$, wobei $\Omega \in \mathbb{R}^N$ gilt.

[3]Es wäre zwar auch möglich, alle Variablen, wie in Kapitel 2.2 bzw. Kapitel 4.1, gleichwertig zu behandeln, jedoch würde diese Form wenig praktische Relevanz haben und zudem noch schwer lesbar sein.

[4]siehe [Ber77]

Mit diesen Definitionen lassen sich nun Projektionen definieren:

$$Q \;:\; X \to M, \quad Q = I - \sum_{i=1}^{n} \langle \phi_i, . \rangle \phi_i \tag{5.1.6}$$

$$\hat{Q} \;:\; Y \to \text{ Bild } D_z F_0, \quad \hat{Q} = I - \sum_{i=1}^{n} \langle \hat{\phi}_i, . \rangle \hat{\phi}_i \tag{5.1.7}$$

Mit diesen Projektionen zerlegt man wie folgt:

$$x = (z, \lambda) = (z_0, \lambda_0) + (v + w, \lambda); \tag{5.1.8}$$

$$v \in \text{ Kern } D_z F_0, \; w \in M \tag{5.1.9}$$

$$\hat{Q} F(z_0 + v + w, \lambda_0 + \lambda) = 0 \tag{5.1.10}$$

$$(I - \hat{Q}) F(z_0 + u + w, \lambda_0 + \lambda) = 0 \tag{5.1.11}$$

Per Konstruktion ist Gleichung (5.1.10) nach w als Funktion von v und λ für kleine (v, λ) auflösbar (Satz über implizite Funktionen). Die resultierende Funktion $w(v, \lambda)$ setzt man in (5.1.11) ein und erhält auf diese Weise die **reduzierte Verzweigungsgleichung**:

$$g \;:\; \text{ Kern } D_z F_0 \times \mathbb{R}^p \to N \tag{5.1.12}$$

$$g(v, \lambda) := (I - \hat{Q}) F(z_0 + v + w(v, \lambda), \lambda_0 + \lambda) = 0 \tag{5.1.13}$$

Da Kern $D_z F_0$ endlichdimensional ist, kann man diese Gleichung auch in Koordinaten bzgl. der Basis (5.1.4) schreiben:

$$f \;:\; \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}^n$$

$$f(x) := < \hat{\phi}_i, (I - \hat{Q}) F(z_0 + v + w(v, \lambda), \lambda_0 + \lambda) >= 0, \; i = 1, \ldots, n \tag{5.1.14}$$

wobei gilt: $v = x_1 \phi_1 + \ldots + x_n \phi_n$

Sollte F Symmetrien aufweisen, so können diese auf g bzw. f übertragen werden, indem man die Projektionen $Q, \hat{Q}$ so wählt, daß diese mit der Symmetrie kommutieren. Weiterhin müssen symmetrie-invariante Komplemente von Kern $D_z F_0$ und Bild $D_z F_0$ gefunden werden, die mit diesen die Räume X und Y aufspannen. Zur genaueren Erklärung siehe z.B. [GS86] oder [Van82].

5.2 Adaptive Skalierung der Lösungen

Von nun an wird $p = 1$ vorausgesetzt, da die Algorithmen nur für Einparameter-Probleme konstruiert sind. Im Falle von mehreren Kontroll-Parametern, müssen immer $p-1$ davon festgehalten werden, um die Algorithmen anwenden zu können. Wie in den Kapiteln 2.2 und 4.1 braucht man zunächst einen geeigneten Ansatz für die Lösungen $x(t) = (z(t), \lambda(t))$, die für $t = 0$ durch den Punkt $x_0 = (z_0, \lambda_0)$ gehen sollen. Unter Beachtung der Zerlegung (5.1.2) werden die verschiedenen Anteile v und w in eine Reihe bzgl. t entwickelt und es wird definiert:

Ansatz 5.2.1

$$x(t) = (z_0 + v(t) + w(v(t), \lambda(t)), \lambda_0 + \lambda(t)) \tag{5.2.1}$$

$$:= \left(z_0 + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{l=1}^{m_i} \varphi_l^i t^l \right] \phi_i}_{v(t)} + \underbrace{\sum_{l=1}^{m_{n+2}} w_l t^l}_{w(v(t),\lambda(t))}, \lambda_0 + \underbrace{\sum_{l=1}^{m_{n+1}} \lambda_l t^l}_{\lambda(t)} \right) \tag{5.2.2}$$

$$= \left(z_0 + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{l=1}^{m_i} \varphi_l^i t^l \right] \phi_i}_{v(t)} + \right. \tag{5.2.3}$$

$$\left. \underbrace{\sum_{l=1}^{m_{n+2}} w_l(\varphi^1_{1,\ldots,k_{1,l}}, \ldots, \varphi^n_{1,\ldots,k_{n,l}}, \lambda_{1,\ldots,k_{n+1,l}}) t^l}_{w(v(t),\lambda(t))}, \lambda_0 + \underbrace{\sum_{l=1}^{m_{n+1}} \lambda_l t^l}_{\lambda(t)} \right) \tag{5.2.4}$$

$$k_{1,l}, \ldots, k_{n+1,l}, m_1, \ldots, m_{n+2} \in \mathbb{N},\ t \in U(0) \subset \mathbb{R} \tag{5.2.5}$$

Die Werte von $k_{1,l}, \ldots, k_{n+1,l}$ werden später spezifiziert. Sie sind, analog zu den $k_{.,.}$ aus den vorangegangenen Kapiteln, von der vorliegenden Verzweigungssituation abhängig.

Setzt man nun den Ansatz 5.2.1 in die zugrundeliegende Gleichung (5.1.1) ein und entwickelt diesen Term in eine Taylorreihe bzgl. t, so ergibt sich:

$$F(x(t)) =: \sum_{j=1}^{k} t^j \hat{T}_j + O(t^{k+1}) \tag{5.2.6}$$

$$=: \sum_{j=1}^{k} t^j (D_z F_0 w_j + r_j) + O(t^{k+1}) \tag{5.2.7}$$

Der Term r_j beinhaltet also den nichtlinearen Anteil des Terms $\hat{T}_j$ sowie den Term $D_\lambda F_0 \lambda_j$, wobei r_j *nicht* von w_j abhängt sondern von $w_1, \ldots, w_{j-1}$ und den Reihenkoeffizienten von $v(t)$ und $\lambda(t)$ aus (5.2.2) bis maximal zur Ordnung j. Auch hier wird die Vorgehensweise sein, diese Terme nach aufsteigender Ordnung zu eliminieren bis Bestimmtheit eintritt. Zusätzlich zu den endlichdimensionalen Problemen der Kapitel 2 und 4 besteht hier noch das unendlichdimensionale Problem, die Faktoren w_j zu bestimmen, um mit diesen das Problem (5.1.1) auf ein Problem der Form (5.1.14) zu reduzieren. Mit den dargestellten Voraussetzungen lassen sich diese Terme jedoch bestimmen. Es gilt:

$$\hat{T}_j = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D_z F_0 w_j = -r_j \tag{5.2.8}$$

$$w_j \in (\text{ Kern } D_z F_0)^\perp \quad \Leftrightarrow \quad \langle \phi_i, w_j \rangle = 0,\ i = 1, \ldots, n \tag{5.2.9}$$

$$r_j \in \text{ Bild } D_z F_0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle \hat{\phi}_i, r_j \rangle = 0,\ i = 1, \ldots, n \tag{5.2.10}$$

Damit kann ein Bestimmungssystem für $j = 1, 2, \ldots$ aufgestellt werden:

$$D_z F_0 w_j = -r_j, \tag{5.2.11}$$

$$\langle \phi_i, w_j \rangle = 0,\ i = 1, \ldots, n \tag{5.2.12}$$

$$\langle \hat{\phi}_i, r_j \rangle = 0,\ i = 1, \ldots, n \tag{5.2.13}$$

Es gilt nun, die einzelnen Komponenten in der richtigen Reihenfolge zu bestimmen. Um die Gleichung (5.2.11) eindeutig lösen zu können, mußen die Gleichungen (5.2.12),(5.2.13) erfüllt sein. Dies kann man erreichen, indem man die Parameter φ_l^i, λ_l, von denen r_j abhängt, geeignet wählt. Glücklicherweise hängt r_j nicht von w_j ab, da der einzige Term in $\hat{T}_j$, in dem w_j vorkommt, per Konstruktion $D_z F_0 w_j$ ist. Es muß also erst die Gleichung (5.2.13) gelöst und dann mit den sich ergebenden Bedingungen für die φ_l^i, λ_l über (5.2.11) und (5.2.12) w_i berechnet werden. Dann wird j um 1 erhöht. Natürlich muß auf jeder Stufe dieses Prozesses auf Bestimmtheit geprüft werden. Dies geschieht mit Hilfe der Gleichung (5.2.13). In der Tat gilt per Konstruktion

$$\left\{ \langle \hat{\phi}_i, r_j \rangle,\ i = 1, \ldots, n \right\} \stackrel{!}{=} T_j \text{ aus } (4.1.5) \tag{5.2.14}$$

falls die reduzierte Verzweigungsgleichung f aus (5.1.14) mit dem f aus Kapitel 4 identifiziert wird. Diese Tatsache ergibt sich aus der Definition von f. Damit kann das Bestimmungssystem aufgestellt werden:

$$0 = \begin{pmatrix} \langle \hat{\phi}_i, r_j \rangle, \ i = 1, \ldots, n \\ \lambda^2_{k_{n+1,j}} - 1 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} T_j \\ \lambda^2_{k_{n+1,j}} - 1 \end{pmatrix} =: B_j \tag{5.2.15}$$

Nun kann man zur Analyse der Bestimmtheit die Mittel aus Kapitel 4 einsetzen, d.h. hat man die Lösungen von (5.2.13) bestimmt, so kann man diese auf Bestimmtheit untersuchen. Liegt Bestimmtheit vor, so kann man abbrechen (siehe Satz 5.2.3). Liegt keine Bestimmtheit vor, so muß w_j mit Hilfe des Systems (5.2.11)-(5.2.12) berechnet werden, das per Konstruktion eindeutig nach w_j gelöst werden kann. Sodann wird j um 1 erhöht und es wird wieder (5.2.13) betrachtet. Um all dies in einen Algorithmus zu fassen, sei in Analogie zu Definition (2.2.8) für $t \neq 0$ definiert:

Definition 5.2.2 *In Verallgemeinerung von Definition 4.1.6, Seite 96, sei für $t \neq 0$ definiert:*

$$\begin{aligned} &\hat{F}_j : X \times \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R} \mapsto Y \times \mathbb{R}^{n+1} : \\ &\hat{F}_j(w_j, \varphi^1_{k_{1,j}}, \ldots, \varphi^n_{k_{n,j}}, \lambda_{k_{n+1,j}}, t) \\ &:= \begin{pmatrix} \frac{1}{t^j} F(z_0 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{k_{i,j}} (\varphi^i_l \phi_i) t^l + \sum_{l=1}^{j} w_l t^l, \lambda_0 + \sum_{l=1}^{k_{n+1,j}} \lambda_l t^l) \\ \langle \phi_1, w_j \rangle \\ \vdots \\ \langle \phi_n, w_j \rangle \\ \lambda^2_{k_{n+1,j}} - 1 \end{pmatrix} \\ &\textit{wobei } k_{1,1}, \ldots, k_{n+1,1} := 1 \textit{ gelte} \end{aligned} \tag{5.2.16}$$

Die Terme $\varphi^1_{1,\ldots,k_{1,j-1}}, \ldots, \varphi^n_{1,\ldots,k_{n,j-1}}$ sowie $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k_{n+1,j-1}}$ und $w_1, \ldots, w_{j-1}$ wurden als Lösung der Gleichungen (5.2.11)-(5.2.13) gewählt. Der Unterschied zu Definition 4.1.6 besteht darin, daß hier der Anteil w in $\hat{F}_j$ mit aufgenommen wurde. Für $t = 0$ ist $\hat{F}_j$ unter der Voraussetzung $\hat{T}_1 = \ldots = \hat{T}_{j-1} = 0$ durch den Limes

$$\hat{F}_j(w_j, \varphi^1_{k_{1,j}}, \ldots, \varphi^n_{k_{n,j}}, \lambda_{k_{n+1,j}}, 0) := \begin{pmatrix} D_z F_0 w_j + r_j \\ \langle \phi_1, w_j \rangle \\ \vdots \\ \langle \phi_n, w_j \rangle \\ \lambda^2_{k_{n+1,j}} - 1 \end{pmatrix} \tag{5.2.17}$$

definiert. Mit diesen Definitionen gilt nun der entscheidende

Satz 5.2.3 *Sei J_j wie in (5.2.28) definiert, $F \in C^{j+1}$ und für geeignete $k_{1,j}, \ldots, k_{n+1,j} \in \mathbb{N}$ die Werte $\tilde{\varphi}^1_{1,\ldots,k_{1,j-1}}, \ldots, \tilde{\varphi}^n_{1,\ldots,k_{n,j-1}} \in \mathbb{C}$ und $\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_{k_{n+1,j-1}} \in \mathbb{C}$ sowie $\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_{j-1} \in X$ so gewählt, daß $\hat{T}_1 = \ldots = \hat{T}_{j-1} = 0$ und $\tilde{\lambda}_{k_{n+1,\nu}} * \det(J_\nu(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,\nu}}, \ldots, \tilde{\varphi}^n_{k_{n,\nu}}, \tilde{\lambda}_{k_{n+1,\nu}})) = 0, \quad \nu = 1, \ldots, j-1$ gilt[5]. Dann existiert der Limes $\lim_{t\to 0} \hat{F}_j$. Sei weiter $(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}}, \ldots, \tilde{\varphi}^n_{k_{n,j}}, \tilde{\lambda}_{k_{n+1,j}}) \in \mathbb{C}^{n+1}$ eine reguläre Lösung von (5.2.15), d.h. $\tilde{\lambda}_{k_{n+1,j}} * \det(J_j(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}}, \ldots, \tilde{\varphi}^n_{k_{n,j}}, \tilde{\lambda}_{k_{n+1,j}})) \neq 0$, so bestimmt diese Lösung eine abzweigende Lösungskurve, deren Approximation*

$$\left(z_0 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{k_{i,j}} (\tilde{\varphi}^i_l \phi_i) t^l + \sum_{l=1}^{j-1} \tilde{w}_l t^l, \lambda_0 + \sum_{i=1}^{k_{n+1,j}} \tilde{\lambda}_i t^i \right) \quad \text{für } t \in [-a, a], a \in \mathbb{R}^+ \tag{5.2.18}$$

lautet. Zur genaueren Approximation könnte man zusätzlich w_j mit Hilfe von (5.2.11)-(5.2.12) berechnen und hinzunehmen.

Beweis: Falls $\hat{T}_1 = \ldots = \hat{T}_{j-1} = 0$ gilt, so folgt:

$$F(\varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t), \lambda(t)) = \hat{T}_j \left(w_1, \ldots, w_j, \varphi^1_{1,\ldots,k_{1,\mu}}, \ldots, \varphi^n_{1,\ldots,k_{n,\mu}}, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k_{n+1,\mu}} \right) t^j + O(t^{j+1})$$

[5]Die Tilde soll anzeigen, daß für die entsprechenden Variablen bereits feste Werte berechnet wurden.

Damit ergibt sich:

$$\lim_{t\to 0}\hat{F}_j(w_j,\varphi^1_{k_{1,j}},\ldots,\varphi^n_{k_{n,j}},\lambda_{k_{n+1,j}},t)=\begin{pmatrix}\hat{T}_j(w_j,\varphi^1_{k_{1,j}},\ldots,\varphi^n_{k_{n,j}},\lambda_{k_{n+1,j}})\\ \langle\phi_1,w_j\rangle\\ \vdots\\ \langle\phi_n,w_j\rangle\\ \lambda^2_{k_{n+1,j}}-1\end{pmatrix} \tag{5.2.19}$$

Somit existiert der Limes und es gilt insbesondere mit $\hat{F}_j(w_j,\varphi^1_{k_{1,j}},\ldots,\varphi^n_{k_{n,j}},\lambda_{k_{n+1,j}},0):=\lim_{t\to 0}\hat{F}_j(w_j,\varphi^1_{k_{1,j}},\ldots,\varphi^n_{k_{n,j}},\lambda_{k_{n+1,j}},t)$, daß $\hat{F}_j(w_j,\varphi^1_{k_{1,j}},\ldots,\varphi^n_{k_{n,j}},\lambda_{k_{n+1,j}},t)\in C^1$ bzgl. t ist. Nun wird der Satz über implizite Funktionen auf $\hat{F}_j(w_j,\varphi^1_{k_{1,j}},\ldots,\varphi^n_{k_{n,j}},\lambda_{k_{n+1,j}},t)$ bzgl. $w_j,\varphi^1_{k_{1,j}},\ldots,\varphi^n_{k_{n,j}},\lambda_{k_{n+1,j}}$ im Punkte $t=0$ angewendet. Es bleibt zu zeigen, daß $D_{(w_j,\varphi^1_{k_{1,j}},\ldots,\varphi^n_{k_{n,j}},\lambda_{k_{n+1,j}})}\hat{F}_j(w_j,\varphi^1_{k_{1,j}},\ldots,\varphi^n_{k_{n,j}},\lambda_{k_{n+1,j}},0)$ in $(\tilde{w}_j,\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}},\ldots,\tilde{\varphi}^n_{k_{n,j}},\tilde{\lambda}_{k_{n+1,j}})$ bijektiv ist[6]. Es gilt:

$$\begin{aligned}&D_{(w_j,\varphi^1_{k_{1,j}},\ldots,\varphi^n_{k_{n,j}},\lambda_{k_{n+1,j}})}\hat{F}_j(\tilde{w}_j,\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}},\ldots,\tilde{\varphi}^n_{k_{n,j}},\tilde{\lambda}_{k_{n+1,j}},0)\\ &=\quad D_{(w_j,\varphi^1_{k_{1,j}},\ldots,\varphi^n_{k_{n,j}},\lambda_{k_{n+1,j}})}\begin{pmatrix}\hat{T}_j(w_j,\varphi^1_{k_{1,j}},\ldots,\varphi^n_{k_{n,j}},\lambda_{k_{n+1,j}})\\ \langle\phi_1,w_j\rangle\\ \vdots\\ \langle\phi_n,w_j\rangle\\ \lambda^2_{k_{n+1,j}}-1\end{pmatrix}\Bigg|_{(\tilde{w}_j\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}},\ldots,\tilde{\varphi}^n_{k_{n,j}},\tilde{\lambda}_{k_{n+1,j}})}\end{aligned} \tag{5.2.20}$$

$$=:\quad\begin{pmatrix}D_{w_j}F_0 & D_{\varphi^1_{k_{1,j}}}\hat{T}_j(.) & \ldots & D_{\varphi^n_{k_{n,j}}}\hat{T}_j(.) & D_{\lambda_{k_{n+1,j}}}\hat{T}_j(.)\\ \langle\phi_1,.\rangle & 0 & \ldots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots\\ \langle\phi_n,.\rangle & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 2\tilde{\lambda}_{k_{n+1,j}}\end{pmatrix} \tag{5.2.21}$$

[6]Dann existiert nach dem Satz über die inverse Funktion diese Inverse und ist zudem beschränkt. Damit läßt sich dann der Satz über implizite Funktionen auf $\hat{F}_j$ anwenden.

Infolge der Normierung ist $\tilde{\lambda}_{k_{n+1,j}} \neq 0$ und es bleibt zu zeigen, daß

$$A := \begin{pmatrix} D_{w_j} F_0 & D_{\varphi^1_{k_{1,j}}} \hat{T}_j(.) & \dots & D_{\varphi^n_{k_{n,j}}} \hat{T}_j(.) \\ \langle \phi_1, . \rangle & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \langle \phi_n, . \rangle & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{5.2.22}$$

bijektiv ist. Dies kann gezeigt werden, indem man für beliebige $(v, \gamma_1, \dots, \gamma_n) \in Y \times \mathbb{R}^n$ zeigt, daß das System

$$A \begin{pmatrix} u \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} \tag{5.2.23}$$

eindeutig nach $(u, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ lösbar ist. Betrachtet man das innere Produkt (üblicherweise das L^2-Produkt) der ersten Gleichung von (5.2.23) mit $\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_n$, so ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} \langle \hat{\phi}_1, \sum_{i=1}^n D_{\varphi^i_{k_{i,j}}} r_j \alpha_i \rangle \\ \vdots \\ \langle \hat{\phi}_n, \sum_{i=1}^n D_{\varphi^i_{k_{i,j}}} r_j \alpha_i \rangle \end{pmatrix} =: M \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \hat{\phi}_1, v \rangle \\ \vdots \\ \langle \hat{\phi}_n, v \rangle \end{pmatrix} \tag{5.2.24}$$

Nun gilt aber nach Konstruktion:

$$M \overset{!}{=} D_{(\varphi^1_{k_{1,j}}, \dots, \varphi^n_{k_{n,j}})} \begin{pmatrix} \langle \hat{\phi}_1, r_j \rangle \\ \vdots \\ \langle \hat{\phi}_n, r_j \rangle \end{pmatrix} \Bigg|_{(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}}, \dots, \tilde{\varphi}^n_{k_{n,j}}, \tilde{\lambda}_{k_{n+1,j}})} \overset{(5.2.15)}{\overset{(5.2.28)}{=}} J_j(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}}, \dots, \tilde{\varphi}^n_{k_{n,j}}, \tilde{\lambda}_{k_{n+1,j}}) \tag{5.2.25}$$

Diese Matrix ist nach Voraussetzung regulär, weil (5.2.15) in dieser Lösung regulär sein sollte. Also ist (5.2.24) eindeutig lösbar. Setzt man diese Lösung in (5.2.23) ein, so erhält man wiederum ein eindeutiges u. Also ist (5.2.23) für beliebige rechte Seiten eindeutig lösbar.

Somit ist $D_{(w_j,\varphi^1_{k_{1,j}},\ldots,\varphi^n_{k_{n,j}},\lambda_{k_{n+1,j}})}\hat{F}_j(w_j,\varphi^1_{k_{1,j}},\ldots,\varphi^n_{k_{n,j}},\lambda_{k_{n+1,j}},0)$ bijektiv in regulären Lösungen von (5.2.15). Damit kann der Satz über implizite Funktionen auf $\hat{F}_j$ in $t=0$ angewendet werden und es existiert für alle solche regulären Lösungen eine abzweigende Lösungskurve $(x(t)=(z(t),\lambda(t))$, deren Approximation:

$$\left(z_0+\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{k_{i,j}}(\tilde{\varphi}^i_l\phi_i)t^l+\sum_{l=1}^{j-1}\tilde{w}_l t^l,\lambda_0+\sum_{i=1}^{k_{n+1,j}}\tilde{\lambda}_i t^i\right) \text{ für } t\in[-a,a], a\in\mathbb{R}^+ \qquad (5.2.26)$$

ist. ■

Auf der Basis der Aussage von Satz 5.2.3 kann nun ein Algorithmus analog zu den endlichdimensionalen Algorithmen 2.2.10 und 4.1.8 formuliert werden, der in der Lage ist, für reguläre und singuläre Punkte die abzweigenden Lösungen zu berechnen. Er kann als eine **Verallgemeinerung des Satzes über implizite Funktionen in Banachräumen** angesehen werden.

Algorithmus 5.2.4 **Adaptive λ-Skalierung von Keimen in Banachräumen**

1. Schritt: *Setze* $j:=1$ *und* $k_{1,1}=\ldots=k_{n+1,1}=1$.

2. Schritt: *Bestimme alle* $(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}},\ldots,\tilde{\varphi}^n_{k_{n,j}},\tilde{\lambda}_{k_{n+1,j}})\in\mathbb{C}^{n+1}$ *für die gilt (siehe (5.2.15)):*

$$B_j(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}},\ldots,\tilde{\varphi}^n_{k_{n,j}},\tilde{\lambda}_{k_{n+1,j}})=0 \qquad (5.2.27)$$

Die Werte von $\tilde{\varphi}^1_{1,\ldots k_{1,j-1}},\ldots,\tilde{\varphi}^{n+1}_{1,\ldots k_{n+1,j-1}}\in\mathbb{C}$ *sowie* $\tilde{\lambda}_1,\ldots,\tilde{\lambda}_{k_{n+1,j-1}}$ *und* $\tilde{w}_1,\ldots,\tilde{w}_{j-1}$ *waren durch den Algorithmus schon so gewählt, daß bereits* $\hat{T}_1=\ldots=\hat{T}_{j-1}=0$ *und* $\tilde{\lambda}_{k_{n+1,\nu}}*\det(J_\nu(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,\nu}},\ldots,\tilde{\varphi}^n_{k_{n,\nu}},\tilde{\lambda}_{k_{n+1,\nu}}))=0,\quad \nu=1,\ldots,j-1$ *gilt.*

3. Schritt: *Führe folgende Schritte für alle Lösungen* $(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}},\ldots,\tilde{\varphi}^n_{k_{n,j}},\tilde{\lambda}_{k_{n+1,j}})$ *aus: Betrachte:*

$$\begin{aligned}&J_j(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}},\ldots,\tilde{\varphi}^n_{k_{n,j}},\tilde{\lambda}_{k_{n+1,j}})\\&\quad:=D_{(\varphi^1_{k_{1,j}},\ldots,\varphi^n_{k_{n,j}})}T_j(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}},\ldots,\tilde{\varphi}^n_{k_{n,j}},\tilde{\lambda}_{k_{n+1,j}})\end{aligned} \qquad (5.2.28)$$

Falls: $\det(J_j(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}}, \ldots, \tilde{\varphi}^n_{k_{n,j}}, \tilde{\lambda}_{k_{n+1,j}})) * \tilde{\lambda}_{k_{n+1,j}} \neq 0$*:*

Diese Lösung bestimmt eine abzweigende Kurve (siehe Satz 5.2.3), die wegen $\tilde{\lambda}_{k_{n+1,j}} \neq 0$ *bzgl.* λ *parametrisiert werden kann. Ihre Approximation lautet:*

$$\left(z_0 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{k_{i,j}} (\tilde{\varphi}^i_l \phi_i) t^l + \sum_{l=1}^{j-1} \tilde{w}_l t^l, \lambda_0 + \sum_{l=1}^{k_{n+1,j}} \tilde{\lambda}_l t^l \right) \qquad (5.2.29)$$

$$\text{für } t \in [-a, a], a \in \mathbb{R}^+$$

Stopp für diese spezielle Lösung.

sonst: $\det(J_j(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}}, \ldots, \tilde{\varphi}^n_{k_{n,j}}, \tilde{\lambda}_{k_{n+1,j}})) * \tilde{\lambda}_{k_{n+1,j}} = 0$*:*

Wegen $T_j(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}}, \ldots, \tilde{\varphi}^n_{k_{n,j}}, \tilde{\lambda}_{k_{n+1,j}}) = 0$ *gibt es (möglicherweise triviale) Bedingungen für die* $(\tilde{\varphi}^1_{k_{1,j}}, \ldots, \tilde{\varphi}^n_{k_{n,j}}, \tilde{\lambda}_{k_{n+1,j}})$*. Diese seien formuliert als*[7]*:*

$$\tilde{\varphi}^\mu_{k_{\mu,j}} = P_\mu(\tilde{\varphi}^1_{1,\ldots,k_{1,j}}, \ldots, \tilde{\varphi}^n_{1,\ldots,k_{n,j}}, \tilde{\lambda}_{1,\ldots,k_{n+1,j}}),\ \mu = 1, \ldots, n \qquad (5.2.30)$$

$$\tilde{\lambda}_{k_{n+1,j}} = P_{n+1}(\tilde{\varphi}^1_{1,\ldots,k_{1,j}}, \ldots, \tilde{\varphi}^n_{1,\ldots,k_{n,j}}, \tilde{\lambda}_{1,\ldots,k_{n+1,j}}) \qquad (5.2.31)$$

Ersetze alle $\tilde{\varphi}^\mu_{k_{\mu,j}}$ *durch* $P_\mu(\tilde{\varphi}^1_{1,\ldots,k_{1,j}}, \ldots, \tilde{\varphi}^{n+1}_{1,\ldots,k_{n+1,j}})$ *(analog auch für* $\tilde{\lambda}_{k_{n+1,j}}$*).*

Setze $k_{\mu,j+1} = \max\{0, l \in \mathbb{N} \mid \exists$ *Bedingung für* $\varphi^\mu_l\} + 1, \quad \mu = 1, \ldots, n.$

Setze $k_{n+1,j+1} = \max\{0, l \in \mathbb{N} \mid \exists$ *Bedingung für* $\lambda_l\} + 1.$

Damit sind wieder $n+1$ *Unbekannte gegeben.*

4. Schritt: *Berechne* $\tilde{w}_j$ *mit Hilfe der Gleichungen (5.2.11) - (5.2.12). Erhöhe* j *um* 1 *und gehe zum 2. Schritt.*

Bemerkung 5.2.5 *Im 4. Schritt von Algorithmus 5.2.4 muß im Falle der Nichtbestimmtheit* $\tilde{w}_j$ *berechnet werden. Da jedoch per Konstruktion* $\tilde{w}_j$ *ein multivariates Polynom in* $\varphi^1_{k_{1,j}}, \ldots, \varphi^n_{k_{n,j}}, \lambda_{k_{n+1,j}}$ *ist und diese Werte nicht bekannt sind, muß man dieses Polynom über die einzelnen Koeffizienten bestimmen. Aus (5.2.11) ergibt sich:*

$$D_z F_0 \tilde{w}_j = P(\varphi^1_{k_{1,j}}, \ldots, \varphi^n_{k_{n,j}}, \lambda_{k_{n+1,j}}), \qquad (5.2.32)$$

wobei P *ein multivariates Polynom vom maximalen Grad* j *ist, etwa*

$$P(\varphi^1_{k_{1,j}}, \ldots, \varphi^n_{k_{n,j}}, \lambda_{k_{n+1,j}}) = \sum_{\substack{(\gamma_1,\ldots,\gamma_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1} \\ \gamma_1 + \cdots + \gamma_{n+1} \leq j}} \alpha_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{n+1}} {\varphi^1_{k_{1,j}}}^{\gamma_1} \cdots {\varphi^n_{k_{n,j}}}^{\gamma_n} \lambda^{\gamma_{n+1}}_{k_{n+1,j}} \qquad (5.2.33)$$

[7] Falls keine Bedingungen für eine Variable $\tilde{\varphi}^\mu_{k_{\mu,j}}$ vorliegen, sei $P_\mu :\equiv \tilde{\varphi}^\mu_{k_{\mu,j}}$, analog für $\tilde{\lambda}_{k_{n+1,j}}$.

Um $\tilde{w}_j = \tilde{w}_j(\varphi^1_{k_{1,j}}, \ldots, \varphi^n_{k_{n,j}}, \lambda_{k_{n+1,j}})$ zu bestimmen, gilt es $\tilde{w}^{<j>}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{n+1}} \in M$ zu bestimmen, mit denen gilt:

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{(\gamma_1,\ldots,\gamma_{n+1})\in\mathbb{N}^{n+1}\\ \gamma_1+\cdots+\gamma_{n+1}\le j}} D_z F_0 \tilde{w}^{<j>}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{n+1}} {\varphi^1_{k_{1,j}}}^{\gamma_1} \cdots {\varphi^n_{k_{n,j}}}^{\gamma_n} \lambda^{\gamma_{n+1}}_{k_{n+1,j}} \\ &= \sum_{\substack{(\gamma_1,\ldots,\gamma_{n+1})\in\mathbb{N}^{n+1}\\ \gamma_1+\cdots+\gamma_{n+1}\le j}} \alpha_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{n+1}} {\varphi^1_{k_{1,j}}}^{\gamma_1} \cdots {\varphi^n_{k_{n,j}}}^{\gamma_n} \lambda^{\gamma_{n+1}}_{k_{n+1,j}} \end{aligned} \tag{5.2.34}$$

d.h., es müssen alle auftretenden Gleichungen der Form:

$$\begin{pmatrix} D_z F_0 \tilde{w}^{<j>}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{n+1}} \\ \langle \phi_1, \tilde{w}^{<j>}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{n+1}} \rangle \\ \vdots \\ \langle \phi_n, \tilde{w}^{<j>}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{n+1}} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{n+1}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.2.35}$$

gelöst werden, um w_j zu berechnen. Die Lösung dieser Gleichungssysteme, wie auch die Berechnung einer Basis von Kern $D_z F_0$ und N wird allerdings in realistischen Problemen nur auf numerische Weise möglich sein. Die dazu notwendige Übertragung des analytischen Problems in ein diskretisiertes Problem ist mit besonderer Sorgfalt vorzunehmen, um zu gewährleisten, daß das Verzweigungsszenario auf das diskrete Problem übertragen wird. Siehe dazu [ABM93c], [ABM95], [Böh89], [Böh93], [BM90].

Im nächsten Abschnitt soll nun Algorithmus 5.2.4 dazu benutzt werden, diejenigen Singularitäten zu klassifizieren, deren Kern-Dimension $n = 1$ ist.

5.3 Kern-Dimension 1

Da sich, wie im Abschnitt 5.1 dargestellt, das Problem (0.0.1) für $n = 1$ auf ein Problem der Form (5.1.14) reduzieren läßt, finden sich die Ergebnisse aus Abschnitt 3 hier wieder. Interessant ist jedoch zu sehen, wie die Ableitungen von f, die entscheidend für das Verzweigungsverhalten waren, in Termen von Ableitungen von F dargestellt werden können. Zur Vereinfachung der Notation sei definiert:

$$x(t) = (z_0 + v(t) + w(v(t), \lambda(t)), \lambda_0 + \lambda(t)) \tag{5.3.1}$$

$$:= (z_0 + \underbrace{\sum_{l=1}^{m_1} \alpha_l \phi t^l}_{v(t)} + \underbrace{\sum_{l=1}^{m_2} w_l t^l}_{w(v(t),\lambda(t))}, \lambda_0 + \underbrace{\sum_{l=1}^{m_3} \lambda_l t^l}_{\lambda(t)}) \tag{5.3.2}$$

$$m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{N} \tag{5.3.3}$$

Weiterhin sei definiert:

$$F^0_{z^j\lambda^i} := D_{z^j\lambda^i} F_0 = D_{z^j\lambda^i} F(z_0, \lambda_0) = D_{z^j\lambda^i} F(x_0) \tag{5.3.4}$$

$$u^T v =: \langle u, v \rangle \tag{5.3.5}$$

Damit ergibt sich zu Anfang für $j = 1$:

$r_1 = D_z F_0 \alpha_1 \phi + F^0_\lambda \lambda_1 = F^0_\lambda \lambda_1$

Damit ergibt sich (siehe (5.2.10) und (5.2.15)):

$T_1(\alpha_1, \lambda_1) = \hat{\phi}^T F^0_\lambda \lambda_1 = 0$

Es gilt also (siehe Kapitel 3): $\boxed{f^0_\lambda = \hat{\phi}^T F^0_\lambda}$

und damit:

$T_1(\alpha_1, \lambda_1) = f^0_\lambda \lambda_1 = 0$

Somit ergeben sich folgende Fallunterscheidungen:

$\underline{f^0_\lambda \neq 0}$**:** $\lambda_1 = 0$ ist zwar bestimmt, aber nicht λ-bestimmt. Weiterhin ergibt sich aus (5.2.11)-(5.2.12) auch $w_1 = 0$. Weiter bei $j = 2$ mit $k_{1,2} = 1, k_{2,2} = 2$ und $w_1 = 0$. Siehe [**A**].

$\underline{f^0_\lambda = 0}$**:** (α_1, λ_1) beliebig. Damit gilt: $w_1 = (D_z F_0|_M)^{-1} F^0_\lambda \lambda_1 = w_1^{<1>} \lambda_1$.

Weiter bei $j = 2$ mit $k_{1,2} = k_{2,2} = 1$. Siehe [**B**].

[**A**] Es gilt: $\lambda_1 = 0, w_1 = 0, f^0_\lambda \neq 0$

$r_2 = \frac{1}{2} F^0_{zz} \alpha_1^2 \phi^2 + F^0_\lambda \lambda_2$ und somit

$T_2(\alpha_1, \lambda_2) = \hat{\phi}^T (\frac{1}{2} F^0_{zz} \alpha_1^2 \phi^2 + F^0_\lambda \lambda_2) = 0$

Nach Voraussetzung ist $\hat{\phi}^T F^0_\lambda \neq 0$.

Es ist also zu unterscheiden (siehe Kapitel 3): $\boxed{f^0_{zz} = \hat{\phi}^T F^0_{zz}\phi^2}$

$\underline{f^0_{zz} \neq 0}$**:** $\alpha_1 = \pm\sqrt{-\frac{2f^0_\lambda}{f^0_{zz}}\lambda_2}$ λ-bestimmt. Dies ergibt mit $\delta := \sqrt{|\frac{2f^0_\lambda}{f^0_{zz}}|}$ die reellen Kurven:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} (z(t),\lambda(t)) & = & (z_0 \pm \delta\phi t, \lambda_0 + \mathrm{sgn}\left(-\frac{f^0_\lambda}{f^0_{zz}}\right)t^2) \\ & & +(O(t^2), O(t^3)) \\ \text{Normalform} & = & \pm z^2 \pm \lambda \ \textbf{Umkehrpunkt} \\ \text{Kodimension} & = & 0 \\ \text{Beispiel} & : & \text{siehe 3.1.2} \end{array}} \tag{5.3.6}$$

$\underline{f^0_{zz} = 0}$**:** $\lambda_2 = 0$ ist zwar bestimmt, aber nicht λ-bestimmt. Weiterhin ergibt sich aus (5.2.11)-(5.2.12) auch $w_2 = 0$. Weiter bei $j = 3$ mit $k_{1,3} = 1, k_{2,3} = 3$ und $w_2 = 0$. Siehe **[C]**.

[B] Es gilt: $f^0_\lambda = 0, w_1 = w_1^{<1>}\lambda_1$

$r_2 = \frac{1}{2}D^2F^0(w_1^{<1>},1)^2\lambda_1^2 + D_zDF^0(w_1^{<1>},1)\phi\alpha_1\lambda_1 + \frac{1}{2}F^0_{zz}\alpha_1^2\phi^2$

Es gilt also (siehe Kapitel 3): $\boxed{f^0_{zz} = \hat{\phi}^T F^0_{zz}\phi^2}$

$$\boxed{f^0_{z\lambda} = \hat{\phi}^T D_zDF^0(w_1^{<1>},1)\phi}$$

$$\boxed{f^0_{\lambda\lambda} = \hat{\phi}^T D^2F^0(w_1^{<1>},1)^2}$$

und damit

$T_2(\alpha_1,\lambda_1) = \frac{1}{2}f^0_{zz}\alpha_1^2 + f^0_{z\lambda}\alpha_1\lambda_1 + \frac{1}{2}f^0_{\lambda\lambda}\lambda_1^2 = 0$

Sei $\boxed{\triangle_2 := (f^0_{z\lambda})^2 - f^0_{zz}f^0_{\lambda\lambda}}$

$\underline{f^0_{zz} \neq 0}$**:**

$\underline{\triangle_2 \neq 0}$**:** $\alpha_1 = \delta_{1,2}\lambda_1$, $\delta_{1,2} := \frac{-f^0_{z\lambda} \pm \sqrt{\triangle_2}}{f^0_{zz}}$; $\delta_1 \neq \delta_2$ Diese Lösungen sind be-

stimmt und es ergibt sich:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} (z(t),\lambda(t)) & = & (z_0+\delta_{1,2}\phi t+w_1 t,\lambda_0+t)+O(t^2) \\ \text{Normalform} & = & \pm(z^2\pm\lambda^2)\ \textbf{transkritisch} \\ & & \textbf{oder isolierter Punkt} \\ \text{Kodimension} & = & 1 \\ \text{Bedingungen} & : & f^0_\lambda=0, \\ & & f^0_{zz}\neq 0, \triangle_2\neq 0 \\ \text{Beispiel} & : & \text{siehe } 3.1.3 \end{array}} \tag{5.3.7}$$

$\underline{\triangle_2=0\textbf{:}}$ $\alpha_1=-\frac{f^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}}\lambda_1$ ist doppelte Nullstelle von $T_2(z_1,\lambda_1)\stackrel{!}{=}(\alpha_1^2+\frac{f^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}}\lambda_1)^2$. Setzt man diese Lösung in r_2 ein, so erhält man

$$r_2=\left(\frac{1}{2}D^2F^0(w_1^{<1>},1)^2+D_zDF^0(w_1^{<1>},1)\phi\frac{f^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}}+\frac{1}{2}F^0_{zz}\frac{{f^0_{z\lambda}}^2}{{f^0_{zz}}^2}\phi^2\right)\lambda_1^2=:\xi_1\lambda_1^2.$$

Damit ergibt sich

$$w_2=w_1^{<2>}\lambda_1^2=(D_zF_0|_M)^{-1}\xi_1\lambda_1^2$$

Weiter nun bei $j=3$ mit $k_{1,3}=2,\ k_{2,3}=1$ und $\alpha_1=-\frac{f^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}}\lambda_1$. Siehe Punkt [**D**].

$\underline{f^0_{zz}=0\textbf{:}}$

$\underline{f^0_{z\lambda}\neq 0\textbf{:}}$ $\alpha_1=-\frac{f^0_{\lambda\lambda}}{2f^0_{z\lambda}}\lambda_1$ sowie $\lambda_1=0$. Beide Lösungen sind bestimmt. Die zweite jedoch ist noch nicht λ-bestimmt. Für diese Lösung ergibt sich

$$w_2=w_1^{<2>}\alpha_1^2=(D_zF_0|_M)^{-1}\left(\frac{1}{2}F^0_{zz}\phi^2\right)\alpha_1^2$$

und aus [A]:

$$w_1=w_1^{<1>}\lambda_1=0$$

Weiter für diese Lösung bei $j=3$ mit $k_{1,3}=1, k_{2,3}=2$. Siehe [**E**].

$\underline{f^0_{z\lambda} = 0}$**:**

$\underline{f^0_{\lambda\lambda} \neq 0}$**:** $\lambda_1 = 0$ ist doppelte Nullstelle und somit nicht bestimmt. Es ergibt sich für diese Lösung:

$$w_2 = w_1^{<2>}\alpha_1^2 = (D_z F_0|_M)^{-1}\left(\frac{1}{2}F^0_{zz}\phi^2\right)\alpha_1^2$$

und aus [A]:

$$w_1 = w_1^{<1>}\lambda_1 = 0$$

Weiter bei $j = 3$ mit $k_{1,3} = 1, k_{2,3} = 2$. Siehe Punkt [**F**].

$\underline{f^0_{\lambda\lambda} = 0}$**:** (α_1, λ_1) beliebig wegen $T_2(\alpha_1, \lambda_1) \equiv 0$ und somit nicht bestimmt. Damit ergibt sich

$$w_2 = w_1^{<2>}\alpha_1^2 + w_2^{<2>}\alpha_1\lambda_1 + w_3^{<2>}\lambda_1^2$$

mit

$$w_1^{<2>} = (D_z F_0|_M)^{-1}\left(\frac{1}{2}D^2F^0(w_1^{<1>}, 1)\right) \tag{5.3.8}$$

$$w_2^{<2>} = (D_z F_0|_M)^{-1}\left(D_u DF^0\phi w_1^{<1>}\right) \tag{5.3.9}$$

$$w_3^{<2>} = (D_z F_0|_M)^{-1}\left(\frac{1}{2}F^0_{zz}\phi^2\right) \tag{5.3.10}$$

Weiter mit dieser Lösung bei $j = 3$ mit $k_{1,3} = 1, k_{2,3} = 1$. Hier wird aber die Kodimension ≥ 4. Diese Singularitäten werden nicht weiter verfolgt. Siehe in Kapitel 3, Punkt [**G**].

[**C**] Es gilt: $f^0_{zz} = \lambda_1 = \lambda_2 = 0, w_1 = w_2 = 0, f^0_\lambda \neq 0$

$r_3 = \frac{1}{6}F^0_{zzz}\phi^3\alpha_1^3 + F^0_\lambda\lambda_3$

Es gilt also (siehe Kapitel 3): $\boxed{f^0_{zzz} = \hat{\phi}^T F^0_{zzz}\phi^3}$

und damit

$T_3(\alpha_1, \lambda_3) = \frac{1}{6}f^0_{zzz}\alpha_1^3 + f^0_\lambda\lambda_3 = 0$

$\underline{f^0_{zzz} \neq 0}$**:** $\alpha_1^3 = -\frac{6f^0_\lambda}{f^0_{zzz}}\lambda_3$. Dies sind zwei konjugiert komplexe und eine reelle

Lösung, die alle bestimmt sind. Sei $\delta = \sqrt[3]{\frac{6f^0_\lambda}{f^0_{zzz}}}$. Damit ergibt sich die Lösung:

$$\begin{array}{rcl} (z(t),\lambda(t)) & = & (z_0+\delta\phi t, \lambda_0+t^3)+(O(t^2),O(t^4)) \\ \text{Normalform} & = & \pm z^3 \pm \lambda \ \textbf{Hysteresis} \\ \text{Kodimension} & = & 1 \\ \text{Bedingungen} & : & f^0_{zz}=0, \\ & & f^0_{zzz}\neq 0, f^0_\lambda \neq 0 \\ \text{Beispiel} & : & \text{siehe 3.1.4} \end{array} \tag{5.3.11}$$

$\underline{f^0_{zzz}=0}$**:** Es gilt: $\boxed{f^0_{zj} = \hat{\phi}^T F^0_{zj}\phi^j}$

Dann gilt das folgende Lemma:

Lemma 5.3.1 *Seien für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ die Voraussetzungen $f^0_{z^2} = \ldots = f^0_{z^{n-1}} = 0, f^0_\lambda \neq 0$ erfüllt, so ergibt sich mit Algorithmus 5.2.4 $T_n(\alpha_1,\lambda_n) = \frac{1}{n!}f^0_{z^n}z_1^n + f^0_\lambda\lambda_n$ sowie $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$ und $k_{1,n} = 1, k_{2,n} = n$ und $w_1 = \ldots, w_{n-1} = 0$.*

Beweis: Mit Induktion: Für $n = 2, 3$ siehe Punkte [A] und [C].
Sei nun vorausgesetzt: $f^0_{z^2} = \ldots = f^0_{z^{n-1}} = 0, f^0_\lambda \neq 0$ und $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-2} = 0$ und $w_1 = \ldots, w_{n-2} = 0$. Wegen Induktionsvoraussetzung ist

$$r_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}F^0_{z^{n-1}}\phi^{n-1}\alpha_1^{n-1} + F^0_\lambda\lambda_{n-1}$$

und damit

$$T_{n-1}(z_1,\lambda_{n-1}) = \frac{1}{(n-1)!}f^0_{z^{n-1}}\alpha_1^{n-1} + f^0_\lambda\lambda_{n-1} = f^0_\lambda\lambda_{n-1}$$

Somit ist also auch $\lambda_{n-1} = 0$ und folglich auch $w_{n-1} = 0$ und es geht bei $j = n$ weiter mit $k_{1,n} = 1, k_{2,n} = n$. Bei Ordnung n sind nun die einzigen Unbekannten α_1 und λ_n. Da die Ordnung von $\alpha_1^l\lambda_n^s$ gleich $l + sn$ ist, gilt $l + sn = n$. Das ist nur für $l = 0, s = 1$ und $l = n, s = 0$ möglich. Damit sind die einzigen Terme, die in der Taylorentwicklung bzgl. t von F in der Ordnung n auftreten, die beiden folgenden:

$$r_n = \frac{1}{n!}F^0_{z^n}\phi^n\alpha_1^n + F^0_\lambda\lambda_n$$

und damit

$$T_n(z_1, \lambda_n) = \frac{1}{n!} f^0_{z^n} z_1^n + f^0_\lambda \lambda_n$$

Hiermit ist das Lemma bewiesen. ■

Sei nun für ein $n \in \mathbb{N}$ gegeben: $f^0_{z^2} = \ldots = f^0_{z^{n-1}} = 0, f^0_{z^n} \neq 0, f^0_\lambda \neq 0$. So ergibt sich nach dem Lemma bis Ordnung $n-1$ keine λ-Bestimmtheit. Bei Ordnung n hat man $T_n(z_1, \lambda_n) = \frac{1}{n!} f^0_{z^n} z_1^n + f^0_\lambda \lambda_n = 0$. Die Lösung lautet nun hier wie folgt:

1.): n gerade. Es gibt zwei reelle Lösungen $\alpha_1 = \pm \sqrt[n]{|\frac{n! f^0_\lambda}{f^0_{z^n}}|} =: \pm\delta$

2.): n ungerade. Es gibt eine reelle Lösung $\alpha_1 = \sqrt[n]{|\frac{n! f^0_\lambda}{f^0_{z^n}}|} =: \delta$

Beide abzweigenden Kurven lassen sich für beide Fälle darstellen als:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} (z(t), \lambda(t)) & = & (z_0 + \delta\phi t, \lambda_0 + t^n) + (O(t^2), O(t^{n+1})) \\ \text{Normalform} & = & \pm z^n \pm \lambda \\ \text{Kodimension} & = & n-2 \\ \text{Bedingungen} & : & f^0_{zz} = \ldots = f^0_{z^{n-1}} = 0, \\ & & f^0_{z^n} \neq 0, f^0_\lambda \neq 0 \\ \text{Beispiele} & : & \text{siehe 3.1.5 und 3.1.6} \end{array}} \tag{5.3.12}$$

[D] Es gilt: $f^0_\lambda = \triangle_2 = 0, f^0_{zz} \neq 0, \alpha_1 = -\frac{f^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}}\lambda_1, w_1 = w_1^{<1>}\lambda_1, w_2 = w_1^{<2>}\lambda_1^2$
$r_3 = \xi_2\lambda_1^3 + \xi_3\alpha_2\lambda_1$
mit

$$\boxed{\xi_2 := D^2F^0(w_1^{<1>} - \tfrac{f^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}}\phi, 1)(w_1^{<2>}, 0) + \tfrac{1}{6}D^3F^0(w_1^{<1>} - \tfrac{f^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}}\phi, 1)^3}$$

$$\boxed{\xi_3 := D_zDF^0(-\tfrac{f^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}}\phi + w_1^{<1>}, 1)\phi}$$

Lemma 5.3.2 *Es gilt* $\hat{\phi}^T\xi_3 = 0$.

Beweis: Nach Kapitel 3.1 muß dies gelten. Dort trat kein z_2 in [D] auf!. Man kann dies nun nachrechnen:

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}^T\xi_3 &= \hat{\phi}^T F^0_{z\lambda}\phi + \hat{\phi}^T F^0_{zz}\phi(-\frac{f^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}}\phi + w_1^{<1>}) \\
&= \hat{\phi}^T F^0_{z\lambda}\phi - \frac{\hat{\phi}^T F^0_{zz}\phi^2 \cdot \hat{\phi}^T D_z DF^0(w_1^{<1>},1)\phi}{\hat{\phi}^T F^0_{zz}\phi^2} + \hat{\phi}^T F^0_{zz}\phi w_1^{<1>} \\
&= \hat{\phi}^T F^0_{z\lambda}\phi - \hat{\phi}^T D_z DF^0(w_1^{<1>},1)\phi + \hat{\phi}^T F^0_{zz}\phi w_1^{<1>} \\
&= \hat{\phi}^T F^0_{z\lambda}\phi - \hat{\phi}^T F^0_{zz}\phi w_1^{<1>} - \hat{\phi}^T F^0_{z\lambda}\phi + \hat{\phi}^T F^0_{zz}\phi_1 w_1^{<1>} \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

Es sei nun definiert (siehe Kapitel 3.1, Punkt [D]): $\boxed{\triangle_3 = \hat{\phi}^T\xi_2}$

Damit ergibt sich:

$T_3(\alpha_2,\lambda_1) = \triangle_3\lambda_1^3 = 0$

$\triangle_3 \neq 0$**:** $\lambda_1 = 0$ dreifache Nullstelle und somit unbestimmt. Hiermit ergibt sich $w_3 = 0$ und es geht weiter bei $j = 4$ mit $k_{1,4} = k_{2,4} = 2$. Siehe Punkt [**H1**].

$\triangle_3 = 0$**:** (α_2,λ_1) beliebig wegen $T_3(\alpha_2,\lambda_1) = 0$. Somit ist die Ableitung gleich Null in diesen Werten und es ergibt sich

$$w_3 = \left(D_z F_0|_M\right)^{-1}(\xi_2)\,\lambda_1^3 =: w_1^{<3>}\lambda_1^3$$

und es geht weiter bei $j = 4$ mit $k_{1,4} = 2,\ k_{2,4} = 1$ und $\alpha_1 = -\frac{f^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}}\lambda_1$ aus [B]. Siehe Punkt [**I**].

[**E**] Es gilt: $f^0_\lambda = f^0_{zz} = \lambda_1 = 0, f^0_{z\lambda} \neq 0, w_1 = 0, w_2 = w_1^{<2>}\alpha_1^2$

$r_3 = \left(\frac{1}{6}F^0_{zzz}\phi^3 + F^0_{zz}\phi w_1^{<2>}\right)\alpha_1^3 + F^0_{z\lambda}\phi\alpha_1\lambda_2$

Weiterhin gilt: $\boxed{\tilde{f}^0_{zzz} = \hat{\phi}^T\left(\frac{1}{6}F^0_{zzz}\phi^3 + F^0_{zz}\phi w_1^{<2>}\right)}$

$\boxed{\tilde{f}^0_{z\lambda} = \hat{\phi}^T F^0_{z\lambda}\phi}$

Damit ergibt sich:

$T_3(\alpha_1,\lambda_2) = \frac{1}{6}\tilde{f}^0_{zzz}\alpha_1^3 + \tilde{f}^0_{z\lambda}\alpha_1\lambda_2 = 0$

$\underline{\tilde{f}^0_{z\lambda} \neq 0}$**:**

$\underline{\tilde{f}^0_{zzz} \neq 0}$**:** $\alpha_1 = \pm\sqrt{-6\frac{\tilde{f}^0_{z\lambda}}{\tilde{f}^0_{zzz}}\lambda_2}$ und $\alpha_1 = 0$. Alle drei Lösungen sind λ-bestimmt. Dies ergibt mit $\delta := \sqrt{|6\frac{\tilde{f}^0_{z\lambda}}{\tilde{f}^0_{zzz}}|}$ die Kurven:

$$\begin{array}{rcl}
(z(t),\lambda(t)) & = & (z_0 + \delta\phi t + w_1 t + w_2 t^2, \\
 & & \lambda_0 + \mathrm{sgn}\left(-\frac{\tilde{f}^0_{z\lambda}}{\tilde{f}^0_{zzz}}\right)t^2) + (O(t^2), O(t^3)) \text{ und} \\
(z(t),\lambda(t)) & = & (0, t^2) + (O(t^2), O(t^3)) \\
\text{Normalform} & = & \pm z^3 \pm \lambda z \ \textbf{Pitchfork} \\
\text{Kodimension} & = & 2 \\
\text{Bedingungen} & : & f^0_\lambda = f^0_{zz} = 0, \\
 & & \tilde{f}^0_{zzz} \neq 0, f^0_{z\lambda} \neq 0 \\
\text{Beispiel} & : & \text{siehe 3.1.7}
\end{array} \tag{5.3.13}$$

$\underline{\tilde{f}^0_{zzz} = 0}$**:** $\alpha_1 = 0$ und $\lambda_2 = 0$. Die triviale Lösung $(0,\lambda)$ ist hierbei λ-bestimmt. Die zweite Lösung $\lambda_2 = 0$ ist zwar bestimmt, aber nicht λ-bestimmt. Für diese Lösung ergibt sich:

$$w_3 = (D_z F_0|_M)^{-1}\left(\frac{1}{6}F^0_{zzz}\phi^3 + F^0_{zz}\phi w_1^{<2>}\right)\alpha_1^3 =: w_1^{<3>}\alpha_1^3$$

Damit geht es weiter bei $j = 4$ mit $k_{1,4} = 1$ und $k_{2,4} = 3$. Siehe Punkt **[J]**.

$\underline{\tilde{f}^0_{z\lambda} = 0}$**:** Dieser Fall kommt in Kapitel 3.1 nicht vor. Hier kann aber $\tilde{f}^0_{z\lambda} = 0$ sein, wenn schon galt:

$F^0_\lambda \neq 0$, $\hat{\phi}^T F^0_\lambda = 0, w_1^{<1>} = (D_z F_0|_M)^{-1} F^0_\lambda \neq 0$ und damit in [B] $f^0_{z\lambda} = \hat{\phi}^T(F^0_{zz} w_1^{<1>}\phi) \neq 0$

$\underline{\tilde{f}^0_{zzz} \neq 0}$**:** $\alpha_1 = 0$ ist dreifache Nullstelle und somit nicht bestimmt. Damit gilt auch $w_3 = 0$. Weiter bei $j = 4$ mit $k_{1,4} = k_{2,4} = 2$. Weiter bei **[H2]**.

$\underline{\tilde{f}^0_{zzz} = 0}$**:** Kodimension ≥ 4.

[F] Es gilt: $f^0_\lambda = f^0_{zz} = f^0_{z\lambda} = \lambda_1 = 0, f^0_{\lambda\lambda} \neq 0, w_1 = 0, w_2 = w_1^{<2>}\alpha_1^2$

$r_3 = \left(\frac{1}{6}F^0_{zzz}\phi^3 + f^0_{zz}\phi w_1^{<2>}\right)\alpha_1^3 + F^0_{z\lambda}\phi\alpha_1\lambda_2$

Damit ergibt sich:

$T_3(\alpha_1, \lambda_2) = \frac{1}{6}\tilde{f}^0_{zzz}\alpha_1^3 + \tilde{f}^0_{z\lambda}\alpha_1\lambda_2 = 0$

Hier zeigt sich wieder eine Abweichung zu den Ergebnissen aus Kapitel 3.1. Dort ist in Punkt [F] der zweite Summand $f^0_{z\lambda} = 0$. Hier ist das nicht unbedingt gegeben. Mit [B] gilt:

$$w_1^{<1>} = 0 \Rightarrow f^0_{z\lambda} = \hat{\phi}^T D_z DF^0(w_1^{<1>}, 1)\phi = \tilde{f}^0_{z\lambda} = 0$$

Da in Kapitel 3.1 $w_1^{<1>} = 0$ gilt (Der Bildraum ist trivial), fällt dort $\tilde{f}^0_{z\lambda}$ immer weg. Hier jedoch könnte $\tilde{f}^0_{z\lambda} \neq 0$ sein und man muß auch diesen Fall unterscheiden:

$\underline{\tilde{f}^0_{zzz} \neq 0}$**:**

$\underline{\tilde{f}^0_{z\lambda\neq 0}}$**:** $\alpha_1 = \pm\sqrt{-6\frac{\tilde{f}^0_{z\lambda}}{\tilde{f}^0_{zzz}}}\lambda_2$ und $\alpha_1 = 0$. Alle drei Lösungen sind λ-bestimmt.

Dies ergibt mit $\delta := \sqrt{|6\frac{\tilde{f}^0_{z\lambda}}{\tilde{f}^0_{zzz}}|}$ die Kurven:

$$\begin{array}{rcl}
(z(t), \lambda(t)) & = & (z_0 + \delta\phi t + w_1 t + w_2 t^2, \\
 & & \lambda_0 + \operatorname{sgn}\left(-\frac{\tilde{f}^0_{z\lambda}}{\tilde{f}^0_{zzz}}\right)t^2) + (O(t^2), O(t^3)) \text{ und} \\
(z(t), \lambda(t)) & = & (0, t^2) + (O(t^2), O(t^3) \\
\text{Normalform} & = & \pm z^3 \pm \lambda z \ \textbf{Pitchfork} \\
\text{Kodimension} & = & 2 \\
\text{Bedingungen} & : & f^0_\lambda = f^0_{zz} = 0, \\
 & & \tilde{f}^0_{zzz} \neq 0, \tilde{f}^0_{z\lambda} \neq 0 \\
\text{Beispiel} & : & \text{siehe 3.1.7}
\end{array} \tag{5.3.14}$$

Also ergibt sich hier eine besondere Form der Pitchfork Verzweigung!

$\underline{\tilde{f}^0_{z\lambda=0}}$**:**

$x_1 = 0$ dreifache Lösung, also unbestimmt, da Ableitung gleich Null an dieser Stelle. Ebenso ergibt sich $w_3 = 0$. Also weiter bei $j = 4$ mit $k_{1,4} = 2$ und $k_{2,4} = 2$. Dies ergibt:

$r_4 = \frac{1}{2}F^0_{zz}\phi^2\alpha_2^2 + F^0_{z\lambda}\phi\alpha_2\lambda_2 + \frac{1}{2}F^0_{\lambda\lambda}\lambda_2^2$

und somit mit $f^0_{zz} = 0$ aus [B] $\tilde{f}^0_{z\lambda} = 0$

$T_4(\alpha_2, \lambda_2) = \frac{1}{2}f^0_{\lambda\lambda}\lambda_2^2 = 0$

Es gilt: $\boxed{\tilde{f}^0_{\lambda\lambda} = \hat{\phi}^T F^0_{\lambda\lambda}}$

$\underline{\tilde{f}^0_{\lambda\lambda} = 0}$**:** Nur wenn $w_1^{<1>} \neq 0$. Aber dann ist die Kodimension ≥ 4 und die Berechnung wird gestoppt.

$\underline{\tilde{f}^0_{\lambda\lambda} \neq 0}$**:** $\lambda_2 = 0$ ist doppelte Nulltstelle und somit auch nicht bestimmt. Für diese Lösung ergibt sich:

$$w_4 = (D_z F_0|_M)^{-1} \left(\frac{1}{2} F^0_{zz}\phi^2\right) \alpha_2^2 =: w_1^{<4>}\alpha_2^2 \stackrel{!}{=} w_1^{<2>}\alpha_2^2$$

Weiter bei $j = 5$ mit $k_{1,5} = 2$ und $k_{2,5} = 3$. Dies ergibt:
$r_5 = F^0_{z\lambda}\phi\lambda_3\alpha_2$
und somit
$T_5(z_2, \lambda_3) = \tilde{f}^0_{z\lambda}\lambda_3\alpha_2 = 0$
Hier ist (α_2, λ_3) beliebig. Damit ergibt sich

$$w_5 = (D_z F_0|_M)^{-1} F^0_{z\lambda}\phi\alpha_2\lambda_3 =: w_1^{<5>}\alpha_2\lambda_3$$

Weiter bei $j = 6$ mit $k_{1,6} = 2$ und $k_{2,6} = 3$. Dies ergibt:
$r_6 = \frac{1}{6}F^0_{zzz}\alpha_2^3 + \frac{1}{2}F^0_{z\lambda}\lambda_3^2$
Da $\tilde{f}^0_{zzz}$ und $\tilde{f}^0_{z\lambda}$ ungleich 0 sind, ergibt sich hier:
$T_6(\alpha_2, \lambda_3) = \frac{1}{6}\tilde{f}^0_{zzz}\alpha_2^3 + \frac{1}{2}\tilde{f}^0_{\lambda\lambda}\lambda_3^2 = 0$
Die reelle Lösung ist $\alpha_2 = \sqrt[3]{-\frac{3\tilde{f}^0_{\lambda\lambda}}{\tilde{f}^0_{zzz}}}\lambda_3^2$. Mit $\delta := \sqrt[3]{-\frac{3\tilde{f}^0_{\lambda\lambda}}{\tilde{f}^0_{zzz}}}$ ergeben sich somit die Lösungen

$(z(t), \lambda(t))$	$=$	$(z_0 + \pm\delta\phi t^2 + w_1 t + w_2 t^2, \lambda_0 + t^3) +$	
		$(O(t^3), O(t^4))$	
Normalform	$=$	$z^3 \pm \lambda^2$ **Kuspe**	
Kodimension	$=$	3	(5.3.15)
Bedingungen	:	$f^0_\lambda = f^0_{z\lambda} = f^0_{zz} = 0,$	
		$\tilde{f}^0_{zzz} \neq 0, \tilde{f}^0_{\lambda\lambda} \neq 0$	
Beispiel	:	siehe 3.1.8	

$\underline{\tilde{f}^0_{zzz} = 0}$**:** (α_1, λ_2) beliebig. Kodimension ≥ 4. Diese Singularitäten werden nicht weiter verfolgt.

[H1] Es gilt: $f^0_\lambda = \triangle_2 = \alpha_1 = \lambda_1 = 0, f^0_{zz} \neq 0, \triangle_3 \neq 0, w_1 = w_2 = w_3 = 0$

$r_4 = \frac{1}{2}F^0_{zz}\phi^2\alpha_2^2 + F^0_{z\lambda}\phi\alpha_2\lambda_2 + \frac{1}{2}F^0_{\lambda\lambda}\lambda_2^2$

Weiter gilt: $\boxed{\tilde{\triangle}_2 = (\tilde{f}^0_{z\lambda})^2 - f^0_{zz}\tilde{f}^0_{\lambda\lambda}}$

Damit ergibt sich

$T_4(\alpha_2, \lambda_2) = \frac{1}{2}f^0_{zz}\alpha_2^2 + \tilde{f}^0_{z\lambda}\alpha_2\lambda_2 + \frac{1}{2}\tilde{f}^0_{\lambda\lambda}\lambda_2^2$

$\underline{\tilde{\triangle}_2 \neq 0}$**:** Dies tritt nur auf, wenn $w_1^{<1>} \neq 0$ ist, sonst wäre $\tilde{f}^0_{\lambda\lambda} = f^0_{la\lambda}, \tilde{f}^0_{z\lambda} = f^0_{z\lambda}$ und somit $\tilde{\triangle}_2 = \triangle_2 = 0$. Hier aber ist

$\alpha_2 = \delta_{1,2}\lambda_2,\ \delta_{1,2} := \frac{-\tilde{f}^0_{z\lambda} \pm \sqrt{\tilde{\triangle}_2}}{f^0_{zz}};\ \delta_1 \neq \delta_2$ Diese Lösungen sind bestimmt und es ergibt sich:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} (z(t), \lambda(t)) & = & (z_0 + \delta_{1,2}\phi t^2, \lambda_0 \pm t^2) + O(t^3) \\ \text{Normalform} & = & \pm(z^2 \pm \lambda^2)\ \textbf{transkritisch} \\ \text{Kodimension} & = & 1 \\ \text{Bedingungen} & : & f^0_\lambda = (\triangle_2 = 0), \\ & & f^0_{zz} \neq 0, \tilde{\triangle}_2 \neq 0, \triangle_3 \neq 0 \\ \text{Beispiel} & : & \text{siehe 3.1.3} \end{array}} \tag{5.3.16}$$

Die Bedingung $\triangle_2 = 0$ wurde in Klammern gesetzt, da sie nicht zur Kodimension beiträgt. Gilt Sie nämlich nicht, so ist die Verzweigung trotzdem transkritisch. Dann wäre schon bei Punkt [B] und $f^0_{zz} \neq 0, \triangle_2 \neq 0$ gestoppt worden.

$\underline{\tilde{\triangle}_2 = 0}$**:** $T_4(z_2, \lambda_2) = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \frac{\tilde{f}^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}}\lambda_2)^2 = 0$

Die einzige Nullstelle ist $\alpha_2 = -\frac{\tilde{f}^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}}\lambda_2$. Da sie doppelt ist, ist diese Lösung noch nicht bestimmt.

Definiere: $\boxed{\xi_4 := \frac{1}{2}F^0_{zz}\phi^2\left(\frac{\tilde{f}^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}}\right)^2 - F^0_{z\lambda}\phi\frac{\tilde{f}^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}} + \frac{1}{2}F^0_{\lambda\lambda}}$

Damit ergibt sich

$$w_4 = (D_z F_0|_M)^{-1}\xi_4\lambda_2^2 =: w_1^{<4>}\lambda_2^2$$

Weiter bei $j = 5$ mit $k_{1,5} = 3, k_{2,5} = 2$ und $\alpha_2 = -\frac{\tilde{f}^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}}\lambda_2$. Das ergibt:

$$r_5 = \underbrace{\left(F^0_{z\lambda}\phi - F^0_{zz}\phi^2\frac{\tilde{f}^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}}\right)}_{=:\xi_5}\alpha_3\lambda_2$$

und damit

$T_5(z_3,\lambda_2) = \left(\hat\phi^T F^0_{z\lambda}\phi - \hat\phi^T F^0_{zz}\phi^2 \frac{\hat\phi^T F^0_{z\lambda}\phi}{\hat\phi^T F^0_{zz}\phi^2}\right)\alpha_3\lambda_2 \equiv 0.$

Keine Informationen für (α_3,λ_2). Für w_5 ergibt sich:

$$w_5 = (D_zF_0|_M)^{-1}\xi_5\alpha_3\lambda_2 =: w_1^{<5>}\alpha_3\lambda_2$$

Weiter bei $j=6$ mit $k_{1,6}=3, k_{2,6}=2$ und $\alpha_2 = -\frac{\tilde f^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}}\lambda_2$. Das ergibt:

$r_6 = \frac{1}{6}D^3F^0(-\frac{\tilde f^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}}\phi,1)^3\lambda_2^3 + \frac{1}{2}F^0_{zz}\phi^2\alpha_3^2$

Definiere: $\boxed{\tilde\triangle_3 = \hat\phi^T D^3F^0(-\frac{\tilde f^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}}\phi,1)^3}$

Damit gilt:

$T_6(z_3,\lambda_2) = \frac{1}{2}f^0_{zz}\alpha_3^2 + \triangle_3\lambda_2^3 = 0$

$\underline{\tilde\triangle_3 = 0}$**:** Nur wenn $w_1^{<2>}, w_1^{<1>} \neq 0$. Ansonsten gilt $\tilde\triangle_3 = \triangle_3 = 0$. Da sich hier eine Kodimension ≥ 4 ergibt, wird hier nicht weiterverfolgt.

$\underline{\tilde\triangle_3 \neq 0}$**:** Wegen [B] ist $f^0_{zz}\neq 0$. Damit gibt es die Lösungen $\alpha_3 = \pm\sqrt{\frac{2\tilde\triangle_3}{f^0_{zz}}\lambda_2^3}$. Sei $\delta := \sqrt{|\frac{2\tilde\triangle_3}{f^0_{zz}}|}$. Dann lauten die Kurven:

$$\boxed{\begin{array}{rcl}(z(t),\lambda(t)) &=& (z_0+\delta\phi t^3 + w_1t + w_2t^2,\\ && \lambda_0 - \operatorname{sgn}\left(\frac{2\tilde\triangle_3}{f^0_{zz}}\right)t) + (O(t^4,),O(t^2))\\ \text{Normalform} &=& \pm z^2 \pm \lambda^3 \ \textbf{Asymmetrische Kuspe}\\ \text{Kodimension} &=& 2\\ \text{Bedingungen} &:& f^0_\lambda = \triangle_2 = 0,\\ && f^0_{zz}\neq 0, \triangle_3 \neq 0\\ \text{Beispiel} &:& \text{siehe 3.1.10}\end{array}} \qquad (5.3.17)$$

[H2] Es gilt: $f^0_\lambda = f^0_{zz} = \lambda_1 = \alpha_1 = 0, \tilde f^0_{z\lambda}\neq 0, \tilde f^0_{zzz}\neq 0, w_1 = w_2 = w_3 = 0$

$r_4 = \frac{1}{2}F^0_{zz}\phi^2\alpha_2^2 + F^0_{z\lambda}\phi\alpha_2\lambda_2 + \frac{1}{2}F^0_{\lambda\lambda}\lambda_2^2$

Damit ergibt sich

$T_4(\alpha_2,\lambda_2) = \tilde f^0_{z\lambda}\alpha_2\lambda_2 + \frac{1}{2}\tilde f^0_{\lambda\lambda}\lambda_2^2$

Wegen $\tilde f^0_{z\lambda}\neq 0$ sind $\alpha_2 = 0$ und $\lambda_2 = 0$ die Lösungen. Die erste Lösung ist hierbei λ-bestimmt. Die zweite Lösung $\lambda_2 = 0$ ist zwar bestimmt, aber nicht λ-bestimmt. Für diese Lösung ergibt sich:

$$w_4 = 0$$

Damit geht es weiter bei $j = 4$ mit $k_{1,5} = 2$ und $k_{2,5} = 3$.

Es ergibt sich

$r_5 = F^0_{z\lambda}\phi\alpha_2\lambda_3$ und

$T_5(\alpha_2, \lambda_3) = \tilde{f}^0_{z\lambda}\alpha_2\lambda_3 = 0$

Die Lösung $\alpha_2 = 0$ ist λ-bestimmt. Die Lösung $\lambda_3 = 0$ ist bestimmt, aber nicht λ-bestimmt. Weiter bei $j = 5$ mit $k_{1,6} = 2$ und $k_{2,6} = 4$.

Es ergibt sich

$r_6 = \frac{1}{6}F^0_{zzz}\phi^3\alpha_2^3 + F^0_{z\lambda}\phi\alpha_2\lambda_4$ und

$T_6(\alpha_2, \lambda_4) = \frac{1}{6}\tilde{f}^0_{zzz}\alpha_2^3 + \tilde{f}^0_{z\lambda}\alpha_2\lambda_4 = 0$

Die Lösung $\alpha_2 = 0$ ist wieder λ-bestimmt. Die andere Lösung $\lambda_4 = -\frac{\tilde{f}^0_{zzz}}{6\tilde{f}^0_{z\lambda}}\alpha_2^2$ ist ebenfalls λ-bestimmt.

Damit ergeben sich mit $\delta := -\frac{\tilde{f}^0_{zzz}}{6\tilde{f}^0_{z\lambda}}$ die Kurven:

$(z(t), \lambda(t))$	$=$	$(z_0 \pm t^2, \lambda_0 + \delta t^4) + (O(t^3), O(t^5))$ und
$(z(t), \lambda(t))$	$=$	$(z_0, \lambda_0 t^3) + (O(t^3), O(t^4))$
Normalform	$=$	$\pm z^3 \pm \lambda z$ **Pitchfork**
Kodimension	$=$	2
Bedingungen	:	$f^0_\lambda = f^0_{zz} = 0,$
		$\tilde{f}^0_{zzz} \neq 0, \tilde{f}^0_{z\lambda} \neq 0$
Beispiel	:	siehe 3.1.7

(5.3.18)

[I] Es gilt: $f^0_\lambda = \triangle_2 = \triangle_3 = 0, f^0_{zz} \neq 0, \alpha_1 = -\frac{f^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}}\lambda_1, w_1 = w_1^{<1>}\lambda_1, w_2 = w_1^{<2>}\lambda_1^2, w_3 = w_1^{<3>}\lambda_1^3$

$$\begin{aligned} r_4 \quad = \quad & \frac{1}{2}F^0_{zz}\phi^2\alpha_2^2 + \\ & \left(\frac{1}{2}D^3F^0(w_1^{<1>} - \frac{f^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}}\phi, 1)^2(\phi, 0) + F^0_{zz}\phi^2 w_1^{<2>}\right)\alpha_2\lambda_2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Big(D^2F^0(w_1^{<1>} - \frac{f^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}}\phi, 1)(w_1^{<3>}, 0) + \frac{1}{2}F^0_{zz}(w_1^{<2>})^2 + \\
&\frac{1}{2}D^3F^0(w_1^{<1>} - \frac{f^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}}\phi, 1)^2(w_1^{<2>}, 1) + \\
&\frac{1}{24}D^4F^0(w_1^{<1>} - \frac{f^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}}\phi, 1)\Big)\lambda_1^4 \\
=:\ &\frac{1}{2}F^0_{zz}\phi\alpha_2^2 + \xi_6\alpha_2\lambda_1 + \frac{1}{2}\xi_7\lambda_1^4
\end{aligned} \tag{5.3.19}$$

Definiere:

$$\boxed{\kappa_1 := \hat{\phi}^T\xi_6}$$

$$\boxed{\kappa_2 := \hat{\phi}^T\xi_7}$$

$$\boxed{\triangle_4 = \kappa_1^2 - f^0_{zz}\kappa_2}$$

Damit gilt dann:

$T_4(\alpha_2, \lambda_1) = \frac{1}{2}f^0_{zz}\alpha_2^2 + \kappa_1\alpha_2\lambda_1 + \frac{1}{2}\kappa_2\lambda_1^4 = 0$

Nach [B] gilt: $f^0_{zz} \neq 0$. Es muß nur $\triangle_4$ betrachtet werden:

$\underline{\triangle_4 \neq 0}$**:** Die Lösung ist $\alpha_2 = \left(-\frac{1}{2}\frac{\kappa_1}{f^0_{zz}} \pm \frac{\sqrt{\triangle_4}}{f^0_{zz}}\right)\lambda_1^2 =: \delta_{1,2}\lambda_1^2$. Diese Lösungen sind einfach, also bestimmt und insbesondere λ-bestimmt. Als abzweigende Kurven ergeben sich somit:

$$\begin{array}{rcl}
(z(t), \lambda(t)) & = & (z_0 + \delta_{1,2}\phi t^2 + w_1 t + w_2 t^2 + w_3 t^3, \lambda_0 + t) + \\
& & (O(t^3), O(t^2)) \\
\text{Normalform} & = & \pm z^2 \pm \lambda^4 \\
\text{Kodimension} & = & 3 \\
\text{Bedingungen} & : & f^0_\lambda = \triangle_2 = \triangle_3 = 0, \\
& & \triangle_4 \neq 0, f^0_{zz} \neq 0 \\
\text{Beispiel} & : & \text{siehe 3.1.11}
\end{array} \tag{5.3.20}$$

$\underline{\triangle_4 = 0}$**:** Die Lösung $\alpha_2 = -(\frac{1}{2}\frac{\kappa_1}{f^0_{zz}})\lambda_1^2$ ist doppelt und somit nicht bestimmt. Wegen $f^0_\lambda = \triangle_2 = \triangle_3 = \triangle_4 = 0$ ist die Kodimension mindestens 4. Diese Singularitäten werden hier nicht weiter verfolgt.

[J] Es gilt: $f^0_\lambda = f^0_{zz} = \tilde{f}^0_{zzz} = \lambda_1 = 0, f^0_{z\lambda} \neq 0, \tilde{f}^0_{z\lambda} \neq 0, w_1 = 0, w_2 = w_1^{<2>}\alpha_1^2$

$$r_4 = \underbrace{\left(\frac{1}{24}F^0_{z^4}\phi^4 + F^0_{zz}\phi w_1^{<3>} + \frac{1}{2}F^0_{zz}(w_1^{<2>})^2 + \frac{1}{2}F^0_{zzz}\phi^2 w_1^{<2>}\right)}_{=:\xi_8}\alpha_1^4 + F^0_{z\lambda}\phi\alpha_1\lambda_3$$

Definiere: $\boxed{\kappa_3 := \hat{\phi}^T\xi_8}$

Damit gilt:

$T_4(\alpha_1,\lambda_3) = \kappa_3\alpha_1^4 + \tilde{f}^0_{z\lambda}\alpha_1\lambda_3 = 0$

$\underline{\kappa_3 \neq 0}$**:**

Damit gibt es die Lösungen $\alpha_1 = \sqrt[3]{-\frac{\tilde{f}^0_{z\lambda}}{\kappa_3}\lambda_3}$ und $\alpha_1 = 0$. Diese sind alle einfach.

Mit $\delta := \sqrt[3]{|\frac{\tilde{f}^0_{z\lambda}}{\kappa_3}|}$ lauten die reellen Kurven:

$$\boxed{\begin{array}{rcl}
(z(t),\lambda(t)) &=& (z_0 + \delta\phi t + w_1 t + w_2 t^2, \lambda_0 - \operatorname{sgn}\left(-\frac{\tilde{f}^0_{z\lambda}}{\kappa_3}\right)t^3) + \\
& & (O(t^2,),O(t^4)) \\
& & \text{und} \\
(z(t),\lambda(t)) &=& (0,t^3) + O(t^2,),O(t^4)) \\
\text{Normalform} &=& \pm z^4 \pm \lambda z \\
\text{Kodimension} &=& 3 \\
\text{Bedingungen} &:& f^0_\lambda = f^0_{zz} = \tilde{f}^0_{zzz} = 0, \\
& & \kappa_3 \neq 0, \tilde{f}^0_{z\lambda} \neq 0 \\
\text{Beispiel} &:& \text{siehe 3.1.12}
\end{array}} \qquad (5.3.21)$$

$\underline{\kappa_3 = 0}$**:** Kodimension ≥ 4.

Damit sind alle Singularitäten bis einschließlich zur Kodimension 3 bestimmt worden. Nun werden noch einmal alle Ergebnisse in Termen von F zusammengefaßt. Dabei werden die Bezeichnungen von oben übernommen:

$$f^0_\lambda = \hat{\phi}^T F^0_\lambda \qquad (5.3.22)$$
$$f^0_{z\lambda} = \hat{\phi}^T D_z DF^0(w_1^{<1>},1)\phi \qquad (5.3.23)$$
$$f^0_{\lambda\lambda} = \hat{\phi}^T D^2F^0(w_1^{<1>},1)^2 \qquad (5.3.24)$$
$$f^0_{z^j} = \hat{\phi}^T F^0_{z^j}\phi^j \qquad (5.3.25)$$

$$\tilde{f}^0_{zzz} = \hat{\phi}^T \left(\frac{1}{6} F^0_{zzz} \phi^3 + F^0_{zz} \phi w_1^{<2>} \right) \tag{5.3.26}$$

$$\tilde{f}^0_{z\lambda} = \hat{\phi}^T F^0_{z\lambda} \phi \tag{5.3.27}$$

$$\tilde{f}^0_{\lambda\lambda} = \hat{\phi}^T F^0_{\lambda\lambda} \tag{5.3.28}$$

Mit (5.3.4) gilt dann:

$\boxed{\pm z^2 \pm \lambda}$

$$\hat{\phi}^T F^0_{\lambda} \neq 0 \tag{5.3.29}$$

$$\hat{\phi}^T F^0_{zz} \phi^2 \neq 0 \tag{5.3.30}$$

$\boxed{\pm z^n \pm \lambda}$

$$\hat{\phi}^T F^0_{z^j} \phi^j = 0,\ j = 1, \ldots, n-1 \tag{5.3.31}$$

$$\hat{\phi}^T F^0_{\lambda} \neq 0 \tag{5.3.32}$$

$$\hat{\phi}^T F^0_{z^n} \phi^n \neq 0 \tag{5.3.33}$$

$\boxed{\pm z^2 \pm \lambda^2}$

$$\hat{\phi}^T F^0_{\lambda} = 0 \tag{5.3.34}$$

$$\triangle_2 = (\hat{\phi}^T F^0_{zz} \phi^2)^2 - (\hat{\phi}^T D_z D F^0(w_1^{<1>}, 1)\phi)(\hat{\phi}^T D^2 F^0(w_1^{<1>}, 1)^2) \tag{5.3.35}$$

$$w_1^{<1>} = (D_z F_0|_M)^{-1} F^0_{\lambda} \tag{5.3.36}$$

$$\triangle_2 \neq 0 \tag{5.3.37}$$

oder

$$(\triangle_2 = 0) \tag{5.3.38}$$

$$\hat{\phi}^T F^0_{\lambda} = 0 \tag{5.3.39}$$

$$\triangle_2 = (\hat{\phi}^T F^0_{zz} \phi^2)^2 - (\hat{\phi}^T D_z D F^0(w_1^{<1>}, 1)\phi)(\hat{\phi}^T D^2 F^0(w_1^{<1>}, 1)^2) \tag{5.3.40}$$

$$\tilde{\triangle}_2 = (\hat{\phi}^T F^0_{z\lambda} \phi)^2 - (\hat{\phi}^T F^0_{zz} \phi^2)(\hat{\phi}^T F^0_{\lambda\lambda}) \tag{5.3.41}$$

$$\triangle_3 = \hat{\phi}^T (D^2 F^0(w_1^{<1>} - \frac{f^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}} \phi, 1)(w_1^{<2>}, 0) + \frac{1}{6} D^3 F^0(w_1^{<1>} - \frac{f^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}} \phi, 1)^3) \tag{5.3.42}$$

$$w_1^{<1>} = (D_z F_0|_M)^{-1} F_\lambda^0 \tag{5.3.43}$$

$$w_1^{<2>} = (D_z F_0|_M)^{-1} \left(\frac{1}{2} D^2 F^0(w_1^{<1>}, 1) + D_z D F^0(w_1^{<1>}, 1) \phi \frac{f_{z\lambda}^0}{f_{zz}^0} + \frac{1}{2} F_{zz}^0 \frac{{f_{z\lambda}^0}^2}{{f_{zz}^0}^2} \phi^2 \right) \tag{5.3.44}$$

$$\tilde{\triangle}_2 \neq 0 \tag{5.3.45}$$

$$\triangle_3 \neq 0 \tag{5.3.46}$$

$\boxed{\pm z^3 \pm \lambda z}$

$$\hat{\phi}^T F_{zz}^0 \phi^2 = 0 \tag{5.3.47}$$

$$\hat{\phi}^T F_\lambda^0 = 0 \tag{5.3.48}$$

$$w_1^{<1>} = (D_z F_0|_M)^{-1} F_\lambda^0 \tag{5.3.49}$$

$$w_1^{<2>} = (D_z F_0|_M)^{-1} \left(\frac{1}{2} F_{zz}^0 \phi^2 \right) \tag{5.3.50}$$

$$\hat{\phi}^T D_z D F^0(w_1^{<1>}, 1) \phi_1 \neq 0 \tag{5.3.51}$$

$$\hat{\phi}^T \left(\frac{1}{6} F_{zzz}^0 \phi^3 + F_{zz}^0 \phi w_1^{<2>} \right) \neq 0 \tag{5.3.52}$$

$$\hat{\phi}^T F_{z\lambda}^0 \phi \neq 0 \tag{5.3.53}$$

oder

$$\hat{\phi}^T F_\lambda^0 = 0 \tag{5.3.54}$$

$$\hat{\phi}^T F_{zz}^0 \phi^2 = 0 \tag{5.3.55}$$

$$\hat{\phi}^T D_u D F^0(w_1^{<1>}, 1) \phi = 0 \tag{5.3.56}$$

$$w_1^{<1>} = (D_z F_0|_M)^{-1} F_\lambda^0 \tag{5.3.57}$$

$$w_1^{<2>} = (D_z F_0|_M)^{-1} \left(\frac{1}{2} F_{zz}^0 \phi^2 \right) \tag{5.3.58}$$

$$\hat{\phi}^T F_{z\lambda}^0 \phi_1 \neq 0 \tag{5.3.59}$$

$$\hat{\phi}^T \left(\frac{1}{6} F_{zzz}^0 \phi^3 + F_{zz}^0 \phi w_1^{<2>} \right) \neq 0 \tag{5.3.60}$$

$$\hat{\phi}^T D^2 F^0(w_1^{<1>}, 1)^2 \neq 0 \tag{5.3.61}$$

oder

$$\hat{\phi}^T F^0_\lambda = 0 \tag{5.3.62}$$
$$\hat{\phi}^T F^0_{zz}\phi^2 = 0 \tag{5.3.63}$$
$$\hat{\phi}^T D_z DF^0(w_1^{<1>},1)\phi \neq 0 \tag{5.3.64}$$
$$\hat{\phi}^T F^0_{z\lambda}\phi \neq 0 \tag{5.3.65}$$
$$\hat{\phi}^T F^0_{zzz}\phi^3 \neq 0 \tag{5.3.66}$$
$$\tag{5.3.67}$$

$\boxed{\pm z^2 \pm \lambda^3}$

$$\tilde{\triangle}_2 = 0 \tag{5.3.68}$$
$$\triangle_2 = 0 \tag{5.3.69}$$
$$\hat{\phi}^T F^0_\lambda = 0 \tag{5.3.70}$$
$$\tilde{\triangle}_2 = (\hat{\phi}^T F^0_{z\lambda}\phi)^2 - (\hat{\phi}^T F^0_{zz}\phi^2)(\hat{\phi}^T F^0_{\lambda\lambda}) \tag{5.3.71}$$
$$\triangle_2 = (\hat{\phi}^T D_z DF^0(w_1^{<1>},1)\phi)^2 + (\hat{\phi}^T D^2F^0(w_1^{<1>},1)^2)(\hat{\phi}^T F^0_{zz}\phi^2) \tag{5.3.72}$$
$$\triangle_3 = \hat{\phi}^T(D^2F^0(w_1^{<1>} - \frac{f^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}}\phi,1)(w_1^{<2>},0) + \frac{1}{6}D^3F^0(w_1^{<1>} - \frac{f^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}}\phi,1)^3) \tag{5.3.73}$$
$$\tilde{\triangle}_3 = \hat{\phi}^T D^3F^0(-\frac{f^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}}\phi,1)^3 \tag{5.3.74}$$
$$w_1^{<1>} = (D_zF_0|_M)^{-1}F^0_\lambda \tag{5.3.75}$$
$$w_1^{<2>} = (D_zF_0|_M)^{-1}\left(\frac{1}{2}D^2F^0(w_1^{<1>},1)^2 + D_zDF^0(w_1^{<1>},1)\phi\frac{f^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}} + \frac{1}{2}F^0_{zz}\frac{{f^0_{z\lambda}}^2}{{f^0_{zz}}^2}\phi^2\right) \tag{5.3.76}$$
$$\tilde{\triangle}_3 \neq 0 \tag{5.3.77}$$
$$\triangle_3 \neq 0 \tag{5.3.78}$$
$$\hat{\phi}^T F^0_{zz}\phi^2 \neq 0 \tag{5.3.79}$$

$\boxed{\pm z^4 \pm \lambda z}$

$$\hat{\phi}^T\left(\frac{1}{6}F^0_{zzz}\phi^3 + F^0_{zz}\phi w_1^{<2>}\right) = 0 \tag{5.3.80}$$

$$\hat{\phi}^T F^0_{zz}\phi^2 = 0 \tag{5.3.81}$$

$$\hat{\phi}^T F^0_{\lambda} = 0 \tag{5.3.82}$$

$$\kappa_3 = \hat{\phi}^T(\frac{1}{24}F^0_{z^4}\phi^4 + F^0_{zz}\phi w_1^{<3>} + \frac{1}{2}F^0_{zz}(w_1^{<2>})^2 + \frac{1}{2}F^0_{zzz}\phi^2 w_1^{<2>}) \tag{5.3.83}$$

$$w_1^{<1>} = (D_z F_0|_M)^{-1} F^0_{\lambda} \tag{5.3.84}$$

$$w_1^{<2>} = (D_z F_0|_M)^{-1} \left(\frac{1}{2}D^2F^0(w_1^{<1>},1)^2 + D_z DF^0(w_1^{<1>},1)\phi\frac{f^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}} + \frac{1}{2}F^0_{zz}\frac{{f^0_{z\lambda}}^2}{{f^0_{zz}}^2}\phi^2\right) \tag{5.3.85}$$

$$\hat{\phi}^T D_z DF^0(w_1^{<1>},1)\phi_1 \neq 0 \tag{5.3.86}$$

$$\kappa_3 \neq 0 \tag{5.3.87}$$

$\boxed{\pm z^3 \pm \lambda^2}$

$$\hat{\phi}^T F^0_{z\lambda}\phi = 0 \tag{5.3.88}$$

$$\hat{\phi}^T D_z DF^0(w_1^{<1>},1)\phi = 0 \tag{5.3.89}$$

$$\hat{\phi}^T F^0_{\lambda} = 0 \tag{5.3.90}$$

$$w_1^{<1>} = (D_z F_0|_M)^{-1} F^0_{\lambda} \tag{5.3.91}$$

$$w_1^{<2>} = (D_z F_0|_M)^{-1} \left(\frac{1}{2}F^0_{zz}\phi^2\right) \tag{5.3.92}$$

$$\hat{\phi}^T F^0_{\lambda\lambda} \neq 0 \tag{5.3.93}$$

$$\hat{\phi}^T D^2F^0(w_1^{<1>},1)^2 \neq 0 \tag{5.3.94}$$

$$\hat{\phi}^T \left(\frac{1}{6}F^0_{zzz}\phi^3 + F^0_{zz}\phi w_1^{<2>}\right) \neq 0 \tag{5.3.95}$$

$\boxed{\pm z^2 \pm \lambda^4}$

$$\triangle_2 = 0 \tag{5.3.96}$$

$$\triangle_3 = 0 \tag{5.3.97}$$

$$\hat{\phi}^T F^0_{\lambda} = 0 \tag{5.3.98}$$

$$\triangle_2 = (\hat{\phi}^T D_z DF^0(w_1^{<1>},1)\phi)^2 + (\hat{\phi}^T D^2F^0(w_1^{<1>},1)^2)(\hat{\phi}^T F^0_{zz}\phi^2) \tag{5.3.99}$$

$$\triangle_3 = \hat{\phi}^T(D^2F^0(w_1^{<1>} - \frac{f^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}}\phi,1)(w_1^{<2>},0) + \frac{1}{6}D^3F^0(w_1^{<1>} - \frac{f^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}}\phi,1)^3) \tag{5.3.100}$$

$$\begin{aligned}
\triangle_4 &= \left(\hat{\phi}^T\left(\frac{1}{2}D^3F^0(w_1^{<1>}-\frac{f^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}}\phi,1)^2(\phi,0)+F^0_{zz}\phi^2w_1^{<2>}\right)\right)^2 \qquad (5.3.101)\\
&\quad -(\hat{\phi}^TF^0_{zz}\phi^2)\\
&\quad \left(\hat{\phi}^T\left(D^2F^0_(w_1^{<1>}-\frac{f^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}}\phi,1)(w_1^{<3>},0)+\frac{1}{2}F^0_{zz}(w_1^{<2>})^2+\right.\right.\\
&\quad \frac{1}{2}D^3F^0(w_1^{<1>}-\frac{f^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}}\phi,1)^2(w_1^{<2>},1)+\\
&\quad \left.\left.\frac{1}{24}D^4F^0(w_1^{<1>}-\frac{f^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}}\phi,1)\right)\right)\\
w_1^{<1>} &= (D_zF_0|_M)^{-1}F^0_\lambda \qquad (5.3.102)\\
w_1^{<2>} &= (D_zF_0|_M)^{-1} \qquad (5.3.103)\\
&\quad \left(\frac{1}{2}D^2F^0(w_1^{<1>},1)^2+D_zDF^0(w_1^{<1>},1)\phi\frac{f^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}}+\frac{1}{2}F^0_{zz}\frac{{f^0_{z\lambda}}^2}{{f^0_{zz}}^2}\phi^2\right)\\
w_1^{<3>} &= (D_zF_0|_M)^{-1} \qquad (5.3.104)\\
&\quad \left(D^2F^0(w_1^{<1>}-\frac{f^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}}\phi,1)(w_1^{<2>},0)+\right.\\
&\quad \left.\frac{1}{6}D^3F^0(w_1^{<1>}-\frac{f^0_{z\lambda}}{f^0_{zz}}\phi,1)^3\right)\\
\triangle_4 &\neq 0 \qquad (5.3.105)\\
\hat{\phi}^TF^0_{zz}\phi^2 &\neq 0 \qquad (5.3.106)\\
& \qquad (5.3.107)
\end{aligned}$$

Kapitel 6

Eigenwertbestimmung bei großen, dünn besetzten Matrizen

Die in den Kapiteln 2-5 beschriebenen Algorithmen dienen zur Analyse von Singularitäten, die mit anderen Methoden schon vorher bestimmt wurden. Hierzu existieren im wesentlichen zwei unterschiedliche, sich unter Umständen ergänzende Ansätze:

a.) Direkte Methoden

b.) Testfunktionen für Singularitäten.

Die direkten Methoden sind zumeist modifizierte Newtonverfahren, die gegen den singulären Punkt konvergieren. Diese Verfahren haben den Nachteil, daß die Konvergenz auf eine relativ kleine Umgebung der Singularität beschränkt ist. Andererseits können sie diese sehr genau bestimmen, vgl. [ABHJ], [Mei89b], [Sey88], [SJ84], [Moo96]. Die anderen Methoden basieren auf Testfunktionen für Singularitäten, die nur in spezifizierten Singularitäten einen bestimmten Wert, etwa Null, annehmen. Während der Pfadverfolgung wird diese Testfunktion überwacht und bei Erkennung einer Singularität kann auf ein anderes (direktes) Verfahren umgeschaltet werden, welches den singulären Punkt genauer approximiert. Da die direkten Methoden erst nahe der Singularität eingesetzt werden können, sollten somit während der Pfadverfolgung immer Testfunktionen mitbetrachtet werden. In der Literatur finden sich verschiedene Ansätze für Testfunktionen. Hier werden unter anderem die Ausnutzung der Tangentenrichtung (für Umkehrpunkte), die Überwachung von Ableitungswerten von reduzierten Funktionen oder die Ausnutzung von Eigenwertinformationen betrachtet. Da für eine Verzweigungsanalyse mit Hilfe von Algorithmus 5.2.4, Seite 119, ohnehin die Eigeninformationen, oder zumindest Approximationen dafür, benötigt werden, sollen in dieser Arbeit speziell jene Testfunktionen analysiert und wei-

terentwickelt werden, welche auf Eigenwertinformationen beruhen. Ein weiterer Vorteil dieser Art von Testfunktionen besteht darin, daß sich damit alle Singularitäten entdecken lassen, also Umkehrpunkte, singuläre Punkte, und Hopf-Punkte, denn genau in diesen Punkten hat mindestens ein Eigenwert des Ableitungsoperators von F bzgl. z aus (0.0.1) einen verschwindenden Realteil. Bevor jedoch diese Testfunktionen definiert werden, sollen in diesem Kapitel die notwendigen Verfahren betrachtet und weiterentwickelt werden, die dazu geeignet sind, die Eigenwertinformationen in großen, dünn besetzten Systemen zu berechnen.

6.1 Überblick über bekannte Verfahren

In vielen Anwendungen stellt sich die Aufgabe, Eigenwerte und evtl. auch Eigenvektoren von großen, dünn besetzten (un-)symmetrischen Matrizen zu berechnen. Unter anderem in mathematischen Modellen der Wirtschaft, Markov Ketten, Stabilitätsfragen bei diskretisierten partiellen Differentialgleichungen, Verzweigungsproblemen etc. Wichtige Methoden in diesem Zusammenhang sind:

1. Die simultane Iteration (auch Unterraum-Iteration genannt) [JS81, NOP83, Par80, Rut69, Ste76]
2. Der Arnoldi Prozeß [Arn51, Ruh83, Saa80, Saa84, Saa89, Saa92, Wil65],
3. Der (unsymmetrische) Lanczos Algorithmus [PTL85, Wil65]
4. Die Davidson Methode [CPS94, MS86, Mor92, Sad93, SvdV94, SBFvdV95]

Polynomielle und rationale Vortransformationen [ER80, PS87, Ruh84, Ruh93, Ruh94a, Ruh94b, Ruh95] sind in diesem Zusammenhang wichtig, um die Eigenwertstruktur für das entsprechende Verfahren in günstiger Weise zu transformieren.

Weitere Arbeiten zu diesen Themen sind unter anderem erschienen von Braconnier [Bra93], Garret et al. [GMS91], [Gar91], Ho et al [HCB90], [Ho90], Morgan [Mor96], Sadkane [Sad91a], [Sad91b], Scott [Sco95], Duff and Scott [DS93], Sebastian [Seb95], Sorenson [Sor92] und Watkins [Wat93]. Ein guter Überblick über diese Methoden findet sich bei Meerbergen und Roose [MR96]. Implementierungen dieser Methoden sind bisher noch recht selten. Erst seit den 90er Jahren entstanden solche unter anderem von Sadkane [Sad91a], [Sad91b], Braconnier [Bra93], Scott [Sco95], Lehoucq et al. [LSVY94]. Alle diese Implementierungen erfordern relativ gute Kenntnisse über Arnoldi-Verfahren, um

die erforderlichen Parameter zu bestimmen. In diesem Sinne müssen hier noch Methoden entwickelt werden, die diese Parameter (Krylov-Dimension, Vorkonditionierungen etc.) möglichst adaptiv bestimmen. In dieser Beziehung ist der Code EB13 von Scott [Sco95] am weitesten fortgeschritten. EB13 ist in die 'Harwell Subroutine Library' eingebunden.

In den letzten Jahren haben sich vor allem die auf dem Arnoldi-Prozeß basierenden Verfahren als die vielversprechendsten erwiesen. Da diese Verfahren auch auf unsymmetrische Probleme anwendbar sind und als Verallgemeinerung des Lanczos-Algorithmus angesehen werden können, haben sie auch ein großes Einsatzfeld. Zudem lassen sich durch den Arnoldi-Prozeß besonders die extremalen Eigenwerte billig approximieren. Aus diesem Grund werden in dieser Arbeit speziell diese Verfahren untersucht. Im folgenden Abschnitt sind die wichtigsten Varianten dargestellt.

6.2 Varianten des Arnoldi-Verfahrens

Zu den wichtigsten aktuellen Methoden zur Berechnung von (extremalen) Eigenwerten in großen, dünn besetzten (un-)symmetrischen Eigenwertproblemen gehören die auf dem Arnoldi-Prozeß aufbauenden Verfahren. Dieser Prozeß berechnet die Projektion $H \in \mathbb{R}^{m\times m}$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ auf einen m-dimensionalen Krylov-Raum

$$K_m(A, v_1) = \text{ span}\left\{v_1, Av_1, \ldots, A^{m-1}v_1\right\} \tag{6.2.1}$$

Der Algorithmus dazu lautet:

Algorithmus 6.2.1 Arnoldi-Prozeß

function $[H, V, r] =$ *Arnoldi-Prozeß*(A, v_1, m)
$v_1 = v_1/\|v_1\|_2$
FOR $j = 1, 2, \ldots, m$ *DO*

(1) $r = Av_j$

(2) $h_{i,j} = v_i^T r; \quad i = 1, 2, \ldots, j$

(3) $r = r - \sum_{i=1}^{j} v_i h_{ij}$

(4) If $(j < m)$ *then*

(4.1) $h_{j+1,j} = \|r\|_2$

(4.2) $v_{j+1} = r/h_{j+1,j}$

Damit gilt:

$$
\begin{aligned}
H &\in \mathbb{R}^{m\times m} \text{ ist obere Hessenbergmatrix} && (6.2.2)\\
V &= [v_1, v_2, \ldots, v_m] \in \mathbb{R}^{n\times m} && (6.2.3)\\
H &= V^T A V && (6.2.4)\\
AV &= VH + re_m^T \qquad (\textbf{Arnoldi - Zerlegung}) && (6.2.5)\\
K_m(A, v_1) &= \text{span}\,\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} && (6.2.6)\\
V^T V &= I \in \mathbb{R}^{m\times m} && (6.2.7)\\
V^T r &= 0 && (6.2.8)
\end{aligned}
$$

Der Rückgabevektor r ist der Anteil von $A^m v_1$, der nicht in $K_m(A, v_1)$ liegt. Sollte $r = 0$ gelten, so bedeutet dies, daß der Krylovraum A-invariant ist und es gilt mit $e_1 \in \mathbb{R}^{n-m}$ und $e_m \in \mathbb{R}^m$:

$$
T = (V, U)^T A (V, U) = \begin{pmatrix} H & M \\ \|r\|_2 e_1 e_m^T & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H & M \\ 0 & B \end{pmatrix}, \qquad (6.2.9)
$$

wobei V von U zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ ergänzt sei. Somit zerfällt die Matrix T und die Eigenwerte von H sind ebenso Eigenwerte von A. Bei größeren Krylovdimensionen oder bei schlecht konditionierten Problemen kann die Orthogonalität zwischen den Basisvektoren v_j des Krylovraumes durch numerische Ungenauigkeiten verloren gehen. Aus diesem Grund wird die Orthonormalität in der Praxis zusätzlich iterativ verbessert (vgl. [DGKS76]). Damit lautet der Arnoldi-Prozeß:

Algorithmus 6.2.2 Arnoldi-Prozeß mit iterativer Verbesserung

function $[H, V, r] = Arnoldi(A, v_1, m)$
$v_1 = v_1/\|v_1\|_2$
FOR $j = 1, 2, \ldots, m$ *DO*

(1) $r = Av_j$

(2) $h_{i,j} = v_i^T r; \quad i = 1, 2, \ldots, j$

(3) $r = r - \sum_{i=1}^{j} v_i h_{i,j}$

(4) $d = V^T r$

(5) While $\|d\|_2 > \epsilon \|r\|_2$ *do*

(5.1) $r = r - Vd$

(5.2) $h_{i,j} = h_{i,j} + d_i; \quad i = 1, 2, \ldots, j$

(5.3) $d = V^T r$

(6) If $(j < m)$ *then*

(6.1) $h_{j+1,j} = \|r\|_2$

(6.2) $v_{j+1} = r/h_{j+1,j}$

Typischerweise ist nur ein Schritt der iterativen Verbesserung nötig. Details zur Implementierung sind bei Reichel und Gragg [RG] zu finden. Die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A lassen sich nun mit Hilfe des **Rayleigh-Ritz Verfahrens** approximieren:

Algorithmus 6.2.3 Rayleigh-Ritz Verfahren (RRV)

function $[\theta_1, \ldots, \theta_m, y_1, \ldots, y_m] =$ *Rayleigh-Ritz*(A, V)

V *sei eine orthonormale Basis eines m-dimensionalen Unterraums von* $\mathbb{R}^n$.

(1) $H = V^T AV$

(2) Berechne die Eigenwerte $\theta_1, \ldots, \theta_m$ *und Eigenvektoren* $g_1, \ldots, g_m$ *von* H. *Die Eigenwerte werden* **Ritz-Werte** *genannt. Die approximativen Eigenvektoren von* A *sind* $y_j = Vg_j, j = 1, \ldots, m$. *Sie werden* **Ritz-Vektoren** *genannt.*

Sollen nur die Eigenwerte approximiert werden, so vereinfacht sich der Algorithmus zu:

Algorithmus 6.2.4 Rayleigh-Ritz Verfahren für Eigenwerte (RRV-EW)

function $[\theta_1, \ldots, \theta_m] =$ *Rayleigh-Ritz-EW*(A, V)

V *sei eine orthonormale Basis eines m-dimensionalen Unterraums von* $\mathbb{R}^n$.

(1) $H = V^T AV$

(2) $[\theta_1, \ldots, \theta_m] = \sigma(H)$

Bemerkung 6.2.5 *Die Berechnung von* $H = V^T AV$ *in Algorithmus 6.2.3 bzw. 6.2.4 kostet m Matrix-Vektor Multiplikationen und m Skalar-Produkte, wie sich leicht nachprüfen läßt.*

Schließt man das RRV an den Arnoldi-Prozeß an, so entfällt Schritt (1) im RRV, da die Matrix H schon im Arnoldi-Prozeß bestimmt wird. Damit erhält man das

Algorithmus 6.2.6 Arnoldi-Verfahren

function $[\theta_1, \ldots, \theta_m, y_1, \ldots, y_m] = Arnoldi\text{-}Verfahren(A, v_1, m)$

(1) $[H, V, r] = Arnoldi(A, v_1, m)$

(2) *Berechne die Eigenpaare* $(\theta_j, g_j), j = 1, \ldots, m$ *von* H.
Berechne die Ritz-Vektoren $y_j = V g_j, j = 1, \ldots, m$.

Im Folgenden werden stets die Ritz-Vektoren mit y, die Ritz-Werte mit θ, die Eigenwerte von A mit λ und die Eigenvektoren mit z bezeichnet.

Soll das Arnoldi-Verfahren nur dazu benutzt werden, die Eigenwerte zu approximieren, so sind in Schritt (2) lediglich die Eigenwerte von H zu bestimmen. Diese Variante entspricht dann:

Algorithmus 6.2.7 Arnoldi-Verfahren für Eigenwerte

function $[\theta_1, \ldots, \theta_m] =$*Arnoldi-Verfahren-EW*$(A, v_1, m)$

(1) $[H, V, r] = Arnoldi(A, v_1, m)$

(2) $[\theta_1, \ldots, \theta_m] = \sigma(H)$

Ein erster Ansatz für die Berechnung der extremalen Eigenwerte wäre, den Arnoldi-Prozeß so lange laufen zu lassen, also m zu erhöhen, bis angenommen werden kann, daß die extremalen Eigenwerte von A gut durch die entsprechenden Eigenwerte der Matrix H approximiert werden. Dieser Weg ist jedoch nicht sinnvoll, da dies neben numerischen Instabilitäten schon für relativ kleine Werte von m zu einem unvertretbar hohen Rechenaufwand führen würde. Besser ist es, die Krylov-Dimension m zu beschränken und den Arnoldi-Prozeß mit einem modifizierten Startvektor neu zu starten. Ist nämlich der Startvektor so gewählt worden, daß $K_m(A, v_1)$ A-invariant ist, also nach dem Arnoldi-Prozeß $r = 0$ gilt, so sind die Ritz-Werte auch Eigenwerte von A und die Ritz-Vektoren sind die zugehörigen Eigenvektoren. Es muß also eine iterative Strategie gefunden werden, mit der es möglich ist, den Startvektor v_1 in der Art zu aktualisieren, daß $\|r\|_2$ gegen Null geht. Während dieser Iteration können die approximierten Eigenpaare (θ, y) relativ billig auf ihre Genauigkeit überprüft werden. Es gilt mit $Hx = \theta x$ und $y = Vx$:

$$\|Ay - \theta y\|_2 = \|(AV - VH)x\|_2 = \|r\|_2 |e_m^t x| = \|r\|_2 |x_m| \tag{6.2.10}$$

Das Residuum des Eigenvektors läßt sich also mit den Werten aus dem projezierten System berechnen.

Für die geeignete Wahl des neuen Startvektors sind in der Literatur verschiedene Vorschläge diskutiert worden, die sich jedoch alle mit (expliziten oder impliziten) Kombinationen von Ritz-Vektoren oder Schur-Vektoren befassen. In [Saa80] schlägt Saad eine gewichtete Kombination vor. Die Realteile der Ritz-Vektoren werden mit ihren **Residuen-Normen** $\|Ay_j - \theta_j y_j\|_2 / \|y_j\|_2$ gewichtet. Allerdings hat ebenfalls Saad in [Saa89] gezeigt, daß diese Methode für bestimmte Probleme ungeeignet ist. In [Saa89] schlägt er vor, nur einen einzigen Ritz-Vektor als neuen Startvektor zu benutzen und somit nur ein Eigenpaar (λ_1, z_1) zu bestimmen. Anschließend kann per Deflation das nächste Eigenpaar bestimmt werden, indem zur Matrix $A - \sigma z_1^* z_1$ übergegangen wird. Dadurch wird nur der Eigenwert λ_1 verschoben. Hier stellt sich jedoch das Problem des Rechenaufwandes und der komplexen Arithmetik. Ebenso sind vielfache Eigenwerte problematisch. Eine andere Möglichkeit besteht darin, eine Block-Methode mit mehreren Startvektoren zu benutzen ([GvL89]), die jedoch nur kleine Krylov-Räume zuläßt. Scott [Sco95] schlägt vor, eine lineare Kombination von Schur-Vekoren zu benutzen. Vergleiche einzelner Strategien finden sich in [Leh95] and [Mor96]. Die vielversprechendste Methode scheint jedoch die von Sorenson [Sor92] zu sein, die den Arnoldi-Prozeß implizit neu startet und (implizit) eine Kombination von Ritz-Vektoren benutzt. Morgan hat in [Mor96] gezeigt, daß diese Methode die anderen übertrifft. Die grundlegende Durchführung der Neustartstrategien wird in den nächsten 2 Abschnitten dargestellt.

6.2.1 Expliziter Arnoldi-Neustart

Basierend auf dem Arnoldi-Verfahren läßt sich ein iteriertes Arnoldi-Verfahren definieren, das den gesamten Arnoldi-Prozeß mit einem geeigneten Startvektor immer wieder neu startet:

Algorithmus 6.2.8 Iteriertes Arnoldi-Verfahren

function $[\lambda_1, \ldots, \lambda_k, z_1, \ldots, z_k] =$ *Iteriertes-Arnoldi-Verfahren*(A, v_1, m, k, ϵ)

(1) $[\theta_1, \ldots, \theta_m, y_1, \ldots, y_m] =$ *Arnoldi-Verfahren*(A, v_1, m)

(2) Falls k Ritz-Werte Residuen-Normen kleiner ϵ *haben, dann* **stopp**. *Andernfalls wähle nach einer geeigneten Strategie einen neuen Startvektor* v_1 *und gehe zu (1).*

Mit Hilfe des iterierten Arnoldi-Verfahrens lassen sich die Eigenwerte am Rand des Spektrums, insbesondere die isolierten, besonders schnell approximieren. Oft möchte man

jedoch andere Teile des Spektrums berechnen, etwa jene mit kleinstem/größtem Real-/Imaginärteil. Dies ist im Zusammenhang mit der Verzweigungsanalyse von besonderer Bedeutung, weil hier die Eigenwerte mit kleinem Realteil interessant sind. Da z.B. bei naturwissenschaftlichen Untersuchungen oft stabile Zustände und deren Übergang zu instabilen Zuständen untersucht wird, ist es plausibel anzunehmen, daß sich der größte Teil des Spektrums auf einer Seite der komplexen Ebene bzgl. der imaginären Achse befindet. Von nun an soll deswegen angenommen werden, daß sich dieser Teil auf der linken Seite der imaginären Achse befindet. Bzgl. des Systems

$$\frac{\partial}{\partial t} z(t) = F(z(t), \lambda) \text{ mit } A := D_z F(z(t), \lambda) \tag{6.2.11}$$

bedeutet dies, daß ein vorliegendes Äquilibrium stabil ist, falls kein Eigenwert von A einen positiven Realteil hat. Sollen in dieser Situation Eigenwerte mit kleinem Realteil berechnet werden, so ist die folgende Eigenschaft des Arnoldi-Verfahrens von besonderer Bedeutung. Diese ist seine Translationsinvarianz:

Satz 6.2.9 Translationsinvarianz des Arnoldi-Verfahrens [1]

Sei $[\theta_1, \ldots, \theta_m, y_1, \ldots, y_m] = \textit{Arnoldi-Verfahren}(A, v_1, m)$

Dann gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*:*

$[\alpha\theta_1 - \beta, \ldots, \alpha\theta_m - \beta, y_1, \ldots, y_m] = \textit{Arnoldi-Verfahren}(\alpha A - \beta I, v_1, m).$

Durch diese Translationsinvarianz ist es möglich, Arnoldi-basierende Verfahren nicht auf A, sondern (z.B. mit einem Polynom p) auf die Matrix $p(A)$ anzuwenden, ohne daß dabei die Eigenräume verändert werden. Allgemein gilt sogar[2]:

Satz 6.2.10 *Sei $f(.)$ analytisch auf einer offenen Menge, die $\sigma(A)$ enthält. Dann existiert die Matrix $f(A)$ und deren Eigenpaare sind $(f(\lambda_j), z_j), j = 1, \ldots, m$.*

Um von den Eigenwerten von $p(A)$ wieder auf die Eigenwerte von A zu kommen, müßte man nun p^{-1} bilden. Dies in der Regel nicht möglich, doch kann man sich anders behelfen. Man berechnet nach Ausführung des iterierten Arnoldi-Verfahrens einmalig die Matrix $H = V^T A V$ und betimmt dann die Eigenpaare von H. Da die Eigenvektoren von A und

[1] siehe S. 238 in [Par80]

[2] siehe [GvL89], Seite 541

$p(A)$ übereinstimmen, ist lediglich vorauszusetzen, daß die Spalten von V die Summe der Eigenräume der entsprechenden Eigenwerte aufspannen.

Es stellt sich nun das Problem, ein geeignetes f bzw. p zu finden. Diese Funktion sollte (für Matrizen) einfach auszuwerten sein und die gesuchten Eigenwerte besonders verstärken. In diesem Zusammenhang schlug Rutishauser in [Rut69] für symmetrische Probleme die Verwendung von Tschebyscheff-Polynomen vor. Diese Polynome sind seither die am häufigsten diskutierten. Die meisten polynomial beschleunigten Arnoldi-Verfahren zur Berechnung von Eigenwerten benutzen diese Polynome. Die Wahl von Tschebyscheff-Polynomen resultiert aus der folgenden Überlegung:

Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A und o.B.d.A seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die gesuchten. Gesucht ist nun ein Polynom p, das auf der Menge $S := \{\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n\}$ kleine Beträge und auf den gesuchten Eigenwerten große Beträge annimmt, wobei o.B.d.A die Normalisierung

$$p(\lambda_k) = 1 \tag{6.2.12}$$

erfüllt sei. Da die Menge S jedoch nicht bekannt ist, sich aber relativ billig (z.B. mit Hilfe des Arnoldi-Prozesses) ein Gebiet E finden läßt, das (approximativ) S enthält, stellt sich das mathematische Problem, ein Polynom vom Grad l und das Gebiet E mit $S \subset E$ zu bestimmen mit:

$$\min_{p \in \Pi_l, p(\lambda_k)=1} \max_{\lambda_i \in E} |p_l(\lambda)|. \tag{6.2.13}$$

Betrachtet man die Tschebyscheff-Polynome der ersten Art $T_l(\lambda)$:

$$T_0(\lambda) \equiv 1 \tag{6.2.14}$$

$$T_1(\lambda) = \lambda \tag{6.2.15}$$

$$T_l(\lambda) = 2\lambda T_{l-1}(\lambda) - T_{l-2}(\lambda), \quad l \geq 2, \tag{6.2.16}$$

und beschränkt man die Wahl für E auf Ellipsen, so kann das Problem (6.2.13) annähernd durch

$$p_l(\lambda) = \frac{T_l((\lambda - d)/c)}{T_l((\lambda_r - d)/c)} \tag{6.2.17}$$

gelöst werden, wobei $E = E(d, c, a)$ die Ellipse mit Zentrum d sei, die durch λ_k läuft mit Foci $d \pm c$, sowie eine imaginäre Halbachse der Länge a hat. λ_k wird dabei der **Referenzpunkt** genannt. Saad [Saa84] hat diesen Ansatz für unsymmetrische Eigenwertprobleme weiterverfolgt. Die Konstruierung der Ellipse und somit des Tschebyscheff-Polynoms beruht dabei auf Manteuffels Verfahren [Man78]. In fast allen Arbeiten, die seither zur Tschebyscheff-Präkonditionierung erschienen sind, wird behauptet, daß hiermit das Problem (6.2.13) exakt gelöst sei. Fischer hat jedoch in [Fis91] gezeigt, daß dies im allgemeinen nicht der Fall ist. Trotzdem erhält man durch (6.2.17) gut geeignete Polynome, falls sich die uninteressanten Eigenwerte gut mit Hilfe von (flachen) ellipsoiden Gebieten einschließen lassen. Manteuffel hat in [Man77] gezeigt:

Satz 6.2.11 *Für die Polynome aus (6.2.17) gilt:*

$$\lim_{l\to\infty} |p_l(\lambda)^{\frac{1}{l}}| \begin{cases} < 1, \text{ falls } \lambda \text{ in } E(d,c,a) \text{ liegt} \\ = 1, \text{ falls } \lambda \in E(d,c,a) \\ > 1, \text{ falls } \lambda \text{ außerhalb von } E(d,c,a) \text{ liegt} \end{cases} \tag{6.2.18}$$

Somit bildet p_l die Ellipse für $l \to \infty$ auf den Einheitskreis ab. Außerdem kann gezeigt werden, daß die Konturlinien von $|p_l|$ durch konfokale Ellipsen approximiert werden können. Dadurch sind die größeren Ellipsen fast kreisförmig.

Zu jedem $\lambda_j \in S$ kann der Konvergenzfaktor angegeben werden. Er ist:

$$C_j(d,c) = \left| \frac{(\lambda_j - d) + ((\lambda_j - d)^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}}{(\lambda_k - d) + ((\lambda_k - d)^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}} \right| \tag{6.2.19}$$

Für die praktische Nutzung dieser Polynome ist es allerdings notwendig, daß sie billig und numerisch stabil auszuwerten sind. Da p auf eine Matrix A anzuwenden ist, müssen mindestens grad(p) Matrix-Vektor Multiplikationen ausgeführt werden, um $p(A)$ zu berechnen. Nutzt man die Drei-Term-Rekursion für Tschebyscheff-Polynome aus, so kann gezeigt werden, daß diese Anzahl von MV-Multiplikationen ausreicht und die Berechnung numerisch stabil ist, siehe [Saa84]. Es gilt:

Algorithmus 6.2.12 Berechnung von $p_l(A)v_0$

$\sigma_1 = \frac{c_0}{\lambda_0 - d_0}$
$v_1 = \frac{\sigma_1}{c_0}(A - d_0 I)v_0$
FOR $i = 1, 2, \ldots, l-1$ *DO*

(1) $\sigma_{i+1} = \frac{1}{\frac{2}{\sigma_1} - \sigma_i}$

(2) $v_{i+1} = 2\frac{\sigma_{i+1}}{c_0}(A - d_0 I)v_i - \sigma_{i+1}\sigma_i v_{i-1}$

Dieser Algorithmus benötigt zur Berechnung von $p_l(A)v_0$ genau l Matrix-Vektor Multiplikationen und $2l - 1$ Vektor Operationen. Faßt man den Term $(A - d_0 I)$ zu einer Matrix zusammen, so kann eine Vektor-Addition gespart werden und es ergeben sich in jedem Schritt $l - 1$ Vektor-Operationen. Somit sind Tschebyscheff-Polynome bzgl. des Rechenaufwandes billig auszuwerten.

Eine Möglichkeit, eine **optimale Ellipse** zu definieren, ist es, die Faktoren (6.2.19) zu minimieren. Ein Algorithmus dazu wurde von Ho in [Ho90] angegeben, welcher allerdings recht kompliziert ist. Da die Informationen zur Bestimmung der Ellipse ohnehin nur Approximationen an die Eigenwerte aus dem letzten Arnoldi-Prozeß sind, ist es aber nicht unbedingt notwendig, die bestmögliche Ellipse zu berechnen. Eine etwas einfachere Methode wurde von Saad in [Saa84] angegeben. Weiterhin sollte die Ellipse nach jedem Arnoldi-Prozeß neu angepasst werden, da die neuen Ritz-Werte die Eigenwerte besser approximieren.

Im Zusammenhang der Verzweigungsanalyse wird es notwendig sein, alle Eigenwerte nahe der imaginären Achse zu bestimmen. Das bedeutet, daß k in der Regel größer als 1 sein wird. Um im iterativen Arnoldi-Verfahren eine zusätzliche Konvergenzbeschleunigung und eine Sortierung der Eigenwerte zu erreichen, wird noch eine Variante des Rayleigh-Ritz Verfahrens angegeben. Diese geht auf Stewart zurück und wird **Schur-Rayleigh-Ritz Schritt (SRR)** genannt:

Algorithmus 6.2.13 Schur-Rayleigh-Ritz Schritt (SRR)

Sei $V \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *und* $H = V^T AV$.

function $[\theta_1, \ldots, \theta_m, V]$ =*SRR*(V, H)

(1) Berechne $T = U^T HU$, *wobei* T *die reelle Schur-Normalform von* H *ist und die Eigenwerte auf den* $(1\times 1)-$ *bzw.* $(2\times 2)-$*Blöcken der Hauptdiagonalen in der gewünschten Reihenfolge von links oben nach rechts unten angeordnet sind (z.B geordnet nach aufsteigendem Realteil).*

(2) $\theta_1, \ldots, \theta_m$ *seien die Eigenwerte der Hauptblöcke entlang der Hauptdiagonalen von* T.

(3) $V = VU$

Nach dem SRR-Schritt gilt:

$$T = V^T AV. \tag{6.2.20}$$

Dadurch wird erreicht, daß die linken Spalten zuerst gegen die gesuchten Eigenräume konvergieren. Stellt man fest, daß für die linken Spalten ein Konvergenzkriterium erfüllt ist, kann man eine **Deflation** bzgl. dieser Spalten durchführen. Diese Technik, auch **Locking** genannt, wird durchgeführt, indem die konvergierten Spalten festgehalten werden und nur mit den restlichen weiter iteriert wird. Zu den Details siehe z.B. [DS93]. Baut man den SRR-Schritt in das iterierte Arnoldi-Verfahren ein, läßt sich der neue Startvektor z.B. als eine Kombination der ersten k Schurvektoren wählen. Dann konvergieren die ersten k Spalten gegen den Span der Eigenräume zu den gesuchten Eigenwerten.

Es bieten sich damit zwei wesentliche Möglichkeiten, das iterative Arnoldi-Verfahren mit Hilfe dieser Polynome zu beschleunigen bzw. die gesuchten Eigenwerte zu verstärken. Die erste Möglichkeit die Präkonditionierung einzusetzen, besteht darin, den neuen Startvektor in Richtung der uninteressanten Eigenräume zu filtern:

Algorithmus 6.2.14 Iteriertes Arnoldi-Verfahren mit Tschebyscheff Beschleunigung

function $[\lambda_1, \ldots, \lambda_q, z_1, \ldots, z_q]$ = *Iteriertes-Arnoldi-Verfahren-TB*(A, v_1, m, k, ϵ)

(1) $[H, V, r]$ = *Arnoldi*(A, v_1, m)

(2) $[\theta_1, \ldots, \theta_m, V]$ = *SRR*(V, H)

(3) Falls die ersten $q \geq k$ *Spalten von* V *das Konvergenzkriterium erfüllen, dann* $\lambda_j = \theta_j,\ j = 1, \ldots, q$ *sowie* $z_j = v_j,\ j = 1, \ldots, q$ *und* **stopp**. *Andernfalls*

konstruiere mit Hilfe der Ritz-Werte $\theta_1, \ldots, \theta_m$ *die Ellipse* $E(d, c, a)$ *und das aktualisierte Polynom* $p_l \in \Pi^l$.

(4) $v_1 = p_l(A)v_1$. *Gehe zu (1).*

Sollte in Schritt (3) $q < k$ gelten, so kann eine Deflation (bzw. Locking) durchgeführt werden.

Die zweite Möglichkeit, die Tschebyscheff-Präkonditionierung einzubauen, besteht in der Anwendung des iterierten Arnoldi-Verfahrens auf die Matrix $p_l(A)$. Dieses Verfahren wird **Tschebyscheff-Arnoldi Verfahren** genannt:

Algorithmus 6.2.15 Tschebyscheff-Arnoldi Verfahren

function $[\lambda_1, \ldots, \lambda_q, z_1, \ldots, z_q] =$ *Tschebyscheff-Arnoldi-Verfahren*(A, v_1, m, k, ϵ)

(1) Setze $p_l(\lambda) = \lambda$.

(2) $[H, V, r] = Arnoldi(p_l(A), v_1, m)$

(3) $[\theta_1, \ldots, \theta_m, V] = SRR(V, V^T AV)$

(4) Falls die ersten $q > k$ *Spalten von* V *das Konvergenzkriterium erfüllen, dann* $\lambda_j = \theta_j,\ j = 1, \ldots, q$ *sowie* $z_j = v_j,\ j = 1, \ldots, q$ *und* **stopp**. *Andernfalls konstruiere mit Hilfe der Ritz-Werte* $\theta_1, \ldots, \theta_m$ *die Ellipse* $E(d, c, a)$ *und das aktualisierte Polynom* $p_l \in \Pi^l$.

(5) Wähle einen neuen Startvektor[3] v_1. *Gehe zu (2).*

Dieser Algorithmus ist im allgemeinen teurer als Algorithmus 6.2.14, da er in jedem Schritt (2) ml-Matrix-Vektor Produkte benötigt. Zusätzlich muß noch in jedem Schritt die Matrix $V^T AV$ berechnet und in die reelle Schur-Normalform gebracht werden. Trotz des hohen Aufwandes pro Schritt, kann dieser Algorithmus jedoch in einigen Eigenwertproblemen günstiger sein als Algorithmus 6.2.14, Seite 153, siehe z.B. [Sco95] und auch Abschnitt 6.3.3.

Im nächsten Abschnitt wird die Methode von Sorenson dargestellt, die den Arnoldi-Prozeß implizit neu startet.

[3] Z.B. eine gewichtete Kombination von Ritz- oder Schur-Vektoren.

6.2.2 Impliziter Arnoldi-Neustart

Die Methode des impliziten Neustarts des Arnoldi-Verfahrens geht auf Sorenson [Sor92] zurück. Lehoucq [Leh95], Sorenson und Lehoucq [LS96] und Morgan [Mor96] haben diese Methode verfeinert. Eine Implementation liegt mit ARPACK [LSVY94] vor. Diese Methode kann wie folgt bechrieben werden:

Sei $[H, V, r] = \text{Arnoldi}(A, v_1, m)$. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
& & AV - VH &= re_m^T && (6.2.21)\\
& \Leftrightarrow & (A-\mu I)V - V(H-\mu I) &= re_m^T && (6.2.22)\\
(QR := (H-\mu I)) & \Leftrightarrow & (A-\mu I)V - VQR &= re_m^T && (6.2.23)\\
(\cdot Q) & \Leftrightarrow & (A-\mu I)(VQ) - (VQ)(RQ) &= re_m^T Q && (6.2.24)\\
& \Leftrightarrow & A(VQ) - (VQ)(RQ+\mu I) &= re_m^T Q && (6.2.25)\\
& \Leftrightarrow & A(VQ) - (VQ)(Q^T HQ) &= re_m^T Q && (6.2.26)
\end{aligned}$$

Mit der neuen Basis $\hat{V} := VQ$ und der Matrix $\hat{H} := Q^T HQ$ ergibt sich somit die neue Arnoldi-Zerlegung:

$$A\hat{V} - \hat{V}\hat{H} = q_{m,m-1} r e_{m-1}^T + q_{m,m} r e_m^T \qquad (6.2.27)$$

In Schritt (6.2.27) wurde ausgenutzt, daß mit H auch Q obere Hessenberggestalt hat[4]. Betrachtet man nun die ersten $(m-1)$ Spalten, so gilt mit $\hat{V} := (v_1^+, \ldots, v_{m-1}^+, v) =: (V_{m-1}^+, v)$ und $\hat{H} =: \begin{pmatrix} H_{m-1}^+ & w \\ \alpha e_{m-1}^T & \beta \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}
& AV_{m-1}^+ - (V_{m-1}^+, v)\begin{pmatrix} H_{m-1}^+ \\ \alpha e_{m-1}^T \end{pmatrix} &= q_{m,m-1} r e_{m-1}^T && (6.2.28)\\
\Leftrightarrow \quad & AV_{m-1}^+ - V_{m-1}^+ H_{m-1}^+ &= (\alpha v + q_{m,m-1} r) e_{m-1}^T && (6.2.29)\\
\Leftrightarrow: \quad & AV_{m-1}^+ - V_{m-1}^+ H_{m-1}^+ &= \hat{r} e_{m-1}^T && (6.2.30)
\end{aligned}$$

Wegen $(V_{m-1}^+)^T v = 0$ und $(V_{m-1}^+)^T r = 0$ gilt auch $(V_{m-1}^+)^T \hat{r} = 0$. Somit gilt nach (6.2.30):

$$[H_{m-1}^+, V_{m-1}^+, \hat{r}] = \text{Arnoldi}(A, v_1^+, m-1) \qquad (6.2.31)$$

[4] Q kann wegen der Hessenberggestalt von H speziell als Produkt von Givens-Rotationen gewählt werden!

Führt man mit diesen Daten noch einen Schritt des Arnoldi-Prozesses aus, so erhält man wieder eine Arnoldi-Zerlegung der Dimension m:

$$[H^+, V^+, r^+] = \text{Arnoldi}(A, v_1^+, m) \tag{6.2.32}$$

Auf diese Weise wurde also **ohne** den Arnoldi-Prozeß neu zu starten, eine neue Arnoldi-Zerlegung zum Startvektor v_1^+ berechnet. Betrachtet man in (6.2.23) die erste Spalte, so gilt:

$$(A - \mu I)v_1 = (e_1^T R e_1) \cdot v_1^+ \,, \tag{6.2.33}$$

d.h ein Mises-Schritt für den Startvektor v_1 des Krylov-Raums. In direkter Verallgemeinerung lassen sich auch mehrere Spektralverschiebungen in einem Schritt zusammenfassen. Hat der ursprüngliche Krylovraum die Dimension $m+p$, so lassen sich in (6.2.22) $(A-\mu I)$ und $(H - \mu I)$ durch $\prod_{i=1}^{p}(A - \mu_i I)$ und $\prod_{i=1}^{p}(H - \mu_i I)$ ersetzen. Es gilt dann:

$$QR := \prod_{i=1}^{p}(H - \mu_i I) \tag{6.2.34}$$

$$\prod_{i=1}^{p}(A - \mu_i I)v_1 = (e_1^T R e_1) \cdot v_1^+ \tag{6.2.35}$$

Die ersten m Spalten von VQ bilden dann die ersten m Basisvektoren $v_1^+, \ldots, v_m^+$. Anschließend müssen p Schritte des Arnoldi-Prozesses durchgeführt werden, um wieder auf die Dimension $m + p$ zu kommen.

Sorenson schlägt in [Sor92] vor, für die Verschiebungen μ_j die Ritz-Werte zu benutzen, die als uninteressant angesehen werden. Alternativ kann aber auch direkt mit dem Polynom gerechnet werden, daß diese Werte oder andere als Nullstellen besitzt.

Die erste Variante ergibt für den impliziten Neustart:

Algorithmus 6.2.16 Impliziter-Arnoldi-Neustart-A

Es gelte: $[H, V, r] = \mathit{Arnoldi}(A, v_1, m+p)$

function $[H^+, V^+, r^+] = \mathit{Impliziter\text{-}Arnoldi\text{-}Neustart\text{-}A}(A, H, V, r, \mu_1, \ldots, \mu_p)$

(1) $Q = I_{m+p}$

(2) *FOR* $i = 1, 2, \ldots, p$ *DO*

(1) Berechne Zerlegung $Q_j R_j = H - \mu_j I \in \mathbb{R}^{(m+p)^2}$

(2) $H = Q_j^T H Q_j \quad (= R_j Q_j + \mu_j I$ *Hessenberg-Form*$)$

(3) $Q = Q Q_j$

(3) $V_m^+ = (VQ)\binom{I_m}{0}$ *und* $H_m^+ = (I_m\ 0)H\binom{I_m}{0} \in \mathbb{R}^{m^2}$

(4) $v = (VQ)e_{m+1}$

(5) $\hat{r} = \alpha v + q_{m+p,m} r, \qquad \alpha := e_{m+1}^T H e_m$

(6) Führe für die Arnoldi-Zerlegung $AV_m^+ = V_m^+ H_m^+ + \hat{r} e_m^T$ *noch p weitere Schritte aus. Damit gilt dann:*
$[H^+, V^+, r^+] = \mathit{Arnoldi\text{-}Prozeß}(A, v_1^+, m+p)$,
wobei (6.2.35) gilt.

Wird direkt mit dem Nullstellenpolynom $R(x) = \prod_{i=1}^{p}(x - \mu_i)$ gearbeitet, ergibt sich:

Algorithmus 6.2.17 Impliziter-Arnoldi-Neustart-B

Es gelte: $[H, V, r] = \mathit{Arnoldi}(R(A), v_1, m+1)$

function $[H^+, V^+, r^+] = \mathit{Impliziter\text{-}Arnoldi\text{-}Neustart\text{-}B}(A, H, V, r, R)$

(1) Berechne $QR = H \in \mathbb{R}^{m+1}$

(2) $H = Q^T H Q \quad (= RQ$ *Hessenberg-Form*$)$

(3) $V_m^+ = (VQ)\binom{I_m}{0}$ *und* $H_m^+ = (I_m\ 0)H\binom{I_m}{0} \in \mathbb{R}^{m^2}$

(4) $v = (VQ)e_{m+1}$

(5) $\hat{r} = \alpha v + q_{m+1,m} r, \qquad \alpha := e_{m+1}^T H e_m$

(6) Führe für die Arnoldi-Zerlegung $R(A)V_m^+ = V_m^+ H_m^+ + \hat{r} e_m^T$ *noch einen weiteren Schritt aus. Damit gilt dann:*
$[H^+, V^+, r^+] = \mathit{Arnoldi\text{-}Prozeß}(R(A), v_1^+, m+1)$,
wobei (6.2.35) gilt.

Bemerkung 6.2.18

Wählt man in Algorithmus 6.2.16 und Algorithmus 6.2.17 die gleichen $\mu_1, \ldots, \mu_p$, so ist Algorithmus 6.2.17 äquivalent zu Algorithmus 6.2.16, da bei beiden (6.2.35) gilt. Der Vorteil von Alg. 6.2.17 ist, daß hier Schritt (1) leichter zu implementieren ist. Andererseits ist es hier nicht möglich, die Werte der $\mu_1, \ldots, \mu_p$ und deren Anzahl bei wiederholter Anwendung in einer Iteration zu verändern, da Teile der Arnoldi-Zerlegung auf der Matrix $R(A)$ aufbauen.

Sorenson zeigt, daß für Algorithmus 6.2.16 gilt:

Satz 6.2.19 Sorenson 1992

Sei $[H, V, r] = Arnoldi(A, v_1, m+p)$ und $\theta_1, \ldots, \theta_{m+p}$ die Ritz-Werte mit $Hx_i = \theta_i x_i$, $i = 1, \ldots, m+p$. Die uninteressanten Ritz-Werte (z.B. diejenigen mit betragskleinstem Realteil) seien $\theta_{m+1}, \ldots, \theta_{m+p}$. Weiterhin sei $QR = \prod_{i=m+1}^{m+p} (H - \theta_i I)$ und $\tilde{H} = Q^T H Q$. Dann gilt:

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} H_m^+ & M^+ \\ 0 & R_p \end{pmatrix} \tag{6.2.36}$$

mit $\sigma(\tilde{H}_k) = \{\theta_1, \ldots, \theta_m\}$ und $\sigma(R_p) = \{\theta_{m+1}, \ldots, \theta_{m+p}\}$. Weiterhin gilt:

$$v_1^+ = VQe_1 = \sum_{i=1}^{m} \zeta_i V x_i = \sum_{i=1}^{m} \xi_i y_i \tag{6.2.37}$$

Damit ist v_1^+ eine Linearkombination der Ritz-Vektoren zu den interessanten Ritz-Werten.

Beweis: Siehe [Sor92]. ■

Bemerkung 6.2.20 *Bei Verwendung der 'exakten' Shifts nach Satz 6.2.19 entspricht das implizite Neustart-Verfahren von Sorenson einem expliziten Neustart, wobei als neuer Startvektor* **implizit** *die Summe der Ritz-Vektoren zu den interessanten Eigenwerten gewählt wurde. Der Vorteil ist hier, daß nur p statt $k+p$ Matrix-Vektor Multiplikationen benötigt wurden, um die neue Krylov-Basis zu berechnen!*

Eine andere Möglichkeit der Spektralverschiebung ist, die μ_j als die Nullstellen des Tschebyscheff-Polynoms aus (6.2.17) zu wählen. Auch hier können bei geeigneter Wahl der Ellipse die Eigenrichtungen bzgl. der interessanten Eigenwerte im neuen Startvektor v_1^+ verstärkt und die anderen Eigenrichtungen abgeschwächt werden.

Zu den Details der Implementation sei auf [Sor92] und [Seb95] verwiesen.

Mit den hier betrachteten Arnoldi-Verfahren ist es möglich, die Eigenwerte am Rand des Spektrums von A zu berechnen. Unter Zuhilfenahme einer **Präkonditionierungsfunktion** f, hier insbesondere die Tschebyscheff-Polynome, können die uninteressanten Eigenwerte von A in den komplexen Einheitskreis und die interessanten Eigenwerte in dessen Komplement abgebildet werden. Dadurch werden die interessanten Eigenwerte zu jenen, die am Rande des Spektrums liegen. Auf diese Weise ist es möglich, die Eigenwerte mit größtem/kleinstem Real-/Imaginärteil zu berechnen. Entscheidend für die Konvergenz der Verfahren ist dabei, wie gut die interessanten Eigenwerte von den uninteressanten bzgl. des Betrages getrennt werden. Der (asymptotische) **konvergenzbestimmende Faktor** γ kann wie folgt angegeben werden:

Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die interessanten Eigenwerte, die berechnet werden sollen. Dazu sei eine Präkonditionierungsfunktion f unter der Voraussetzung von Satz 6.2.10 gewählt, mit der o.B.d.A gilt:

$$|f(\lambda_1)| \geq |f(\lambda_2)| \geq \cdots \geq |f(\lambda_k)| > |f(\lambda_{k+1})| \geq \cdots \geq |f(\lambda_n)| \tag{6.2.38}$$

Dann gilt:

$$\gamma = \frac{|f(\lambda_{k+1})|}{|f(\lambda_k)|} < 1 \tag{6.2.39}$$

Für detailliertere Konvergenzaussagen sei auf [Cha93], [MR96], [Seb95], [Sor92] verwiesen.

Wegen dieses Konvergenzverhaltens ist es von besonderer Bedeutung, eine Funktion f zu finden, die eine besonders gute Trennung garantiert. Bisher kann jedoch noch keine allgemeingültige Aussage getroffen werden, welche Funktionen hierbei die besten sind. Vielmehr scheint es der Fall zu sein, daß der gewählte Ansatz immer nur für bestimmte Klassen von Matrizen effizient ist. Die am weitesten verbreiteten Tschebyscheff-Polynome haben den Vorteil, daß sie bei einer Eigenwertverteilung nahe der reellen Achse eine sehr gute Trennung schaffen. Dies liegt an ihrer Extremaleigenschaft, die für reelle Intervalle gilt. Für Ellipsen in der komplexen Ebene gilt dies allerdings nur eingeschränkt, vgl. [Fis91]. Der wesentliche Nachteil der Tschebyscheff-Polynome ist jedoch, daß mit ihnen nur ellipsoide Gebiete in den komplexen Einheitskreis abgebildet werden können, d.h. die uninteressanten Eigenwerte sollten sich gut mit einer Ellipse einschließen lassen. Diese

Forderung kann jedoch, im Falle von Eigenwerten mit großem Imaginärteil oft nur schwer erfüllt werden, so daß darunter die Trennung/Konvergenz leidet. Im nächsten Abschnitt soll diese Problematik näher betrachtet und eine neue Klasse von Präkonditionierungspolynomen angegeben werden.

6.3 Präkonditionierung mit iterierten Ritz-Polynomen

Die im Abschnitt 6.2.1 dargestellten skalierten Tschebyscheff-Polynome zur Präkonditionierung der Eigenwertprobleme lassen sich besonders gut im Falle von flachen Ellipsen einsetzen. D.h., die uninteressanten Eigenwerte sollten nur kleine Imaginärteile im Verhältnis zu ihren Realteilen haben. Sind die Imaginärteile jedoch größer als die Realteile bzgl. des Zentrums der Ellipse, so können zwar immer noch reelle Tschebyscheff-Polynome angegeben werden, aber das Wachstum dieser Polynome entlang der reellen Achse ist nur noch sehr mäßig, vgl. [Seb95]. In der Verzweigungsanalyse sind jedoch insbesondere die Eigenwerte nahe dem Ursprung interessant, so daß hier eine schlechte Trennung und somit langsame Konvergenz zu erwarten ist. Problematisch sind auch Spektren, die stark von der Form einer Ellipse abweichen, wie etwa Bumerang-, Kreuz- oder Rechtecks-Anordnungen, vgl. [SS82].

Ein einfaches Beispiel für diese Problematik ist:

$$G(u,\lambda) = \triangle u + \alpha u_x + \lambda u = 0 \text{ auf } \Omega = [0,1]^2, \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{6.3.1}$$

Die Eigenwertverteilung ist in Abbildung 6.3.1 dargestellt. Bei einer Diskretisierung mit der Gitterweite $h = 1/(n+1)$ treten die Eigenwerte für ein genügend großes Verhältnis $\frac{\alpha}{h}$ in einem rechteckigen Gitter auf.

Versucht man hier z.B. die rechte Spalte von Eigenwerten zu berechnen, muß man die anderen Eigenwerte in eine Ellipse einschließen. Dies gelingt jedoch nur mit Hilfe von relativ hohen Ellipsen, denn die gesuchten Eigenwerte dürfen nicht eingeschlossen werden und der Abstand zu diesen sollte möglichst groß sein. Abbildung 6.3.2 zeigt eine solche Ellipse.

Die Trennung der gesuchten und uninteressanten Eigenwerte ist hier als schlecht zu bezeichnen. Der Logarithmus zur Basis 10 der Höhenlinien des entsprechenden

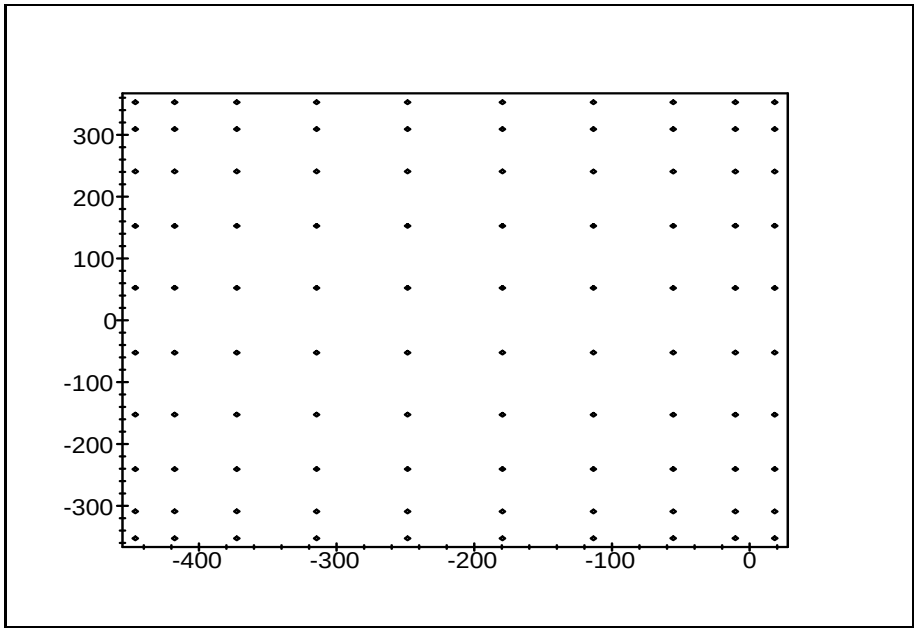

Abbildung 6.3.1: Eigenwerteverteilung für $\lambda = 270,\ \alpha = 10,\ n = 10$

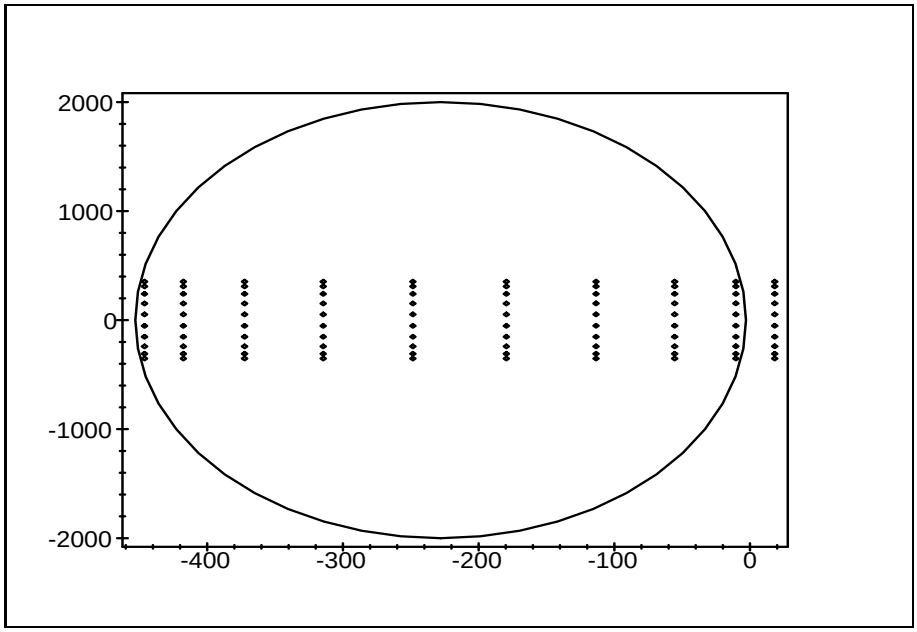

Abbildung 6.3.2: Einschließende Ellipse für $\lambda = 270,\ \alpha = 10,\ n = 10$

Tschebyscheff-Polynoms vom Grad 15 ist in Abbildung 6.3.3 dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, daß das Wachstum des Polynoms in der Nähe der reellen Achse, wo die Eigenwerte liegen, am schlechtesten ist. Zu beachten ist dabei insbesondere die Skalierung der Halbachsen. Außerdem ist zu erkennen, daß die Höhenlinie zum Betrag 1 keine echte Ellipse ist, sondern diese nur approximiert (siehe Satz 6.2.11). Um eine sichere Trennung der Eigenwerte zu gewährleisten, sind folglich immer Tschebyscheff-Polynome von hohem Grad notwendig.

Tschebyscheff-Polynome eignen sich somit in diesem Falle nicht besonders gut für die Präkonditionierung. Dies liegt an der Einschränkung, daß nur ellipsoide Gebiete in den Einheitskreis abgebildet werden können. Im folgenden Abschnitt sollen nunmehr Polynome entwickelt werden, die bzgl. des Gebietes flexibler sind.

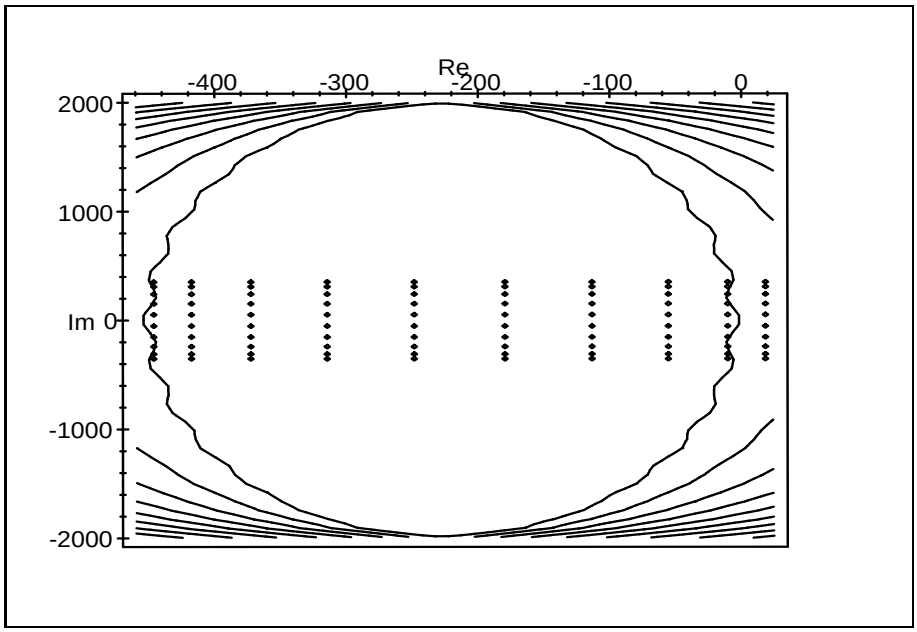

Abbildung 6.3.3: Höhenlinien des Tschebyscheff-Polynoms (log10) vom Grad 15 für $\lambda = 270,\ \alpha = 10,\ h = 10$

6.3.1 Bestimmung der iterierten Ritz-Polynome

Zur Bestimmung dieser Polynome wird die Eigenschaft des Arnoldi-Verfahrens (Algorithmus 6.2.6, Seite 147), die Eigenwerte am Rand des Spektrums besonders billig zu approximieren,ausgenutzt (siehe etwa [Saa80, Saa92]). Mit Hilfe dieser Eigenschaft wird im Folgenden ein Algorithmus entwickelt, der ein Polynom R bestimmt, das genau in einer **Spektralumgebung** $\Sigma \subset \mathbb{C}$ von A kleine Werte annimmt. Als Spektralumgebung Σ sei dabei eine Vereinigung von (möglichst kleinen) offenen Umgebungen der Eigenwerte bezeichnet.

Sei $v \in \mathbb{R}^n$ zufällig gewählt und mit $m < n$:

$$[\theta_1, \ldots, \theta_m] = \text{Arnoldi-Verfahren-EW}(A, v, m). \tag{6.3.2}$$

Da diese Ritz-Werte entweder reell oder in konjugiert komplexen Paaren auftreten, kann mit ihnen ein reelles Polynom auf die folgende Weise definiert werden:

Sei

$$\Theta := \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \tag{6.3.3}$$

$$R(x) := \frac{\prod_{l=1}^{m} (x - \theta_j)}{\prod_{l=1}^{m} (\hat{x} - \theta_j)} \in \Pi_m, \ \hat{x} \notin \Theta \tag{6.3.4}$$

Der Nenner ist ein Normierungsfaktor. Somit gilt $R(\hat{x}) = 1$. Um numerische Rundungsfehler zu vermeiden, sollte die Normierungsstelle $\hat{x}$ nicht nahe einem der Ritz-Werte liegen. Eine geeignete Wahl wäre z.B. auf der reellen Achse mit :

$$\hat{x} := \min_{\rho \in \Theta}\{\Re(\rho)\} - \left\{ \max_{\rho \in \Theta}\{\Re(\rho)\} - \min_{\rho \in \Theta}\{\Re(\rho)\} \right\} /10 \tag{6.3.5}$$

Diese Normierungsstrategie bewirkt, daß R nicht im inneren einer hinreichend kleinen Spektralumgebung von A normiert wird, denn in diesem Bereich soll R kleine Betragswerte annehmen.

Die Nullstellen von R sind also gerade die Ritz-Werte von A bzgl. $K_m(A, v)$. Da schon bei relativ kleinen Werten von m das Arnoldi-Verfahren die Eigenwerte am Rand des

Spektrums von A recht gut approximiert[5], hat R somit auch die Eigenschaft, auf Teilen des Randes des Spektrums kleine Betragswerte anzunehmen.

Sei damit erneut $v \in \mathbb{R}^n$ zufällig gewählt und

$$[H, V, r] = \text{Arnoldi}(R(A), v, m) \tag{6.3.6}$$

Die Ritz-Werte von A bzgl. V können bestimmt werden mittels:

$$[\theta_{m+1}, \ldots, \theta_{2m}] = \text{Rayleigh-Ritz-EW}(A, V) \tag{6.3.7}$$

Die Ritz-Werte $\{\theta_{m+1}, \ldots, \theta_{2m}\}$ werden nun in Gebieten des Spektrums von A liegen, in denen $R(A)$ groß ist. Damit kann wieder definiert werden:

$$\Theta = \Theta \cup \{\theta_j : |R(\theta_j)| > r_\epsilon, j = m+1, \ldots, 2m\}, \qquad r_\epsilon \in \mathbb{R}^+ \tag{6.3.8}$$

$$\hat{x} = \min_{\rho\in\Theta}\{\Re(\rho)\} - \left\{\max_{\rho\in\Theta}\{\Re(\rho)\} - \min_{\rho\in\Theta}\{\Re(\rho)\}\right\}/10 \tag{6.3.9}$$

$$R(x) := \frac{\prod\limits_{\rho\in\Theta}(x-\rho_j)}{\prod\limits_{\rho\in\Theta}(\hat{x}-\rho)} \in \Pi_{|\Theta|},\ \hat{x} \notin \Theta \tag{6.3.10}$$

Führt man die Schritte (6.3.6)-(6.3.10) immer wieder durch, so kann damit folgender vorläufiger Algorithmus definiert werden:

Algorithmus 6.3.1 Iter-Ritz-Poly-0

function $[\Theta, R]$ = *Iter-Ritz-Poly-0*(A, r_ϵ)
$\Theta := \{\}$
REPEAT

(1) IF $\Theta = \{\}$ *THEN* $R(x) = x$ *ELSE* $R(x) = \prod\limits_{\rho\in\Theta}(x-\rho)/\prod\limits_{\rho\in\Theta}(\hat{x}-\rho)$ *mit* $\hat{x} =$

$$\min_{\rho\in\Theta}\{\Re(\rho)\} - \left\{\max_{\rho\in\Theta}\{\Re(\rho)\} - \min_{\rho\in\Theta}\{\Re(\rho)\}\right\}/10$$

(2) Wähle $v \in \mathbb{R}^n$ *geeignet (zufällig oder nach geeigneter Strategie).*

(3) Wähle $m \in \mathbb{N}$ *geeignet (siehe Satz 6.3.2) (z.B.* $5 \le m \le [\frac{n}{100}]$*).*

(4) $[H, V, r] = Arnoldi(R(A), v, m)$

(5) $[\theta_1, \ldots, \theta_m]$ =*Rayleigh-Ritz-EW*(A, V)

[5]Natürlich gibt es auch hier wieder Ausnahmen. In den meisten Fällen gilt jedoch diese Aussage. Probleme ergeben sich vor allem Matrizen mit großem Pseudospektrum.

(6) $\Theta = \Theta \cup \{\theta_j : |R(\theta_j)| > r_\epsilon, j = 1, \ldots, m\}$

UNTIL $|R(\theta_j)| \leq r_\epsilon, \forall j = 1, \ldots, m$

Dieser Algorithmus konstruiert ein Polynom mit folgender Eigenschaft:

Satz 6.3.2 *Sei* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *und* $r_\epsilon \in \mathbb{R}^+$. *Dann existiert eine geeignete Wahl von* $v \in \mathbb{R}^n$ *in Schritt (2) und* $m \in \mathbb{N}, m \leq n$ *in Schritt (3) von Algorithmus 6.3.1, so daß mit* $[\Theta, R] =$ *Iter-Ritz-Poly-0*(A, r_ϵ) *gilt:*

$$\max_{\lambda \in \sigma(A)} \{|R(\lambda)| < r_\epsilon\} \tag{6.3.11}$$

Beweis: Infolge der Translationsinvarianz des Arnoldi-Prozesses, Satz 6.2.9, sind alle Ritz-Werte aus Schritt (5) Approximationen an Eigenwerte von A. Wählt man $m = n$ in einem der Schritte (z.B. im ersten), so ist klar, daß (6.3.11) für alle $v \in \mathbb{R}^n$ erfüllt ist.

Da dies aber zu aufwendig wäre, sei nun vorausgesetzt, daß in den ersten l Durchläufen $m \leq n$ gewählt wurde und die Abbruchbedingung noch nicht erfüllt ist (siehe dazu Bemerkung 6.3.3). Da nun in Schritt (4) mittels R eine Präkonditionierung der Eigenwerte von A durchgeführt wird, wird die Basis V aus dem Arnoldi-Prozeß (4) die Summe der (verallgemeinerten) Eigenräume zu den Eigenwerten von A approximieren, bzgl. derer das iterierte Ritz-Polynom R den größten Betrag hat. Da jedoch in Schritt (6) und (1) bei jedem Durchlauf das iterierte Ritz-Polynom R auf dem Teil der Spektralumgebung von A zusätzliche Nullstellen erhält, auf dem es größere Beträge als r_ϵ hatte, deckt die Menge $\{x \in \mathbb{C} : |R(x)| < r_\epsilon\}$ immer größere Teile der Spektralumgebung ab. Die Wahl von v in (2) kann dabei grundsätzlich zufällig geschehen, da lediglich gewährleistet sein muß, daß v Anteile an diejenigen Eigenrichtungen von A hat, deren zugehörige Eigenwerte noch nicht erfaßt wurden. Diese Eigenschaft ist mit Wahrscheinlichkeit 1 erfüllt. Um diese Eigenschaft zu verstärken, kann jedoch für nicht zu große $k \in \mathbb{N}$ auch $R(A)^k v$ anstatt von v selbst gewählt werden. Dadurch würden die verbleibenden Eigenrichtungen noch verstärkt werden, ohne dafür einen Krylovraum aufbauen zu müssen. Außerdem würden wegen der numerischen Rundungsfehler auf jeden Fall diese Eigenrichtungen in den Vektor einfließen.

Sollte es nach einem Durchlauf noch Eigenwerte von A geben für die $|R(\lambda)| > r_\epsilon$ gilt, so werden besonders die größten unter diesen im nächsten Durchlauf am besten approximiert. Durch Hinzunahme dieser neuen Eigenwertapproximationen wird das iterierte Ritz-Polynom auch in diesen Eigenwertumgebungen bzgl. des Betrages klein.

Nach maximal n Durchläufen und hinreichend großer Krylov-Dimension m sind alle Eigenwerte approximiert und das Abbruchkriterium ist erfüllt. Dann gilt auf Grund der Stetigkeit der Polynome: Es existiert ein $m \leq n$, so daß alle Ritz-Werte aus Schritt (5) in einer Umgebung der Nullstellen Θ von R liegen, in der das iterierte Ritz-Polynom R einen Betrag kleiner als r_ϵ hat. Damit ist auch (6.3.11) erfüllt. ■

Bemerkung 6.3.3 *Satz 6.3.2 besagt, daß Algorithmus 6.3.1 sukzessive ein iteriertes Ritz-Polynom R konstruiert, welches durch Hinzunahme von Nullstellen, die die Eigenwerte von A approximieren, allmählich die Spektralumgebung von A abdeckt. Wählt man m in Schritt (3) genügend groß, so hat man die Garantie, daß (6.3.11) tatsächlich erfüllt ist. Wählt man m kleiner, so sind evtl. mehr (billigere) Durchläufe des Algorithmus notwendig, um eine Abdeckung der Spektralumgebung zu gewährleisten. Die Eigenschaft (6.3.11) kann dann jedoch nicht mehr garantiert werden. Infolge der sehr guten Approximationseigenschaft des Arnoldi-Prozesses für die extemalen Eigenwerte kann m in den meisten Fällen viel kleiner als n gewählt werden. Dies ist jedoch vom Eigenwertproblem abhängig.*

Der wesentliche Nachteil von Algorithmus 6.3.1 ist, daß der Grad des iterierten Ritz-Polynoms R schnell anwächst. Dies liegt in der Hinzunahme von immer mehr Nullstellen in Schritt (6). Untersucht man diese Nullstellen genauer, so stellt man fest, daß, um (6.3.11) zu gewährleisten, oft weitaus weniger Nullstellen als gewählt nötig sind. Dies liegt daran, daß R in anfänglich hinzugenommenen Nullstellen auch klein sein würde, wenn man diese in späteren Durchläufen weg ließe, falls weitere Nullstellen in der Nähe hinzugenommen würden. Eine mögliche Modifikation von Algorithmus 6.3.1 wäre damit:

Algorithmus 6.3.4 Iter-Ritz-Poly

function $[\Theta, R] =$ *Iter-Ritz-Poly*(A, r_ϵ)
$\Theta := \{\}$
REPEAT

(1) IF $\Theta = \{\}$ *THEN* $R(x) = x$ *ELSE* $R(x) = \prod_{\rho\in\Theta}(x-\rho)/\prod_{\rho\in\Theta}(\hat{x}-\rho)$ *mit* $\hat{x} = \min_{\rho\in\Theta}\{\Re(\rho)\} - \left\{\max_{\rho\in\Theta}\{\Re(\rho)\} - \min_{\rho\in\Theta}\{\Re(\rho)\}\right\}/10$

(2) Wähle $v \in \mathbb{R}^n$ *geeignet (zufällig oder nach geeigneter Strategie).*

(3) Wähle $m \in \mathbb{N}$ *geeignet (siehe Satz 6.3.2) (z.B.* $5 \leq m \leq [\frac{n}{100}]$*).*

(4) $[H, V, r] =$ *Arnoldi*$(R(A), v, m)$

(5) $[\theta_1, \ldots, \theta_m]$ =*Rayleigh-Ritz-EW*(A, V)

(6) $\Theta = \Theta \cup \{\theta_j : |R(\theta_j)| > r_\epsilon, j = 1, \ldots, m\}$

(7) FOR $i = 1, 2, \ldots, p$ *DO* *(wobei* $\Theta := \{\rho_1, \ldots, \rho_p\}$ *sei)*

(1) Sei R_i *mit* $\Theta \backslash \{\rho_i, \overline{\rho}_i\}$ *bzgl. (6.3.10) gewählt.*

(2) IF $|R_i(\rho_i)| < r_\epsilon$ *THEN* $\Theta = \Theta \backslash \{\rho_i, \overline{\rho}_i\}$

UNTIL $|R(\theta_j)| \leq r_\epsilon, j = 1, \ldots, m$ *und in (7) wurden keine Ritz-Werte weggelassen.*

Mit diesem Algorithmus ist es ebenfalls möglich, ein Polynom zu berechnen, das auf dem Spektrum von A einen Betrag kleiner als r_ϵ hat. In Schritt (7) werden dabei überflüssige Ritz-Werte entfernt. Dadurch ergibt sich eine gleichmäßigere Abdeckung der Spektralumgebung. Da hier die Abbruchbedingung schärfer ist als in Algorithmus 6.3.1, gilt Satz 6.3.2 analog auch für diesen Algorithmus.

Wird in Schritt (3) die Dimension des Krylov-Raumes m zu klein gewählt, könnte es bei ungünstigen Eigenwertproblemen vorkommen, daß die Abbruchbedingung erfüllt ist, obwohl es noch Eigenwerte gibt, für die (6.3.11) nicht erfüllt ist. Um den Algorithmus für solche Fälle zu 'stabilisieren', kann er mit Hilfe von impliziten Arnoldi-Neustarten, wie in Abschnitt 6.2.2 dargestellt, modifiziert werden. Die stabilisierte Variante lautet:

Algorithmus 6.3.5 Iter-Ritz-Poly-stab

function $[\Theta, R]$ = *Iter-Ritz-Poly-stab*(A, r_ϵ, q)
$\Theta := \{\}$; *l=0*
REPEAT

(1) IF $\Theta = \{\}$ *THEN* $R(x) = x$ *ELSE* $R(x) = \prod_{\rho \in \Theta} (x - \rho) / \prod_{\rho \in \Theta} (\hat{x} - \rho)$ *mit* $\hat{x} = \min_{\rho \in \Theta}\{\Re(\rho)\} - \left\{ \max_{\rho \in \Theta}\{\Re(\rho)\} - \min_{\rho \in \Theta}\{\Re(\rho)\} \right\} / 10$

(2) Wähle $v \in \mathbb{R}^n$ *geeignet (zufällig oder nach geeigneter Strategie).*

(3) Wähle $m \in \mathbb{N}$ *geeignet (siehe Satz 6.3.2) (z.B.* $5 \leq m \leq [\frac{n}{100}]$*).*

(4) $[H, V, r]$ = *Arnoldi*$(R(A), v, m)$

(5) $[\theta_1, \ldots, \theta_m]$ =*Rayleigh-Ritz-EW*(A, V)

(6) $\Theta = \Theta \cup \{\theta_j : |R(\theta_j)| > r_\epsilon, j = 1, \ldots, m\}$

(7) FOR $i = 1, 2, \ldots, p$ *DO* *(wobei* $\Theta := \{\rho_1, \ldots, \rho_p\}$ *sei)*

(1) Sei R_i *mit* $\Theta \backslash \{\rho_i, \overline{\rho}_i\}$ *bzgl. (6.3.10) gewählt.*

(2) IF $|R_i(\rho_i)| < r_\epsilon$ *THEN* $\Theta = \Theta \backslash \{\rho_i, \overline{\rho}_i\}$

(8) IF $|R(\theta_j)| \leq r_\epsilon, j = 1, \ldots, m$ *und in (7) wurden keine Ritz-Werte weggelassen THEN*

IF $l < q$ *THEN*

$l = l + 1$

$[H, V, r] =$ *Impliziter-Arnoldi-Neustart-B*(A, H, V, r, R) *ELSE*

Gehe zu (5)

$l = 0$.

UNTIL $|R(\theta_j)| \leq r_\epsilon, j = 1, \ldots, m$ *und in (7) wurden keine Ritz-Werte weggelassen und* $l = q$.

Bemerkung 6.3.6 *Die Wahl des Stabilisierungs-Parameters q in Algorithmus 6.3.5 ist vom Eigenwertproblem abhängig. Bei Eigenwertproblemen, in denen die extremalen Eigenwerte von $R(A)$ schlecht durch den Arnoldi-Prozeß approximiert werden, muß q größer gewählt werden. Dadurch ist es möglich, die Ritz-Werte aus Schritt (5) noch q-mal durch den impliziten Arnoldi-Neustart nach Sorenson zu verbessern. Hat dann das iterierte Ritz-Polynom R auf den verbesserten Werten immer noch einen Betrag kleiner r_ϵ, so werden diese Ritz-Werte als genügend genaue Approximationen an die Eigenwerte von A angesehen und akzeptiert.*

Da alle Ritz-Werte, die in Schritt (6) als neue Nullstellen von $R(x)$ hinzugenommen werden, in der Nähe von Eigenwerten von A liegen, hat $R(x)$ genau auf der Vereinigung dieser Eigenwertumgebungen kleine Werte. Damit sind diese iterierten Ritz-Polynome für geeignete Konstruktionsparameter v, m, q in Algorithmus 6.3.5 optimal an alle denkbaren Spektren angepasst. Anders als bei den Tschebyscheff-Polynomen, können hier nun nahezu beliebige Punktmengen in einen Kreis um die Null abgebildet werden. Sogar bei Eigenwertproblemen, bei denen weit verteilte Eigenwerthaufen vorkommen, passen sich diese Polynome an diese Verteilung an. Es werden dann diese getrennten Haufen in den Kreis um die Null abgebildet. Auf den dazwischenliegenden Gebieten, hat $R(x)$ zwar große Werte, da jedoch dort keine Eigenwerte liegen, ist dies für eine Präkonditionierung nicht von Belang.

In Algorithmus 6.2.12, Seite 152, wurde dargestellt, wie Tschebyscheff-Polynome billig und numerisch stabil unter Ausnutzung der Drei-Term-Rekursion ausgewertet werden können. Im nächsten Abschnitt wird dies auch für iterierte Ritz-Polynome gezeigt.

6.3.2 Auswertung der iterierten Ritz-Polynome

Mit Hilfe von Algorithmus 6.2.12, Seite 152, war es möglich, $p_l(A)v$ mit Hilfe von l Matrix-Vektor Multiplikationen und $l-1$ Vektor-Additionen zu berechnen. Obwohl es für iterierte Ritz-Polynome im allgemeinen keine Drei-Term-Rekursion gibt, können diese trotzdem billig ausgewertet werden. Dazu nutzt man die Eigenschaft, daß jedes iterierte Ritz-Polynom R durch seine Nullstellen definiert ist. Da diese stets in konjugiert komplexen Paaren oder als reelle Zahlen auftreten, kann bei der Berechnung komplexe Arithmetik vermieden werden. Dazu sei o.B.d.A angenommen, daß mit $\Theta = \{\rho_1, \ldots, \rho_p\}$ die Elemente von Θ in der Reihenfolge nummeriert sind, in der sie durch den Algorithmus 'Iter-Ritz-Poly-stab' bestimmt wurden. Insbesondere sind konjugiert komplexe Paare aufeinanderfolgend angeordnet.

Algorithmus 6.3.7 Berechnung von $R(A)v$

function $[w] = R(A, \Theta, v)$

(1) IF $|\Theta| = 0$ *THEN* $w = Av$ *ELSE*

(2) $w = v$

(3) $\hat{x} = \min_{\rho\in\Theta}\{\Re(\rho)\} - \left\{\max_{\rho\in\Theta}\{\Re(\rho)\} - \min_{\rho\in\Theta}\{\Re(\rho)\}\right\}/10$

(4) FOR i=1,...,p DO

IF $\Im(\rho_i) \neq 0$ *THEN*[6]

$w = \frac{(A(Aw-2\Re(\rho_i)w)+(\Re(\rho_i)^2+\Im(\rho_i)^2)w)}{(\Re(\rho_i)^2+\Im(\rho_i)^2+(\hat{x}-2\Re(\rho_i))\hat{x})}$

$i = i + 1$

ELSE

$w = \frac{1}{\hat{x}-\rho_i}(Aw - \rho_i w)$

Der Aufwand zur Auswertung von $R(A)v$ beträgt somit $\mathrm{grad}(R)$ Matrix-Vektor Multiplikationen sowie ebenfalls $\mathrm{grad}(R)$ Vektor-Additionen. Dies ist, bis auf eine Vektor-Addition, der gleiche Aufwand, wie bei der Auswertung von Tschebyscheff-Polynomen. Hinzu kommt noch, daß hier immer mit der gleichen Matrix multipliziert wird während in Algorithmus 6.2.14, Seite 150 die verwendete Matrix $(A-d_0 I)$ von der Ellipse abhing. Dies erfordert einen geringen Mehraufwand an Rechenzeit und an Implementierungsaufwand. Diese Eigenschaft ist für den Gesamtrechenaufwand beim Einsatz als Präkonditionierungspolynom zur Eigenwertbestimmung aber vernachlässigbar. Der wesentliche Aufwand wird

[6] Dies entspricht $\frac{(Aw-\rho_i w)(Aw-\overline{\rho}_i w)}{(\hat{x}-\rho_i)(\hat{x}-\overline{\rho}_i)}$

durch die Matrix-Vektor Multiplikationen und vor allem von der erreichten Trennung der Eigenwerte bestimmt.

Bemerkung 6.3.8 *Wesentlich für eine numerisch stabile Auswertung ist, daß die berechneten Abschnittspolynome* $\prod_{i=1}^{l} \frac{Aw-\rho_i w}{\hat{x}-\rho_i}$, $i < p$ *keine zu hohen Spitzen in den noch folgenden Nullstellen aufweisen. Diese Eigenschaft wird durch die Konstruktion von* Θ*, d.h. die Reihenfolge der Nullstellen in* Θ*, automatisch gewährleistet, da in Algorithmus 6.3.5, Seite 168, in jedem neuen Schritt gerade die Nullstellen hinzugenommen werden, in denen das letzte Abschnittspolynom besonders groß ist und in deren Umgebung Eigenwerte von A liegen. Sollte es trotzdem zu numerischen Instabilitäten kommen, so können die Ritz-Werte leicht so angeordnet werden, daß hohe Spitzen weitestgehend verhindert werden. Dies kann analog zu Algorithmus 6.3.21, Seite 197 realisiert werden.*

Hiermit liegen nun Polynome vor, die sich numerisch stabil und billig auswerten lassen. Im Zusammenhang mit der iterativen Lösung von linearen Gleichungssystemen lassen sich diese Polynome bzw. deren Nullstellen direkt nutzen, da hier Polynome von Interesse sind, die auf dem Spektrum von A klein sind und für die $p(0) = 1$ gilt[7]. Dies wird ausführlicher in Abschnitt 6.3.5 behandelt. Im nächsten Abschnitt soll zunächst die Nutzung der iterierten Ritz-Polynome als Präkonditionierung für große, dünn besetzte Eigenwertprobleme betrachtet werden.

6.3.3 Anwendung auf Eigenwertprobleme

Für die Nutzung der iterierten Ritz-Polynome zur Präkonditionierung als Ersatz für die Tschebyscheff-Polynome sind diese nicht direkt einsetzbar. Da hier nur ein Teil des Spektrums abgeschwächt werden soll, müssen sie noch modifiziert werden. O.B.d.A sollen im Folgenden die Eigenwerte mit größtem Realteil bestimmt werden.

In praktischen Anwendungen wird man oft eine Grenze $g \in \mathbb{R}$ angeben können, so daß alle Eigenwerte mit $\Re(\lambda) > g$ gesucht sind. Falls dies nur wenige sind, eignen sich die hier beschriebenen iterativen Verfahren. O.B.d.A sei für g vorausgesetzt, daß es Elemente in Θ gebe, mit $\Re(\rho) \leq g$. Da die Elemente von Θ in der gesamten Spektralumgebung

[7] Die Normierungsbedingung läßt sich natürlich nur dann sinnvoll erfüllen, wenn der Ursprung nicht in der Nähe eines Eigenwertes von A liegt. Dies ist aber eine Voraussetzung, die alle iterativen Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen im Zusammenhang mit der Richardson-Iteration erfüllen müssen.

von A verteilt sind und g den rechten Teil dieses Spektrums 'abschneiden' soll, ist diese Annahme im allgemeinen erfüllt.

Für die Präkonditionierung müssen die iterierten Ritz-Polynome derart abgeändert werden, daß ihr Betrag auf allen Eigenwerten mit $\Re(\lambda) \leq g$ klein und auf den anderen möglichst groß wird. Da das iterierte Ritz-Polynom durch seine Nullstellenmenge Θ definiert ist, läßt es sich am besten über diese Menge modifizieren:

Definition 6.3.9 *Sei* $[\Theta, R] = \textit{Iter-Ritz-Poly-stab}(A, r_\epsilon, q)$ *und* $g \in \mathbb{R}$. *Dann sei die Menge* Θ_g *definiert durch:*

$$\Theta_g := \{\rho : \rho \in \Theta, \Re(\rho) \leq g\} \cup \{\rho - 2(\Re(\rho) - g) : \rho \in \Theta, \Re(\rho) > g\} \tag{6.3.12}$$

Bemerkung 6.3.10 *Die Menge* Θ_g *geht nach Definition 6.3.9 aus der Menge* Θ *hervor, indem der Realteil aller Elemente* ρ *mit* $\Re(\rho) > g$ *an* g *'gespiegelt' wird.*

Damit kann ein Algorithmus angegeben werden, der das modifizierte Polynom bestimmt. Die genauen Eigenschaften werden dann in dem darauffolgenden Lemma und Satz angegeben.

Algorithmus 6.3.11 Ritz-Kond-Poly

function $[\Theta_g, R_g] = \textit{Ritz-Kond-Poly}(A, r_\epsilon, q, g)$

(1) $[\Theta, R] = \textit{Iter-Ritz-Poly-stab}(A, r_\epsilon, q)$

(2) $\Theta_g = \{\rho : \rho \in \Theta, \Re(\rho) \leq g\} \cup \{\rho - 2(\Re(\rho) - g) : \rho \in \Theta, \Re(\rho) > g\}$

(3) $R_g(x) := \frac{\prod_{\rho \in \Theta_g} (x-\rho)}{\prod_{\rho \in \Theta} (\hat{x}-\rho)}$ *wobei* $\hat{x} = \min_{\rho \in \Theta}\{\Re(\rho)\} - \left\{ \max_{\rho \in \Theta}\{\Re(\rho)\} - \min_{\rho \in \Theta}\{\Re(\rho)\} \right\} /10$ *sei.*

Um die Eigenschaften von R_g beweisen zu können, wird das folgende Lemma gebraucht:

Lemma 6.3.12 *Sei* $g \in \mathbb{R}$, $x, \rho \in \mathbb{C}$ *mit* $\Re(x) \leq g$ *und* $\Re(\rho) > g$. *Dann gilt:*

$$|x - \rho| \geq |x - (\rho - 2(\Re(\rho) - g))| \tag{6.3.13}$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}
& & |x-\rho| &\geq |x-(\rho-2(\Re(\rho)-g))| \\
\Leftrightarrow & & \sqrt{\Im(x-\rho)^2+\Re(x-\rho)^2} &\geq \sqrt{\Im(x-\rho)^2+\Re(x-\rho+2(\Re(\rho)-g))^2} \\
\Leftrightarrow & & \Re(x-\rho)^2 &\geq \Re(x-\rho+2(\Re(\rho)-g))^2 \\
\Leftrightarrow & 4\Re(x)(g-\Re(\rho))-4g^2+4g\Re(\rho) &\geq 0 \\
\Leftrightarrow & & 4\underbrace{(\Re(\rho)-g)}_{\geq 0}\underbrace{(g-\Re(x))}_{\geq 0} &\geq 0
\end{aligned} \tag{6.3.14}$$

■

Damit kann bewiesen werden:

Satz 6.3.13 *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $g \in \mathbb{R}$, $r_\epsilon \in \mathbb{R}^+$, $q \in \mathbb{N}$ und $[\Theta_g, R_g] = Ritz\text{-}Kond\text{-}Poly(A, r_\epsilon, q, g)$. Dann hat R_g die Eigenschaften:*

1. *$|R(x)| < r_\epsilon \Rightarrow |R_g(x)| \leq |R(x)| < r_\epsilon$ für alle x mit $\Re(x) \leq g$, wobei R das Polynom zur Menge Θ sei.*
2. *R_g hat keine Nullstellen mit einem Realteil größer als g. Dadurch wächst R_g rechts von $\{x \in \mathbb{C} | \Re(x) = g\}$ um so schneller an, je großer sein Polynomgrad ist.*

Beweis: Aussage 2.) ist auf Grund der Konstruktion der Nullstellen nach (6.3.12) klar.

Zu 1.): Sei $x \in \mathbb{C}$ mit $\Re(x) \leq g$ und $|R(x)| < r_\epsilon$. Dann gilt:

$$r_\epsilon > |R(x)| \tag{6.3.15}$$

$$= \left| \frac{\prod_{\rho\in\Theta}(x-\rho)}{\prod_{\rho\in\Theta}(\hat{x}-\rho)} \right| \tag{6.3.16}$$

$$= \frac{\prod_{\rho\in\Theta,\Re(\rho)\leq g}|(x-\rho)| \cdot \prod_{\rho\in\Theta,\Re(\rho)>g}|(x-\rho)|}{\prod_{\rho\in\Theta}|(\hat{x}-\rho)|} \tag{6.3.17}$$

$$\overset{\substack{Lemma\\6.3.12}}{\geq} \frac{\prod_{\rho\in\Theta,\Re(\rho)\leq g}|(x-\rho)| \cdot \prod_{\rho\in\Theta,\Re(\rho)>g}|(x-(\rho-2(\Re(\rho)-g)))|}{\prod_{\rho\in\Theta}|(\hat{x}-\rho)|} \tag{6.3.18}$$

$$= \frac{\prod_{\rho\in\Theta_g} |(x-\rho)|}{\prod_{\rho\in\Theta} |(\hat{x}-\rho)|} \tag{6.3.19}$$

$$= |R_g(x)| \tag{6.3.20}$$

■

Mit R_g steht jetzt ein Polynom zur Verfügung, das zur Präkonditionierung bei Eigenwertproblemen eingesetzt werden kann. Dazu können in den Verfahren aus Abschnitt 6.2 die Tschebyscheff-Polynome durch die Polynome R_g ersetzt werden. Diese Polynome werden im Folgenden **Ritz-Konditionierungs-Polynome** genannt.

Mit Hilfe des Parameters r_ϵ kann dabei bestimmt werden, wie stark die Trennung sein soll. Je kleiner r_ϵ ist, desto höher wird der Polynomgrad von R bzw. R_g sein und somit auch der Aufwand, diese Polynome für die Matrix A auszuwerten. Daraus folgt: Ist die Trennung besser, so resultiert eine schnellere Konvergenz, jedoch ist dabei jeder Schritt teurer. Tests haben gezeigt, daß sich dieses Verhältnis im resultierenden Aufwand weitgehend aufwiegt. In Abschnitt 6.3.4 werden einige Beispiele mit Hilfe dieser Polynome gerechnet.

Die jeweiligen Grenze zur Trennung der interessanten von den uninteressanten Eigenwerten wurden in den Beispielen von Hand vorgegeben. Im allgemeinen sollte jedoch diese Grenze adaptiv bestimmt werden. Dies kann z.B. mit Hilfe der Ritz-Werte Θ geschehen. Ein möglicher Algorithmus könnte dann lauten (k sei die Anzahl der gesuchten Eigenwerte):

Algorithmus 6.3.14 Grenze

function $[g] =$ *Grenze*$(A, r_\epsilon, q, \delta, k)$

(1) $[\Theta, R] =$ *Iter-Ritz-Poly-stab*(A, r_ϵ, q)

(2) $g = \max_{\rho\in\Theta}\{\Re(\rho)\} - 0.3\left\{\max_{\rho\in\Theta}\{\Re(\rho)\} - \min_{\rho\in\Theta}\{\Re(\rho)\}\right\}$

(3) $\Theta_g = \{\rho : \rho \in \Theta, \Re(\rho) \le g\} \cup \{\rho - 2(\Re(\rho) - g) : \rho \in \Theta, \Re(\rho) > g\}$

(4) $R_g(x) := \frac{\prod_{\rho\in\Theta_g}(x-\rho)}{\prod_{\rho\in\Theta}(\hat{x}-\rho)}$ *wobei* $\hat{x} = \min_{\rho\in\Theta}\{\Re(\rho)\} - \left\{\max_{\rho\in\Theta}\{\Re(\rho)\} - \min_{\rho\in\Theta}\{\Re(\rho)\}\right\}/10$ *sei.*

(5) $[H, V, r] =$ *Arnoldi*$(R_g(A), v, 2k)$

(6) $[\theta_1, \ldots, \theta_{2k}] =$*Rayleigh-Ritz-EW*$(A, V)$

(7) Vergrößere die Grenze g solange bis für genau k Ritz-Werte aus (6) $R_g(\theta_j) > r_\epsilon$ *gilt und für ganau* $k-1$ *Ritz-Werte* $R_{g+\delta}(\theta_j) > r_\epsilon$ *gilt.*

Falls die geschätzte Grenze aus (2) weit genug links gewählt wurde, so daß tatsächlich mehr als k Ritz-Werte aus (6) auf der rechten Seite der Grenze liegen, läßt sich diese Grenze für $\delta << 1$ solange nach rechts verschieben, bis Bedingung (7) erfüllt ist. Da für $g = \max_{\rho \in \Theta}\{\Re(\rho)\}$ kein Ritz-Wert aus (6) mehr die Bedingung (7) erfüllt, läßt sich z.B. mit einer Intervallschachtelung eine Grenze ermitteln, die (7) erfüllt. Der Rechenaufwand zur Durchführung der Intervallschachtelung ist im Rahmen der Eigenwertberechnung für große Matrizen vernachlässigbar, da hier lediglich reelle Polynome ausgewertet werden müssen.

6.3.4 Beispiele

In diesem Abschnitt sollen die iterierten Ritz-Polynome aus Abschnitt 6.3.1 und die Ritz-Konditionierungs-Polynome aus Abschnitt 6.3.3 an Beispielen getestet werden.

Alle Beispiele werden mit dem iterativen Arnoldi-Verfahren mit implizitem Neustart nach Sorenson, Variante B, (Algorithmus 6.2.17, Seite 157) gerechnet. Diese Kombination wird auf die Matrix $R_g(A)$ angewandt. Dies entspricht damit dem Tschebyscheff-Arnoldi-Verfahren nach Algorithmus 6.2.15, Seite 154, mit implizitem Neustart, wobei die Tschebyscheff-Polynome durch $R_g(A)$ ersetzt werden. Die Krylov-Dimension wurde doppelt so groß wie die Anzahl $m \in \mathbb{N}$ der gesuchten Eigenwerte gewählt. Bei allen Beispielen wurde so lange iteriert, bis mindestens m Ritz-Werte konvergierten. Als Konvergenzkriterium wurde $\|r\|_2|x_m| < \epsilon := 10^{-9}$ aus (6.2.10, Seite 147) gewählt.

Zusätzlich wurde noch eine einfache Art der Deflation eingebaut. Wird während der Iteration ein Subdiagonalelement $H(k+1,k)$ mit $1 \leq k < m$ kleiner als die Toleranz 10^{-9}, so werden die ersten k Basisvektoren bei der weiteren Iteration festgehalten und lediglich mit der Restmatrix und der Restbasis weiteriteriert. Die Orthogonalisierung während des Arnoldischrittes muß jedoch auch bzgl. dieser festgehaltenen Basisvektoren durchgeführt werden. Diese Deflationstechnik ist einfach zu implementieren und kostet neben der Überwachung der skalaren Subdiagonalelemente keinen zusätzlichen Rechenaufwand. Eine effizientere Methode, die jedoch mit erheblichem Mehraufwand an Programmierung und etwas erhöhtem Rechenaufwand verbunden ist, wird in [LS96] beschrieben.

Als erstes Beispiel wird (6.3.1, Seite 160) betrachtet. Zur Berechnung der Ritz-Werte wird Algorithmus 6.3.5, Seite 168 (Iter-Ritz-Poly-stab), mit $q = 2$ angewandt. In Tabelle 6.3.2, Seite 176, sind die Ergebnisse zusammengefaßt.

Wie in der Tabelle ersichtlich ist, wurde die (feste) Dimension des Krylov-Raums des iterierten Arnoldi-Verfahrens stets doppelt so groß wie die Anzahl der gesuchten Eigen-

Tabelle 6.3.1: Bezeichnungen in den Tabellen

m	=	Krylov-Dimension zur Berechnung der Ritz-Werte
r_ϵ	=	Maximaler zulässiger Wert des iterierten Ritz-Polynoms auf $\sigma(A)$
#MV-RW	=	Anzahl der Matrix-Vektor Mult. für Ritz-Wert Berechnung
#RW	=	Anzahl der berechneten Ritz-Werte
#EWg	=	Anzahl der gesuchten Eigenwerte
K-dim	=	Feste Dimension des Krylov-Raums bei iterierten Arnoldi-Verfahren
#MV-EW	=	Anzahl der Matrix-Vektor Mult. für Eigenwert Berechnung
#MV	=	#MV-RW+#MV-EW
#NS-imp	=	Anzahl der impliziten Arnoldi Neustarte nach Sorenson
#EWe	=	Anzahl der erhaltenen Eigenwerte

Tabelle 6.3.2: Beispiel $\triangle u + \alpha u_x + \lambda u = 0$ mit $\alpha = 10$, Grenze $g = -12$, #EWg variiert

m	r_ϵ	#MV-RW	#RW	#EWg	K-dim	#MV-EW	#MV	NS-imp	#EWe
6	0.01	1173	34	10	20	1030	2203	10	10
6	0.01	1173	34	11	22	1066	2239	9	12
6	0.01	1173	34	12	24	1032	2205	6	12
6	0.01	1173	34	13	26	1034	2207	4	14
6	0.01	1173	34	14	28	1034	2207	2	14

werte gewählt. Dies hat sich in zahlreichen Tests als sinnvoll erwiesen. Falls z.B. 10 Eigenwerte gesucht werden, wird auf diese Weise dem Algorithmus ermöglicht, zwischen 10 und 20 Eigenwerte zurückzuliefern. Die resultierende Anzahl hängt dann davon ab, zwischen welchen Eigenwerten die Trennung durch das Präkonditionierungspolynom am größten ist. Die Eigen- und Ritz-Werte sind in Bild 6.3.4, Seite 178, dargestellt. Die Eigenwerte sind durch Kreuze, die Ritz-Werte durch Kreise angezeigt. In Bild 6.3.5, Seite 178, sind die Konturlinien des iterierten Ritz-Polynoms im 10er-Logarithmus dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, daß das iterierte Ritz-Polynom auf der Spektralumgebung klein wird und außerhalb gegen unendlich geht.

Um dieses iterierte Ritz-Polynom zur Berechnung der Eigenwerte am rechten Rand des Spektrums einzusetzen, muß die Grenze g definiert werden (siehe Abschnitt 6.3.3, Seite 171). Diese kann z.B. anhand der Ritz-Werte gewählt werden. Bei einer Pfadverfolgung könnten die Eigenwertinformationen des letzten Schrittes zur Berechnung einer geeigneten Grenze herangezogen werden. Im vorliegenden Beispiel wird die Grenze auf $g = -12$ festgesetzt. Nun ist es interessant zu untersuchen, ob der Einsatz der Polynome R_g sich gegenüber den Tschebyscheff-Polynomen T_n rentiert. Das Kriterium dafür ist, welches Präkonditionierungsverfahren die bessere Trennung der Eigenwerte liefert. In Tabelle 6.3.3, Seite 180, sind die Absolutbeträge der Eigenwerte bzgl. der jeweiligen Polynome aufgelistet. Der Wert von R_g wurde mit dem Faktor 100 multipliziert, um dieses Polynom bzgl. des Betrages mit dem Tschebyscheff Polynom vergleichbar zu machen[8]. Sollen mit diesen Präkonditionierungen die rechten 10 Eigenwerte bestimmt werden, so liegt bei der Tschebyscheff Konditionierung der ungünstigste Konvergenzfaktor bei $\frac{1}{1.363} = 0.734$ für das letzte Eigenwertpaar in der Tabelle. Bei der Konditionierung mit Hilfe des Ritz-Konditionierungs-Polynoms beträgt der ungünstigste Faktor $\frac{1}{2.42} = 0.413$ ebenfalls beim letzten Eigenwertpaar. Hier sind somit nur etwas mehr als die Hälfte der Arnoldi-Neustarte notwendig als mit der Tschebyscheff-Konditionierung!

Nach diesem etwas akademischen Beispiel sollen noch einige andere diskutiert werden, die aus der Harwell-Boing Bibliothek stammen (siehe [DGL92]). Die Zahl im Namen der Beispiele ist dabei gleich der Ordnung der Matrix, also der Dimension des reellen Vektorraums, auf dem die Matrix definiert ist. Auch hier wurde in Algorithmus 6.3.5 $q = 2$ gewählt.

Als erstes werden drei Beispiele aus der Gruppe 'Chemwest' diskutiert. Diese Matrizen stammen aus der Analyse von chemischen Fabrikationsmodellen. Die Matrizen sind unsymmetrisch mit vielen Nullen auf der Hauptdiagonalen.

[8]Es wurde der Faktor $r_\epsilon = \frac{1}{100}$ bei der Bestimmung des iterierten Ritz-Polynoms verwendet.

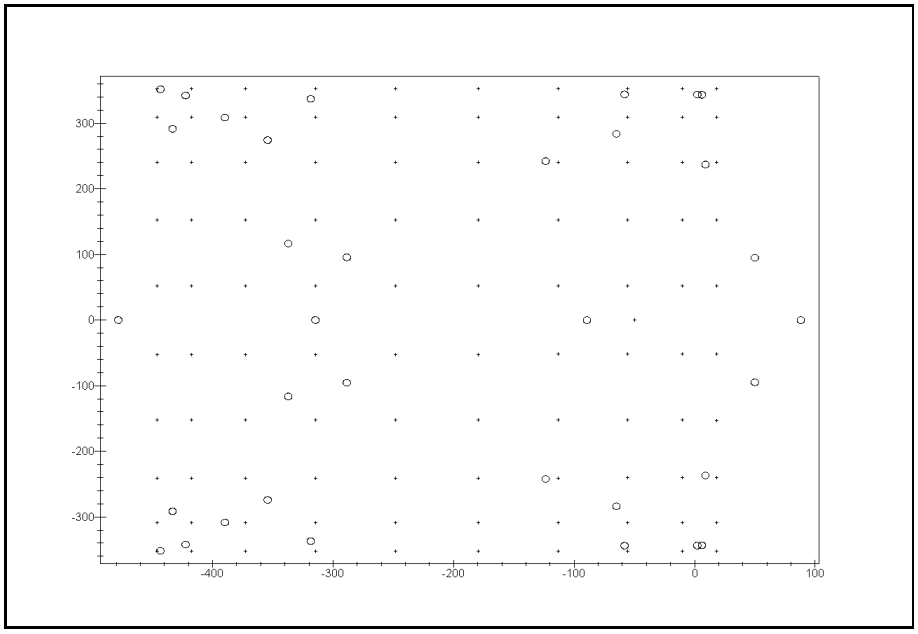

Abbildung 6.3.4: Eigen- und Ritz-Werte: $\triangle u + 10u_x + 270u$
Kreis = Ritz-Wert
Kreuz = Eigenwert

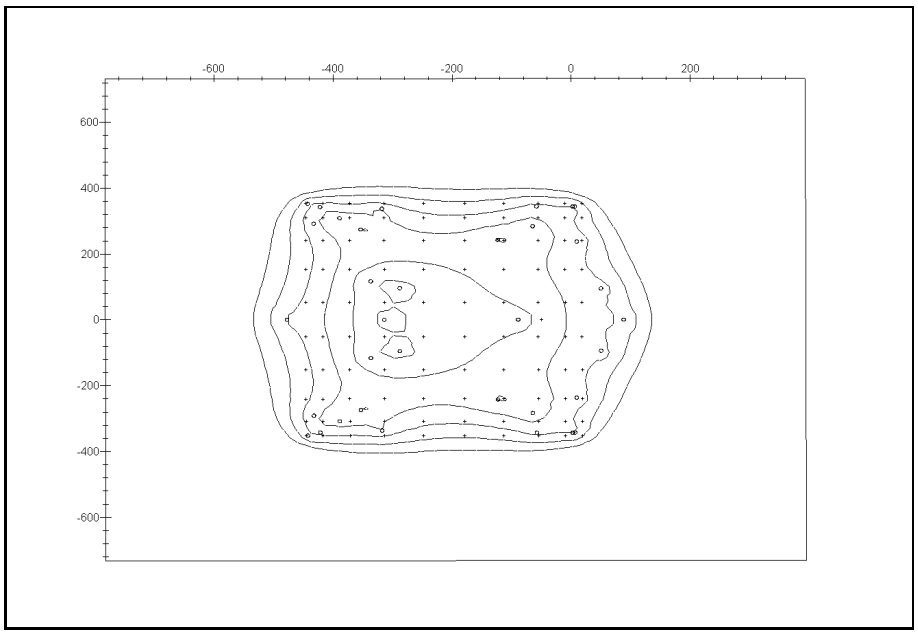

Abbildung 6.3.5: Konturlinien (log10) von R: $\triangle u + 10u_x + 270u$

Name	Ordnung	Anzahl der Einträge
West0132	132	414
West0381	381	2157
West0479	479	1910

Für <West0132> sind in Tabelle 6.3.4, Seite 182, die numerischen Ergebnisse aufgelistet. In Bild 6.3.6, Seite 180, und Bild 6.3.7, Seite 181, sind die Eigen- und Ritz-Werte sowie die Konturlinien des iterierten Ritz-Polynoms und des Ritz-Konditionierungs-Polynoms eingetragen. Die äußere Konturlinie entspricht hier und in allen weiteren Bildern dem Betrag 10^{-2}. Die inneren steigen jeweils um eine Größenordnung ab. Es ist hier deutlich zu erkennen, daß das iterierte Ritz-Polynom nur die Umgebungen der Eigenwerte minimiert. In Bereichen zwischen den außenliegenden Eigenwerten nimmt das Polynom größere Beträge an, wenn diese Bereiche groß genug sind. In Bild 6.3.8, Seite 181, sind die Konturlinien des Ritz-Konditionierungs-Polynoms R_g mit $g = 10$ eingetragen. Dieses Polynom wurde für alle Eigenwertberechnungen aus Tabelle 6.3.4, Seite 182, verwendet, um die einzelnen Fälle vergleichbar zu machen. Diese Strategie wird auch in den folgenden Beispielen angewandt. Im praktischen Einsatz müßte diese Grenze in Abhängigkeit von der Anzahl der zu berechnenden Eigenwerte gewählt werden. Dazu könnten z.B. die Ritz-Werte ausgenützt werden.

Für <West0381> sind die entsprechenden numerischen Ergebnisse in Tabelle 6.3.5, Seite 185, und in den Bildern 6.3.9-6.3.11, Seite 182f, dargestellt.

Für das dritte Beispiel <West0479> sind die entsprechenden numerischen Ergebnisse in Tabelle 6.3.6, Seite 187, und in den Bildern 6.3.12-6.3.14, Seite 185f, dargestellt. Auch hier zeigt sich wieder der Vorteil der Präkonditionierung mit Ritz-Konditionierungs-Polynomen. Während zur Berechnung der Eigenwerte am rechten Rand des Spektrums mit Hilfe von Tschebyscheff Polynomen auch die weit außerhalb liegenden Eigenwerte mit großem Imaginärteil in die entsprechende Ellipse eingeschlossen werden müßten, minimiert das iterierte Ritz-Polynom und auch das Ritz-Konditionierungs-Polynom lediglich einen kleinen Bereich um diese Eigenwerte herum. Das relativ große, eigenwertfreie Gebiet zwischen den Eigenwerten nahe der reellen Achse und diesen extremalen Eigenwerten wird dagegen nicht minimiert. Durch diese Eigenschaft läßt sich auch hier eine hervorragende Trennung der Eigenwerte am Rand des Spektrums mit Hilfe der Ritz-Konditionierungs-Polynome erreichen, wodurch nur eine geringe Anzahl von Iterationsschritten 'NS-imp' in Tabelle 6.3.6 nötig ist.

Tabelle 6.3.3: Trennung der Eigenwerte

Eigenwert λ_j	$\lvert T_{34}(\lambda_j)\rvert$	$\lvert R_g(\lambda_j)\rvert * 100$
$18.1973 \pm 352.576i$	1.455	128.5
$18.1973 \pm 309.180i$	1.432	22.58
$18.1973 \pm 240.559i$	1.403	6.236
$18.1973 \pm 152.775i$	1.378	4.475
$18.1973 \pm 52.152i$	1.363	2.420

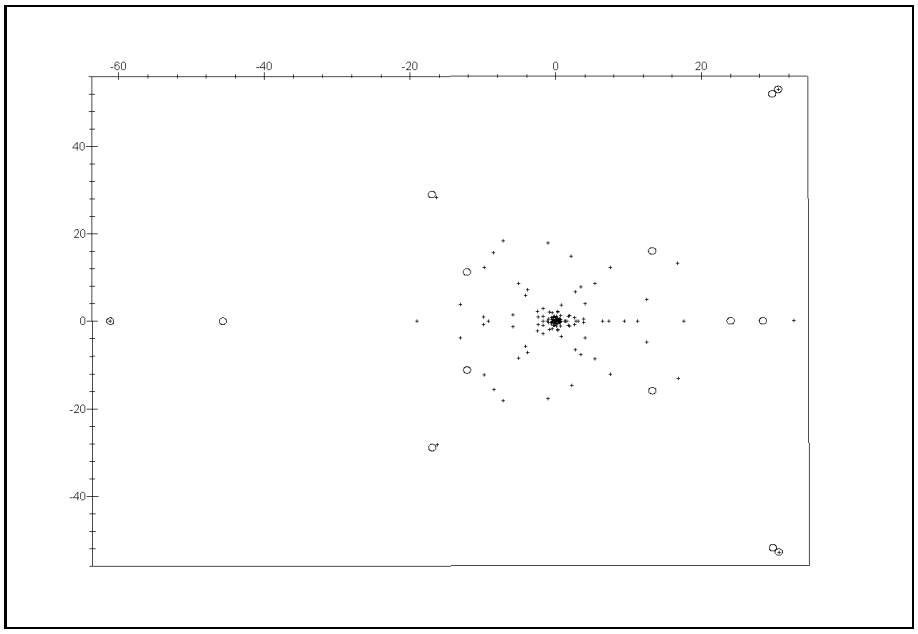

Abbildung 6.3.6: Eigen- und Ritz-Werte: West0132
Kreis = Ritz-Wert
Kreuz = Eigenwert

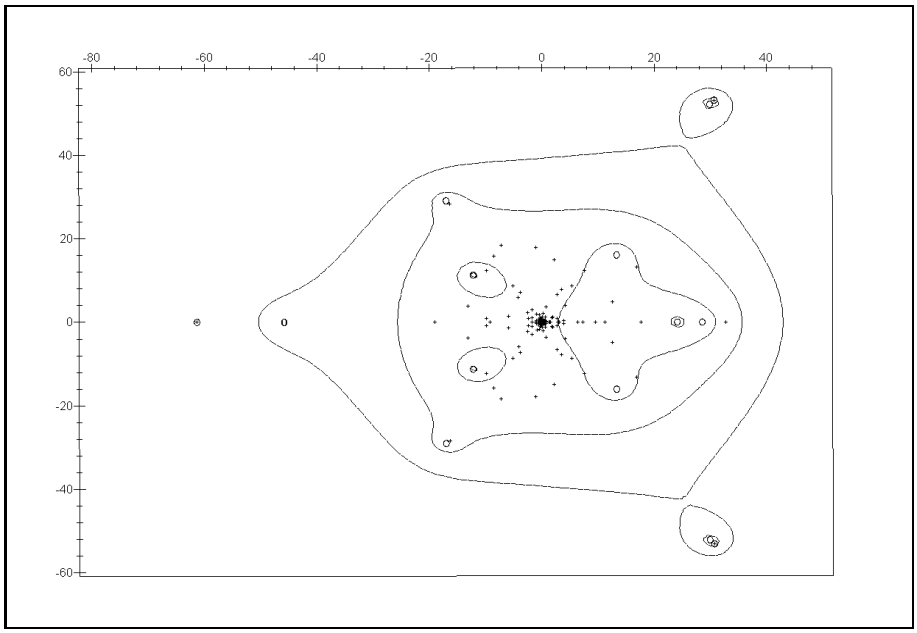

Abbildung 6.3.7: Konturlinien (log10) von R: West0132

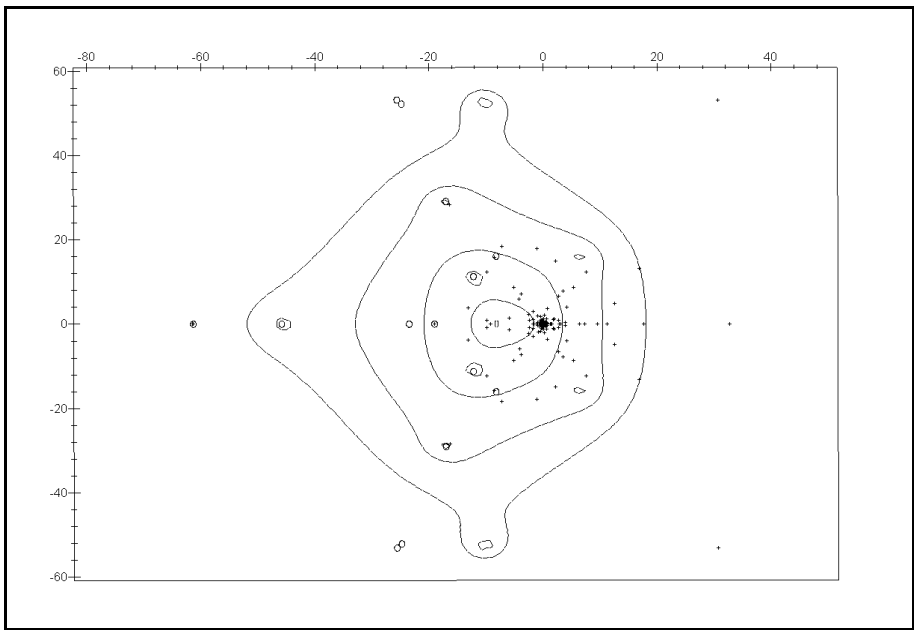

Abbildung 6.3.8: Konturlinien (log10) von R_g mit $g = 10$: West0132

Tabelle 6.3.4: Beispiel <West0132>, Grenze $g = 10$, #EWg variiert

m	r_ϵ	#MV-RW	#RW	#EWg	K-dim	#MV-EW	#MV	NS-imp	#EWe
6	0.01	449	14	1	2	128	577	7	2
6	0.01	449	14	2	4	86	535	2	2
6	0.01	449	14	3	6	115	564	2	3
6	0.01	449	14	4	8	202	651	6	6
6	0.01	449	14	5	10	174	623	2	6

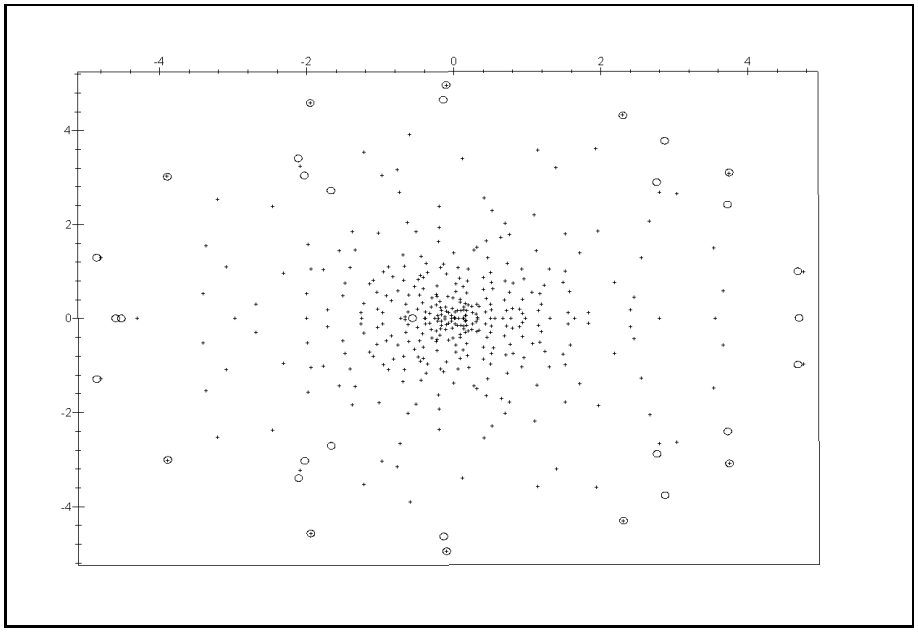

Abbildung 6.3.9: Eigen- und Ritz-Werte: West0381
Kreis = Ritz-Wert
Kreuz = Eigenwert

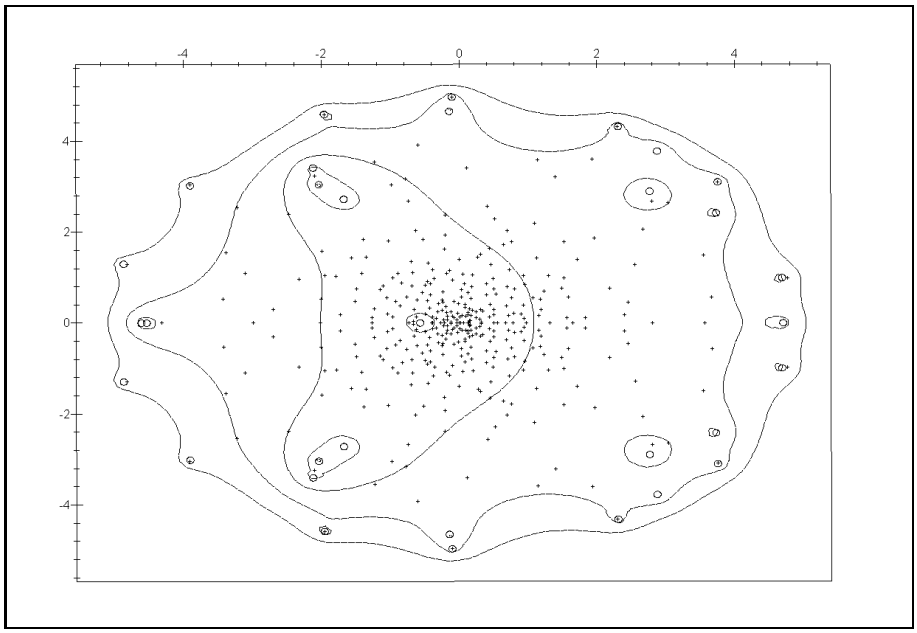

Abbildung 6.3.10: Konturlinien (log10) von R: West0381

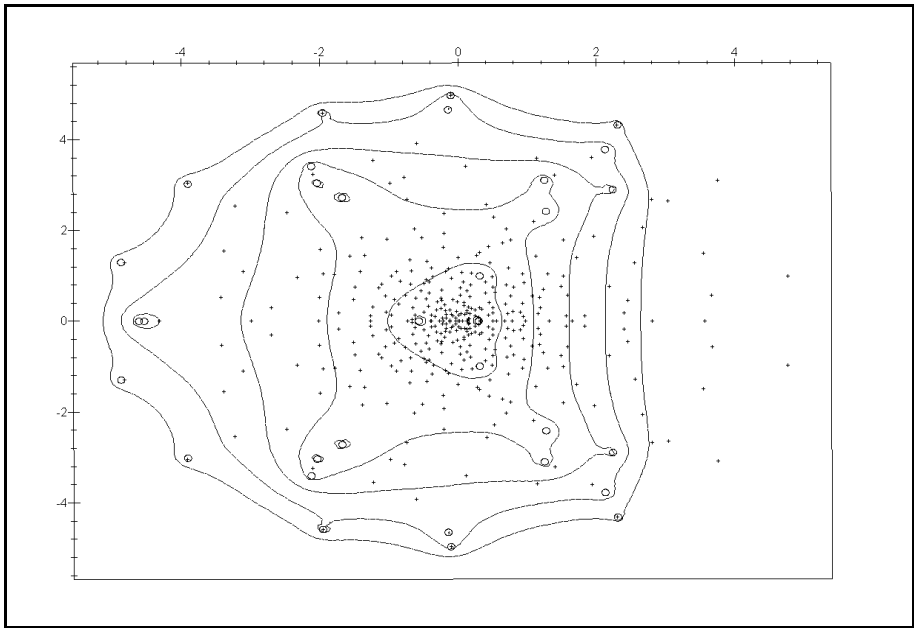

Abbildung 6.3.11: Konturlinien (log10) von R_g mit $g = 2,5$: West0381

Die neuerdings wieder diskutierten Faber-Polynome (vgl. [SV93], [Dri95]), mit denen sich polygonal berandete Gebiete einschließen lassen und die in gewisser Weise als Verallgemeinerung von Tschebyscheff-Polynomen angesehen werden können, würden hier keine entscheidende Verbesserung bringen, da auch bei diesen immer ein zusammenhängendes Gebiet eingeschlossen wird. Dadurch müssen auch relativ große, eigenwertfreie Gebiete minimiert werden, falls alle uninteressanten Eigenwerte eingeschlossen werden sollen.

Zuletzt wird das Beispiel <GRENOBLE> diskutiert. Diese Gruppe stammt aus der Simulation von Computersystemen. Die zwei ausgewählten Beispiele heißen:

Name	Ordnung	Anzahl der Einträge
Gre115	115	421
Gre1107	1107	5664

Für <Gre132> sind in Tabelle 6.3.7, Seite 189, die numerischen Ergebnisse aufgelistet. In Bild 6.3.15, Seite 187, und 6.3.16, Seite 188, sind die Eigen- und Ritz-Werte sowie die Konturlinien des iterierten Ritz-Polynoms und des Ritz-Konditionierungs-Polynoms eingetragen. Die Konturlinien für die Grenze $g = 0.8$ sind in 6.3.17, Seite 188, dargestellt.

Für <Gre1107> sind in Tabelle 6.3.8, Seite 192, die numerischen Ergebnisse aufgelistet. In Bild 6.3.18, Seite 189, und 6.3.19, Seite 190, sind die Eigen- und Ritz-Werte sowie die Konturlinien des iterierten Ritz-Polynoms und des Ritz-Konditionierungs-Polynoms eingetragen. Die Konturlinien für die Grenze $g = 0.8$ sind in 6.3.20, Seite 190, dargestellt.

Die hier erzielten Ergebnisse liegen bzgl. des Rechenaufwandes etwa im Bereich der Resultate von Scott (siehe [Sco95]). Da dort viele verschiedene Iterationsvarianten angegeben sind, die abhängig vom Eigenwertproblem teils gute teils schlechte Resultate liefern, ist ein Vergleich schwierig. Hinzu kommt, daß bei Verwendung der iterierten Ritz-Polynome die Berechnung des Präkonditionierungspolynoms und die Berechnung der Eigenwerte getrennt untersucht werden können. Bei Scott sind diese Schritte miteinander verbunden[9]. Interessant ist jedoch, daß selbst bei Vergleich des Gesamtaufwandes (#MV) die iterierten Ritz-Polynome auch dann den Tschebyscheff-Polynomen überlegen sein können, wenn sich der uninteressante Teil des Spektrums gut mit Hilfe einer Ellipse einschließen läßt, wie etwa in Beispiel <GRE1107>. In diesem Beispiel wäre eine nahezu kreisförmige Ellipse notwendig, wodurch jedoch die Trennung der (reellen) Eigenwerte am rechten Rand des Spektrum ungünstig ist (siehe Bild 6.3.18, Seite 189). Will man hier etwa die 8 rechten Eigenwerte berechnen, so werden nach Tabelle 6.3.8, Seite 192, #MV=1141 Matrix-Vektor

[9]Insbesondere werden nur Tschebyscheff-Polynome zur Präkonditionierung herangezogen.

Tabelle 6.3.5: Beispiel <West0381>, Grenze $g = 2,5$, #EWg variiert

m	r_ϵ	#MV-RW	#RW	#EWg	K-dim	#MV-EW	#MV	NS-imp	#EWe
4	0.01	885	32	1	2	322	1207	8	2
4	0.01	885	32	2	4	290	1175	5	2
4	0.01	885	32	3	6	644	1529	14	4
4	0.01	885	32	4	8	452	1337	6	4
4	0.01	885	32	5	10	518	1403	6	6

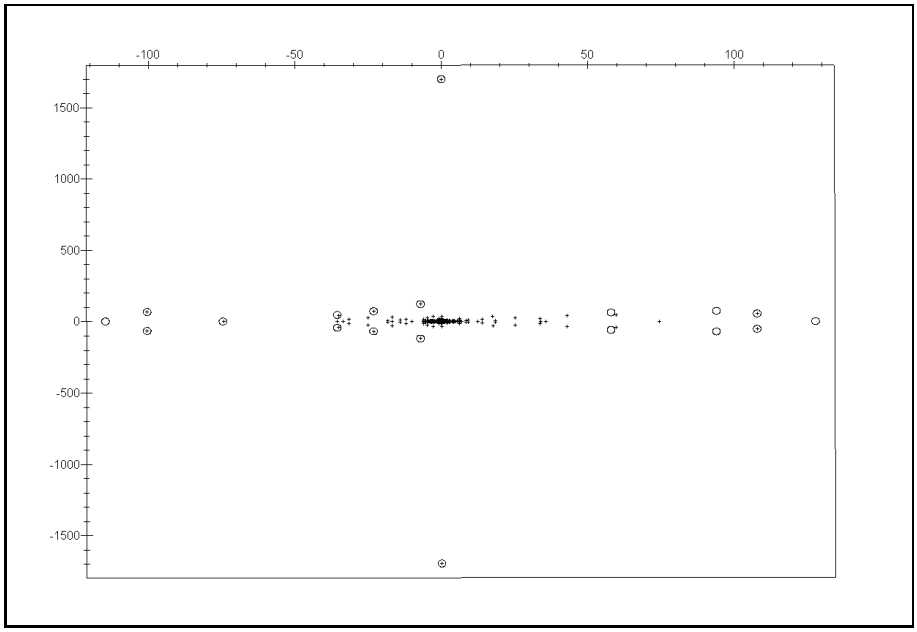

Abbildung 6.3.12: Eigen- und Ritz-Werte: West0479
Kreis = Ritz-Wert
Kreuz = Eigenwert

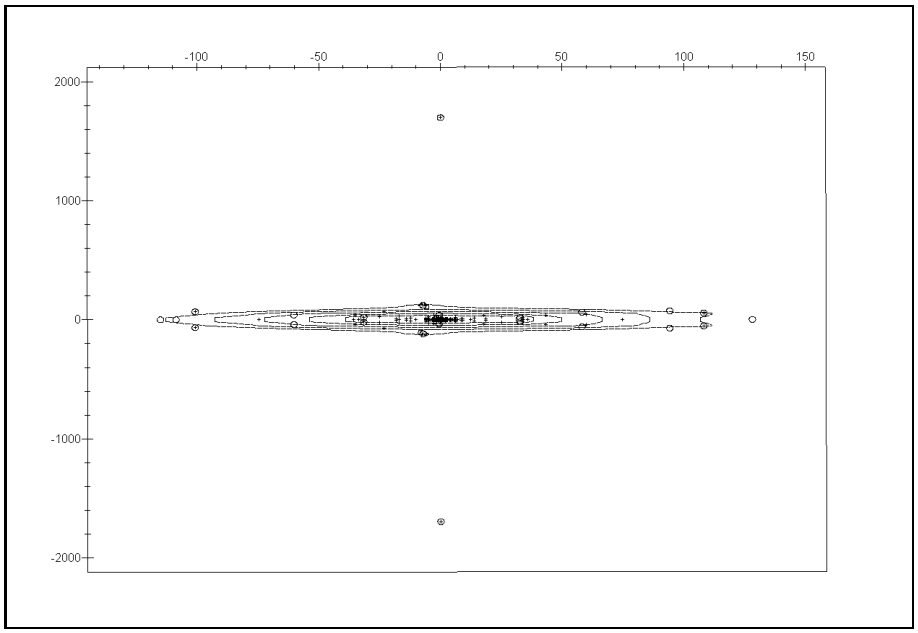

Abbildung 6.3.13: Konturlinien (log10) von R: West0479

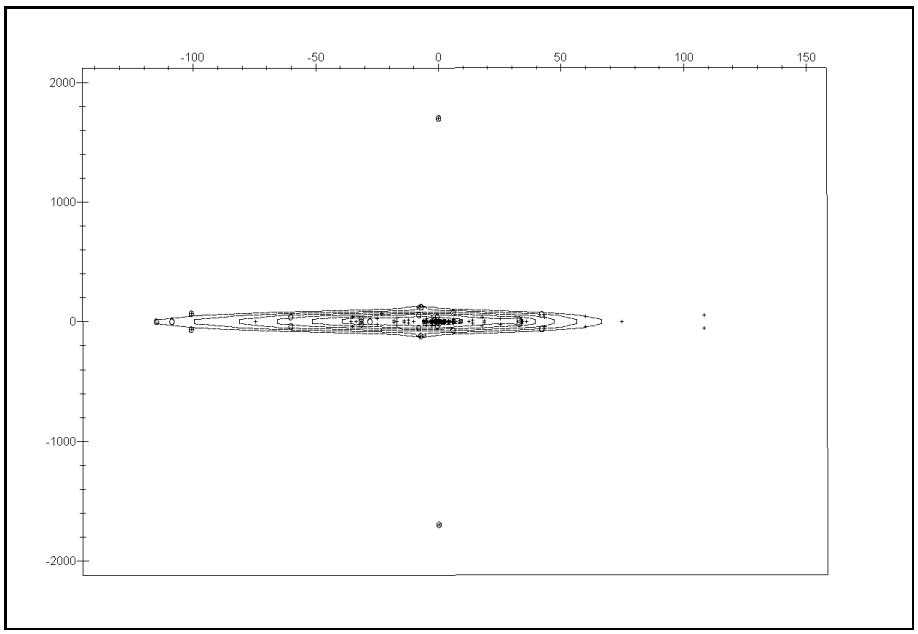

Abbildung 6.3.14: Konturlinien (log10) von R_g mit $g = 50$: West0479

Tabelle 6.3.6: Beispiel <West0479>, Grenze $g = 50$, #EWg variiert

m	r_ϵ	#MV-RW	#RW	#EWg	K-dim	#MV-EW	#MV	NS-imp	#EWe
8	0.01	1366	33	1	2	200	1566	4	2
8	0.01	1366	33	2	4	200	1566	2	2
8	0.01	1366	33	3	6	302	1668	3	5
8	0.01	1366	33	4	8	302	1668	1	5
8	0.01	1366	33	5	10	370	1736	1	7

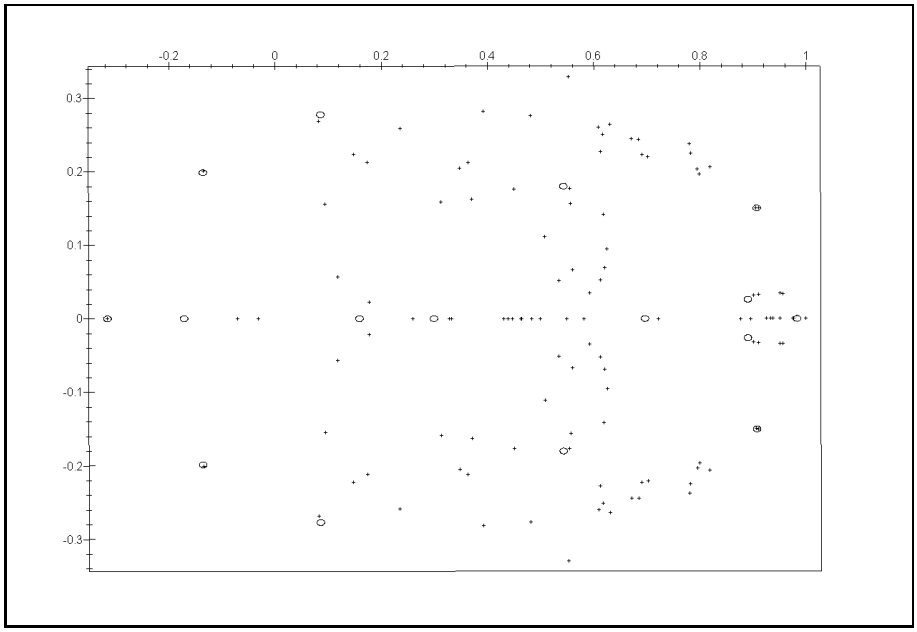

Abbildung 6.3.15: Eigen- und Ritz-Werte: Gre115
Kreis = Ritz-Wert
Kreuz = Eigenwert

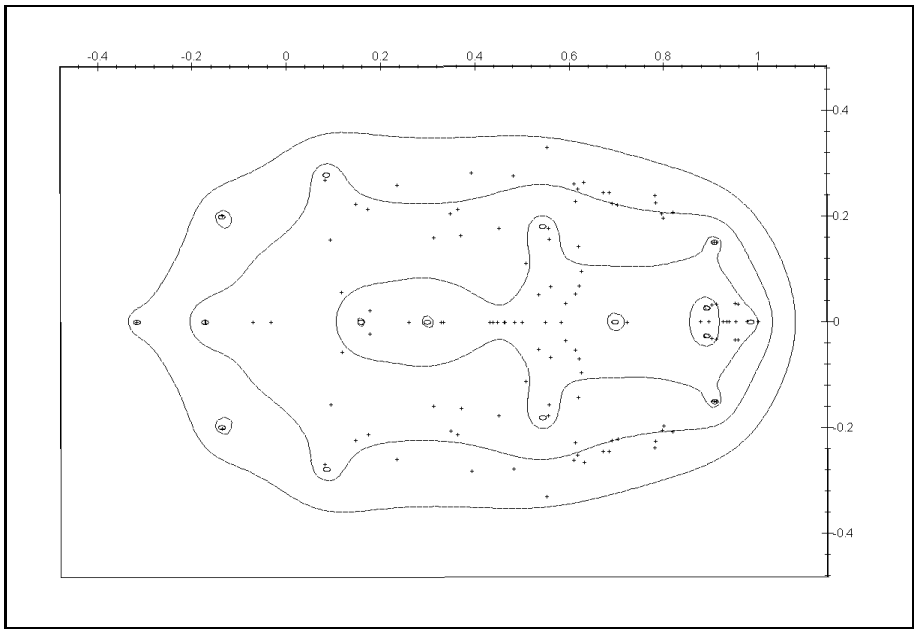

Abbildung 6.3.16: Konturlinien (log10) von R: Gre115

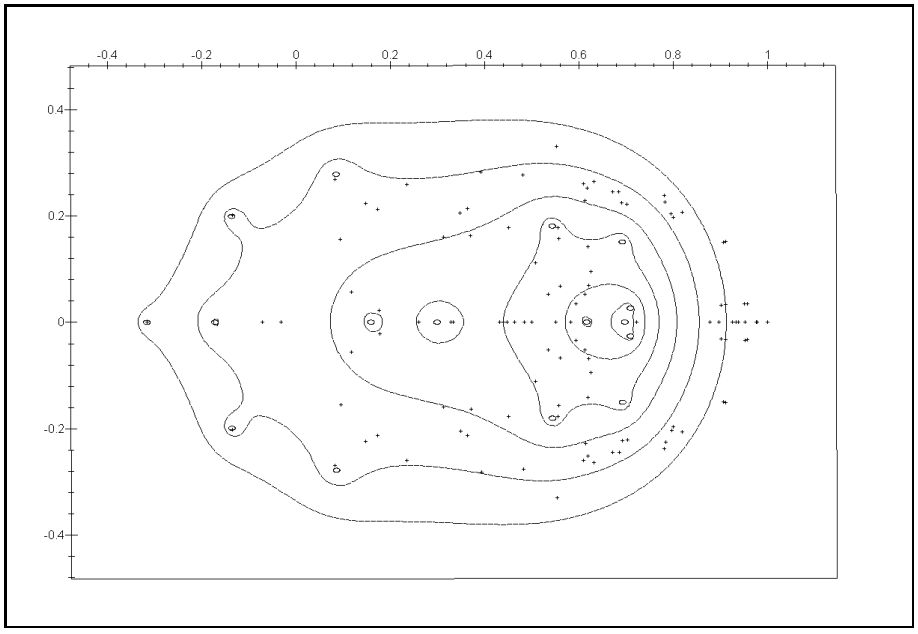

Abbildung 6.3.17: Konturlinien (log10) von R_g mit $g = 0.8$: Gre115

Tabelle 6.3.7: Beispiel <Gre115>, Grenze $g = 0.8$, #EWg variiert

m	r_ϵ	#MV-RW	#RW	#EWg	K-dim	#MV-EW	#MV	NS-imp	#EWe
6	0.01	291	16	1	2	321	612	18	1
6	0.01	291	16	2	4	803	1094	46	3
6	0.01	291	16	3	6	835	1126	46	3
6	0.01	291	16	4	8	855	1146	45	7
6	0.01	291	16	5	10	501	792	21	6

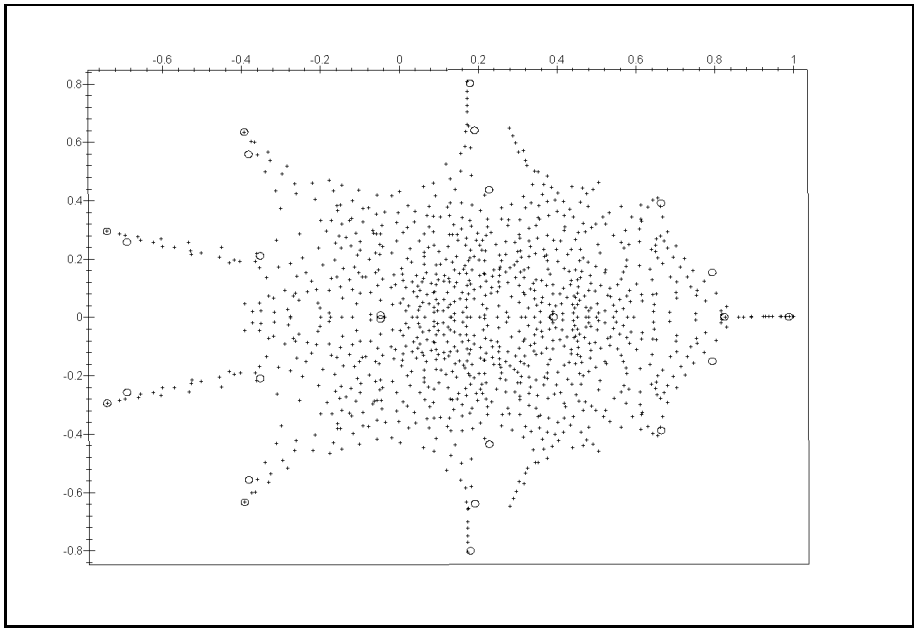

Abbildung 6.3.18: Eigen- und Ritz-Werte: Gre1107
Kreis = Ritz-Wert
Kreuz = Eigenwert

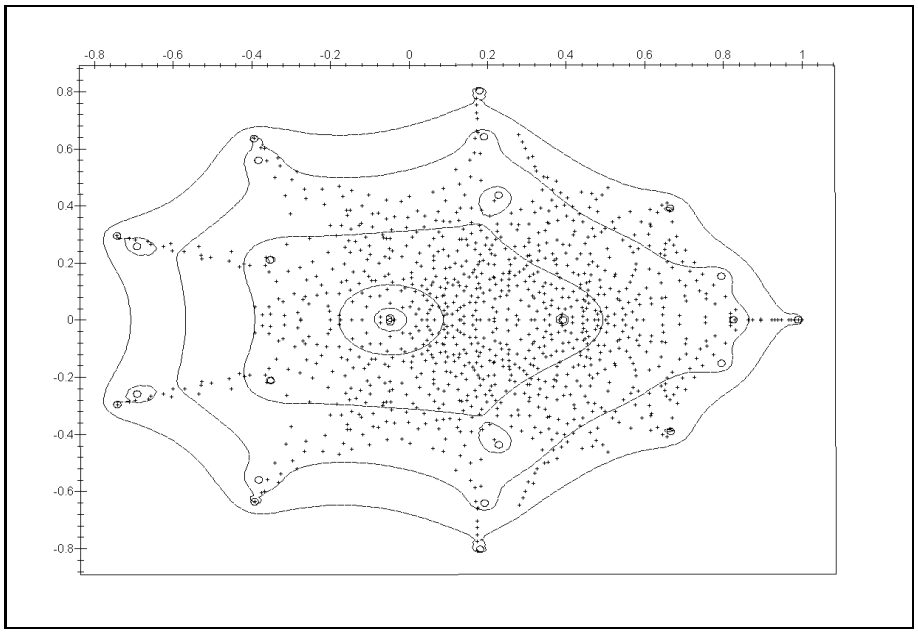

Abbildung 6.3.19: Konturlinien (log10) von R: Gre1107

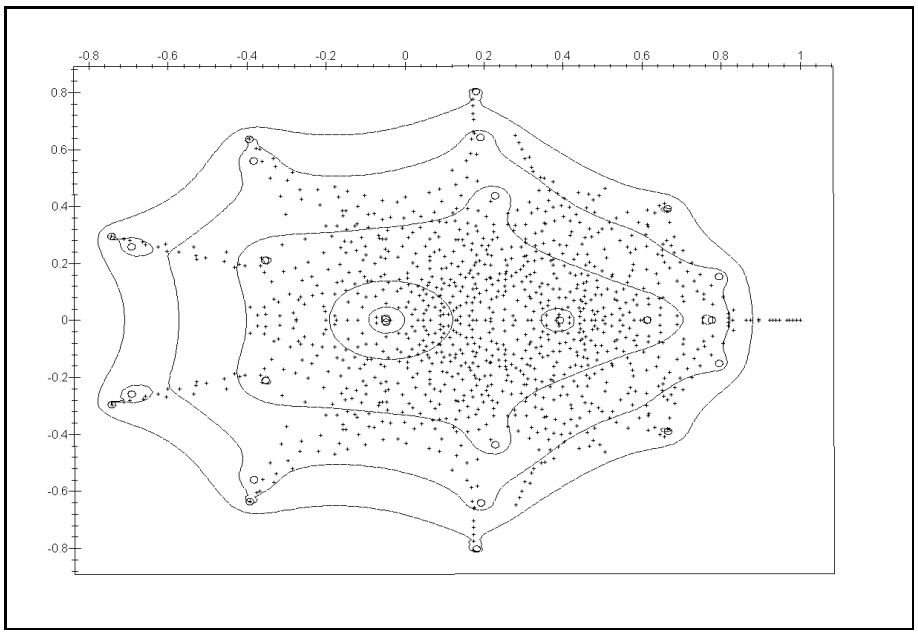

Abbildung 6.3.20: Konturlinien (log10) von R_g mit $g = 0.8$: Gre1107

Multiplikationen benötigt, während mit den Tschebyscheff-Polynomen in [Sco95] je nach Verfahren #MV=1949-9712 benötigt werden. Hinzu kommt, daß in [Sco95] bereits die vorhandenen Parameter (Krylov-Dimension, Grad des Tschebyscheff-Polynoms etc.) adaptiv gewählt wurden, während sie hier fest vorgegeben waren. Dies bestätigt wiederum die Aussage, daß Tschebyscheff-Polynome nur für flache ellipsoide Spektralgebiete gut geeignet sind.

Im Zusammenhang mit der Pfadverfolgung und der Berechnung der interessanten Eigenwerte in jedem Punkt der Kurve ist es jedoch von Vorteil, die Betrachtung des Aufwandes für die Berechnung des iterierten Ritz-Polynoms bzw. für die darauffolgende Eigenwertberechnung zu trennen. Im nächsten Kurvenpunkt kann oft das gleiche oder ein leicht angepaßtes Präkonditionierungspolynom verwendet werden. Dieses kann berechnet werden, indem der Algorithmus Iter-Ritz-Poly-stab mit den letzten Ritz-Werten als Vorgabe aufgerufen wird. Haben sich die Eigenwerte nur geringfügig geändert, so werden keine neuen Ritz-Werte hinzugenommen und der Algorithmus wird ohne großen Rechenaufwand wieder verlassen. Haben sich jedoch einige Eigenwerte stark verändert und liegen nun außerhalb der letzten Spektralumgebung, so werden diese durch den Algorithmus schnell erkannt[10] und zu den Ritz-Werten hinzugenommen. Auch in diesem Fall wird schnell ein aktualisiertes iteriertes Ritz-Polynom berechnet.

Im Folgenden soll nun die Frage diskutiert werden, wie groß die Krylov-Dimension m und die Schranke r_ϵ bei der Berechnung der Ritz-Werte gewählt werden sollte. Zunächst wird dafür m festgehalten und r_ϵ variiert. Da bei allen obigen Beispielen analoge Resultate auftreten, wird beispielhaft <Gre1107> diskutiert. Die Ergebnisse sind in Tabelle 6.3.9, Seite 192, zusammengefaßt. Die Schranke für die Eigenwerte wurde dabei auf $g = 0.8$ festgesetzt. Aus dieser Tabelle ergibt sich, daß zwar der Aufwand zur Berechnung des iterierten Ritz-Polynoms mit kleiner werdender Schranke r_ϵ wächst (da mehr Nullstellen bestimmt werden müssen), aber die Anzahl der Iterationen zur Eigenwert-Berechnung fällt (da die Trennung der Eigenwerte immer besser wird). Als Folge davon bleibt der Aufwand zur Bestimmung der Eigenwerte in etwa konstant (Spalte #MV-EW). Als Schlußfolgerung ergibt sich, daß es nicht nötig ist, die Schranke besonders klein zu wählen, da daraus keine Verringerung des Rechenaufwandes für die Eigenwerte resultiert, sondern nur der Aufwand zur Berechnung des iterierten Ritz-Polynoms erhöht wird. In vielen Fällen haben sich Werte im Bereich von 10^{-2} bis 10^{-3} als effektiv erwiesen.

Zur Untersuchung der Auswirkung der Krylov-Dimension auf den Rechenaufwand wird im Folgenden $r_\epsilon = 0.01$ festgehalten. Die Ergebnisse dazu sind in Tabelle 6.3.10, Seite 193, zusammengefaßt.

[10] da diese im letzten iterierten Ritz-Polynom große Werte annehmen

Tabelle 6.3.8: Beispiel <Gre1107>, Grenze $g = 0.8$, #EWg variiert

m	r_ϵ	#MV-RW	#RW	#EWg	K-dim	#MV-EW	#MV	NS-imp	#EWe
6	0.01	933	25	1	2	851	1784	32	1
6	0.01	933	25	2	4	602	1535	20	2
6	0.01	933	25	3	6	503	1436	14	3
6	0.01	933	25	4	8	529	1462	13	4
6	0.01	933	25	5	10	430	1363	7	5
6	0.01	933	25	6	12	456	1389	6	6
6	0.01	933	25	7	14	482	1415	5	7
6	0.01	933	25	8	16	508	1441	4	8
6	0.01	933	25	9	18	534	1467	3	9
6	0.01	933	25	10	20	761	1694	10	10

Tabelle 6.3.9: Variation der Schranke r_ϵ

m	r_ϵ	#MV-RW	#RW	#EWg	K-dim	#MV-EW	#MV	NS-imp	#EWe
6	10^{-1}	410	17	5	10	566	976	23	5
6	10^{-2}	933	25	5	10	430	1363	7	5
6	10^{-3}	1932	40	5	10	525	2457	3	5
6	10^{-4}	2075	43	5	10	521	2596	2	5
6	10^{-5}	3000	53	5	10	641	3641	2	5
6	10^{-6}	3524	60	5	10	665	4189	1	5
6	10^{-7}	4717	72	5	10	798	5515	1	6

Tabelle 6.3.10: Variation der Krylov-Dimension m

m	r_ϵ	#MV-RW	#RW	#EWg	K-dim	#MV-EW	#MV	NS-imp	#EWe
3	0.01	485	21	5	10	509	994	14	5
4	0.01	475	23	5	10	511	986	12	5
5	0.01	1413	33	5	10	476	1880	4	5
6	0.01	933	25	5	10	430	1361	7	5
7	0.01	945	25	5	10	455	1400	8	5
8	0.01	693	24	5	10	509	1202	11	5
9	0.01	1131	28	5	10	565	1696	10	5
10	0.01	1662	28	5	10	470	2132	5	5
11	0.01	1088	26	5	10	447	1535	7	5
12	0.01	1284	29	5	10	469	1753	6	5

Auch hier zeigt sich, daß die Wahl der Krylov-Dimension kaum einen Effekt auf den Rechenaufwand hat. In praktischen Beispielen haben sich Dimensionen im Bereich von 4-10 als sinnvoll erwiesen. Sollte die Matrix ein großes Pseudospektrum haben, wodurch die Eigenwerte relativ schlecht durch den Arnoldi-Prozeß approximiert werden können, sollte die Krylov-Dimension größer gewählt werden, so daß die gefundenen Approximationen an das Spektrum hinreichend genau sind. Der Rechenaufwand wird hierdurch nicht vergrößert.

6.3.5 Anwendung auf lineare Gleichungssysteme

In diesem Abschnitt wird die Anwendung der iterierten Ritz-Polynome im Zusammenhang mit der iterativen Lösung von großen, schwach besetzten, reellen, linearen Gleichungssystemen

$$Ax = b, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n};\ x, b \in \mathbb{R}^n \tag{6.3.21}$$

betrachtet. Da es bei großen Systemen wünschenswert ist, daß die Matrix A nur in Form von Matrix-Vektor Produkten in die iterative Berechnung (wie bei den Eigenwertproblemen) eingeht, wird hier die Klasse der **polynomialen Iterationsmethoden** betrachtet. Dabei werden ausgehend von einem Startvektor x_0 die Iterierten $x_1, x_2, \ldots$ berechnet, die gegen die Lösung von (6.3.21) konvergieren. Typische Vertreter sind die Richardson-Iteration und die Tschebyscheff-Iteration [GV61],[Man77]. In neuerer Zeit wurden diese Methoden mit Hilfe des Arnoldi-Verfahrens zur Schätzung des Spektrums zu hybriden Methoden verbunden, vgl. [SV93], [MSV95]. In diesen Arbeiten werden als Verallgemeinerung von Tschebyscheff-Polynomen sogenannte Faber-Polynome betrachtet. Diese sind in der Lage, polygonal berandete Gebiete der komplexen Ebene in den Einheitskreis abzubilden. Diese Polynome dürften auch im Zusammenhang mit Eigenwertberechnungen als Präkonditionierungspolynome interessant sein. Einen Überblick über Hybrid-Algorithmen findet sich in [NRT92].

Basierend auf dem Relaxations-Verfahren

$$x_{k+1} := x_k + \alpha_k(b - Ax_k) \tag{6.3.22}$$

können nach p Schritten die Iterierten ausgedrückt werden als

$$x_p := x_0 + \varphi_{p-1}(A)r_0, \tag{6.3.23}$$

wobei $\varphi_{p-1}(.) \in \Pi_{p-1}$ gilt und $r_0 := b - Ax_0$ das Startresiduum sei. Wegen (6.3.23) können die iterierten Residuen r_p ausgedrückt werden als:

$$\begin{aligned} r_p &:= b - Ax_p \\ &= b - A(x_0 + \varphi_{p-1}(A)r_0) \\ &= b - Ax_0 + A\varphi_{p-1}(A)r_0 \\ &= r_0 - A\varphi_{p-1}(A)r_0 \\ &= (I - A\varphi_{p-1}(A))r_0 \\ &=: \psi_p(A)r_0, \end{aligned} \tag{6.3.24}$$

wobei sich leicht nachrechnen läßt, daß per Konstruktion $\psi_p(.) = \prod_{i=1}^{p}(1 - \alpha_i .) \in \Pi_p$ mit $\psi(0) = 1$ gilt. Das Polynom ψ_p wird dabei das **Residuen-Polynom** genannt.

Eine naheliegende Strategie ist es somit, iterative Methoden zu definieren, bei denen der Operator (die Matrix) $\psi_p(A)$ eine möglichst kleine Norm hat. Die effektivste Methode dies für normale Matrizen zu erreichen ist, ψ_p so zu wählen, daß es auf dem Spektrum von A besonders kleine Werte annimmt. Wählt man für die **Relaxations-Parameter** α_k die Kehrwerte der Nullstellen des iterierten Ritz-Polynoms, so ergibt sich:

Satz 6.3.15 *Sei* $[\Theta, R] = \textit{Iter-Ritz-Poly-stab}(A, r_\epsilon, q)$ *mit* $r_\epsilon \in \mathbb{R}^+$ *und* $q \in \mathbb{N}$. *Sei weiter* $\alpha_k := \frac{1}{\rho_k}, \rho_k \neq 0,\ k = 1, \ldots, p,$ *wobei* $\Theta = \{\rho_1, \ldots, \rho_p\}$ *gelte. Dann ergibt sich:*

$$\psi_p(\rho_k) = \prod_{i=1}^{p}(1 - \alpha_i\rho_k) = \prod_{i=1}^{p}(1 - \frac{\rho_k}{\rho_i}) = 0 \quad \forall \rho_k \in \Theta \tag{6.3.25}$$

$$\psi_p(0) = 1 \tag{6.3.26}$$

$$\psi_p(z) = \frac{R(z)}{R(0)} \tag{6.3.27}$$

Beweis: Gleichung (6.3.25) gilt wegen der Wahl von $\alpha_k := \frac{1}{\rho_k}$ $k = 1, \ldots, p$. Die Normierung (6.3.26) ergibt sich durch die Gestalt von ψ_p. Da wegen $\rho_k \neq 0$ auch $R(0) \neq 0$ nach Konstruktion von R gilt, ist das Polynom $\frac{R(z)}{R(0)}$ definiert. Da desweiteren $\psi_p(z)$ als auch $\frac{R(z)}{R(0)}$ Polynome vom Grad p sind, deren Nullstellen übereinstimmen und beide den Wert 1 in 0 annehmen, stimmen diese Polynome überein und es ergibt sich (6.3.27). ■

Bemerkung 6.3.16 *Diese Wahl der Relaxations-Parameter ist nur dann sinnvoll, wenn man daraus ableiten kann, daß dadurch* ψ_p *auf der gesamten Spektralumgebung von*

A kleine Werte annimmt. Liegt die Normierungsstelle 0 *innerhalb der Spektralumgebung, in dem das iterierte Ritz-Polynom per Konstruktion einen Betrag kleiner* r_ϵ *hat, so wird diese Minimierung durch die Normierung (6.3.26)/(6.3.27) wieder zunichte gemacht und die Iteration konvergiert im allgemeinen nicht. Liegt* 0 *jedoch nicht in der Spektralumgebung, so gilt* $|R(0)| >> r_\epsilon$, *wobei* $|R(0)|$ *umso größer ist, je weiter es von der Spektralumgebung entfernt ist. In diesem Fall kann die Konvergenzgeschwindigkeit für das Iterations-Verfahren angegeben werden, vgl. Satz 6.3.18.*

Definition 6.3.17 *Werden für die Relaxations-Parameter in (6.3.22) die Kehrwerte der Nullstellen des iterierten Ritz-Polynoms zu A gewählt, so sei dieses Iterationsverfahren* **Ritz-Iteration** *genannt. Diese Iteration entspricht der Richardson-Iteration mit dem Iterationspolynom aus (6.3.27).*

Die Konvergenzgeschwindigkeit der Ritz-Iteration für normale Matrizen beträgt:

Satz 6.3.18 *Sei* $[\Theta, R] = \textit{Iter-Ritz-Poly-stab}(A, r_\epsilon, q)$ *mit* $r_\epsilon \in \mathbb{R}^+$ *und* $q \in \mathbb{N}$. *Sei weiter in (6.3.22)* $\alpha_k := \frac{1}{\rho_k}, \rho_k \neq 0,\ k = 1, \ldots, p$, *wobei* $\Theta = \{\rho_1, \ldots, \rho_p\}$ *sei. Dann gilt für normale Matrizen A, für die* 0 *nicht in der Spektralumgebung liegt:*

$$\|r_p\|_2 \leq \frac{r_\epsilon}{|R(0)|}\|r_0\|_2 \tag{6.3.28}$$

Beweis: Liegt 0 nicht in der Spektralumgebung von A, so gilt per Konstruktion des iterierten Ritz-Polynoms $|R(0)| > r_\epsilon > 0$ und $|R(\lambda)| \leq r_\epsilon\ \forall \lambda \in \sigma(A)$. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\|r_p\|_2 &\overset{(6.3.24)}{=} \|\psi_p(A)r_0\|_2 && (6.3.29)\\
&\leq \|\psi_p(A)\|_2\|r_0\|_2 && (6.3.30)\\
&\overset{(6.3.27)}{=} \left\|\frac{R(A)}{R(0)}\right\|_2\|r_0\|_2 && (6.3.31)\\
&= \frac{\|R(A)\|_2}{|R(0)|}\|r_0\|_2 && (6.3.32)\\
&\overset{A \text{ normal}}{=} \frac{\max\limits_{\lambda\in\sigma(A)}|R(\lambda)|}{|R(0)|}\|r_0\|_2 && (6.3.33)\\
&\leq \frac{r_\epsilon}{|R(0)|}\|r_0\|_2 && (6.3.34)
\end{aligned}$$

■

Bemerkung 6.3.19 *In der Konvergenzaussage von Satz 6.3.18 zeigt sich wiederum, daß die Konvergenz der Ritz-Iteration umso besser ist, je weiter der Ursprung von der Spektralumgebung entfernt ist. Dabei ist es nicht nötig, daß der Ursprung außerhalb einer Eigenwert-einschließenden Ellipse liegt, wie etwa bei der Tschebyscheff-Iteration oder zumindest außerhalb eines polygonalen Gebietes, welches die Eigenwerte umschließt, wie etwa bei den Arnoldi-Faber-Methoden [NRT92], [MSV95].*

Die numerische Auswertung des Polynoms ψ_p bzw. φ_{p-1} kann über die Relaxationsschritte (6.3.22) geschehen. Für konjugiert komplexe Nullstellen können dabei zwei Schritte zusammengefaßt werden, um eine komplexe Rechnung zu vermeiden. Es ergibt sich mit $\Theta = \{\rho_1, \ldots, \rho_p\}$ aus $[\Theta, R] =$ Iter-Ritz-Poly-stab(A, r_ϵ, q):

Algorithmus 6.3.20 Ritz-Iterationsschritt $x = x + \varphi_{p-1}(A)(r_0)$

function $[x] =$ *Ritz-Iter*(A, b, Θ, x)

(1) IF $|\Theta| = 0$ *THEN* $x = x + (b - Ax)$ *ELSE*

(2) FOR i=1,...,p DO

IF $\Im(\rho_i) \neq 0$ *THEN*[11]

$x = x + A(\frac{1}{|\rho_i|^2}Ax - \frac{2\Re(\rho_i)}{|\rho_i|^2}x) + \frac{2\Re(\rho_i)}{|\rho_i|^2}b - \frac{1}{|\rho_i|^2}Ab)$

$i = i + 1$

ELSE

$x = x + \frac{1}{\rho_i}(b - Ax)$

Zur numerisch stabilen Berechnung sollte die Reihenfolge der Ritz-Werte ρ_i aus Θ sinnvoll gewählt werden. Da hier ein Polynom ausgewertet wird, dessen Nullstellen die Inversen der Ritz-Werte sind, gilt die Aussage von Bemerkung 6.3.8, Seite 171, hier nicht. Es kann jedoch mit relativ geringem Aufwand eine stabile Reihenfolge berechnet werden:

Algorithmus 6.3.21 Sort-inv-Ritz-Werte

function $[\Theta] =$ *Sort-inv-Ritz-Werte*(Θ)[12]

(1) $\tau(1) := 1$ *und* $l = 1$

(2) Falls $\Im(\rho_1) \neq 0$, *dann* $\tau(2) = 2$ *und* $l = 2$.

[11] Dies entspricht mit $\rho_{i+1} = \overline{\rho_i}$:

$$x_{i+2} = x_{i+1} + \tfrac{1}{\rho_i}(b - Ax_{i+1}) = x_i + \tfrac{1}{\overline{\rho_i}}(b - Ax_i) + \tfrac{1}{\rho_i}(b - A(x_i + \tfrac{1}{\overline{\rho_i}}(b - Ax_i))$$

[12] O.B.d.A seien die konjugiert komplexen Paare von Nullstellen wieder hintereinander angeordnet.

(3) FOR $j = l+1, \ldots, p$ *DO*

(1) Sei $\rho_i \in \Theta$ *mit* $\left|\prod_{l=1}^{j-1}(1-\frac{\rho_i}{\rho_{\tau(l)}})\right| = \max_{\rho\in\Theta}\left|\prod_{l=1}^{j-1}(1-\frac{\rho}{\rho_{\tau(l)}})\right|$. *Bei gleichen Werten wird der kleinste Index gewählt.*

(2) $\tau(j) = i$

(3) Falls $\Im(\rho_i) \neq 0$, *dann* $\tau(j+1) = i+1$ *und* $j = j+1$.

(4) $\Theta := \{\rho_{\tau(1)}, \ldots, \rho_{\tau(p)}\}$

Dieser Algorithmus wählt immer als nächste Nullstelle bzw. Relaxationsparameter denjenigen aus der Menge aus, der den größten Betrag im bisherigen Abschnittspolynom hat. Auf diese Weise wird weitgehend verhindert, daß zu hohe Spitzen in den Abschnittspolynomen vorkommen, die zu numerischen Instabilitäten führen würden. Algorithmus 6.3.20 sollte immer mit dieser sortierten Menge von Ritz-Werten aufgerufen werden.

Die Ritz-Iterationsschritte können nun solange hintereinander ausgeführt werden, bis $\|r_{jp}\|_2 = \|b - Ax_{jp}\|_2$ kleiner einer Toleranz $tol \in \mathbb{R}^+$ ist. Dabei sind nach Algorithmus 6.3.20 pro Iterationsschritt p Matrix-Vektor Multiplikationen und $2p$ Vektor-Additionen nötig. Nach (6.3.28) gilt:

$$\|r_{jp}\|_2 = \left(\frac{r_\epsilon}{|R(0)|}\right)^j \|r_0\|_2 \tag{6.3.35}$$

und weiter:

$$\begin{array}{rrcl} & \left(\frac{r_\epsilon}{|R(0)|}\right)^j \|r_0\|_2 & < & tol(<1) \\ \Leftrightarrow & j\log\left(\frac{r_\epsilon}{|R(0)|}\right) & < & \log\left(\frac{tol}{\|r_0\|_2}\right) \\ \overset{\frac{r_\epsilon}{|R(0)|}<1}{\Leftrightarrow} & j & > & \frac{\log\left(\frac{tol}{\|r_0\|_2}\right)}{\log\left(\frac{r_\epsilon}{|R(0)|}\right)} \end{array} \tag{6.3.36}$$

Zusammenfassend gilt also das

Korollar 6.3.22 *Zur Erreichung einer Genauigkeit von* $\|r_{jp}\|_2 < tol \in \mathbb{R}^+$ *sind ca.*

$$j = \left\lceil \frac{\log\left(\frac{tol}{\|r_0\|_2}\right)}{\log\left(\frac{r_\epsilon}{|R(0)|}\right)} \right\rceil + 1 \tag{6.3.37}$$

Iterationen von Algorithmus 6.3.20 notwendig. Dies kostet jp *Matrix-Vektor Multiplikationen und* $2jp$ *Vektor-Additionen.*

Bemerkung 6.3.23 *Die Aufwandsaussage aus Korollar 6.3.22 bezieht sich lediglich auf die Iteration. Der Aufwand zur Berechnung des iterierten Ritz-Polynoms ist dabei nicht mit einberechnet, siehe dazu Abschnitt 6.3.3. Sollen viele Gleichungssysteme mit der gleichen Matrix A gelöst werden, ist der Aufwand des Korollars ausschlaggebend, da hier nur einmalig das iterierte Ritz-Polynom berechnet werden muß.*

Kapitel 7

Erkennung von Singularitäten

In den Kapiteln 2-5 wurden Methoden zur Analyse von Singularitäten entwickelt. Die dazu nötigen Eigenwertinformationen konnten mit den Mitteln aus Kapitel 6 bestimmt werden. In diesem Kapitel wird eine Strategie entwickelt, die es erlaubt, diese Singularitäten bzw. die singulären Punkte auf einer Lösungskurve zu erkennen. Zu diesem grundlegenden Problem sind bereits seit vielen Jahren Arbeiten erschienen, vgl. etwa [Bey84], [DK80a], [DK80b], [DK81], [GMS91], [GR83], [GR84], [Kel77], [MGS90], [MS80], [SJ84], [WJ91]. In Zusammenarbeit mit Marburger Wissenschaftlern sind u.a. Arbeiten erschienen von [ABHJ] [BM89], [LMZ86a], [LMZ86b], [LM93], [Mei89a], [Mei89b], [Mei89c], [Mei89d], [Mei90a], [Mei90b], [Mei90c], [Mei91a], [ML90]. In vielen Fällen sind die Methoden zur Entdeckung einer Singularität auf bestimmte Typen beschränkt. So können etwa nur Umkehrpunkte, Hopfpunkte oder andere Singularitäten erkannt werden. Die einzigen Verfahren, die diesbezüglich keine Einschränkung erfahren, sind jene, die die Eigenwerte des linearisierten Operators betrachten. Diese haben außerdem den Vorteil, daß durch Kenntniss der kritischen Eigenwerte das **Stabilitätsverhalten** für die Lösungskurve direkt abgelesen werden kann. Im folgenden Abschnitt wird ein solches Verfahren mit Hilfe einer Testfunktion definiert.

7.1 Eine Testfunktion für Singularitäten

Eine Erkennungsmethode für Singularitäten kann im allgemeinen als Testfunktion τ formuliert werden, die folgende wesentliche Eigenschaften erfüllt:

Definition 7.1.1 *Zu dem Problem (0.0.1, Seite 4), sei $z(s) = (x(s), \lambda(s)) \in X \times \mathbb{R}$ eine Lösungskurve für $s \in [a, b] \subset \mathbb{R}$. Ein* **singulärer Punkt** *$z(\tilde{s})$ liegt dann vor, wenn*

dim Kern$(DF(z(\tilde{s}))) > 1$ *gilt. Um die Methoden aus Kapitel 6 zu nutzen, sei bereits* $X = \mathbb{R}^n$ *durch eine Diskretisierung bestimmt. Betrachtet man die Parametrisierung der Lösungskurve bzgl.* λ*, so liegt eine Singularität dann vor, wenn (neben einigen Vorderungen zur Nichtdegeneriertheit)* $D_x F(z(\tilde{s}))$ *mindestens einen Eigenwert* $\mu = 0$ *hat. Ein* **Hopf-Punkt** *liegt hingegen genau dann vor, wenn für mindestens ein Eigenwertpaar* $\Re(\mu) = 0$ *und* $\Im(\mu) \neq 0$ *gilt. Im Folgenden sollen beide Begriffe unter dem Oberbegriff* **'Singularitäten'** *zusammengefaßt werden. Eine Funktion* τ *wird* **Testfunktion** *(für Singularitäten) genannt, wenn gilt:*

1.) τ *ordnet jeder Lösung* z *von (0.0.1) eine reelle Zahl zu.*

2.) τ *ist stetig bzgl.* s *auf der Lösungskurve* $z(s)$*.*

3.) $\tau(z(s)) = 0 \Leftrightarrow z(s)$ *ist singulärer oder Hopf-Punkt von (0.0.1).*

4.) τ *wechselt beim Durchgang durch eine Singularität das Vorzeichen.*

Bemerkung 7.1.2 *Mit Hilfe einer Testfunktion ist es möglich, Singularitäten während der Pfadverfolgung zur Berechung von* $z(s)$ *zu erkennen. Je glatter die Testfunktion ist, desto besser kann dabei der singuläre Punkt bestimmt werden. Insbesondere können solche Punkte durch Extrapolation der Testfunktion evtl. vorausgesagt werden. Dadurch können die numerischen Mittel zur Pfadverfolgung entsprechend angepaßt werden. Während bei gewöhnlichen Differentialgleichungen bereits Testfunktionen mit Eigenwertinformationen benutzt wurden, vgl. [Sim75],[Sey88], gibt es wenige Arbeiten, die diese Strategie auch für diskretisierte, partielle Differentialgleichungen wählen, vgl. [Seb95]. Dies liegt im wesentlichen daran, daß effiziente numerische Techniken zur Berechnung von entsprechenden Eigenwerten in sehr großen Systemen und deren Implementation erst in den letzten Jahren entwickelt wurden, vgl. [Sco95], [LSVY94], [Sad91a], [Sad91b], [Bra93]. Im Folgenden werden speziell die Methoden aus Kapitel 6 angewandt, um eine Testfunktion* τ *zu definieren. Es würden sich jedoch auch andere Methoden einsetzen lassen, da es lediglich darum gehen wird, die Eigenwerte nahe der imaginären Achse zu berechnen.*

Es sei angenommen, daß der größte Teil des Spektrums von $D_x F(z(s)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ auf der linken Seite der imaginären Achse der komplexen Ebene liegt, da dies in naturwissenschaftlichen Anwendungen oft der Fall ist[1]. Mit den Methoden aus Kapitel 6 lassen sich unter dieser Bedingung die Eigenwerte $\mu_0, \ldots, \mu_m$ mit größtem Realteil bestimmen. Weiterhin wird angenommen, daß m so groß gewählt sei, daß gilt:

[1] Vgl. die Erläuterung zu (6.2.11), Seite 149.

$$\Re(\mu_0) \leq \Re(\mu_1) \leq \cdots \leq \Re(\mu_q) \leq 0 \leq \Re(\mu_{q+1}) \leq \cdots \leq \Re(\mu_m) \text{ mit}^2 \ q > 0 \qquad (7.1.1)$$

Die Parameter m und q sollten so gewählt sein, daß in (7.1.1) alle kritischen Eigenwerte erfaßt sind.

Bei numerischer Pfadverfolgung wird nicht die gesamte Kurve $z(s)$ berechnet, sondern nur einzelne Punkte auf der Kurve. Diese seien mit

$$z(s_0), z(s_1), \ldots \qquad (7.1.2)$$

bezeichnet. Der folgende Algorithmus berechnet mit diesen Informationen eine Testfunktion:

Algorithmus 7.1.3 Testfunktion τ

function $[\tau(s_j)] = \tau_1(z(s_j), q)$

(1) Berechne die Eigenwerte $\mu_1^{s_j}, \ldots, \mu_m^{s_j}$ *von* $D_x F(z(s_j))$ *mit größtem Realteil und der Eigenschaft (7.1.1).*

(2) $\tau(s_j) = \prod_{i=1}^{m} |\Re(\mu_i^{s_j})|$.

(3) $n_-(s_j) = \#\{\mu_i^{s_j} | \Re(\mu_i^{s_j}) > 0, \ i = 1, \ldots, m\}$.

(4) IF $(j > 0)$ *AND* $(n_-(s_{j-1}) \neq n_-(s_j))$ *THEN*
$\tau(s_j) = -sgn(\tau(z(s_{j-1})))\tau(s_j)$.

Bemerkung 7.1.4 *Diese Testfunktion multipliziert die m Eigenwerte mit größtem Realteil und versieht das Produkt genau dann mit dem gleichen Vorzeichen wie im letzten Kurvenpunkt, wenn sich die Anzahl der Eigenwerte auf der rechten Seite der imaginären Achse nicht verändert hat. Diese Konstruktion bedingt, daß die Testfunktion immer dann das Vorzeichen wechselt, wenn mindestens ein Eigenwert die imaginäre Achse überschreitet. Die einzige Ausnahme tritt ein, wenn exakt gleich viele Eigenwerte von der linken auf die rechte Seite und von der rechten auf die linke Seite der imaginären Achse wechseln. Dies ist jedoch bei hinreichend kleiner Schrittweite auf die Singularitäten beschränkt, in denen sich tatsächlich (analytisch) Eigenwertpaare auf der imaginären Achse von verschiedenen Seiten kreuzen. Diese Situation ist jedoch sehr selten.*

[2]Falls μ_0 komplex ist, jedoch durch die Wahl von m und q in der Reihenfolge nur ein Eigenwert des konjugiert komplexen Paares aufgenommen werden kann, so sei für μ_0 ein beliebiger Eigenwert des Paares gewählt.

Die Berechtigung, von einer Testfunktion zu sprechen, gibt der nächste Satz.

Satz 7.1.5 *Sei $z(s)$ eine Lösungskurve von (0.0.1) für $s = [a, b] \subset \mathbb{R}$ und $z(s_0), z(s_1), \ldots$ die numerisch berechneten Punkte dieser Kurve mit $s_0 < s_1 < \ldots$. Dann ist τ aus Algorithmus 7.1.3 für konstantes $0 < q \in \mathbb{N}$ und hinreichend kleine Schrittweiten $s_j - s_{j-1},\ j = 1, 2, \ldots$ genau dann eine Testfunktion, wenn sich bei jedem Durchgang durch einen singulären Punkt der Lösungskurve die Anzahl der Eigenwerte auf der rechten Seite der imaginären Achse ändert.*

Beweis: Es ist nachzuweisen, daß die Punkte 1.)-4.) aus Definition 7.1.1 gelten. Punkt 1.) ist per definitionem richtig.

Zu 2.): Die Matrix $A(s) := D_x F(z(s))$ hängt für stetig differenzierbares F stetig von s ab. Somit auch die Eigenwerte und ihre Realteile. Insbesondere hängen die Realteile der m Eigenwerte mit größtem Realteil aus (7.1.1) stetig von s ab. Sollten sich bei Variation von s die Realteile von $\mu_0^{s_j}$ und $\mu_1^{s_j}$ kreuzen, so hängt wegen der Stetigkeit der einzelnen Realteile das Produkt aus (2) immer noch stetig von s ab. Da das Vorzeichen nach Schritt (4) nur in den Nullstellen des Produktes gewechselt wird, hängt auch $\tau(s)$ stetig von s ab.

Zu 3.): Dies gilt wegen Schritt (2) und Voraussetzung (7.1.1).

Zu 4.): Nach Voraussetzung ändert sich die Anzahl der Eigenwerte auf der rechten Seite der imaginären Achse beim Durchgang durch jede Singularität. Durch Schritt (3) und (4) wird dann das Vorzeichen der Testfunktion geändert, falls die Singularität zwischen $z(s_j)$ und $z(s_{j+1})$ liegt und die Schrittweite $s_{j+1} - s_j$ klein genug gewählt wurde. ■

Bemerkung 7.1.6 *Sollte es sehr viele Eigenwerte auf der rechten Seite der imaginären Achse geben, so kann es leicht zu Überläufen in Schritt (2) von Algorithmus 7.1.3 kommen. Dieses Problem läßt sich leicht umgehen, indem man in das Produkt nur weniger als $m - q$ dieser Eigenwerte einbezieht. Z.B. wäre eine naheliegende Möglichkeit, ebenfalls jene q Eigenwerte auf der rechten Seite der imaginären Achse auszuwählen, welche am nächsten zu dieser liegen.*

Im nächsten Abschnitt wird dargestellt, wie eine solche Testfunktion effektiv zur Erkennung von Singularitäten eingesetzt werden kann.

7.2 Anwendung der Testfunktion

Die Anwendung der Testfunktion 7.1.3 während der Pfadverfolgung kann auf viele Arten geschehen. Sie kann eingesetzt werden, um eine übersprungene Singularität zu erkennen und den Punkt zu approximieren. Weiterhin kann sie bei hinreichender Glattheit durch Extrapolation dazu benutzt werden, eine Singularität vorauszusagen und schon zuvor die numerische Pfadverfolgung auf die Nähe einer Singularität umzustellen. Ein schematischer Algorithmus könnte etwa wie folgt aussehen (zu den Werten s_r, s_v, s_z und weiteren Erläuterungen siehe Bemerkung 7.2.2):

Algorithmus 7.2.1 Fortsetzungsverfahren mit Testfunktion

(0) Wähle Schrittweite $\Delta s \in \mathbb{R}^+$ *und Anfangsstelle* $s_0 \in [a, b]$.

(1) Berechne $z(s_0)$ *mit* $F(z(s_0)) = 0$.

(2) Bestimme anhand der Eigeninformation von $D_x(F(z(s_0)))$ *die Parameter* q *und* m *für (7.1.1).*

(3) Berechne $\tau_1(z(s_0), q)$.

(4) $j = 1$.

(5) $s_{j+1} = s_j + \Delta s$, $j = j + 1$.

(6) Berechne $z(s_j)$ *mit* $F(z(s_j)) = 0$.

(7) Berechne $\tau_1(z(s_j), q)$.

(8) IF $sgn(\tau_1(z(s_j), q)) = sgn(\tau_1(z(s_{j-1}), q))$ *THEN*

(8.1) Extrapoliere[3] *mit den Werten* $\tau_1(z(s_{j-\min\{s_r,j\}})), \ldots, \tau_1(z(s_j))$ *den Wert* $\tilde{\tau}_1(z(s_{j+1}), q)$.

(8.2) IF $(sgn(\tau_1(z(s_j), q)) \neq sgn(\tilde{\tau}_1(z(s_{j+1}), q)))$ *AND* $(\Delta s > s_v)$ *THEN*
{*Singularität wird erwartet*}
$\Delta s = \Delta s / s_z$, $j = j - 1$

(8.3) GO TO (5).

(9) ELSE {*Singularität entdeckt*}

(9.1) IF $(\Delta s \leq s_v)$ *THEN*

(9.1.1) Berechne durch inverse Interpolation von $\tau_1(z(s_{j-\min\{s_r,j\}})), \ldots, \tau_1(z(s_j))$ *die Nullstelle* $\hat{s}$ *mit* $\tau_1(z(\hat{s})) = 0$.

[3] Die extra- und interpolierten Werte werden mit einer Tilde versehen.

(9.1.2) Berechne durch Interpolation von $z(s_{j-s_r}), \ldots, z(s_j)$ den approximativen singulären Punkt $\hat{z}(\hat{s})$.

(9.1.3) Analysiere die Singularität mit Hilfe der Algorithmen aus den Kapiteln 2-5.

(9.1.4) Wähle neuen Startpunkt s_0 auf einem Lösungszweig und eine Anfangsschrittweite $\Delta s \in \mathbb{R}^+$. GO TO (2).

(9.2) ELSE

(9.2.1) $\Delta s = \Delta s / s_z$, $j = j - 1$, GO TO (5)

Bemerkung 7.2.2

1.) Die Eigenwertinformationen in Schritt (2) können z.B. mit den Algorithmen aus Kapitel 6 bestimmt werden. Der Wert q gibt vor, wie viele Eigenwerte links von der imaginären Achse noch zur Testfunktion hinzugenommen werden.

2.) Die Fortsetzungsschritte (5) und (6) können mit wohlbekannten Methoden ausgeführt werden, vgl. [AG90]. Während in regulären Punkten z.B. eine Parametrisierung bzgl. der Pseudo-Bogenlänge sinnvoll ist, sollte in der Nähe von singulären Punkten auf eine Methode umgeschaltet werden, die solche Punkte berücksichtigt.

3.) Die Extrapolation der Testfunktion in Schritt (8(1)) zur Voraussage von Singularitäten bezieht maximal die letzten s_r Werte ein. Da die Punkte $s_{j-\min\{s_r,j\}}, \ldots, s_j$ nicht vorgegeben werden können, sondern durch den Algorithmus bestimmt werden, kann keine Richardson-Extrapolation angewandt werden. Hier könnte z.B. die rationale Extrapolation zum Einsatz kommen. Als günstig hat sich auch die Extrapolation mit Hilfe des Interpolations-Splines zu $\tau_1(z(s_{j-\min\{s_r,j\}})), \ldots, \tau_1(z(s_j))$, ausgewertet in $s_j + \Delta s$, erwiesen.

4.) Schritt (8.2) trägt dem Problem Rechnung, daß bei den meisten Fortsetzungsalgorithmen der Prädiktor-Korrektor Art der (Newton-)Korrektor einen immer kleineren Einzugsbereich hat, je näher eine Singularität liegt, vgl. [JD86]. Wird mit Hilfe der extrapolierten Testfunktion eine Singularität vermutet, reduziert sich die Schrittweite um den Faktor s_z bis unter die Grenze s_v und es wird wieder zum letzten Schritt zurückgegangen. Nach erreichen einer Schrittweite $s \leq s_v$ kann die Singularität übersprungen und danach in (9.1) analysiert werden.

5.) Ist die Schrittweite s_v klein genug gewählt, kann bei einem Nulldurchgang der Testfunktion diese als injektiv vorausgesetzt werden. Damit kann eine inverse

Interpolation durchgeführt werden. Diese inverse Interpolation in (9.1.1) sollte mit dem Neville-Aitken Algorithmus ausgeführt werden, da hier ausschließlich reelle Werte für die Stelle 0 *interpoliert werden müssen. Die Interpolation in (9.1.2) kann ebenfalls mit dem Neville-Aitken Algorithmus ausgeführt werden. Hier wird der Funktionswert der Interpolationsfunktion für die Werte* $z(s_{j-\min\{s_r,j\}}), \ldots, z(s_j)$ *an der Stelle benötigt, die die inverse Interpolation geliefert hat.*

6.) Nachdem eine Singularität analysiert und ein neuer Lösungszweig zur weiteren Fortsetzung ausgewählt wurde, sollte noch für einige Schritte die Parametrisierung aus den Kapiteln 2-5 benutzt werden. Dadurch ist die Fortsetzung in der Umgebung der Singularität stabiler, vgl. auch [Mei89b].

Im nächsten Abschnitt soll dieses Fortsetzungsschema auf 2 Beispiele angewandt werden.

7.2.1 Anwendung auf ein algebraisches Gleichungssystem

Im Folgenden soll an einem einfachen Beispiel das Verhalten der Testfunktion untersucht werden. Obwohl es sich hierbei lediglich um algebraische Gleichungen handeln wird, treten sehr viele Singularitäten auf, die eine normale Pfadverfolgung fast unmöglich machen. Das Beispiel ist aus [Sey88] entnommen und beschreibt die Reaktion in drei verbundenen Zellen. Die Reaktion der Chemikalien A,B,D,E ist gemäß[4]:

$$A \rightleftharpoons X \tag{7.2.1}$$
$$2X + Y \rightleftharpoons 3X \tag{7.2.2}$$
$$B + X \rightleftharpoons Y + D \tag{7.2.3}$$
$$X \rightleftharpoons E \tag{7.2.4}$$

Mit einigen Vereinfachungen kann die Reaktion durch die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t} &= A + X^2Y - BX - X + D_1 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \\ \frac{\partial Y}{\partial t} &= BX - X^2Y + D_2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \end{aligned} \tag{7.2.5}$$

mit entsprechenden Randbedingungen beschrieben werden. Die Variable x entspricht der Länge des Reaktors. Vernachlässigt man die Diffusionsterme D_1 und D_2 und untersucht die Gleichgewichtszustände für $A = 2,\ B = 6$, so ergeben sich die Gleichungen:

[4]Zur genaueren Erläuterung der chemischen Reaktionen siehe [PG71].

$$\begin{aligned}
2 - 7y_1 + y_1^2 y_2 + \lambda(y_3 - y_1) &= 0 \\
6y_1 - y_1^2 y_2 + 10\lambda(y_4 - y_2) &= 0 \\
2 - 7y_3 + y_3^2 y_4 + \lambda(y_1 + y_5 - 2y_3) &= 0 \\
6y_3 - y_3^2 y_4 + 10\lambda(y_2 + y_6 - 2y_4) &= 0 \\
2 - 7y_5 + y_5^2 y_6 + \lambda(y_3 - y_5) &= 0 \\
6y_5 - y_5^2 y_6 + 10\lambda(y_4 - y_6) &= 0
\end{aligned} \tag{7.2.6}$$

Hierbei stehen y_1 und y_2 für X und Y in der ersten Zelle usw. Der **Verzweigungsparameter** λ ist hierbei der Kopplungskoeffizient.

Mit dem Startpunkt $(y, \lambda) = (0.45, 4.38, 5.09, 1.31, 0.45, 4.38, 0.06)$ ergibt das obige Fortsetzungsverfahren die (geschlossene) Lösungskurve, deren Projektion in den Bildern 7.2.1-7.2.3, Seite 209, dargestellt ist. Die Markierungen entsprechen den entdeckten Singularitäten. In Tabelle 7.2.1 sind die numerischen Ergebnisse zusammengefaßt. In den Bildern 7.2.4-7.2.6 ist die Testfunktion τ_1 dargestellt. Wegen der sehr unterschiedlichen Größenordnungen wurden in den einzelnen Bildern verschiedene Maßstäbe gewählt. Die berechneten Eigenwerte sind in den Bildern 7.2.7-7.2.9 dargestellt. Wie an den Bildern der Testfunktion und Tabelle 7.2.1, Seite 208, zu erkennen ist, werden die Singularitäten trotz der relativ chaotischen Eigenwertverläufe sehr gut erkannt und approximiert.

Tabelle 7.2.1: Singuläre Punkte

Nr.	λ	Bogenlänge	Kritische Eigenwerte	Art	Vorzeichenwechsel der Testfunktion
1	0.0341	2.219	-0.00016±0.467	Hopf	+−
2	0.0335	2.798	$-3.55\cdot10^{-8}$	Umkehrpunkt	+−
3	0.0341	4.705	$-6.96\cdot10^{-8}$	Umkehrpunkt	−+
4	0.0324	6.465	-0.00065±0.85i	Hopf	+−
5	0.0322	6.561	0.00033±1.46i	Hopf	−+
6	0.0297	7.464	0.00013±0.107i	Hopf	+−
7	0.0264	8.405	-0.00017±1.92i	Hopf	+−
8	0.0251	8.782	-0.00022±2.02i	Hopf	−+
9	0.0203	10.792	$1.05\cdot10^{-6}$	Umkehrpunkt	+−
10	0.155	13.909	$3.075\cdot10^{-6}$	Pitchfork	+−
11	0.265	14.165	0.00043±2.06i	Hopf	−+
12	1.5	16.509	$5.99\cdot10^{-7}$	transkritisch	+−
13	1.6	17.101	$-6.278\cdot10^{-9}$	Umkehrpunkt	+−
14	1.54	17.655	$6.49\cdot10^{-9}$	Pitchfork	+−
15	1.06	19.074	0.000359±2.39i	Hopf	+−

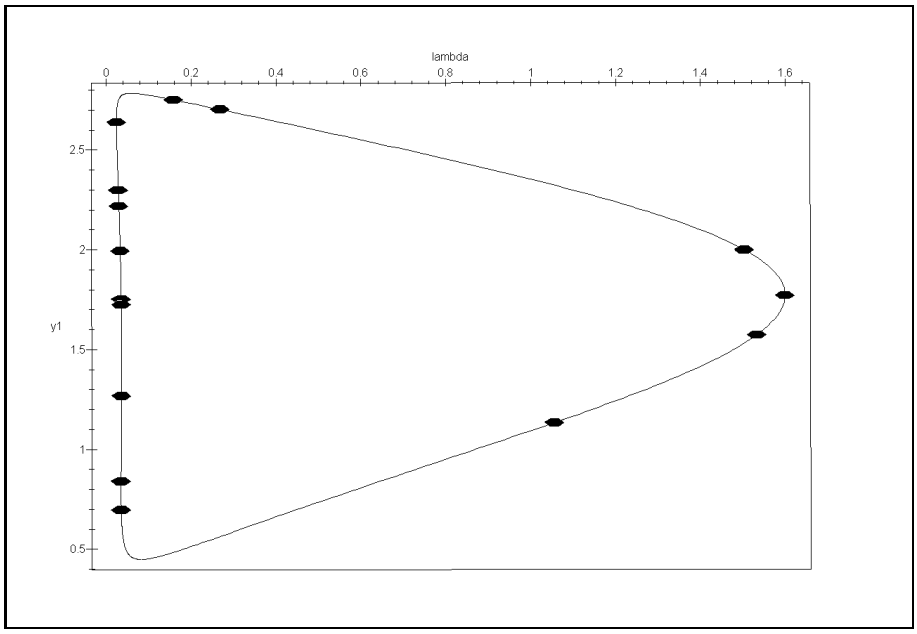

Abbildung 7.2.1: Lösungskurve (y_1, λ)-Ansicht
Markierungen entsprechen singulären Punkten aus Tabelle 7.2.1

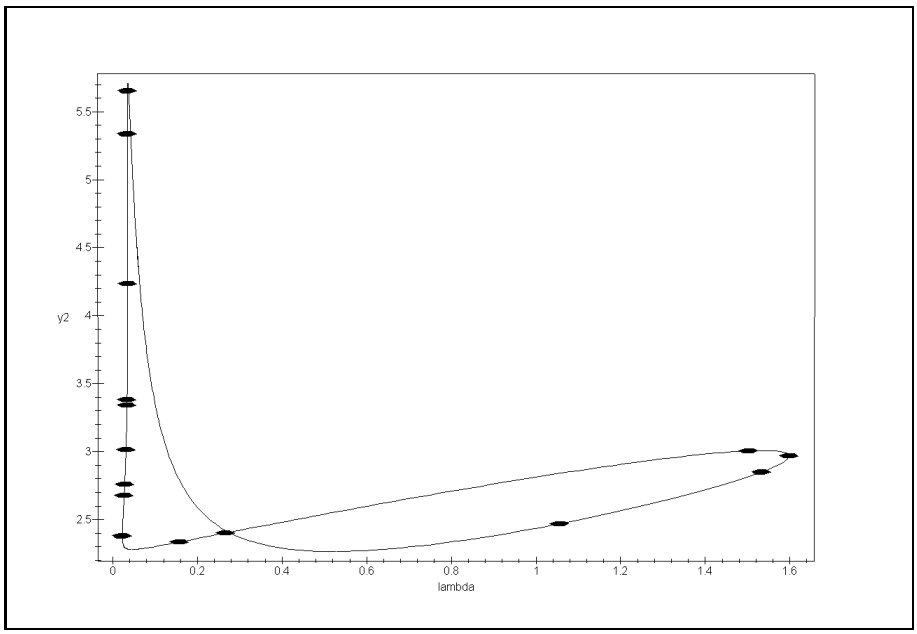

Abbildung 7.2.2: Lösungskurve (y_2, λ)-Ansicht
Markierungen entsprechen singulären Punkten aus Tabelle 7.2.1

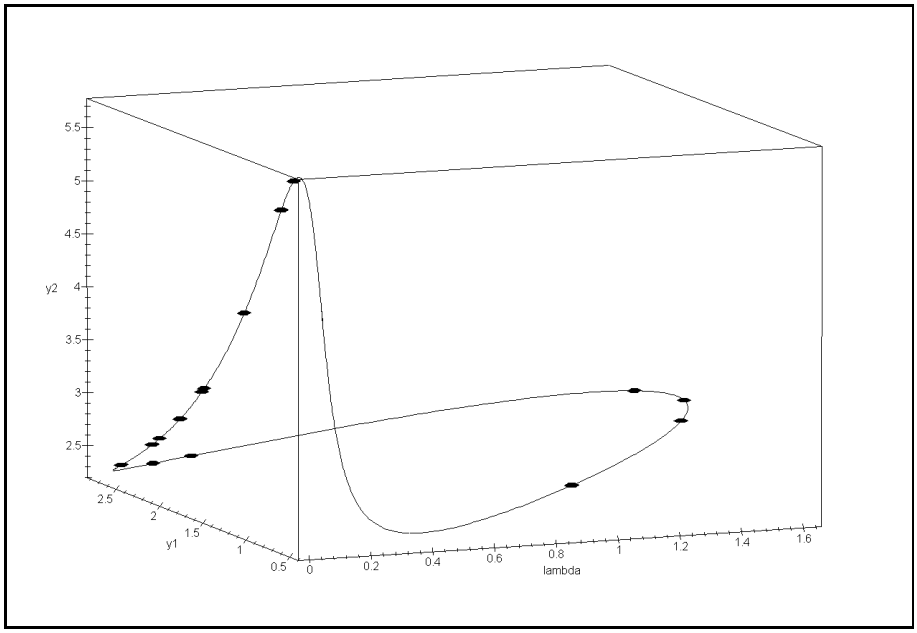

Abbildung 7.2.3: Lösungskurve 3D-Ansicht
Markierungen entsprechen singulären Punkten aus Tabelle 7.2.1

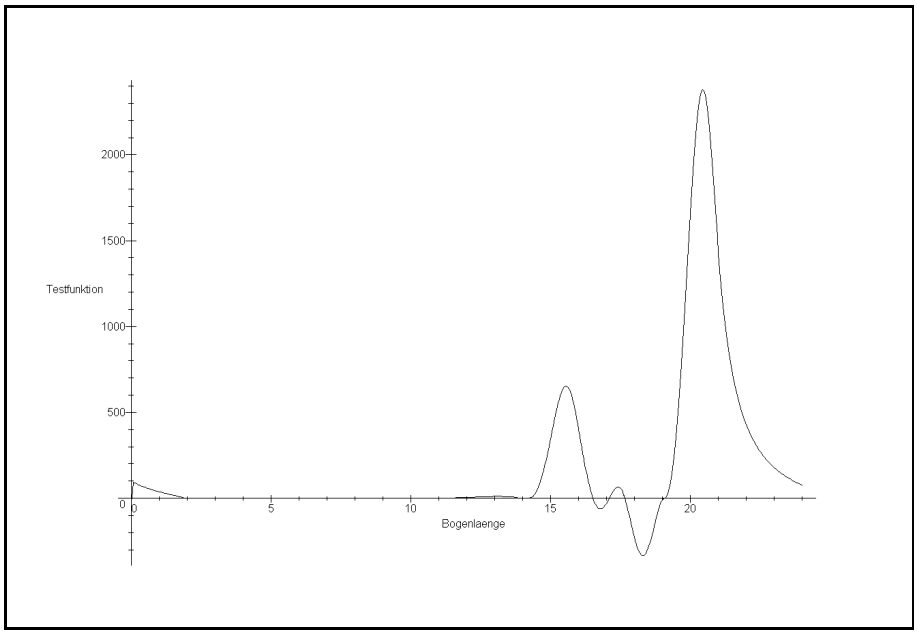

Abbildung 7.2.4: Testfunktion der Lösungskurve

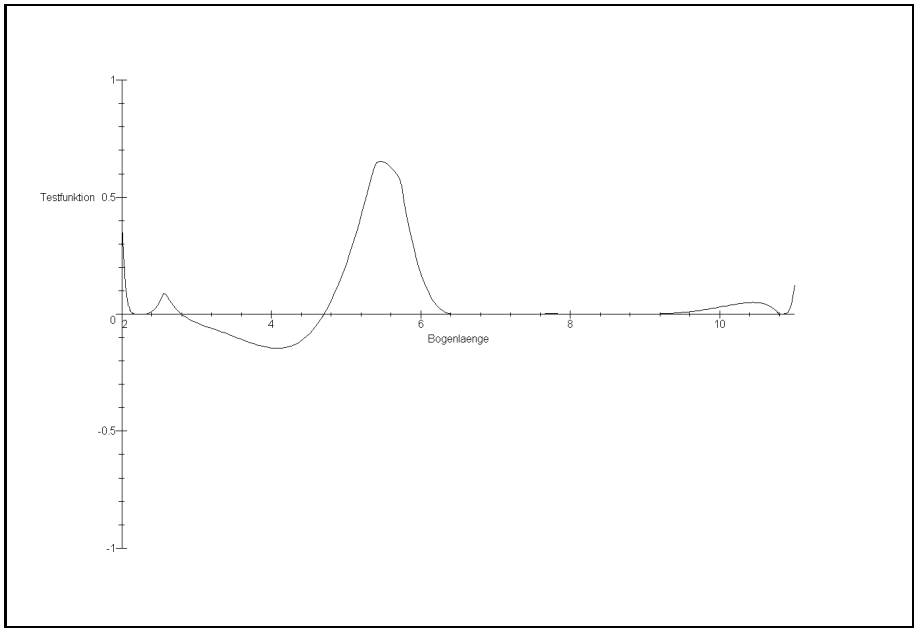

Abbildung 7.2.5: Ausschnitt der Testfunktion

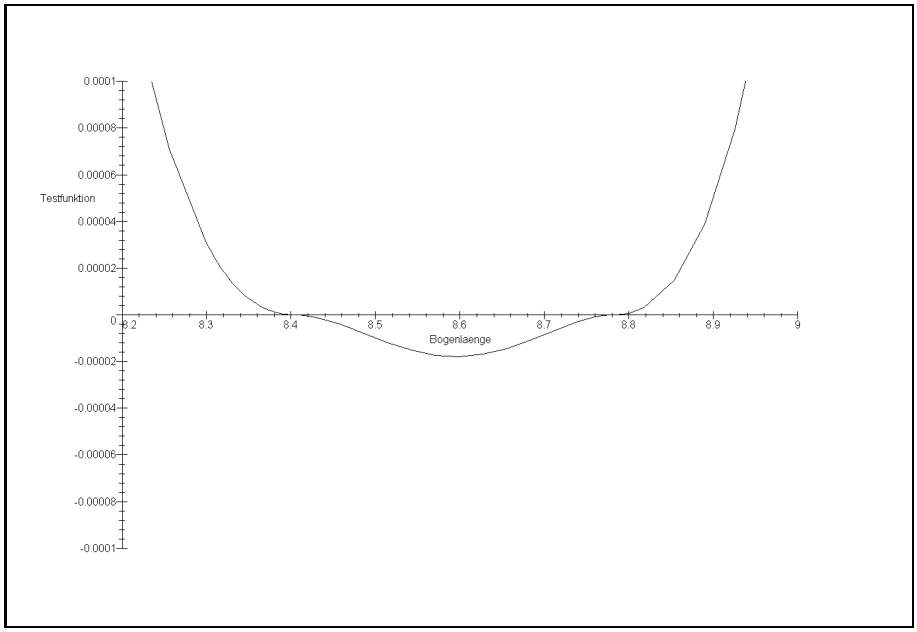

Abbildung 7.2.6: Ausschnitt der Testfunktion

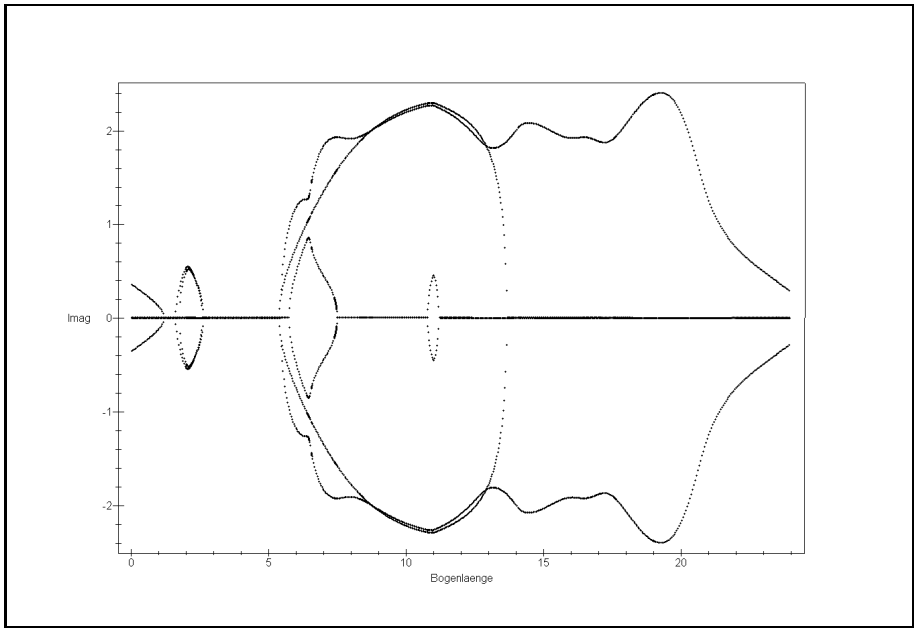

Abbildung 7.2.7: Imaginärteil der Eigenwerte

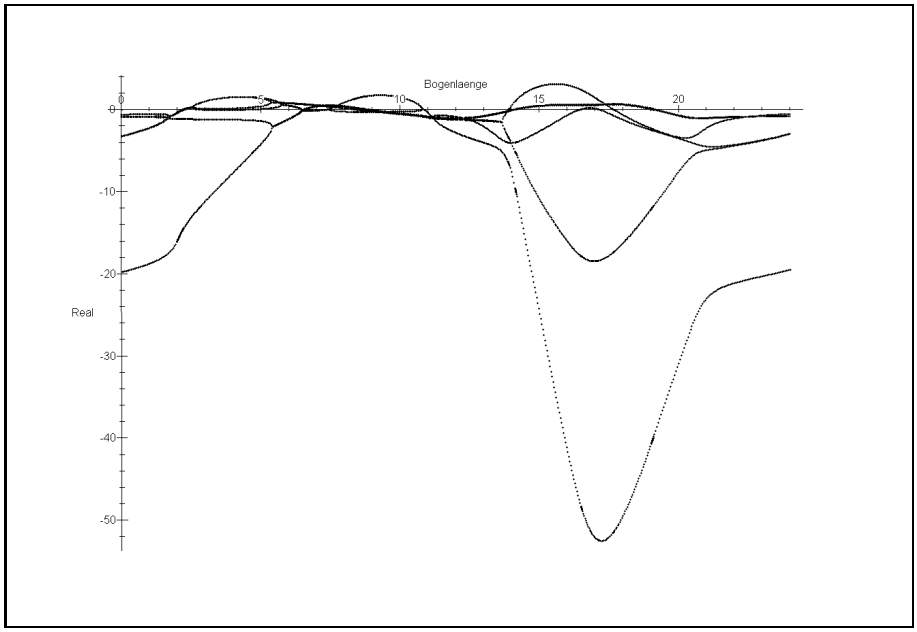

Abbildung 7.2.8: Realteil der Eigenwerte

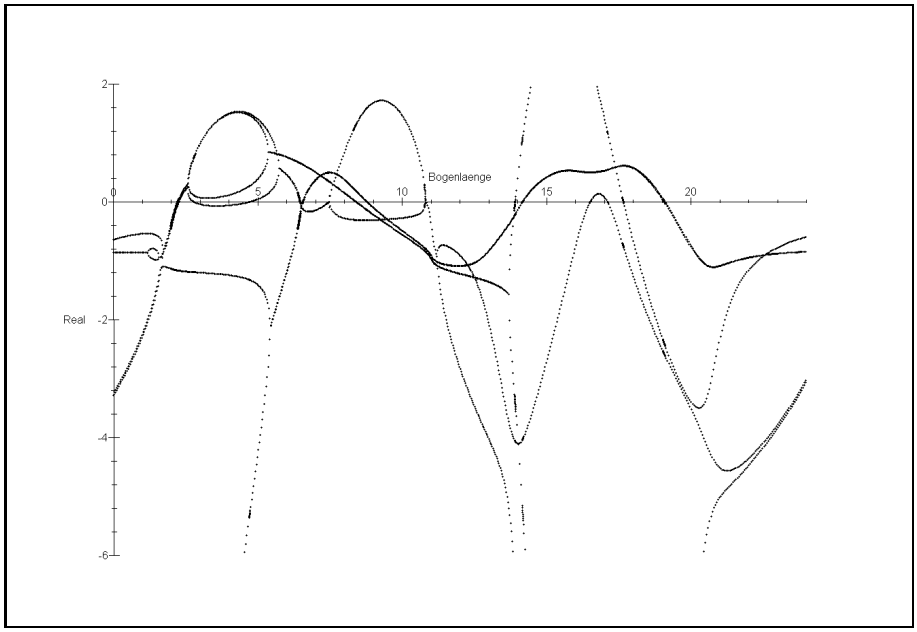

Abbildung 7.2.9: Realteil der Eigenwerte (Ausschnitt)

7.2.2 Anwendung auf eine partielle Differentialgleichung

Zur Untersuchung der Rechenzeiten der Eigenwertberechnung im Rahmen des Pfadverfolgungsalgorithmus 7.2.1 wird folgende partielle Differentialgleichung betrachtet:

$$G(u,\lambda,d) := \begin{pmatrix} \Delta u_1 + \lambda f_1(u_1,u_2) \\ d\Delta u_2 + \lambda f_2(u_1,u_2) \end{pmatrix} = 0 \tag{7.2.7}$$

mit $\lambda, d \in \mathbb{R},\ d \neq 0, u = (u_1,u_2) \in X$ und $G : X \times \mathbb{R}^2 \to Y$ mit:

$$X = \{u = (u_1,u_2) \ :\ u_i \in C^{2,s}(\Omega),\ u_i|_{\partial\Omega} = 0,\ i = 1,2\}, \tag{7.2.8}$$

$$Y = \{u = (u_1,u_2) \ :\ u_i \in C^{0,s}(\Omega),\ i = 1,2\} \tag{7.2.9}$$

und $\Omega = (0,1)^2$. Für die Funktion f wird hier speziell gewählt:

$$f(u) = \begin{pmatrix} u_1 + u_2 - u_1^3 \\ -u_1 + au_2 - u_1^2 u_2 \end{pmatrix}, \quad a > 0. \tag{7.2.10}$$

Die Abbildung G wird mit der gewöhnlichen 5-Punkte-Stern-Diskretisierung Δ^h für den Laplace-Operator auf einem äquidistanten Gitter $\Omega^h \subset \Omega$ mit Schrittweite $h = \frac{1}{N}$, $N = 51$ diskretisiert. Die Parameter a und d werden bei $a = 3.966192$ und $d = 1.081298$ fixiert, während λ als Verzweigungsparameter dienen soll.

Da hier die Analyse der Rechenzeiten der Eigenwertberechnung im Vordergrund stehen soll, sei zur allgemeinen Betrachtung von (7.2.7) auf [Mur89] und zu Fragen des Verzweigungsverhaltens auf [Seb95] verwiesen.

Als Startpunkt für die Pfadverfolgung wurde $(u,\lambda) = (0,0)$ gewählt und lediglich die triviale Lösungskurve für $\lambda = 0 \ldots 50$ berechnet. Diese Einschränkung erlaubt es, einen besseren Überblick über die Ergebnisse zu erhalten, da hier in jedem singulären Punkt Eigenwerte von der linken Seite auf die rechte Seite der imaginären Achse wandern und das Anpassungsverhalten des Algorithmus daran gut studiert werden kann.

Die Ergebnisse von Algorithmus 7.2.1 sind in Tabelle 7.2.2 zusammengefaßt. Da die Testfunktion τ nach jeder Singularität in Schritt 2 und 3 des Fortsetzungsalgorithmus neu gestartet wird, müssen sich nicht notwendigerweise '$+-$' und '$-+$' Nulldurchgänge abwechseln. Im vorliegenden Fall treten bis auf eine Singularität nur '$+-$'-Durchgänge auf. Desweiteren geht aus der Tabelle hervor, daß sich jeweils eine Hopf-Verzweigung mit zwei klassischen Verzweigungen abwechselt. Dieses Verhalten läßt sich auch in Bild 7.2.10,

Seite 216, und in dem Ausschnittsbild 7.2.11, Seite 216, wiederfinden. Zur Singularität Nr. 1 gehört ein konjugiert komplexes Paar, welches sich danach zu zwei reellen Eigenwerten aufspaltet, von denen einer kurz darauf zweimal die reelle Achse durchläuft. Dieses Verhalten findet mehrmals hintereinander statt wobei durch die vorhandene Symmetrie auch zweifache Eigenwerte bzw. Eigenwertpaare auftreten (siehe Nr. 4,5,6,10,11). In Bild 7.2.12, Seite 218, sind die dazugehörigen Imaginärteile der Eigenwerte dargestellt.

Tabelle 7.2.2: Singuläre Punkte

Nr.	λ	Kritische Eigenwerte	Art	Vorzeichenwechsel der Testfunktion
1	9.956	$-0.00397 \pm 1.707i$	Hopf	+–
2	10.005	$-5.7409 \cdot 10^{-7}$	Verzweigung	+–
3	10.874	$-4.16411 \cdot 10^{-7}$	Verzweigung	+–
4	23.881	$-0.00132 \pm 4.256i$ (zweifach)	Hopf	+–
5	24.994	-0.00146 (zweifach)	Verzweigung	+–
6	27.194	0.019762 (zweifach)	Verzweigung	–+
7	38.206	$0.004 \pm 6.802i$	Hopf	+–
8	39.983	$-5.625 \cdot 10^{-9}$	Verzweigung	+–
9	43.454	$-6.973 \cdot 10^{-8}$	Verzweigung	+–
10	47.691	-0.00117 ± 8.498 (zweifach)	Hopf	+–
11	49.913	-0.00211 (zweifach)	Verzweigung	+–

Die auftretenden Lücken in den Eigenwertkurven mit kleinerem Realteil sind dadurch begründet, daß die Anzahl der berechneten Eigenwerte während der Pfadverfolgung schwankt. Dies ist auf die Wahl der Krylov-Dimension zurückzuführen. Diese Dimension wird immer größer als die erforderliche Mindestanzahl von zu berechnenden Eigenwerten gewählt, siehe Abschnitt 6.3.4. Wieviele Eigenwerte in diesem Bereich konvergieren, hängt von der aktuellen Eigenwertverteilung ab.

In Bild 7.2.13, Seite 218, sind die Zeiten in Sekunden aufgetragen, die der Algorithmus

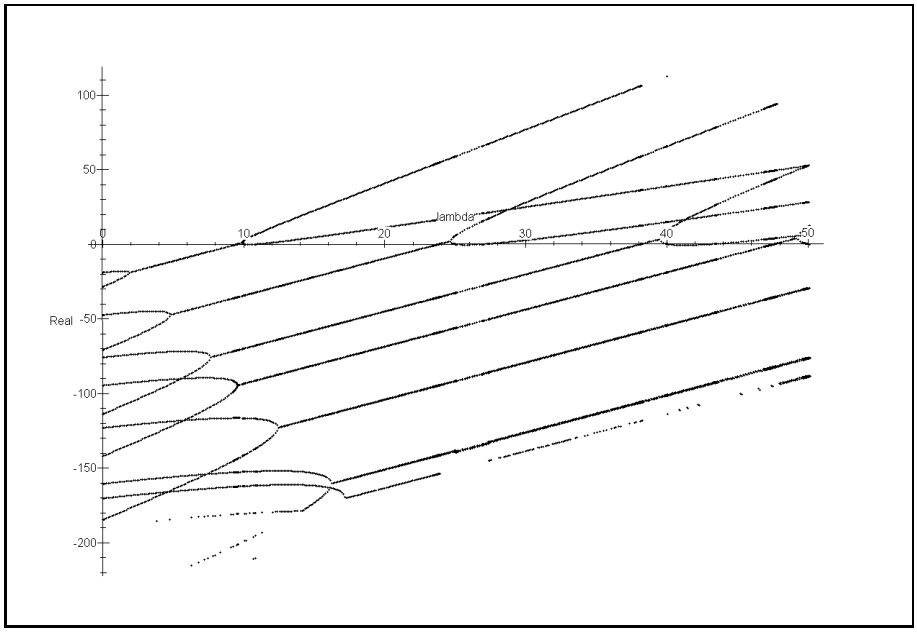

Abbildung 7.2.10: Realteil der Eigenwerte

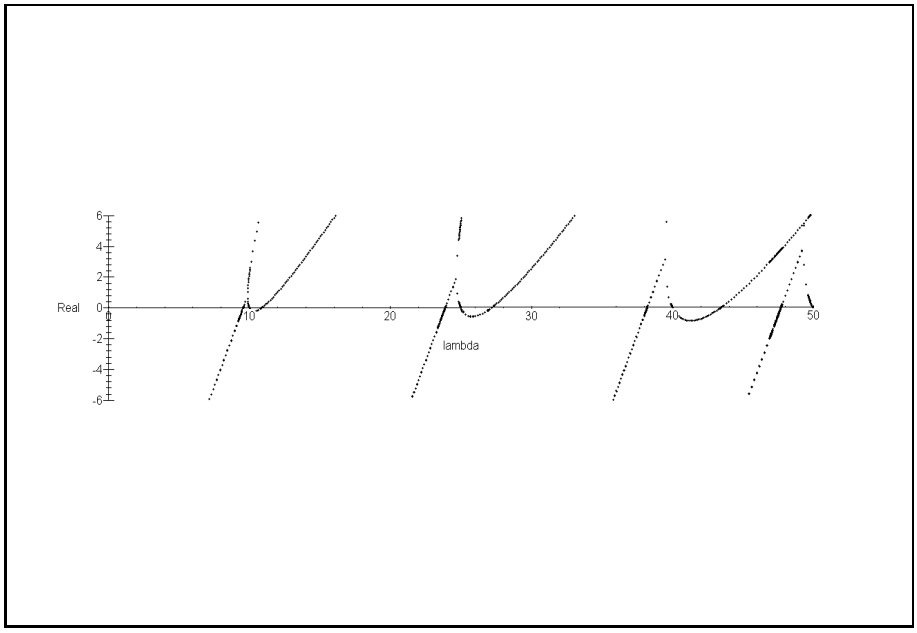

Abbildung 7.2.11: Realteil der Eigenwerte (Ausschnitt)

für die Berechnung der Eigenwerte für die jeweiligen λ-Werte brauchte. Die obere Linie gibt dabei an, welche Krylov-Dimension gewählt wurde. Obwohl die absoluten Zeiten rechnerabhängig sind, ist doch deutlich zu erkennen, daß die Zeiten auch bei steigender Krylov-Dimension im wesentlichen konstant bleiben. Dies ist eine allgemeine Eigenschaft der Iterationsverfahren für Eigenwerte, wie sie in Kapitel 6 vorgestellt wurden. Der ausschlaggebende Faktor für den Rechenaufwand ist die Trennung, die durch das Präkonditionierungspolynom erreicht wird. Ist diese Trennung besonders gut, so tritt der Aufwand für eine hohe Krylov-Dimension in den Hintergrund, da in diesem Fall nur wenige Iterationen notwendig sind.

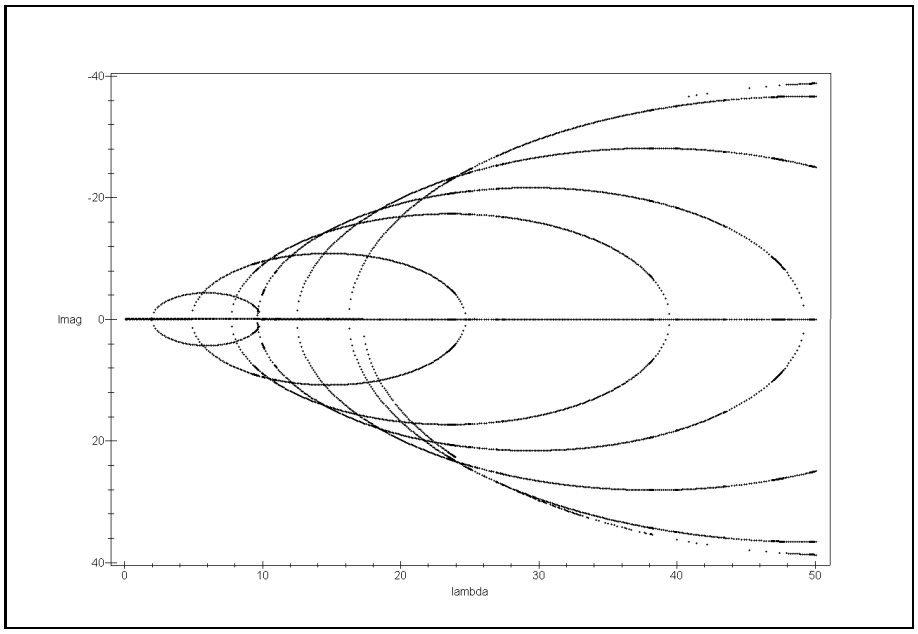

Abbildung 7.2.12: Imaginärteil der Eigenwerte

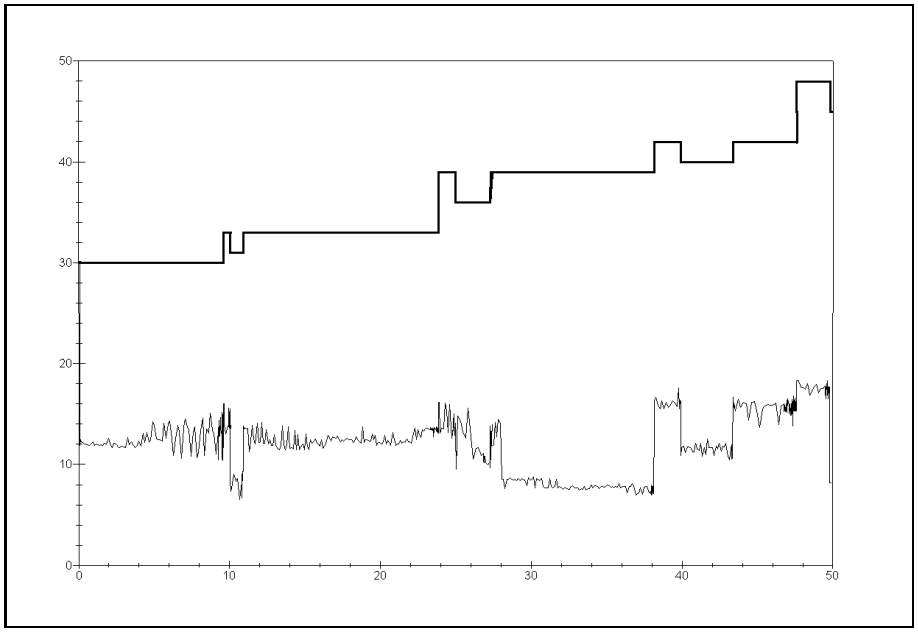

Abbildung 7.2.13: Rechenzeit für Eigenwerte in Sekunden (dünne Linie)
Krylovdimension (dicke Linie)

Ausblick

In dieser Arbeit wurden Techniken entwickelt, die es ermöglichen, singuläre Punkte bei partiellen Differentialgleichungen zu entdecken und zu analysieren. Zur Berechnung der in diesem Zusammenhang wertvollen Eigenwert-Informationen wurden ebenfalls neue Techniken vorgestellt. Für zukünftige Weiterentwicklungen ergeben sich unter anderen die folgenden Ansätze:

Die Skalierungstechniken sollten auf verschiedene Arten von Differentialgleichungen angewandt und erprobt werden. Insbesondere sollten dabei die Diskretisierungsverfahren diskutiert werden, ohne die eine Übertragung der analytischen Überlegungen dieser Arbeit auf diskretisierte Probleme nicht möglich ist.

Die Approximationen der abzweigenden Lösungskurven, die mit Hilfe der Algorithmen dieser Arbeit in singulären wie in regulären Lösungspunkten berechnet werden können, sollten im Rahmen einer 'verallgemeinerten Pfadverfolgung' diskutiert werden, die auch in singulären Punkten sinnvolle Ergebnisse liefert.

Die Testfunktion aus Kapitel 7.1 und deren Ausnutzung bei der Pfadverfolgung und gleichzeitigen Erkennung von Singularitäten könnte evtl. durch andere Extrapolationsmethoden verbessert werden. Ebenso wäre es interessant, Modifikationen der Testfunktion zu untersuchen.

Im Zusammenhang mit der Berechnung der Eigen-Information sind noch viele Möglichkeiten offen. Speziell in Kapitel 6.3.3 kann die Wahl einer geeigneten Grenze für die Trennung der interessanten von den uninteressanten Eigenwerten noch modifiziert werden. Algorithmus 6.3.14, Seite 174, stellt hier nur eine erste Möglichkeit dar.

Im Zusammenhang mit partiellen Differentialgleichungen wäre es sinnvoll, die aus der Eigenwertberechnung gewonnenen Informationen in allen Bereichen einer Pfadverfolgung einzusetzen. Speziell die auftretenden linearen Gleichungssysteme könnten mit Hilfe dieser Informationen effizienter gelöst werden. Etwa ließe sich die Kenntniss eines invarianten Unterraumes in Iterationsverfahren wie GMRES einbauen.

Bei der IRA-Iteration nach Sorenson können neue Deflationstechniken eingebaut werden (siehe [LS96]). Im Rahmen der Pfadverfolgung ist hier jedoch der Einsatz der Informationen des letzten Kurvenpunktes als Approximation im neuen Punkt zu überdenken, da im allgemeinen keine Krylovräume, sondern Summen von Krylovräumen berechnet werden.

Für Matrizen mit großen Henrici-Zahlen, insbesondere stark nichtnormale Matrizen, müßten gesonderte Untersuchungen durchgeführt werden, da hier die Approximationseigenschaft der Ritz-Werte an die Eigenwerte immer schlechter wird. Evtl. müßten dann die Parameter in den Algorithmen aus Kapitel 6 geeignet modifiziert werden (etwa größere Krylov-Dimensionen).

Eine Parallelisierung der Algorithmen aus Kapitel 6 wäre sinnvoll, da der Aufwand im wesentlichen durch die Matrix-Vektor und Vektor-Vektor Operationen bestimmt wird. Hier ist es von entscheidender Bedeutung, die Vektorstrukturen in geeigneter Weise auf die vorhandenen Prozessoren abzubilden, um den resultierenden Kommunikationsaufwand möglichst gering zu halten.

Die Untersuchung von polynomiellen Eigenwertproblemen mit Krylov-Techniken bzw. Unterraum-Techniken wäre eine logische Weiterentwicklung. Insbesondere ist hier das verallgemeinerte Eigenwertproblem im Zusammenhang mit Finite Elemente Methoden von Interesse. Ein möglicher Ansatz dazu findet sich in [SBFvdV95].

Anhang A

Gestalt der Komponenten von F

Hier soll kurz dargestellt werden, wie die Terme der verschiedenen Ordnungen $\hat{T}_j$ aus Kapitel 5 im allgemeinen aussehen[1]. Zwar können (und sollten) diese mit einem Computer-Algebra Paket berechnet werden, da sie sehr komplex sind, jedoch ist die Kenntnis der allgemeinen Form bei deren Betrachtung hilfreich. Es ergibt sich mit den Bezeichnungen aus Kapitel 5.2 für $n = 1$:

$$
\begin{aligned}
& F(z(t), \lambda(t)) \\
&= F(z_0, \lambda_0) + \\
&\quad t\,[DF^0(w_1, \lambda_1)] + \\
&\quad t^2\left[DF^0(w_2, \lambda_2) + \tfrac{1}{2}D^2F^0(w_1 + \alpha_1\phi, \lambda_1)^2\right] + \\
&\quad t^3\left[DF^0(w_3, \lambda_3) + D^2F^0(w_1 + \alpha_1\phi, \lambda_1)^2(w_2 + \alpha_2\phi, \lambda_2) + \tfrac{1}{6}D^3F^0(w_1 + \alpha_1\phi, \lambda_1)^3\right] + \\
&\quad t^4\left[DF^0(w_4, \lambda_4) + D^2F^0(w_1 + \alpha_1\phi, \lambda_1)(w_3 + \alpha_3\phi, \lambda_3) + \tfrac{1}{2}D^2F^0(w_2 + \alpha_2\phi, \lambda_2)^2 + \right. \\
&\qquad \left.\tfrac{1}{2}D^3F^0(w_1 + \alpha_1\phi, \lambda_1)^2(w_2 + \alpha_2\phi, \lambda_2) + \tfrac{1}{24}D^4F^0(w_1 + \alpha_1\phi, \lambda_1)^4\right] + \\
&\quad t^5\,[DF^0(w_5, \lambda_5) + \\
&\qquad D^2F^0(w_1 + \alpha_1\phi, \lambda_1)(w_4 + \alpha_4\phi, \lambda_4) + D^2F^0(w_2 + \alpha_2\phi, \lambda_2)(w_3 + \alpha_3\phi, \lambda_3) + \\
&\qquad \tfrac{1}{2}D^3F^0(w_1 + \alpha_1\phi, \lambda_1)(w_2 + \alpha_2\phi, \lambda_2)^2 + \tfrac{1}{2}D^3F^0(w_1 + \alpha_1\phi, \lambda_1)^2(w_3 + \alpha_3\phi, \lambda_3) + \\
&\qquad \tfrac{1}{6}D^4F^0(w_1 + \alpha_1\phi, \lambda_1)^3(w_2 + \alpha_2\phi, \lambda_2) + \tfrac{1}{120}D^5F^0(w_1 + \alpha_1\phi, \lambda_1)^5\big] + \sum_{i=6}^{\infty} t^i\hat{T}_i
\end{aligned}
$$

Und weiter gilt

[1] Dies waren die Komponenten von F der Ordnung j bzgl. t, siehe (5.2.6), Seite 113

$$\hat{T}_i = DF^0(w_i, \lambda_i) + \sum_{\substack{p,n,l_j \in \mathbb{N} \\ p=2,\ldots,i \\ \sum_{j=1}^n l_j = p,\ l_j < p \\ \sum_{j=1}^n j l_j = i}} \frac{1}{\prod_{j=1}^n l_j!} D^p F^0 \prod_{\mu=1}^n (w_\mu + \alpha_\mu \phi, \lambda_\mu)^{l_\mu}. \qquad \text{(A.1)}$$

Für $n \geq 1$ muß $\alpha_i \phi$ durch $\sum_{\nu=1}^n (\alpha_\mu^{(\nu)} \phi_\nu)$ ersetzt werden (siehe (5.2.1)), also:

$$\hat{T}_i = DF^0(w_i, \lambda_i) + \sum_{\substack{p,n,l_j \in \mathbb{N} \\ p=2,\ldots,i \\ \sum_{j=1}^n l_j = p,\ l_j < p \\ \sum_{j=1}^n j l_j = i}} \frac{1}{\prod_{j=1}^n l_j!} D^p F^0 \prod_{\mu=1}^n (w_\mu + \sum_{\nu=1}^n (\alpha_\mu^{(\nu)} \phi_\nu), \lambda_\mu)^{l_\mu}. \qquad \text{(A.2)}$$

Anhang B

Automatische Analyse mit MAPLE

In diesem Anhang wird ein Maple[1]-Programm vorgestellt, das Algorithmus 4.2.1, Seite 103, umsetzt und dadurch die prinzipielle Umsetzbarkeit der Skalierungsalgorithmen unter Beweis stellt. Das Programm berechnet rekursiv alle abzweigenden Lösungskurven. Dazu werden bei jeder Ordnungsstufe j die Lösungen von T_j berechnet. Ist eine Lösung λ-bestimmt, so wird die Approximation zu der entsprechenden Lösungskurve ausgegeben. Ist eine Lösung nicht λ-bestimmt, so wird für diese Lösung zur nächsthöheren Ordnung übergegangen. Dieses Schema ist im Folgenden noch einmal dargestellt:

Zu Anfang sei $ordnung = 1$ und $bekannte_werte = \{\}$:

bestimme(F,$ordnung$,$bekannte_werte$)
BEGIN
  Berechne T_j und die Lösungsmenge L_j
  FOR i FROM 1 to $\#(L_j)$ DO
    IF $L_j[i]$ λ-bestimmt THEN
      geben Lösung an
    ELSE
      bestimme(F,$ordnung + 1$,$bekannte_werte \cup L_j[i]$)
    END
END

Zur Demonstration werden die folgenden Beispiele durchgerechnet:

[1] 'Maple' und 'Maple V' sind eingetragene Warenzeichen von Waterloo Maple Software

Beispiel 1: Umkehrpunkt:

$$f(z,\lambda) = z^2 - \lambda \tag{B.1}$$

Die gesuchten Lösungen werden wie folgt parametrisiert:

$$z(t) := \sum_{j=1}^{\infty} z_j t^j \tag{B.2}$$

$$\lambda(t) := \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j t^j \tag{B.3}$$

$$\tag{B.4}$$

Beispiel 2: Transkritische Verzweigung :

$$f(z,\lambda) = z^2 - \lambda z \tag{B.5}$$

Die gesuchten Lösungen werden wie in Beispiel 1 parametrisiert.

Beispiel 3: Pitchfork Verzweigung:

$$f(z,\lambda) = z^3 - \lambda z \tag{B.6}$$

In diesem Beispiel werden 3 Lösungen gefunden. Zwei davon stimmen jedoch überein, denn es sind nur verschiedene Parametrisierungen eines Lösungszweiges, in diesem Fall der trivialen Lösung. Die gesuchten Lösungen werden wie in Beispiel 1 parametrisiert.

Beispiel 4: Kuspe:

$$f(z,\lambda) = z^3 - \lambda^2 \tag{B.7}$$

Die gesuchten Lösungen werden wie in Beispiel 1 parametrisiert.

Beispiel 5: Eine zur Kuspe äquivalente Singularität:

$$f(z,\lambda) = (z-\lambda)(z-2\lambda)(z-3\lambda) - \lambda^2 \tag{B.8}$$

Die gesuchten Lösungen werden wie in Beispiel 1 parametrisiert.

Beispiel 6: Bei dieser Singularität tangieren sich zwei Kurven:

$$f(z,\lambda) = (z-\lambda)^2 - \lambda^4 \tag{B.9}$$

Die gesuchten Lösungen werden wie in Beispiel 1 parametrisiert.

Beispiel 7: Multiple Verzweigung :

$$f(z,\lambda) = (z-\lambda)(z-2\lambda)(z-3\lambda)(z-4\lambda)(z-5\lambda) \tag{B.10}$$

Die gesuchten Lösungen werden wie in Beispiel 1 parametrisiert.

Beispiel 8: Eine 7-bestimmte Singularität, in der sich 3 Kurven kreuzen:

$$f(z,\lambda) = z^7 + z^4\lambda + z^2\lambda^3 + z\lambda^5 + \lambda^6 \tag{B.11}$$

Die gesuchten Lösungen werden wie in Beispiel 1 parametrisiert.

Beispiel 9: Eine 3-bestimmte Singularität mit 2 Zustandsvariablen:

$$f(z_1,z_2,\lambda) = \begin{bmatrix} z_1^2\lambda - z_2^2 \\ z_1^2 - z_2^2 - \lambda \end{bmatrix} \tag{B.12}$$

Die gesuchten Lösungen werden wie folgt parametrisiert:

$$z_1(t) := \sum_{j=1}^{\infty} z_{1_j} t^j \tag{B.13}$$

$$z_2(t) := \sum_{j=1}^{\infty} z_{2_j} t^j \tag{B.14}$$

$$\lambda(t) := \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j t^j \tag{B.15}$$

$$\tag{B.16}$$

Beispiel 10: Eine 5-bestimmte Singularität mit 2 Zustandsvariablen und D_6-Symmetrie in (z_1, z_2):

$$f(z_1,z_2,\lambda) =$$

$$f(z_1, z_2, \lambda) =$$
$$\left[\begin{array}{r} (\lambda + (\lambda + l2)k\, z_1^2 + (\lambda + l2)k\, z_2^2 - 3\, l2^2\, k2(z_1^2 - z_2^2)^2 - 12\, l2^2\, k2\, z_1^2\, z_2^2)\, z_1 \\ -3l2^2\theta(z_1^5 - 10z_1^3 z_2^2 + 5z_1 z_2^4) \\ \\ (\lambda + (\lambda + l2)k\, z_1^2 + (\lambda + l2)k\, z_2^2 - 3\, l2^2\, k2(z_1^2 - z_2^2)^2 - 12\, l2^2\, k2\, z_1^2\, z_2^2)\, z_2 \\ -3l2^2\theta(-5z_1^4 z_2 + 10z_1^2 z_2^3 - z_2^5) \end{array}\right] \tag{B.17}$$

Bei dieser Singularität sind $k, k2, l2, \theta$ feste Parameter. Die gesuchten Lösungen werden wie in Beispiel 9 parametrisiert.

Beispiel 11: Eine 3-bestimmte Singularität mit 2 Zustandsvariablen:

$$f(z_1, z_2, \lambda) = \left[\begin{array}{c} (\sigma\lambda + \epsilon z_1)z_1 + (\alpha + \delta z_1 + b z_2)z_2 \\ \\ (\sigma\lambda + \epsilon z_1)z_2 + \frac{5}{49}\frac{(\alpha + \delta z_1 + b z_2)}{\pi} z_1^2 \end{array}\right] \tag{B.18}$$

Bei dieser Singularität sind $b, \alpha, \epsilon, \sigma, \delta$ feste Parameter. Die gesuchten Lösungen werden wie in Beispiel 9 parametrisiert.

Allgemeine Hinweise zur Benutzung:

Der Funktionskeim F wird als Feld definiert und übergeben. Alle zusätzlichen Parameter, die in F vorkommen, werden in der globalen Mengenvariable '`feste_parameter`' gespeichert. Die Zustandsvariablen müssen in dem globalen Feld 'zv' gespeichert werden. Die Variable 'λ' ist immer der Verzweigungsparameter. Die Lösungen werden unnormiert ausgegeben, d.h. es wird z.B. die triviale Lösung als $[0, \lambda_j t]$ und nicht als $[0, \pm t]$ oder $[0, t]$ dargestellt. Dies gibt dem Benutzer die Möglichkeit, eigene Normierungen zu verwenden.

Maple V / Release 3 - Prozedurbeschreibungen:

Die deutschen Buchstaben ä, ü, ö, Ä, Ö, Ü sind aus programmtechnischen Gründen durch ae, ue, oe, Ae, Oe, Ue ersetzt worden. Ebenso sind die überflüssigen Kommas und Punkte zwischen Formeln und Textteilen in der Ausgabe auf Maple zurückzuführen. Hier ist es nicht möglich, Strings und mathematische Ausdrücke ohne Punkte oder Kommas getrennt auszugeben.

```
> with(linalg):readlib(coeftayl):with(plots):
```

Berechnung des Faktors der Ordnung 'grad' eines Keims 'F'.

```
> getfaktor := proc(F,grad)
>   local Fs,i,lgrad;
>   global known;
>   Fs := F;
>   for i from 1 to vectdim(zv) do
>     for lgrad from 1 to grad while hastype(map(lhs,know
> n),zv[i][lgrad]) do od;
> #    print(‘Entwickle bis ‘,i,‘-te Komponente bis zum Gr
> ad‘,lgrad);
>     Fs := subs(zv[i] = sum(zv[i][j]*t^j,j=1..lgrad),Fs);
>   od;
>   for lgrad from 1 to grad while hastype(map(lhs,known
> ),l[lgrad]) do od;
> #  print(‘Entwickle bis ‘,lambda,‘-te Komponente bis zu
> m Grad‘,lgrad);
>   Fs := subs(lambda = sum(l[j]*t^j,j=1..lgrad),Fs);
>   for i from 1 to nops(known) do
>     Fs := subs(known[i],Fs);
>   od;
>   RETURN(coeftayl(Fs,t=0,grad));
> end:
```

'Jac' berechnet die Jacobi-Matrix des Vektorfeldes 'Feld' bzgl. der Variablen 'Loes'.

```
> Jac := proc(Feld,Loes)
>   local unbek,i,lgrad;
>   global known;
>   unbek:=[];
>   for i from 1 to vectdim(zv) do
>     for lgrad from 1 to 200 while hastype(map(lhs,known
```

```
> ),zv[i][lgrad]) do od;
>     unbek := [op(unbek),zv[i][lgrad]];
>   od;
>   RETURN(subs(Loes,jacobian(Feld,convert(unbek,list)
> )));
> end:
```

'updateknown' fuegt die neuen Bedingungen fuer die Taylorkoeffizienten der Loesungen zu den schon bekannten Bedingungen hinzu.

```
> updateknown := proc(neu)
>   local i;
>   global known;
>   for i from 1 to nops(neu) do
>     if (lhs(neu[i]) <> rhs(neu[i])) then known := [op(know
> n),neu[i]]; fi;
>   od;
> end:
```

'subloesung' ueberprueft, ob die erkannte Loesung 'erg2' schon in 'erg1' enthalten ist.

```
> subloesung := proc(erg1,erg2)
>   local i,serg;
>   serg := {};
>   for i from 1 to nops(erg2) do
>     serg := serg union {lhs(erg2[i])=subs(erg1,rhs(erg2[i
> ]))};
>   od;
>   RETURN(erg1 = serg);
> end:
```

'get-mom-ind' bestimmt den maximal vorkommenden Polynomgrad in den bekannten Loesungen.

```
> get_mom_ind := proc(grad)
>   local erg,i,lgrad;
>   global known;
>   erg := [];lgrad:='lgrad';
>   for i from 1 to vectdim(zv) do
>     for lgrad from 1 to grad while hastype(map(lhs,know
> n),zv[i][lgrad]) do od;
>     erg := [op(erg),zv[i][lgrad]];
>   od;
```

```
>   for lgrad from 1 to grad while hastype(map(lhs,known
> ),l[lgrad]) do od;
>   erg := [op(erg),l[lgrad]];
>   RETURN(erg);
> end:
```

'main' berechnet die Bestimmtheit und die Loesungen eines Keimes!

********** **********

F : Der Keim. Liste aus Gleichungen.

grad : Bei 'grad' wird die Analyse begonnen. Typischerweise = 1.

maxgrad : Bis 'maxgrad' wird die Analyse maximal durchgefuehrt.

zeige-unbestimmte : true = Auch bei Unbestimmtheit werden die Werte angezeigt.

teste-subloesung : true = Bestimmung, ob eine Loesung schon in einer anderen steckt.

best-komplex : true = auch komplexe Loesungen werden bestimmt.

zeige-gleichung : true = Jede Gleichung wird ausgegeben.

********** **********

```
> main := proc(F,grad,maxgrad,zeige_unbestimmte,teste
> _subloesung,best_komplex,zeige_gleichung)
>   local i,j,k,erg,Tj,Tjs,ind,deter,oldknown,maxcalcgrad,s
> ubl,lgrad,Faktoren,Loesung,t1,mom_ind,d1;
>   global known,Loesungen,leave;
>   maxcalcgrad := grad;
>   if (grad <= maxgrad) then
>     leave := leave+1; printf(`Rechnung Nr. %d`,leave);
>     print(`<<<<<<<<<<<<< Momentane Ordnung `.grad.`
>  >>>>>>>>>>>>>`);
>     Tj:=getfaktor(F,grad);
>     Tjs:=convert(evalm(Tj),set);
>     ind:=indets(Tj) minus feste_parameter;
>     mom_ind := get_mom_ind(grad);
>     if zeige_gleichung then print(T[grad](op(mom_ind)),`
> :=`,Tjs=0); fi;
>     erg:=[solve(Tjs,ind)];
>     erg:=[allvalues(erg,'d')];
>     erg := convert({seq(seq(erg[k][i],i=1..nops(erg[k])),k
```

```
> =1..nops(erg))},list);
>     if (erg = [{}]) then
>       print(‘Weiter bei Rechung Nr. ‘,leave+1,‘mit ‘,get_
> mom_ind(grad));
>       maxcalcgrad := main(F,grad+1,maxgrad,zeige_unb
> estimmte,teste_subloesung,best_komplex,zeige_gleich
> ung)
>     else
>       for i from 1 to nops(erg) do
>         d1:=nops(erg):print(‘+++  Untersuche Loesung Nr
> . ‘.i.‘ von ‘.d1.‘ der Ordnung ‘.grad.‘ +++‘);
>         if (best_komplex) or (not hastype(erg[i],(-1)^(1/2))
> ) then
>           subl := false;
>           for k from 1 to nops(erg) do
>             if  teste_subloesung and (i<>k) and (subloesun
> g(erg[i],erg[k])) then
>               subl := true;
>               print(erg[i],‘ist Subloesung von ‘,erg[k]);
>             fi;
>           od;
>           if (not subl) then
>             deter := det(Jac(evalm(Tj),erg[i]));
>             for lgrad from 1 to grad while hastype(map(lhs,
> known),l[lgrad]) do od;
>             if (deter = 0) or (hastype(erg[i],l[lgrad]=0)) then
>               if zeige_unbestimmte then
>                 print(‘Die Loesung lautet: ‘,erg[i]);
>                 if known <> [] then print(‘Bekannte Werte = ‘
> .known); fi;
>                 if (hastype(erg[i],l[lgrad]=0)) and (deter = 0) t
> hen
>                   print(‘Determinante = ‘.deter.‘ und ‘,l[lgrad]
> =0);
>                 elif (deter <> 0) then
>                   print(‘Fuer diese Loesung gilt ‘,l[lgrad]=0);
>                 else
>                   print(‘Determinante = ‘.deter);
>                 fi;
>                 print(‘NNNNNNNNNNN Diese Loesung ist nic
> ht bestimmt NNNNNNNNNNNNN‘);
```

```
>               fi;
>               oldknown := known;
>               updateknown(erg[i]);
>               print(‘Weiter bei Rechnung Nr. ‘,leave+1,‘mit
> den Unbekannten ‘,get_mom_ind(grad));
>               maxcalcgrad := main(F,grad+1,maxgrad,zeige
> _unbestimmte,teste_subloesung,best_komplex,zeige_g
> leichung);
>               known := oldknown;
>             else
>               print(‘Die Loesung lautet: ‘,erg[i]);
>               print(‘Bekannte Werte = ‘.known);
>               print(‘Determinante = ‘.deter);
>               print(‘BBBBBBBBBBB Diese Loesung ist best
> immt BBBBBBBBBBBBB‘);
>               print(‘Die Taylorkoeffizienten lauten:‘);
>               Faktoren := erg[i] union convert(known,set);
>               print(‘Faktoren = ‘.Faktoren);
>               print(‘Die Loesungskurve lautet:‘);
>               Loesung := [];
>               for  k from 1 to vectdim(zv) do
>                 for lgrad from 1 to grad
>                     while ({zv[k][lgrad]} intersect convert(map
> (lhs,Faktoren),set))  = {zv[k][lgrad]} do
>                 od;
>                 Loesung := [op(Loesung),zv[k]=subs(Faktor
> en,subs(Faktoren,sum(zv[k][r]*t^r,r=1..lgrad-1)))];
>                 d1:=t^lgrad:print(Loesung[k],‘+O‘.d1);
>               od;
>               for lgrad from 1 to grad while ({l[lgrad]} inters
> ect convert(map(lhs,Faktoren),set))  = {l[lgrad]} do od;
>               Loesung := [op(Loesung),lambda=subs(Fakto
> ren,subs(Faktoren,sum(l[r]*t^r,r=1..lgrad-1)))];
>               d1:=t^lgrad:print(Loesung[nops(Loesung)],‘+
> O‘.d1);
>               print(‘Test durch Einsetzen in F und Taylorent
> w. bis zum Grad ‘.grad.‘ bzgl. t‘.‘ ergibt:‘);
>               print(map(taylor,subs(convert(Loesung,set),F
> ),t,grad+1));
>               Loesungen := [op(Loesungen),Loesung];
>             fi;
```

```
>           fi;
>         else
>            print(‘Komplexe Loesung : ‘,erg[i]);
>         fi;
>       od;
>     fi;
>   else
>     print(‘HHHHHHHHHHHH  Hoechste Stufe erreicht HH
> HHHHHHHHHHH‘);
>   fi;
>   RETURN(min(maxcalcgrad,maxgrad));
> end:
```

'bestimme' initialisiert die globalen Variablen 'known','Loesungen' und 'leave' und führt 'go' aus.

```
> bestimme := proc(F,grad,maxgrad,zeige_unbestimmte,t
> este_subloesung,best_komplex,zeige_gleichung)
>   local maxg;
>   global known,Loesungen,leave;
>   known:=[]; Loesungen:=[]; leave:=0;
>   maxg := main(F,grad,maxgrad,zeige_unbestimmte,tes
> te_subloesung,best_komplex,zeige_gleichung);
>   print(‘Hoechste angewandte Ordnung = ‘.maxg);
> end:
```

———— Ende des Programmteils / Beginn der Beispiele————

2-bestimmtes Beispiel (Umkehrpunkt)

****

```
> zv:=[z];
> F := eval([zv[1]^2-lambda]);
> feste_parameter := {};
```

$$zv := [\, z \,]$$

$$F := [\, z^2 - \lambda \,]$$

$$feste_parameter := \{\ \}$$

```
> bestimme(F,1,3,true,true,false,true);
> print('Die Loesungen lauten',Loesungen);
Rechnung Nr. 1
```

$$<<<<<<<<<<<<<\ \textit{Momentane Ordnung 1}\ >>>>>>>>>>>>>$$

$$T_1\,(z_1, l_1)\,, :=, \{-l_1\} = 0$$

$$+++\ \textit{Untersuche Loesung Nr. 1 von 1 der Ordnung 1}\ +++$$

$$\textit{Die Loesung lautet}\ :\,, \{l_1 = 0\}$$

$$\textit{Determinante}\ =\ 0\ \textit{und}\ , l_1 = 0$$

$$\textit{NNNNNNNNNN Diese Loesung ist nicht bestimmt NNNNNNNNNNN}$$

$$\textit{Weiter bei Rechnung Nr.}\ , 2, \textit{mit den Unbekannten}\ , [z_1, l_2]$$

```
Rechnung Nr. 2
```

$$<<<<<<<<<<<<<\ \textit{Momentane Ordnung 2}\ >>>>>>>>>>>>>$$

$$T_2\,(z_1, l_2)\,, :=, \left\{{z_1}^2 - l_2\right\} = 0$$

$$+++\ \textit{Untersuche Loesung Nr. 1 von 1 der Ordnung 2}\ +++$$

$$\textit{Die Loesung lautet}\ :\,, \left\{l_2 = {z_1}^2, z_1 = z_1\right\}$$

$$\textit{Bekannte Werte}\ =.\,[l_1 = 0]$$

$$\textit{Determinante}\ =.\,(2\,z_1)$$

$$\textit{BBBBBBBBBBB Diese Loesung ist bestimmt BBBBBBBBBBBBB}$$

$$\textit{Die Taylorkoeffizienten lauten}\ :$$

$$\textit{Faktoren}\ =.\left\{l_1 = 0, l_2 = {z_1}^2, z_1 = z_1\right\}$$

$$\textit{Die Loesungskurve lautet}\ :$$

$$z = z_1\,t, + O.(\,t^2\,)$$

$$\lambda = {z_1}^2\,t^2, + O.(\,t^3\,)$$

$$\textit{Test durch Einsetzen in F und Taylorentw. bis zum Grad 2 bzgl. t ergibt}\ :$$

$$[\,0\,]$$

$$\textit{Hoechste angewandte Ordnung}\ =\ 2$$

$$\textit{Die Loesungen lauten}, \left[\left[z = z_1\, t, \lambda = {z_1}^2\, t^2\right]\right]$$

2-bestimmtes Beispiel (transkritische Verzweigung)

```
************************************ **
> zv:=[z];
> F := eval([zv[1]^2-lambda*zv[1]]);
> feste_parameter := {};
```

$$zv := [\, z \,]$$

$$F := [\, z^2 - \lambda\, z \,]$$

$$\textit{feste_parameter} := \{\ \}$$

```
> bestimme(F,1,3,true,true,false,true);
> print('Die Loesungen lauten',Loesungen);
Rechnung Nr. 1
```

$$<<<<<<<<<<<<<\ \textit{Momentane Ordnung 1}\ >>>>>>>>>>>>>$$

$$T_1\,(z_1, l_1)\,, :=, \{\, 0 \,\} = 0$$

$$\textit{Weiter bei Rechung Nr.}\,, 2, \textit{mit}\,, [z_1, l_1]$$

```
Rechnung Nr. 2
```

$$<<<<<<<<<<<<<\ \textit{Momentane Ordnung 2}\ >>>>>>>>>>>>>$$

$$T_2\,(z_1, l_1)\,, :=, \left\{{z_1}^2 - l_1\, z_1\right\} = 0$$

$$+++\ \textit{Untersuche Loesung Nr. 1 von 2 der Ordnung 2}\ +++$$

$$\textit{Die Loesung lautet}\,:, \{l_1 = l_1, z_1 = 0\}$$

$$\textit{Bekannte Werte}\ =.[\ ]$$

$$\textit{Determinante}\ =.\,(-l_1)$$

$$\textit{BBBBBBBBBBB Diese Loesung ist bestimmt BBBBBBBBBBBBB}$$

$$\textit{Die Taylorkoeffizienten lauten}\,:$$

$$\textit{Faktoren}\ =.\,\{l_1 = l_1, z_1 = 0\}$$

$$\textit{Die Loesungskurve lautet}\,:$$

$$z = 0, +O.(t^2)$$

$$\lambda = l_1\, t, +O.(t^2)$$

Test durch Einsetzen in F und Taylorentw. bis zum Grad 2 bzgl. t ergibt :

$$[0]$$

+++ Untersuche Loesung Nr. 2 von 2 der Ordnung 2 +++

Die Loesung lautet : , $\{l_1 = z_1, z_1 = z_1\}$

Bekannte Werte = .[ ]

Determinante = . (z_1)

BBBBBBBBBBB Diese Loesung ist bestimmt BBBBBBBBBBBBB

Die Taylorkoeffizienten lauten :

Faktoren = . $\{l_1 = z_1, z_1 = z_1\}$

Die Loesungskurve lautet :

$$z = z_1\, t, +O.(t^2)$$

$$\lambda = z_1\, t, +O.(t^2)$$

Test durch Einsetzen in F und Taylorentw. bis zum Grad 2 bzgl. t ergibt :

$$[0]$$

Hoechste angewandte Ordnung = 2

Die Loesungen lauten, $[[z = 0, \lambda = l_1\, t], [z = z_1\, t, \lambda = z_1\, t]]$

3-bestimmtes Beispiel (Pitchfork)

```
**************************
     > zv:=[z];
     > F := eval([zv[1]^3-lambda*zv[1]]);
     > feste_parameter := {};
```

$$zv := [z]$$

$$F := [z^3 - \lambda\, z]$$

$$feste_parameter := \{\ \}$$

```
> bestimme(F,1,4,true,true,false,true);
> print('Die Loesungen lauten',Loesungen);
Rechnung Nr. 1
```

$$<<<<<<<<<<<<<\ \textit{Momentane Ordnung 1}\ >>>>>>>>>>>>>$$

$$T_1\left(z_1, l_1\right), :=, \{\,0\,\} = 0$$

$$\textit{Weiter bei Rechung Nr.}\,, 2, \textit{mit}\,, [z_1, l_1]$$

```
Rechnung Nr. 2
```

$$<<<<<<<<<<<<<\ \textit{Momentane Ordnung 2}\ >>>>>>>>>>>>>$$

$$T_2\left(z_1, l_1\right), :=, \{-l_1\, z_1\} = 0$$

$$+++\ \textit{Untersuche Loesung Nr. 1 von 2 der Ordnung 2}\ +++$$

$$\textit{Die Loesung lautet}:, \{l_1 = 0, z_1 = z_1\}$$

$$\textit{Determinante}\ =\ 0\ \textit{und}\,, l_1 = 0$$

$$\textit{NNNNNNNNNN Diese Loesung ist nicht bestimmt NNNNNNNNNNNN}$$

$$\textit{Weiter bei Rechnung Nr.}\,, 3, \textit{mit den Unbekannten}\,, [z_1, l_2]$$

```
Rechnung Nr. 3
```

$$<<<<<<<<<<<<<\ \textit{Momentane Ordnung 3}\ >>>>>>>>>>>>>$$

$$T_3\left(z_1, l_2\right), :=, \left\{{z_1}^3 - l_2\, z_1\right\} = 0$$

$$+++\ \textit{Untersuche Loesung Nr. 1 von 2 der Ordnung 3}\ +++$$

$$\textit{Die Loesung lautet}:, \{z_1 = 0, l_2 = l_2\}$$

$$\textit{Bekannte Werte}\ =.[l_1 = 0]$$

$$\textit{Determinante}\ =.(-l_2)$$

$$\textit{BBBBBBBBBB Diese Loesung ist bestimmt BBBBBBBBBBBB}$$

$$\textit{Die Taylorkoeffizienten lauten}:$$

$$\textit{Faktoren}\ =.\{z_1 = 0, l_1 = 0, l_2 = l_2\}$$

$$\textit{Die Loesungskurve lautet}:$$

$$z = 0, +O.(\,t^2\,)$$

$$\lambda = l_2\, t^2, + O.(\, t^3\,)$$

Test durch Einsetzen in F und Taylorentw. bis zum Grad 3 bzgl. t ergibt :

$$[\,0\,]$$

$$+++ \;\; \textit{Untersuche Loesung Nr. 2 von 2 der Ordnung 3} \;\; +++$$

$$\textit{Die Loesung lautet :}\,, \left\{ l_2 = {z_1}^2, z_1 = z_1 \right\}$$

$$\textit{Bekannte Werte} \;\; = . \left[l_1 = 0 \right]$$

$$\textit{Determinante} \;\; = . \left(2\, {z_1}^2 \right)$$

BBBBBBBBBBB Diese Loesung ist bestimmt BBBBBBBBBBBBB

Die Taylorkoeffizienten lauten :

$$\textit{Faktoren} \;\; = . \left\{ l_1 = 0, l_2 = {z_1}^2, z_1 = z_1 \right\}$$

Die Loesungskurve lautet :

$$z = z_1\, t, + O.(\, t^2\,)$$

$$\lambda = {z_1}^2\, t^2, + O.(\, t^3\,)$$

Test durch Einsetzen in F und Taylorentw. bis zum Grad 3 bzgl. t ergibt :

$$[\,0\,]$$

$$+++ \;\; \textit{Untersuche Loesung Nr. 2 von 2 der Ordnung 2} \;\; +++$$

$$\textit{Die Loesung lautet :}\,, \{ l_1 = l_1, z_1 = 0 \}$$

$$\textit{Bekannte Werte} \;\; = .[\;]$$

$$\textit{Determinante} \;\; = . (-l_1)$$

BBBBBBBBBBB Diese Loesung ist bestimmt BBBBBBBBBBBBB

Die Taylorkoeffizienten lauten :

$$\textit{Faktoren} \;\; = . \{ l_1 = l_1, z_1 = 0 \}$$

Die Loesungskurve lautet :

$$z = 0, + O.(\, t^2\,)$$

$$\lambda = l_1\, t, + O.(\, t^2\,)$$

Test durch Einsetzen in F und Taylorentw. bis zum Grad 2 bzgl. t ergibt :

$$[\,0\,]$$

Hoechste angewandte Ordnung = 3

Die Loesungen lauten, $\left[\left[z=0,\lambda=l_2\,t^2\right],\left[z=z_1\,t,\lambda={z_1}^2\,t^2\right],\left[z=0,\lambda=l_1\,t\right]\right]$

3-bestimmtes Beispiel (Kuspe)

```
*************************
```

```
> zv:=[z];
> F := eval([zv[1]^3-lambda^2]);
> feste_parameter := {};
```

$$zv := [\,z\,]$$

$$F := \left[z^3-\lambda^2\right]$$

$$feste_parameter := \{\ \}$$

```
> bestimme(F,1,7,true,true,false,true);
> print(‘Die Loesungen lauten‘,Loesungen);
Rechnung Nr. 1
```

<<<<<<<<<<<<< Momentane Ordnung 1 >>>>>>>>>>>>>

$$T_1\,(z_1,l_1)\,,:=,\{\,0\,\}=0$$

Weiter bei Rechung Nr. $,2,$ *mit* $,[z_1,l_1]$

```
Rechnung Nr. 2
```

<<<<<<<<<<<<< Momentane Ordnung 2 >>>>>>>>>>>>>

$$T_2\,(z_1,l_1)\,,:=,\left\{-{l_1}^2\right\}=0$$

+++ Untersuche Loesung Nr. 1 von 1 der Ordnung 2 +++

Die Loesung lautet :, $\{l_1=0\}$

Determinante = 0 und $,l_1=0$

NNNNNNNNNNN Diese Loesung ist nicht bestimmt NNNNNNNNNNNN

Weiter bei Rechnung Nr. $,3,$ *mit den Unbekannten* $,[z_1,l_2]$

```
Rechnung Nr. 3
```

$$<<<<<<<<<<<<<\ \textit{Momentane Ordnung 3}\ >>>>>>>>>>>>>$$

$$T_3\left(z_1, l_2\right), :=, \left\{{z_1}^3\right\} = 0$$

$$+++\ \textit{Untersuche Loesung Nr. 1 von 1 der Ordnung 3}\ +++$$

$$\textit{Die Loesung lautet} : , \{z_1 = 0\}$$

$$\textit{Bekannte Werte}\ = . [l_1 = 0]$$

$$\textit{Determinante}\ =\ 0$$

NNNNNNNNNN Diese Loesung ist nicht bestimmt NNNNNNNNNNNN

$$\textit{Weiter bei Rechnung Nr.}\ , 4, \textit{mit den Unbekannten}\ , [z_2, l_2]$$

`Rechnung Nr. 4`

$$<<<<<<<<<<<<<\ \textit{Momentane Ordnung 4}\ >>>>>>>>>>>>>$$

$$T_4\left(z_2, l_2\right), :=, \left\{-{l_2}^2\right\} = 0$$

$$+++\ \textit{Untersuche Loesung Nr. 1 von 1 der Ordnung 4}\ +++$$

$$\textit{Die Loesung lautet} : , \{l_2 = 0\}$$

$$\textit{Bekannte Werte}\ = . [l_1 = 0, z_1 = 0]$$

$$\textit{Determinante}\ =\ 0\ \textit{und}\ , l_2 = 0$$

NNNNNNNNNN Diese Loesung ist nicht bestimmt NNNNNNNNNNNN

$$\textit{Weiter bei Rechnung Nr.}\ , 5, \textit{mit den Unbekannten}\ , [z_2, l_3]$$

`Rechnung Nr. 5`

$$<<<<<<<<<<<<<\ \textit{Momentane Ordnung 5}\ >>>>>>>>>>>>>$$

$$T_5\left(z_2, l_3\right), :=, \{\ 0\ \} = 0$$

$$\textit{Weiter bei Rechung Nr.}\ , 6, \textit{mit}\ , [z_2, l_3]$$

`Rechnung Nr. 6`

$$<<<<<<<<<<<<<\ \textit{Momentane Ordnung 6}\ >>>>>>>>>>>>>$$

$$T_6\left(z_2, l_3\right), :=, \left\{{z_2}^3 - {l_3}^2\right\} = 0$$

$$+++\ \textit{Untersuche Loesung Nr. 1 von 3 der Ordnung 6}\ +++$$

$$\textit{Die Loesung lautet :, } \left\{ l_3 = l_3, z_2 = {l_3}^{2/3} \right\}$$

$$\textit{Bekannte Werte } = . \left[l_1 = 0, z_1 = 0, l_2 = 0 \right]$$

$$\textit{Determinante } = . \left(3\, {l_3}^{4/3} \right)$$

BBBBBBBBBBB Diese Loesung ist bestimmt BBBBBBBBBBBBB

Die Taylorkoeffizienten lauten :

$$\textit{Faktoren } = . \left\{ z_1 = 0, l_3 = l_3, l_1 = 0, l_2 = 0, z_2 = {l_3}^{2/3} \right\}$$

Die Loesungskurve lautet :

$$z = {l_3}^{2/3}\, t^2, + O.(\, t^3\,)$$

$$\lambda = l_3\, t^3, + O.(\, t^4\,)$$

Test durch Einsetzen in F und Taylorentw. bis zum Grad 6 bzgl. t ergibt :

$$[\, 0\,]$$

+++ Untersuche Loesung Nr. 2 von 3 der Ordnung 6 +++

$$\textit{Komplexe Loesung } :, \left\{ l_3 = l_3, z_2 = \frac{1}{2} \left(-1 + I\sqrt{3} \right) {l_3}^{2/3} \right\}$$

+++ Untersuche Loesung Nr. 3 von 3 der Ordnung 6 +++

$$\textit{Komplexe Loesung } :, \left\{ l_3 = l_3, z_2 = -\frac{1}{2} \left(1 + I\sqrt{3} \right) {l_3}^{2/3} \right\}$$

Hoechste angewandte Ordnung = 6

$$\textit{Die Loesungen lauten}, \left[\left[z = {l_3}^{2/3}\, t^2, \lambda = l_3\, t^3 \right] \right]$$

3-bestimmtes Beispiel (aeqivalente Kuspe)

****

```
> zv:=[z];
> F := eval([product(zv[1]-i*lambda,i=1..3)-lambda^2]);
> feste_parameter := {};
```

$$zv := [\, z\,]$$

$$F := \left[(\, z - \lambda\,)\, (\, z - 2\,\lambda\,)\, (\, z - 3\,\lambda\,) - \lambda^2 \right]$$

$$feste_parameter := \{\ \}$$

```
> bestimme(F,1,6,true,true,false,true);
> print('Die Loesungen lauten',Loesungen);
Rechnung Nr. 1
```

$$<<<<<<<<<<<<<\ Momentane\ Ordnung\ 1\ >>>>>>>>>>>>>$$

$$T_1\,(z_1, l_1)\,, :=, \{\,0\,\} = 0$$

$$Weiter\ bei\ Rechung\ Nr.\,, 2, mit\,, [z_1, l_1]$$

```
Rechnung Nr. 2
```

$$<<<<<<<<<<<<<\ Momentane\ Ordnung\ 2\ >>>>>>>>>>>>>$$

$$T_2\,(z_1, l_1)\,, :=, \left\{-{l_1}^2\right\} = 0$$

$$+++\ Untersuche\ Loesung\ Nr.\ 1\ von\ 1\ der\ Ordnung\ 2\ +++$$

$$Die\ Loesung\ lautet:, \{l_1 = 0\}$$

$$Determinante\ =\ 0\ und\,, l_1 = 0$$

$$NNNNNNNNNN\ Diese\ Loesung\ ist\ nicht\ bestimmt\ NNNNNNNNNNNN$$

$$Weiter\ bei\ Rechnung\ Nr.\,, 3, mit\ den\ Unbekannten\,, [z_1, l_2]$$

```
Rechnung Nr. 3
```

$$<<<<<<<<<<<<<\ Momentane\ Ordnung\ 3\ >>>>>>>>>>>>>$$

$$T_3\,(z_1, l_2)\,, :=, \left\{{z_1}^3\right\} = 0$$

$$+++\ Untersuche\ Loesung\ Nr.\ 1\ von\ 1\ der\ Ordnung\ 3\ +++$$

$$Die\ Loesung\ lautet:, \{z_1 = 0\}$$

$$Bekannte\ Werte\ =.[l_1 = 0]$$

$$Determinante\ =\ 0$$

$$NNNNNNNNNN\ Diese\ Loesung\ ist\ nicht\ bestimmt\ NNNNNNNNNNNN$$

$$Weiter\ bei\ Rechnung\ Nr.\,, 4, mit\ den\ Unbekannten\,, [z_2, l_2]$$

```
Rechnung Nr. 4
```

$$<<<<<<<<<<<<<\ Momentane\ Ordnung\ 4\ >>>>>>>>>>>>>$$

$$T_4\,(z_2, l_2)\,, :=, \left\{-{l_2}^2\right\} = 0$$

$+++$ *Untersuche Loesung Nr. 1 von 1 der Ordnung 4* $++$

Die Loesung lautet : , $\{l_2 = 0\}$

Bekannte Werte $=. [l_1 = 0, z_1 = 0]$

Determinante $=$ *0 und* , $l_2 = 0$

NNNNNNNNNNN Diese Loesung ist nicht bestimmt NNNNNNNNNNNNN

Weiter bei Rechnung Nr. , 5, *mit den Unbekannten* , $[z_2, l_3]$

`Rechnung Nr. 5`

$<<<<<<<<<<<<<$ *Momentane Ordnung 5* $>>>>>>>>>>>>>$

$$T_5\,(z_2, l_3)\,, :=, \{\,0\,\} = 0$$

Weiter bei Rechung Nr. , 6, *mit* , $[z_2, l_3]$

`Rechnung Nr. 6`

$<<<<<<<<<<<<<$ *Momentane Ordnung 6* $>>>>>>>>>>>>>$

$$T_6\,(z_2, l_3)\,, :=, \left\{{z_2}^3 - {l_3}^2\right\} = 0$$

$+++$ *Untersuche Loesung Nr. 1 von 3 der Ordnung 6* $++$

Die Loesung lautet : , $\left\{l_3 = l_3, z_2 = {l_3}^{2/3}\right\}$

Bekannte Werte $=. [l_1 = 0, z_1 = 0, l_2 = 0]$

Determinante $=. \left(3\,{l_3}^{4/3}\right)$

BBBBBBBBBBB Diese Loesung ist bestimmt BBBBBBBBBBBBB

Die Taylorkoeffizienten lauten :

Faktoren $=. \left\{z_1 = 0, l_1 = 0, l_2 = 0, l_3 = l_3, z_2 = {l_3}^{2/3}\right\}$

Die Loesungskurve lautet :

$$z = {l_3}^{2/3}\,t^2, + O.(\,t^3\,)$$

$$\lambda = l_3\,t^3, + O.(\,t^4\,)$$

Test durch Einsetzen in F und Taylorentw. bis zum Grad 6 bzgl. t ergibt :

$$[\,\mathrm{O}(t^7)\,]$$

$$+++\ \textit{Untersuche Loesung Nr. 2 von 3 der Ordnung 6}\ +++$$

$$\textit{Komplexe Loesung}\ :, \left\{ z_2 = \frac{1}{2}\left(-1 + I\sqrt{3}\right) {l_3}^{2/3}, l_3 = l_3 \right\}$$

$$+++\ \textit{Untersuche Loesung Nr. 3 von 3 der Ordnung 6}\ +++$$

$$\textit{Komplexe Loesung}\ :, \left\{ z_2 = -\frac{1}{2}\left(1 + I\sqrt{3}\right) {l_3}^{2/3}, l_3 = l_3 \right\}$$

$$\textit{Hoechste angewandte Ordnung}\ =\ 6$$

$$\textit{Die Loesungen lauten}, \left[\left[z = {l_3}^{2/3}\, t^2, \lambda = l_3\, t^3 \right]\right]$$

4-bestimmtes Beispiel (Tangentengleichheit)

****

```
> zv:=[z];
> F := [(zv[1]-lambda)^2-lambda^4];
> feste_parameter := {};
```

$$zv := [\,z\,]$$

$$F := \left[(\,z - \lambda\,)^2 - \lambda^4\right]$$

$$\textit{feste_parameter} := \{\ \}$$

```
> bestimme(F,1,4,true,true,false,true);
> print('Die Loesungen lauten',Loesungen);
Rechnung Nr. 1
```

$$<<<<<<<<<<<<<\ \textit{Momentane Ordnung 1}\ >>>>>>>>>>>>>$$

$$T_1\,(z_1, l_1)\,, :=, \{\,0\,\} = 0$$

$$\textit{Weiter bei Rechung Nr.}\,, 2, \textit{mit}\,, [z_1, l_1]$$

```
Rechnung Nr. 2
```

$$<<<<<<<<<<<<<\ \textit{Momentane Ordnung 2}\ >>>>>>>>>>>>>$$

$$T_2\,(z_1, l_1)\,, :=, \left\{(z_1 - l_1)^2\right\} = 0$$

$$+++\ \textit{Untersuche Loesung Nr. 1 von 1 der Ordnung 2}\ +++$$

$$\textit{Die Loesung lautet :, } \{l_1 = z_1, z_1 = z_1\}$$

$$\textit{Determinante } = \textit{ 0}$$

NNNNNNNNNN Diese Loesung ist nicht bestimmt NNNNNNNNNNNN

$$\textit{Weiter bei Rechnung Nr. , 3, mit den Unbekannten , } [z_1, l_2]$$

`Rechnung Nr. 3`

<<<<<<<<<<<<< Momentane Ordnung 3 >>>>>>>>>>>>>

$$T_3\,(z_1, l_2)\,, :=, \{\,0\,\} = 0$$

$$\textit{Weiter bei Rechung Nr. , 4, mit , } [z_1, l_2]$$

`Rechnung Nr. 4`

<<<<<<<<<<<<< Momentane Ordnung 4 >>>>>>>>>>>>>

$$T_4\,(z_1, l_2)\,, :=, \left\{{l_2}^2 - {z_1}^4\right\} = 0$$

+++ Untersuche Loesung Nr. 1 von 2 der Ordnung 4 +++

$$\textit{Die Loesung lautet :, } \left\{l_2 = {z_1}^2, z_1 = z_1\right\}$$

$$\textit{Bekannte Werte } = . [l_1 = z_1]$$

$$\textit{Determinante } = . \left(-4\,{z_1}^3\right)$$

BBBBBBBBBBB Diese Loesung ist bestimmt BBBBBBBBBBBBB

Die Taylorkoeffizienten lauten :

$$\textit{Faktoren } = . \left\{l_1 = z_1, l_2 = {z_1}^2, z_1 = z_1\right\}$$

Die Loesungskurve lautet :

$$z = z_1\,t, + O.(\,t^2\,)$$

$$\lambda = z_1\,t + {z_1}^2\,t^2, + O.(\,t^3\,)$$

Test durch Einsetzen in F und Taylorentw. bis zum Grad 4 bzgl. t ergibt :

$$[\,\mathrm{O}(\,t^5\,)\,]$$

+++ Untersuche Loesung Nr. 2 von 2 der Ordnung 4 +++

$$\textit{Die Loesung lautet :, } \left\{z_1 = z_1, l_2 = -{z_1}^2\right\}$$

$$\textit{Bekannte Werte } = . [l_1 = z_1]$$

$$Determinante \; = . \left(-4\, {z_1}^3\right)$$

BBBBBBBBBBB Diese Loesung ist bestimmt BBBBBBBBBBBBB

Die Taylorkoeffizienten lauten :

$$Faktoren \; = . \left\{ l_1 = z_1, z_1 = z_1, l_2 = -{z_1}^2 \right\}$$

Die Loesungskurve lautet :

$$z = z_1\, t, + O.(\, t^2\,)$$

$$\lambda = z_1\, t - {z_1}^2\, t^2, + O.(\, t^3\,)$$

Test durch Einsetzen in F und Taylorentw. bis zum Grad 4 bzgl. t ergibt :

$$[\, \mathrm{O}(\, t^5\,)\,]$$

Hoechste angewandte Ordnung = 4

$$Die\ Loesungen\ lauten, \left[\left[z = z_1\, t, \lambda = z_1\, t + {z_1}^2\, t^2\right], \left[z = z_1\, t, \lambda = z_1\, t - {z_1}^2\, t^2\right]\right]$$

5-bestimmtes Beispiel (multiple Verzweigung)

```
************************************
```

```
> zv:=[z];
> F := eval([product(zv[1]-i*lambda,i=1..5)]);
> feste_parameter := {};
```

$$zv := [\, z\,]$$

$$F := [\, (\, z - \lambda\,)\, (\, z - 2\, \lambda\,)\, (\, z - 3\, \lambda\,)\, (\, z - 4\, \lambda\,)\, (\, z - 5\, \lambda\,)\,]$$

$$feste_parameter := \{\ \}$$

```
> bestimme(F,1,6,true,true,false,true);
> print(‘Die Loesungen lauten‘,Loesungen);
Rechnung Nr. 1
```

<<<<<<<<<<<<< Momentane Ordnung 1 >>>>>>>>>>>>>

$$T_1\, (z_1, l_1)\, , :=, \{\, 0\,\} = 0$$

Weiter bei Rechung Nr. , 2, mit , $[z_1, l_1]$

```
Rechnung Nr. 2
```

$$<<<<<<<<<<<<<\ \textit{Momentane Ordnung 2}\ >>>>>>>>>>>>>$$

$$T_2\left(z_1, l_1\right), :=, \{\,0\,\} = 0$$

$$\textit{Weiter bei Rechung Nr.}\ , 3, \textit{mit}\ , [z_1, l_1]$$

`Rechnung Nr. 3`

$$<<<<<<<<<<<<<\ \textit{Momentane Ordnung 3}\ >>>>>>>>>>>>>$$

$$T_3\left(z_1, l_1\right), :=, \{\,0\,\} = 0$$

$$\textit{Weiter bei Rechung Nr.}\ , 4, \textit{mit}\ , [z_1, l_1]$$

`Rechnung Nr. 4`

$$<<<<<<<<<<<<<\ \textit{Momentane Ordnung 4}\ >>>>>>>>>>>>>$$

$$T_4\left(z_1, l_1\right), :=, \{\,0\,\} = 0$$

$$\textit{Weiter bei Rechung Nr.}\ , 5, \textit{mit}\ , [z_1, l_1]$$

`Rechnung Nr. 5`

$$<<<<<<<<<<<<<\ \textit{Momentane Ordnung 5}\ >>>>>>>>>>>>>$$

$$T_5\left(z_1, l_1\right), :=, \{(z_1 - l_1)\ (z_1 - 2\,l_1)\ (z_1 - 3\,l_1)\ (z_1 - 4\,l_1)\ (z_1 - 5\,l_1)\} = 0$$

$$+++\ \textit{Untersuche Loesung Nr. 1 von 5 der Ordnung 5}\ +++$$

$$\textit{Die Loesung lautet}\ :, \left\{z_1 = z_1, l_1 = \frac{1}{4}\,z_1\right\}$$

$$\textit{Bekannte Werte}\ = .[\ ]$$

$$\textit{Determinante}\ = . \left(-\frac{3}{128}\,{z_1}^4\right)$$

$$\textit{BBBBBBBBBBB Diese Loesung ist bestimmt BBBBBBBBBBBBB}$$

$$\textit{Die Taylorkoeffizienten lauten}\ :$$

$$\textit{Faktoren}\ = . \left\{z_1 = z_1, l_1 = \frac{1}{4}\,z_1\right\}$$

$$\textit{Die Loesungskurve lautet}\ :$$

$$z = z_1\,t, + O.(\,t^2\,)$$

$$\lambda = \frac{1}{4}\,z_1\,t, + O.(\,t^2\,)$$

Test durch Einsetzen in F und Taylorentw. bis zum Grad 5 bzgl. t ergibt :

$$[\,0\,]$$

+++ Untersuche Loesung Nr. 2 von 5 der Ordnung 5 +++

$$\textit{Die Loesung lautet :}, \left\{ z_1 = z_1, l_1 = \frac{1}{5}\, z_1 \right\}$$

$$\textit{Bekannte Werte } = .[\,]$$

$$\textit{Determinante } = . \left(\frac{24}{625}\, {z_1}^4 \right)$$

BBBBBBBBBBB Diese Loesung ist bestimmt BBBBBBBBBBBBB

Die Taylorkoeffizienten lauten :

$$\textit{Faktoren } = . \left\{ z_1 = z_1, l_1 = \frac{1}{5}\, z_1 \right\}$$

Die Loesungskurve lautet :

$$z = z_1\, t, + O.(\, t^2\,)$$

$$\lambda = \frac{1}{5}\, z_1\, t, + O.(\, t^2\,)$$

Test durch Einsetzen in F und Taylorentw. bis zum Grad 5 bzgl. t ergibt :

$$[\,0\,]$$

+++ Untersuche Loesung Nr. 3 von 5 der Ordnung 5 +++

$$\textit{Die Loesung lautet :}, \{ l_1 = z_1, z_1 = z_1 \}$$

$$\textit{Bekannte Werte } = .[\,]$$

$$\textit{Determinante } = . \left(24\, {z_1}^4 \right)$$

BBBBBBBBBBB Diese Loesung ist bestimmt BBBBBBBBBBBBB

Die Taylorkoeffizienten lauten :

$$\textit{Faktoren } = . \{ l_1 = z_1, z_1 = z_1 \}$$

Die Loesungskurve lautet :

$$z = z_1\, t, + O.(\, t^2\,)$$

$$\lambda = z_1\, t, + O.(\, t^2\,)$$

Test durch Einsetzen in F und Taylorentw. bis zum Grad 5 bzgl. t ergibt :

$$[\,0\,]$$

$+++$ *Untersuche Loesung Nr. 4 von 5 der Ordnung 5* $+++$

$$\textit{Die Loesung lautet :}, \left\{ l_1 = \frac{1}{2}\, z_1, z_1 = z_1 \right\}$$

$$\textit{Bekannte Werte } = .[\,]$$

$$\textit{Determinante } = . \left(-\frac{3}{8}\, {z_1}^4 \right)$$

BBBBBBBBBBB Diese Loesung ist bestimmt BBBBBBBBBBBBB

Die Taylorkoeffizienten lauten :

$$\textit{Faktoren } = . \left\{ l_1 = \frac{1}{2}\, z_1, z_1 = z_1 \right\}$$

Die Loesungskurve lautet :

$$z = z_1\, t, + O.(\, t^2\,)$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\, z_1\, t, + O.(\, t^2\,)$$

Test durch Einsetzen in F und Taylorentw. bis zum Grad 5 bzgl. t ergibt :

$$[\,0\,]$$

$+++$ *Untersuche Loesung Nr. 5 von 5 der Ordnung 5* $+++$

$$\textit{Die Loesung lautet :}, \left\{ l_1 = \frac{1}{3}\, z_1, z_1 = z_1 \right\}$$

$$\textit{Bekannte Werte } = .[\,]$$

$$\textit{Determinante } = . \left(\frac{4}{81}\, {z_1}^4 \right)$$

BBBBBBBBBBB Diese Loesung ist bestimmt BBBBBBBBBBBBB

Die Taylorkoeffizienten lauten :

$$\textit{Faktoren } = . \left\{ l_1 = \frac{1}{3}\, z_1, z_1 = z_1 \right\}$$

Die Loesungskurve lautet :

$$z = z_1\, t, + O.(\, t^2\,)$$

$$\lambda = \frac{1}{3}\, z_1\, t, + O.(t^2)$$

Test durch Einsetzen in F und Taylorentw. bis zum Grad 5 bzgl. t ergibt :

$$[\,0\,]$$

Hoechste angewandte Ordnung = 5

$$\textit{Die Loesungen lauten}, \left[\left[z = z_1\, t, \lambda = \frac{1}{4}\, z_1\, t\right], \left[z = z_1\, t, \lambda = \frac{1}{5}\, z_1\, t\right],\right.$$
$$\left.[z = z_1\, t, \lambda = z_1\, t], \left[z = z_1\, t, \lambda = \frac{1}{2}\, z_1\, t\right], \left[z = z_1\, t, \lambda = \frac{1}{3}\, z_1\, t\right]\right]$$

7-bestimmtes Beispiel

```
**************************
```

```
> zv:=[z];
> F := eval([zv[1]^7+zv[1]^4*lambda+zv[1]^2*lambda^3+
> zv[1]*lambda^5+lambda^9]);
> feste_parameter := {};
```

$$zv := [\,z\,]$$

$$F := \left[z^7 + z^4\,\lambda + z^2\,\lambda^3 + z\,\lambda^5 + \lambda^9\right]$$

$$\textit{feste_parameter} := \{\ \}$$

```
> bestimme(F,1,7,true,true,false,true);
> print(‘Die Loesungen lauten‘,Loesungen);
Rechnung Nr. 1
```

<<<<<<<<<<<<< Momentane Ordnung 1 >>>>>>>>>>>>>

$$T_1\,(z_1, l_1)\,, :=, \{\,0\,\} = 0$$

Weiter bei Rechung Nr. , 2, mit , $[z_1, l_1]$

```
Rechnung Nr. 2
```

<<<<<<<<<<<<< Momentane Ordnung 2 >>>>>>>>>>>>>

$$T_2\,(z_1, l_1)\,, :=, \{\,0\,\} = 0$$

Weiter bei Rechung Nr. , 3, mit , $[z_1, l_1]$

Rechnung Nr. 3

$$<<<<<<<<<<<<<\ \textit{Momentane Ordnung 3}\ >>>>>>>>>>>>>$$

$$T_3\left(z_1, l_1\right), :=, \{\,0\,\} = 0$$

$$\textit{Weiter bei Rechung Nr.}, 4, \textit{mit}, [z_1, l_1]$$

Rechnung Nr. 4

$$<<<<<<<<<<<<<\ \textit{Momentane Ordnung 4}\ >>>>>>>>>>>>>$$

$$T_4\left(z_1, l_1\right), :=, \{\,0\,\} = 0$$

$$\textit{Weiter bei Rechung Nr.}, 5, \textit{mit}, [z_1, l_1]$$

Rechnung Nr. 5

$$<<<<<<<<<<<<<\ \textit{Momentane Ordnung 5}\ >>>>>>>>>>>>>$$

$$T_5\left(z_1, l_1\right), :=, \left\{{z_1}^4\, l_1 + {z_1}^2\, {l_1}^3\right\} = 0$$

$$+++\ \textit{Untersuche Loesung Nr. 1 von 4 der Ordnung 5}\ +++$$

$$\textit{Die Loesung lautet}:, \{z_1 = 0, l_1 = l_1\}$$

$$\textit{Determinante}\ =\ 0$$

$$\textit{NNNNNNNNNN Diese Loesung ist nicht bestimmt NNNNNNNNNNNN}$$

$$\textit{Weiter bei Rechnung Nr.}, 6, \textit{mit den Unbekannten}, [z_2, l_1]$$

Rechnung Nr. 6

$$<<<<<<<<<<<<<\ \textit{Momentane Ordnung 6}\ >>>>>>>>>>>>>$$

$$T_6\left(z_2, l_1\right), :=, \{\,0\,\} = 0$$

$$\textit{Weiter bei Rechung Nr.}, 7, \textit{mit}, [z_2, l_1]$$

Rechnung Nr. 7

$$<<<<<<<<<<<<<\ \textit{Momentane Ordnung 7}\ >>>>>>>>>>>>>$$

$$T_7\left(z_2, l_1\right), :=, \left\{{z_2}^2\, {l_1}^3 + z_2\, {l_1}^5\right\} = 0$$

$$+++\ \textit{Untersuche Loesung Nr. 1 von 3 der Ordnung 7}\ +++$$

$$\textit{Die Loesung lautet}:, \{l_1 = l_1, z_2 = 0\}$$

$$\textit{Bekannte Werte}\ =.\, [z_1 = 0]$$

$$Determinante \ = . \left({l_1}^5 \right)$$

BBBBBBBBBBB Diese Loesung ist bestimmt BBBBBBBBBBBBB

Die Taylorkoeffizienten lauten :

$$Faktoren \ = . \{ z_1 = 0, l_1 = l_1, z_2 = 0 \}$$

Die Loesungskurve lautet :

$$z = 0, + O.(t^3)$$

$$\lambda = l_1 \, t, + O.(t^2)$$

Test durch Einsetzen in F und Taylorentw. bis zum Grad 7 bzgl. t ergibt :

$$[\, \mathrm{O}(t^9) \,]$$

+++ Untersuche Loesung Nr. 2 von 3 der Ordnung 7 +++

$$Die \ Loesung \ lautet : , \{ z_2 = z_2, l_1 = 0 \}$$

$$Bekannte \ Werte \ = . [z_1 = 0]$$

$$Determinante \ = \ 0 \ und \ , l_1 = 0$$

NNNNNNNNNNN Diese Loesung ist nicht bestimmt NNNNNNNNNNNNN

$$Weiter \ bei \ Rechnung \ Nr. \, , 8, mit \ den \ Unbekannten \ , [z_2, l_2]$$

HHHHHHHHHHHH Hoechste Stufe erreicht HHHHHHHHHHHHH

+++ Untersuche Loesung Nr. 3 von 3 der Ordnung 7 +++

$$Die \ Loesung \ lautet : , \left\{ l_1 = l_1, z_2 = -{l_1}^2 \right\}$$

$$Bekannte \ Werte \ = . [z_1 = 0]$$

$$Determinante \ = . \left(-{l_1}^5 \right)$$

BBBBBBBBBBB Diese Loesung ist bestimmt BBBBBBBBBBBBB

Die Taylorkoeffizienten lauten :

$$Faktoren \ = . \left\{ z_1 = 0, l_1 = l_1, z_2 = -{l_1}^2 \right\}$$

Die Loesungskurve lautet :

$$z = -{l_1}^2 \, t^2, + O.(t^3)$$

$$\lambda = l_1 \, t, + O.(t^2)$$

Test durch Einsetzen in F und Taylorentw. bis zum Grad 7 bzgl. t ergibt :

$$[\,O(t^9)\,]$$

+++ Untersuche Loesung Nr. 2 von 4 der Ordnung 5 +++

Die Loesung lautet : , $\{l_1 = 0, z_1 = z_1\}$

Determinante = 0 und , $l_1 = 0$

NNNNNNNNNNN Diese Loesung ist nicht bestimmt NNNNNNNNNNNNN

Weiter bei Rechnung Nr. , 8, *mit den Unbekannten* , $[z_1, l_2]$

`Rechnung Nr. 8`

<<<<<<<<<<<<<< Momentane Ordnung 6 >>>>>>>>>>>>>>

$$T_6\,(z_1, l_2)\,, :=, \left\{{z_1}^4\, l_2\right\} = 0$$

+++ Untersuche Loesung Nr. 1 von 2 der Ordnung 6 +++

Die Loesung lautet : , $\{l_2 = 0, z_1 = z_1\}$

Bekannte Werte = . $[l_1 = 0]$

Determinante = 0 und , $l_2 = 0$

NNNNNNNNNNN Diese Loesung ist nicht bestimmt NNNNNNNNNNNNN

Weiter bei Rechnung Nr. , 9, *mit den Unbekannten* , $[z_1, l_3]$

`Rechnung Nr. 9`

<<<<<<<<<<<<<< Momentane Ordnung 7 >>>>>>>>>>>>>>

$$T_7\,(z_1, l_3)\,, :=, \left\{{z_1}^7 + {z_1}^4\, l_3\right\} = 0$$

+++ Untersuche Loesung Nr. 1 von 2 der Ordnung 7 +++

Die Loesung lautet : , $\{z_1 = 0, l_3 = l_3\}$

Bekannte Werte = . $[l_1 = 0, l_2 = 0]$

Determinante = 0

NNNNNNNNNNN Diese Loesung ist nicht bestimmt NNNNNNNNNNNNN

Weiter bei Rechnung Nr. , 10, *mit den Unbekannten* , $[z_2, l_3]$

HHHHHHHHHHHH Hoechste Stufe erreicht HHHHHHHHHHHHH

$+++$ *Untersuche Loesung Nr. 2 von 2 der Ordnung 7* $+++$

Die Loesung lautet : , $\left\{l_3 = -{z_1}^3, z_1 = z_1\right\}$

Bekannte Werte $= .[l_1 = 0, l_2 = 0]$

Determinante $= .\left(3\,{z_1}^6\right)$

BBBBBBBBBBB Diese Loesung ist bestimmt BBBBBBBBBBBBB

Die Taylorkoeffizienten lauten :

Faktoren $= .\left\{l_3 = -{z_1}^3, l_1 = 0, l_2 = 0, z_1 = z_1\right\}$

Die Loesungskurve lautet :

$$z = z_1\,t, + O.(\,t^2\,)$$

$$\lambda = -{z_1}^3\,t^3, + O.(\,t^4\,)$$

Test durch Einsetzen in F und Taylorentw. bis zum Grad 7 bzgl. t ergibt :

$$[\,\mathrm{O}(\,t^{11}\,)\,]$$

$+++$ *Untersuche Loesung Nr. 2 von 2 der Ordnung 6* $+++$

Die Loesung lautet : , $\{z_1 = 0, l_2 = l_2\}$

Bekannte Werte $= .[l_1 = 0]$

Determinante $=$ *0*

NNNNNNNNNNN Diese Loesung ist nicht bestimmt NNNNNNNNNNNNN

Weiter bei Rechnung Nr. , 10, *mit den Unbekannten* , $[z_2, l_2]$

`Rechnung Nr. 10`

$<<<<<<<<<<<<<$ *Momentane Ordnung 7* $>>>>>>>>>>>>>$

$$T_7\,(z_2, l_2)\,, :=, \{\,0\,\} = 0$$

Weiter bei Rechung Nr. , 11, *mit* , $[z_2, l_2]$

HHHHHHHHHHHH Hoechste Stufe erreicht HHHHHHHHHHHHH

$+++$ *Untersuche Loesung Nr. 3 von 4 der Ordnung 5* $+++$

Komplexe Loesung : , $\{z_1 = z_1, l_1 = I\,z_1\}$

$+++$ *Untersuche Loesung Nr. 4 von 4 der Ordnung 5* $+++$

$$\textit{Komplexe Loesung } :, \{z_1 = z_1, l_1 = -I\, z_1\}$$

$$\textit{Hoechste angewandte Ordnung } = 7$$

$$\textit{Die Loesungen lauten}, \left[[z = 0, \lambda = l_1\, t], \left[z = -{l_1}^2\, t^2, \lambda = l_1\, t\right], \left[z = z_1\, t, \lambda = -{z_1}^3\, t^3\right]\right]$$

3-bestimmtes Beispiel mit 2 Zustandsvariablen

****

```
> zv:=[z[1],z[2]];
> F := [zv[1]^2*lambda-zv[2]^2,zv[1]^2-zv[2]^2-lambda];
> feste_parameter := {};
```

$$zv := [z_1, z_2]$$

$$F := \left[{z_1}^2\, \lambda - {z_2}^2, {z_1}^2 - {z_2}^2 - \lambda\right]$$

$$\textit{feste_parameter} := \{\ \}$$

```
> bestimme(F,1,6,true,true,false,true);
> print('Die Loesungen lauten',Loesungen);
Rechnung Nr. 1
```

$$<<<<<<<<<<<<<\ \textit{Momentane Ordnung 1}\ >>>>>>>>>>>>>$$

$$T_1\left(z_{11}, z_{21}, l_1\right), :=, \{0, -l_1\} = 0$$

$$+++\ \textit{Untersuche Loesung Nr. 1 von 1 der Ordnung 1}\ +++$$

$$\textit{Die Loesung lautet } :, \{l_1 = 0\}$$

$$\textit{Determinante } = 0\ \textit{und}, l_1 = 0$$

$$\textit{NNNNNNNNNN Diese Loesung ist nicht bestimmt NNNNNNNNNNN}$$

$$\textit{Weiter bei Rechnung Nr.}, 2, \textit{mit den Unbekannten}, [z_{11}, z_{21}, l_2]$$

```
Rechnung Nr. 2
```

$$<<<<<<<<<<<<<\ \textit{Momentane Ordnung 2}\ >>>>>>>>>>>>>$$

$$T_2\left(z_{11}, z_{21}, l_2\right), :=, \left\{{z_{11}}^2 - {z_{21}}^2 - l_2, -{z_{21}}^2\right\} = 0$$

$$+++\ \textit{Untersuche Loesung Nr. 1 von 1 der Ordnung 2}\ +++$$

$$\textit{Die Loesung lautet } :, \left\{l_2 = {z_{11}}^2, z_{11} = z_{11}, z_{21} = 0\right\}$$

$$Bekannte\ Werte\ =.[l_1 = 0]$$

$$Determinante\ =\ 0$$

NNNNNNNNNNN Diese Loesung ist nicht bestimmt NNNNNNNNNNNNN

$$Weiter\ bei\ Rechnung\ Nr.\ ,3,\ mit\ den\ Unbekannten\ ,[z_{11}, z_{22}, l_3]$$

`Rechnung Nr. 3`

$$<<<<<<<<<<<<<\ Momentane\ Ordnung\ 3\ >>>>>>>>>>>>>$$

$$T_3\left(z_{11}, z_{22}, l_3\right), :=, \{0, -l_3\} = 0$$

$$+++\ Untersuche\ Loesung\ Nr.\ 1\ von\ 1\ der\ Ordnung\ 3\ +++$$

$$Die\ Loesung\ lautet\ :\ , \{l_3 = 0\}$$

$$Bekannte\ Werte\ =.\left[l_1 = 0, l_2 = {z_{11}}^2, z_{21} = 0\right]$$

$$Determinante\ =\ 0\ und\ , l_3 = 0$$

NNNNNNNNNNN Diese Loesung ist nicht bestimmt NNNNNNNNNNNNN

$$Weiter\ bei\ Rechnung\ Nr.\ ,4,\ mit\ den\ Unbekannten\ ,[z_{11}, z_{22}, l_4]$$

`Rechnung Nr. 4`

$$<<<<<<<<<<<<<\ Momentane\ Ordnung\ 4\ >>>>>>>>>>>>>$$

$$T_4\left(z_{11}, z_{22}, l_4\right), :=, \left\{{z_{11}}^4 - {z_{22}}^2, -{z_{22}}^2 - l_4\right\} = 0$$

$$+++\ Untersuche\ Loesung\ Nr.\ 1\ von\ 2\ der\ Ordnung\ 4\ +++$$

$$Die\ Loesung\ lautet\ :\ , \left\{z_{22} = -{z_{11}}^2, l_4 = -{z_{11}}^4, z_{11} = z_{11}\right\}$$

$$Bekannte\ Werte\ =.\left[l_1 = 0, l_2 = {z_{11}}^2, z_{21} = 0, l_3 = 0\right]$$

$$Determinante\ =.\left(8\,{z_{11}}^5\right)$$

BBBBBBBBBBB Diese Loesung ist bestimmt BBBBBBBBBBBBB

$$Die\ Taylorkoeffizienten\ lauten\ :$$

$$Faktoren\ =.\left\{l_3 = 0, l_1 = 0, z_{22} = -{z_{11}}^2, l_4 = -{z_{11}}^4, l_2 = {z_{11}}^2, z_{11} = z_{11}, z_{21} = 0\right\}$$

$$Die\ Loesungskurve\ lautet\ :$$

$$z_1 = z_{11}\,t, + O.(\,t^2\,)$$

$$z_2 = -{z_{11}}^2\,t^2, + O.(\,t^3\,)$$

$$\lambda = {z_{11}}^2\, t^2 - {z_{11}}^4\, t^4, +O.(\, t^5\,)$$

Test durch Einsetzen in F und Taylorentw. bis zum Grad 4 bzgl. t ergibt :

$$[\,\mathrm{O}(\, t^6\,), 0\,]$$

+++ Untersuche Loesung Nr. 2 von 2 der Ordnung 4 +++

Die Loesung lautet :, $\left\{z_{22} = {z_{11}}^2, l_4 = -{z_{11}}^4, z_{11} = z_{11}\right\}$

Bekannte Werte $=.\left[l_1 = 0, l_2 = {z_{11}}^2, z_{21} = 0, l_3 = 0\right]$

Determinante $=.\left(-8\,{z_{11}}^5\right)$

BBBBBBBBBBB Diese Loesung ist bestimmt BBBBBBBBBBBBB

Die Taylorkoeffizienten lauten :

Faktoren $=.\left\{l_3 = 0, l_1 = 0, z_{22} = {z_{11}}^2, l_4 = -{z_{11}}^4, l_2 = {z_{11}}^2, z_{11} = z_{11}, z_{21} = 0\right\}$

Die Loesungskurve lautet :

$$z_1 = z_{11}\, t, +O.(\, t^2\,)$$

$$z_2 = {z_{11}}^2\, t^2, +O.(\, t^3\,)$$

$$\lambda = {z_{11}}^2\, t^2 - {z_{11}}^4\, t^4, +O.(\, t^5\,)$$

Test durch Einsetzen in F und Taylorentw. bis zum Grad 4 bzgl. t ergibt :

$$[\,\mathrm{O}(\, t^6\,), 0\,]$$

Hoechste angewandte Ordnung = 4

Die Loesungen lauten, $\Big[\left[z_1 = z_{11}\, t, z_2 = -{z_{11}}^2\, t^2, \lambda = {z_{11}}^2\, t^2 - {z_{11}}^4\, t^4\right],$
$\left[z_1 = z_{11}\, t, z_2 = {z_{11}}^2\, t^2, \lambda = {z_{11}}^2\, t^2 - {z_{11}}^4\, t^4\right]\Big]$

5-bestimmtes Beispiel in 2 Zustandsvariablen mit D(6)-Symmetrie

********** **********

```
> z:='z';
> w:=c2+I*c3;wq:=conjugate(w):
> p5:=c1+(c1+l2)*k*(w*wq)-3*l2^2*k2*(w*wq)^2:
> q5:=-3*l2^2*theta:
> b5:=p5*w+q5*wq^5:
```

```
> G:=[evalc(Re(b5)),evalc(Im(b5))]:
> zv:=[z[1],z[2]];
> F:=subs({c2=z[1],c3=z[2],c1=lambda},G);
> feste_parameter := {k,k2,l2,theta};
```

$$z := z$$

$$w := c2 + I\ c3$$

$$zv := [z_1, z_2]$$

$$F := \left[\left(\lambda + (\lambda + l2)\, k\, {z_1}^2 + (\lambda + l2)\, k\, {z_2}^2 - 3\, l2^2\, k2\, \left({z_1}^2 - {z_2}^2\right)^2 - 12\, l2^2\, k2\, {z_1}^2\, {z_2}^2\right) z_1 - 3\, l2^2\, \theta\, \left({z_1}^5 - 10\, {z_1}^3\, {z_2}^2 + 5\, z_1\, {z_2}^4\right),\right.$$
$$\left.\left(\lambda + (\lambda + l2)\, k\, {z_1}^2 + (\lambda + l2)\, k\, {z_2}^2 - 3\, l2^2\, k2\, \left({z_1}^2 - {z_2}^2\right)^2 - 12\, l2^2\, k2\, {z_1}^2\, {z_2}^2\right) z_2 - 3\, l2^2\, \theta\, \left(-5\, {z_1}^4\, z_2 + 10\, {z_1}^2\, {z_2}^3 - {z_2}^5\right)\right]$$

$$feste_parameter := \{\, k, k2, l2, \theta \,\}$$

```
> bestimme(F,1,6,true,true,false,true);
> print('Die Loesungen lauten',Loesungen);
Rechnung Nr. 1
```

$$<<<<<<<<<<<<<\ Momentane\ Ordnung\ 1\ >>>>>>>>>>>>>$$

$$T_1\,(z_{11}, z_{21}, l_1)\,, :=, \{\, 0 \,\} = 0$$

$$Weiter\ bei\ Rechung\ Nr.\,, 2, mit\,, [z_{11}, z_{21}, l_1]$$

```
Rechnung Nr. 2
```

$$<<<<<<<<<<<<<\ Momentane\ Ordnung\ 2\ >>>>>>>>>>>>>$$

$$T_2\,(z_{11}, z_{21}, l_1)\,, :=, \{l_1\, z_{21}, l_1\, z_{11}\} = 0$$

$$+++\ Untersuche\ Loesung\ Nr.\ 1\ von\ 2\ der\ Ordnung\ 2\ +++$$

$$Die\ Loesung\ lautet\ :\,, \{z_{11} = 0, l_1 = l_1, z_{21} = 0\}$$

$$Bekannte\ Werte\ =.[\ ]$$

$$Determinante\ =.\left({l_1}^2\right)$$

$$BBBBBBBBBBB\ Diese\ Loesung\ ist\ bestimmt\ BBBBBBBBBBBBB$$

$$Die\ Taylorkoeffizienten\ lauten\ :$$

$$Faktoren \ = . \{z_{11} = 0, l_1 = l_1, z_{21} = 0\}$$

Die Loesungskurve lautet :

$$z_1 = 0, +O.(t^2)$$

$$z_2 = 0, +O.(t^2)$$

$$\lambda = l_1\, t, +O.(t^2)$$

Test durch Einsetzen in F und Taylorentw. bis zum Grad 2 bzgl. t ergibt :

$$[0, 0]$$

+++ Untersuche Loesung Nr. 2 von 2 der Ordnung 2 +++

Die Loesung lautet : , $\{l_1 = 0, z_{11} = z_{11}, z_{21} = z_{21}\}$

Determinante = 0 und , $l_1 = 0$

NNNNNNNNNN Diese Loesung ist nicht bestimmt NNNNNNNNNNNN

Weiter bei Rechnung Nr. , 3, *mit den Unbekannten* , $[z_{11}, z_{21}, l_2]$

`Rechnung Nr. 3`

<<<<<<<<<<<<< Momentane Ordnung 3 >>>>>>>>>>>>>

$T_3\,(z_{11}, z_{21}, l_2)$, :=,

$$\left\{\frac{1}{2}\left(2\,l_2 + 2\,l2\,k\,{z_{11}}^2 + 2\,l2\,k\,{z_{21}}^2\right)\,z_{11}, \frac{1}{2}\left(2\,l_2 + 2\,l2\,k\,{z_{11}}^2 + 2\,l2\,k\,{z_{21}}^2\right)\,z_{21}\right\}$$

$= 0$

+++ Untersuche Loesung Nr. 1 von 3 der Ordnung 3 +++

Die Loesung lautet : , $\{l_2 = l_2, z_{11} = 0, z_{21} = 0\}$

Bekannte Werte = . $[l_1 = 0]$

Determinante = . $\left({l_2}^2\right)$

BBBBBBBBBBB Diese Loesung ist bestimmt BBBBBBBBBBBBB

Die Taylorkoeffizienten lauten :

$$Faktoren \ = . \{l_2 = l_2, l_1 = 0, z_{11} = 0, z_{21} = 0\}$$

Die Loesungskurve lautet :

$$z_1 = 0, + O.(t^2)$$

$$z_2 = 0, + O.(t^2)$$

$$\lambda = l_2\, t^2, + O.(t^3)$$

Test durch Einsetzen in F und Taylorentw. bis zum Grad 3 bzgl. t ergibt :

$$[0, 0]$$

+++ Untersuche Loesung Nr. 2 von 3 der Ordnung 3 +++

$$\left\{l_2 = -l2\ k\ {z_{21}}^2, z_{11} = 0, z_{21} = z_{21}\right\}, \textit{ist Subloesung von ,}$$
$$\left\{l_2 = -l2\ k\ {z_{11}}^2 - l2\ k\ {z_{21}}^2, z_{11} = z_{11}, z_{21} = z_{21}\right\}$$

+++ Untersuche Loesung Nr. 3 von 3 der Ordnung 3 +++

$$\textit{Die Loesung lautet :}, \left\{l_2 = -l2\ k\ {z_{11}}^2 - l2\ k\ {z_{21}}^2, z_{11} = z_{11}, z_{21} = z_{21}\right\}$$

$$\textit{Bekannte Werte } = . [l_1 = 0]$$

$$\textit{Determinante } = 0$$

NNNNNNNNNNN Diese Loesung ist nicht bestimmt NNNNNNNNNNNNN

$$\textit{Weiter bei Rechnung Nr. }, 4, \textit{mit den Unbekannten }, [z_{11}, z_{21}, l_3]$$

`Rechnung Nr. 4`

<<<<<<<<<<<<< Momentane Ordnung 4 >>>>>>>>>>>>>

$$T_4\,(z_{11}, z_{21}, l_3)\,, :=, \{l_3\ z_{21}, l_3\ z_{11}\} = 0$$

+++ Untersuche Loesung Nr. 1 von 2 der Ordnung 4 +++

$$\textit{Die Loesung lautet :}, \{z_{11} = 0, l_3 = l_3, z_{21} = 0\}$$

$$\textit{Bekannte Werte } = . \left[l_1 = 0, l_2 = -l2\ k\ {z_{11}}^2 - l2\ k\ {z_{21}}^2\right]$$

$$\textit{Determinante } = . \left({l_3}^2\right)$$

BBBBBBBBBBB Diese Loesung ist bestimmt BBBBBBBBBBBBB

Die Taylorkoeffizienten lauten :

$$\textit{Faktoren } = . \left\{l_2 = -l2\ k\ {z_{11}}^2 - l2\ k\ {z_{21}}^2, l_1 = 0, z_{11} = 0, l_3 = l_3, z_{21} = 0\right\}$$

Die Loesungskurve lautet :

$$z_1 = 0, + O.(t^2)$$

$$z_2 = 0, +O.(t^2)$$

$$\lambda = l_3\, t^3, +O.(t^4)$$

Test durch Einsetzen in F und Taylorentw. bis zum Grad 4 bzgl. t ergibt :

$$[0, 0]$$

+++ Untersuche Loesung Nr. 2 von 2 der Ordnung 4 +++

Die Loesung lautet :, $\{z_{11} = z_{11}, z_{21} = z_{21}, l_3 = 0\}$

Bekannte Werte $= . \left[l_1 = 0, l_2 = -l2\ k\ {z_{11}}^2 - l2\ k\ {z_{21}}^2\right]$

Determinante = 0 und $, l_3 = 0$

NNNNNNNNNNN Diese Loesung ist nicht bestimmt NNNNNNNNNNNN

Weiter bei Rechnung Nr. $, 5,$ *mit den Unbekannten* $, [z_{11}, z_{21}, l_4]$

`Rechnung Nr. 5`

<<<<<<<<<<<<< Momentane Ordnung 5 >>>>>>>>>>>>>

$$T_5\,(z_{11}, z_{21}, l_4)\,, :=, \left\{\frac{1}{24}\left(24\,l_4 + 12\,\%1\,k\,{z_{11}}^2 + 12\,\%1\,k\,{z_{21}}^2 - 18\,l2^2\,k2\,\left(2\,{z_{11}}^2 - 2\,{z_{21}}^2\right)^2 - 288\,l2^2\,k2\,{z_{11}}^2\,{z_{21}}^2\right) z_{11} - \frac{1}{40}\,l2^2\,\theta\,\left(120\,{z_{11}}^5 - 1200\,{z_{11}}^3\,{z_{21}}^2 + 600\,z_{11}\,{z_{21}}^4\right), \frac{1}{24}\left(24\,l_4 + 12\,\%1\,k\,{z_{11}}^2 + 12\,\%1\,k\,{z_{21}}^2 - 18\,l2^2\,k2\,\left(2\,{z_{11}}^2 - 2\,{z_{21}}^2\right)^2 - 288\,l2^2\,k2\,{z_{11}}^2\,{z_{21}}^2\right) z_{21} - \frac{1}{40}\,l2^2\,\theta\,\left(-600\,{z_{11}}^4\,z_{21} + 1200\,{z_{11}}^2\,{z_{21}}^3 - 120\,{z_{21}}^5\right)\right\} = 0$$

$$\%1 := -2\,l2\,k\,{z_{11}}^2 - 2\,l2\,k\,{z_{21}}^2$$

+++ Untersuche Loesung Nr. 1 von 7 der Ordnung 5 +++

Die Loesung lautet :,

$$\left\{z_{21} = \sqrt{3}\,z_{11}, l_4 = 16\,k^2\,{z_{11}}^4\,l2 + 48\,l2^2\,k2\,{z_{11}}^4 + 48\,l2^2\,\theta\,{z_{11}}^4, z_{11} = z_{11}\right\}$$

Bekannte Werte $= . \left[l_1 = 0, l_2 = -l2\ k\ {z_{11}}^2 - l2\ k\ {z_{21}}^2, l_3 = 0\right]$

Determinante $= . \left(-18432\,k^2\,{z_{11}}^8\,l2^3\,\theta - 55296\,l2^4\,k2\,{z_{11}}^8\,\theta - 55296\,l2^4\,\theta^2\,{z_{11}}^8\right)$

BBBBBBBBBBB Diese Loesung ist bestimmt BBBBBBBBBBBBB

Die Taylorkoeffizienten lauten :

$$\textit{Faktoren } = . \left\{ z_{21} = \sqrt{3}\, z_{11}, l_2 = -l2\, k\, {z_{11}}^2 - l2\, k\, {z_{21}}^2, \right.$$
$$\left. l_4 = 16\, k^2\, {z_{11}}^4\, l2 + 48\, l2^2\, k2\, {z_{11}}^4 + 48\, l2^2\, \theta\, {z_{11}}^4, l_1 = 0, z_{11} = z_{11}, l_3 = 0 \right\}$$

Die Loesungskurve lautet :

$$z_1 = z_{11}\, t, + O.(\, t^2\,)$$

$$z_2 = \sqrt{3}\, z_{11}\, t, + O.(\, t^2\,)$$

$$\lambda = -4\, l2\, k\, {z_{11}}^2\, t^2 + \left(16\, k^2\, {z_{11}}^4\, l2 + 48\, l2^2\, k2\, {z_{11}}^4 + 48\, l2^2\, \theta\, {z_{11}}^4\right)\, t^4, + O.(\, t^5\,)$$

Test durch Einsetzen in F und Taylorentw. bis zum Grad 5 bzgl. t ergibt :

$$[\, \mathrm{O}(\, t^7\,), \mathrm{O}(\, t^7\,)\,]$$

+++ Untersuche Loesung Nr. 2 von 7 der Ordnung 5 +++

Die Loesung lautet :,

$$\left\{ l_4 = \frac{16}{9}\, k^2\, {z_{11}}^4\, l2 + \frac{16}{3}\, l2^2\, k2\, {z_{11}}^4 - \frac{16}{3}\, l2^2\, \theta\, {z_{11}}^4, z_{11} = z_{11}, z_{21} = -\frac{1}{3}\, \sqrt{3}\, z_{11} \right\}$$

Bekannte Werte $= . \left[l_1 = 0, l_2 = -l2\, k\, {z_{11}}^2 - l2\, k\, {z_{21}}^2, l_3 = 0 \right]$

$$\textit{Determinante } = . \left(\frac{2048}{9}\, k^2\, {z_{11}}^8\, l2^3\, \theta + \frac{2048}{3}\, l2^4\, k2\, {z_{11}}^8\, \theta - \frac{2048}{3}\, l2^4\, \theta^2\, {z_{11}}^8 \right)$$

BBBBBBBBBBB Diese Loesung ist bestimmt BBBBBBBBBBBBB

Die Taylorkoeffizienten lauten :

$$\textit{Faktoren } = . \left\{ l_2 = -l2\, k\, {z_{11}}^2 - l2\, k\, {z_{21}}^2, \right.$$
$$l_4 = \frac{16}{9}\, k^2\, {z_{11}}^4\, l2 + \frac{16}{3}\, l2^2\, k2\, {z_{11}}^4 - \frac{16}{3}\, l2^2\, \theta\, {z_{11}}^4, l_1 = 0, z_{11} = z_{11}, l_3 = 0,$$
$$\left. z_{21} = -\frac{1}{3}\, \sqrt{3}\, z_{11} \right\}$$

Die Loesungskurve lautet :

$$z_1 = z_{11}\, t, + O.(\, t^2\,)$$

$$z_2 = -\frac{1}{3}\sqrt{3}\,z_{11}\,t, +O.(t^2)$$

$$\lambda = -\frac{4}{3}\,l2\,k\,{z_{11}}^2\,t^2 + \left(\frac{16}{9}\,k^2\,{z_{11}}^4\,l2 + \frac{16}{3}\,l2^2\,k2\,{z_{11}}^4 - \frac{16}{3}\,l2^2\,\theta\,{z_{11}}^4\right)\,t^4, +O.(t^5)$$

Test durch Einsetzen in F und Taylorentw. bis zum Grad 5 bzgl. t ergibt :

$$[\,\mathrm{O}(t^7), \mathrm{O}(t^7)\,]$$

+++ Untersuche Loesung Nr. 3 von 7 der Ordnung 5 +++

Die Loesung lautet : ,

$$\left\{z_{21} = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,z_{11}, l_4 = \frac{16}{9}\,k^2\,{z_{11}}^4\,l2 + \frac{16}{3}\,l2^2\,k2\,{z_{11}}^4 - \frac{16}{3}\,l2^2\,\theta\,{z_{11}}^4, z_{11} = z_{11}\right\}$$

Bekannte Werte $= . \left[l_1 = 0, l_2 = -l2\,k\,{z_{11}}^2 - l2\,k\,{z_{21}}^2, l_3 = 0\right]$

Determinante $= . \left(\frac{2048}{9}\,k^2\,{z_{11}}^8\,l2^3\,\theta + \frac{2048}{3}\,l2^4\,k2\,{z_{11}}^8\,\theta - \frac{2048}{3}\,l2^4\,\theta^2\,{z_{11}}^8\right)$

BBBBBBBBBBB Diese Loesung ist bestimmt BBBBBBBBBBBBB

Die Taylorkoeffizienten lauten :

Faktoren $= . \left\{z_{21} = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,z_{11}, l_2 = -l2\,k\,{z_{11}}^2 - l2\,k\,{z_{21}}^2,\right.$

$\left. l_4 = \frac{16}{9}\,k^2\,{z_{11}}^4\,l2 + \frac{16}{3}\,l2^2\,k2\,{z_{11}}^4 - \frac{16}{3}\,l2^2\,\theta\,{z_{11}}^4, l_1 = 0, z_{11} = z_{11}, l_3 = 0\right\}$

Die Loesungskurve lautet :

$$z_1 = z_{11}\,t, +O.(t^2)$$

$$z_2 = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,z_{11}\,t, +O.(t^2)$$

$$\lambda = -\frac{4}{3}\,l2\,k\,{z_{11}}^2\,t^2 + \left(\frac{16}{9}\,k^2\,{z_{11}}^4\,l2 + \frac{16}{3}\,l2^2\,k2\,{z_{11}}^4 - \frac{16}{3}\,l2^2\,\theta\,{z_{11}}^4\right)\,t^4, +O.(t^5)$$

Test durch Einsetzen in F und Taylorentw. bis zum Grad 5 bzgl. t ergibt :

$$[\,\mathrm{O}(t^7), \mathrm{O}(t^7)\,]$$

+++ Untersuche Loesung Nr. 4 von 7 der Ordnung 5 +++

Die Loesung lautet : , $\left\{l_4 = k^2\,{z_{11}}^4\,l2 + 3\,l2^2\,k2\,{z_{11}}^4 + 3\,l2^2\,\theta\,{z_{11}}^4, z_{11} = z_{11}, z_{21} = 0\right\}$

Bekannte Werte $= . \left[l_1 = 0, l_2 = -l2\,k\,{z_{11}}^2 - l2\,k\,{z_{21}}^2, l_3 = 0\right]$

Determinante $=.$

$$\left(18\left(\frac{1}{24}\left(-96\,l2\,k^2\,{z_{11}}^3-288\,l2^2\,k2\,{z_{11}}^3\right)\,z_{11}-12\,l2^2\,\theta\,{z_{11}}^4\right)\,l2^2\,\theta\,{z_{11}}^4\right)$$

BBBBBBBBBBB Diese Loesung ist bestimmt BBBBBBBBBBBBB

Die Taylorkoeffizienten lauten :

$$\textit{Faktoren} =.\left\{l_4=k^2\,{z_{11}}^4\,l2+3\,l2^2\,k2\,{z_{11}}^4+3\,l2^2\,\theta\,{z_{11}}^4,l_2=-l2\,k\,{z_{11}}^2-l2\,k\,{z_{21}}^2,\right.$$
$$\left.l_1=0,z_{11}=z_{11},l_3=0,z_{21}=0\right\}$$

Die Loesungskurve lautet :

$$z_1=z_{11}\,t,+O.(t^2)$$

$$z_2=0,+O.(t^2)$$

$$\lambda=-l2\,k\,{z_{11}}^2\,t^2+\left(k^2\,{z_{11}}^4\,l2+3\,l2^2\,k2\,{z_{11}}^4+3\,l2^2\,\theta\,{z_{11}}^4\right)\,t^4,+O.(t^5)$$

Test durch Einsetzen in F und Taylorentw. bis zum Grad 5 bzgl. t ergibt :

$$[\,\mathrm{O}(t^7),0\,]$$

+++ Untersuche Loesung Nr. 5 von 7 der Ordnung 5 +++

$$\textit{Die Loesung lautet :},\left\{l_4=k^2\,{z_{21}}^4\,l2+3\,l2^2\,k2\,{z_{21}}^4-3\,l2^2\,\theta\,{z_{21}}^4,z_{11}=0,z_{21}=z_{21}\right\}$$

$$\textit{Bekannte Werte} =.\left[l_1=0,l_2=-l2\,k\,{z_{11}}^2-l2\,k\,{z_{21}}^2,l_3=0\right]$$

Determinante $=.$

$$\left(-18\,l2^2\,\theta\,{z_{21}}^4\left(\frac{1}{24}\left(-96\,l2\,k^2\,{z_{21}}^3-288\,l2^2\,k2\,{z_{21}}^3\right)\,z_{21}+12\,l2^2\,\theta\,{z_{21}}^4\right)\right)$$

BBBBBBBBBBB Diese Loesung ist bestimmt BBBBBBBBBBBBB

Die Taylorkoeffizienten lauten :

$$\textit{Faktoren} =.\left\{l_4=k^2\,{z_{21}}^4\,l2+3\,l2^2\,k2\,{z_{21}}^4-3\,l2^2\,\theta\,{z_{21}}^4,l_2=-l2\,k\,{z_{11}}^2-l2\,k\,{z_{21}}^2,\right.$$
$$\left.l_1=0,z_{11}=0,z_{21}=z_{21},l_3=0\right\}$$

Die Loesungskurve lautet :

$$z_1=0,+O.(t^2)$$

$$z_2=z_{21}\,t,+O.(t^2)$$

$$\lambda = -l2\, k\, {z_{21}}^2\, t^2 + \left(k^2\, {z_{21}}^4\, l2 + 3\, l2^2\, k2\, {z_{21}}^4 - 3\, l2^2\, \theta\, {z_{21}}^4\right)\, t^4, +O.(\, t^5\,)$$

Test durch Einsetzen in F und Taylorentw. bis zum Grad 5 bzgl. t ergibt :

$$[\, 0, \mathrm{O}(\, t^7\,)\,]$$

+++ Untersuche Loesung Nr. 6 von 7 der Ordnung 5 +++

Die Loesung lautet :, $\{l_4 = l_4, z_{11} = 0, z_{21} = 0\}$

Bekannte Werte $= .\, \left[l_1 = 0, l_2 = -l2\, k\, {z_{11}}^2 - l2\, k\, {z_{21}}^2, l_3 = 0\right]$

Determinante $= .\, \left({l_4}^2\right)$

BBBBBBBBBBB Diese Loesung ist bestimmt BBBBBBBBBBBBB

Die Taylorkoeffizienten lauten :

Faktoren $= .\, \left\{l_2 = -l2\, k\, {z_{11}}^2 - l2\, k\, {z_{21}}^2, l_4 = l_4, l_1 = 0, z_{11} = 0, l_3 = 0, z_{21} = 0\right\}$

Die Loesungskurve lautet :

$$z_1 = 0, +O.(\, t^2\,)$$

$$z_2 = 0, +O.(\, t^2\,)$$

$$\lambda = l_4\, t^4, +O.(\, t^5\,)$$

Test durch Einsetzen in F und Taylorentw. bis zum Grad 5 bzgl. t ergibt :

$$[\, 0, 0\,]$$

+++ Untersuche Loesung Nr. 7 von 7 der Ordnung 5 +++

Die Loesung lautet :,

$$\left\{l_4 = 16\, k^2\, {z_{11}}^4\, l2 + 48\, l2^2\, k2\, {z_{11}}^4 + 48\, l2^2\, \theta\, {z_{11}}^4, z_{21} = -\sqrt{3}\, z_{11}, z_{11} = z_{11}\right\}$$

Bekannte Werte $= .\, \left[l_1 = 0, l_2 = -l2\, k\, {z_{11}}^2 - l2\, k\, {z_{21}}^2, l_3 = 0\right]$

Determinante $= .\, \left(-18432\, k^2\, {z_{11}}^8\, l2^3\, \theta - 55296\, l2^4\, k2\, {z_{11}}^8\, \theta - 55296\, l2^4\, \theta^2\, {z_{11}}^8\right)$

BBBBBBBBBBB Diese Loesung ist bestimmt BBBBBBBBBBBBB

Die Taylorkoeffizienten lauten :

Faktoren $= .\, \Big\{l_2 = -l2\, k\, {z_{11}}^2 - l2\, k\, {z_{21}}^2,$

$l_4 = 16\, k^2\, {z_{11}}^4\, l2 + 48\, l2^2\, k2\, {z_{11}}^4 + 48\, l2^2\, \theta\, {z_{11}}^4, z_{21} = -\sqrt{3}\, z_{11}, l_1 = 0,$

$$z_{11} = z_{11}, l_3 = 0\Big\}$$

Die Loesungskurve lautet :

$$z_1 = z_{11}\, t, +O.(t^2)$$

$$z_2 = -\sqrt{3}\, z_{11}\, t, +O.(t^2)$$

$$\lambda = -4\, l2\, k\, {z_{11}}^2\, t^2 + \left(16\, k^2\, {z_{11}}^4\, l2 + 48\, l2^2\, k2\, {z_{11}}^4 + 48\, l2^2\, \theta\, {z_{11}}^4\right)\, t^4, +O.(t^5)$$

Test durch Einsetzen in F und Taylorentw. bis zum Grad 5 bzgl. t ergibt :

$$[\,\mathrm{O}(t^7), \mathrm{O}(t^7)\,]$$

Hoechste angewandte Ordnung = 5

Die Loesungen lauten, $\Big[[z_1 = 0, z_2 = 0, \lambda = l_1\, t]\,, [z_1 = 0, z_2 = 0, \lambda = l_2\, t^2]\,,$
$[z_1 = 0, z_2 = 0, \lambda = l_3\, t^3]\,,$
$[\%6, z_2 = \%5, \lambda = -4\,\%4 + (\,16\,\%3 + 48\,\%2 + 48\,\%1\,)\, t^4]\,,$
$\left[\%6, z_2 = -\frac{1}{3}\,\%5, \lambda = -\frac{4}{3}\,\%4 + \left(\frac{16}{9}\,\%3 + \frac{16}{3}\,\%2 - \frac{16}{3}\,\%1\right)\, t^4\right],$
$\left[\%6, z_2 = \frac{1}{3}\,\%5, \lambda = -\frac{4}{3}\,\%4 + \left(\frac{16}{9}\,\%3 + \frac{16}{3}\,\%2 - \frac{16}{3}\,\%1\right)\, t^4\right],$
$[\%6, z_2 = 0, \lambda = -\%4 + (\,\%3 + 3\,\%2 + 3\,\%1\,)\, t^4]\,, \Big[$
$z_1 = 0, z_2 = z_{21}\, t, \lambda = -l2\, k\, {z_{21}}^2\, t^2 + \left(k^2\, {z_{21}}^4\, l2 + 3\, l2^2\, k2\, {z_{21}}^4 - 3\, l2^2\, \theta\, {z_{21}}^4\right)\, t^4\Big]$
$, [z_1 = 0, z_2 = 0, \lambda = l_4\, t^4]\,,$
$[\%6, z_2 = -\%5, \lambda = -4\,\%4 + (\,16\,\%3 + 48\,\%2 + 48\,\%1\,)\, t^4]\Big]$

$\%1 := l2^2\, \theta\, {z_{11}}^4$
$\%2 := l2^2\, k2\, {z_{11}}^4$
$\%3 := k^2\, {z_{11}}^4\, l2$
$\%4 := l2\, k\, {z_{11}}^2\, t^2$
$\%5 := \sqrt{3}\, z_{11}\, t$
$\%6 := z_1 = z_{11}\, t$

3-bestimmtes Beispiel in 2 Zustandsvariablen mit D(3)-Symmetrie

********** ******

```
> zv:=[z[1],z[2]];
```

```
> F:=[(sigma*lambda+epsilon*zv[1])*zv[1]+(alpha+delta*z
> v[1]+b*zv[2])*zv[2],
>        (sigma*lambda+epsilon*zv[1])*zv[2]+5/(49*Pi)*(alph
> a+delta*zv[1]+b*zv[2])*zv[1]^2];
> feste_parameter := {b,alpha,epsilon,sigma,delta};
```

$$zv := [z_1, z_2]$$

$$F := \left[(\sigma\,\lambda + \varepsilon\,z_1)\;z_1 + (\alpha + \delta\,z_1 + b\,z_2)\;z_2,\ (\sigma\,\lambda + \varepsilon\,z_1)\;z_2 + \frac{5}{49}\,\frac{(\alpha + \delta\,z_1 + b\,z_2)\;{z_1}^2}{\pi} \right]$$

$$feste_parameter := \{\, b, \alpha, \delta, \varepsilon, \sigma \,\}$$

```
> bestimme(F,1,6,true,true,false,true);
> print(‘Die Loesungen lauten‘,Loesungen);
Rechnung Nr. 1
```

$$<<<<<<<<<<<<<\ \textit{Momentane Ordnung 1}\ >>>>>>>>>>>>>$$

$$T_1\,(z_{11}, z_{21}, l_1)\,, :=, \{0, \alpha\,z_{21}\} = 0$$

$$+++\ \textit{Untersuche Loesung Nr. 1 von 1 der Ordnung 1}\ +++$$

$$\textit{Die Loesung lautet}\ :\,, \{z_{21} = 0\}$$

$$\textit{Determinante}\ =\ 0$$

$$\textit{NNNNNNNNNN Diese Loesung ist nicht bestimmt NNNNNNNNNNNN}$$

$$\textit{Weiter bei Rechnung Nr.}\,, 2, \textit{mit den Unbekannten}\,, [z_{11}, z_{22}, l_1]$$

```
Rechnung Nr. 2
```

$$<<<<<<<<<<<<<\ \textit{Momentane Ordnung 2}\ >>>>>>>>>>>>>$$

$$T_2\,(z_{11}, z_{22}, l_1)\,, :=, \left\{ \frac{5}{49}\,\frac{\alpha\,{z_{11}}^2}{\pi}, (\sigma\,l_1 + \varepsilon\,z_{11})\;z_{11} + \alpha\,z_{22} \right\} = 0$$

$$+++\ \textit{Untersuche Loesung Nr. 1 von 1 der Ordnung 2}\ +++$$

$$\textit{Die Loesung lautet}\ :\,, \{l_1 = l_1, z_{11} = 0, z_{22} = 0\}$$

$$\textit{Bekannte Werte}\ =\,. [z_{21} = 0]$$

$$\textit{Determinante}\ =\ 0$$

NNNNNNNNNNN Diese Loesung ist nicht bestimmt NNNNNNNNNNNNN

Weiter bei Rechnung Nr. , 3, *mit den Unbekannten* , $[z_{12}, z_{23}, l_1]$

`Rechnung Nr. 3`

<<<<<<<<<<<<< Momentane Ordnung 3 >>>>>>>>>>>>>

$$T_3\left(z_{12}, z_{23}, l_1\right), :=, \left\{0, \sigma\, l_1\, z_{12} + \alpha\, z_{23}\right\} = 0$$

+++ Untersuche Loesung Nr. 1 von 1 der Ordnung 3 +++

$$\textit{Die Loesung lautet} : , \left\{l_1 = l_1, z_{23} = -\frac{\sigma\, l_1\, z_{12}}{\alpha}, z_{12} = z_{12}\right\}$$

$$\textit{Bekannte Werte } = . \left[z_{21} = 0, z_{11} = 0, z_{22} = 0\right]$$

$$\textit{Determinante } = \textit{ 0}$$

NNNNNNNNNNN Diese Loesung ist nicht bestimmt NNNNNNNNNNNNN

Weiter bei Rechnung Nr. , 4, *mit den Unbekannten* , $[z_{12}, z_{24}, l_1]$

`Rechnung Nr. 4`

<<<<<<<<<<<<< Momentane Ordnung 4 >>>>>>>>>>>>>

$$T_4\left(z_{12}, z_{24}, l_1\right), :=, \left\{\varepsilon\, {z_{12}}^2 + \alpha\, z_{24}, -\frac{\sigma^2\, {l_1}^2\, z_{12}}{\alpha} + \frac{5}{49}\,\frac{\alpha\, {z_{12}}^2}{\pi}\right\} = 0$$

+++ Untersuche Loesung Nr. 1 von 2 der Ordnung 4 +++

$$\textit{Die Loesung lautet} : , \left\{l_1 = l_1, z_{24} = 0, z_{12} = 0\right\}$$

$$\textit{Bekannte Werte } = . \left[z_{21} = 0, z_{11} = 0, z_{22} = 0, z_{23} = -\frac{\sigma\, l_1\, z_{12}}{\alpha}\right]$$

$$\textit{Determinante } = . \left(\sigma^2\, {l_1}^2\right)$$

BBBBBBBBBBB Diese Loesung ist bestimmt BBBBBBBBBBBBB

Die Taylorkoeffizienten lauten :

$$\textit{Faktoren } = . \left\{l_1 = l_1, z_{11} = 0, z_{23} = -\frac{\sigma\, l_1\, z_{12}}{\alpha}, z_{22} = 0, z_{21} = 0, z_{24} = 0, z_{12} = 0\right\}$$

Die Loesungskurve lautet :

$$z_1 = 0, + O.\left(t^3\right)$$

$$z_2 = 0, + O.\left(t^5\right)$$

$$\lambda = l_1\, t, + O.(\, t^2\,)$$

Test durch Einsetzen in F und Taylorentw. bis zum Grad 4 bzgl. t ergibt :

$$[\, 0, 0\,]$$

+++ Untersuche Loesung Nr. 2 von 2 der Ordnung 4 +++

$$\textit{Die Loesung lautet :}, \left\{ l_1 = l_1, z_{12} = \frac{49}{5}\,\frac{\sigma^2\, {l_1}^2\,\pi}{\alpha^2}, z_{24} = -\,\frac{2401}{25}\,\frac{\varepsilon\,\sigma^4\,{l_1}^4\,\pi^2}{\alpha^5} \right\}$$

$$\textit{Bekannte Werte } = . \left[z_{21} = 0, z_{11} = 0, z_{22} = 0, z_{23} = -\,\frac{\sigma\, l_1\, z_{12}}{\alpha} \right]$$

$$\textit{Determinante } = . \left(-\sigma^2\, {l_1}^2\right)$$

BBBBBBBBBBB Diese Loesung ist bestimmt BBBBBBBBBBBBB

Die Taylorkoeffizienten lauten :

$$\textit{Faktoren } = . \left\{ l_1 = l_1, z_{11} = 0, z_{23} = -\,\frac{\sigma\, l_1\, z_{12}}{\alpha}, z_{22} = 0, z_{21} = 0, z_{12} = \frac{49}{5}\,\frac{\sigma^2\, {l_1}^2\,\pi}{\alpha^2}, \right.$$
$$\left. z_{24} = -\,\frac{2401}{25}\,\frac{\varepsilon\,\sigma^4\,{l_1}^4\,\pi^2}{\alpha^5} \right\}$$

Die Loesungskurve lautet :

$$z_1 = \frac{49}{5}\,\frac{\sigma^2\, {l_1}^2\,\pi\, t^2}{\alpha^2}, + O.(\, t^3\,)$$
$$z_2 = -\,\frac{49}{5}\,\frac{\sigma^3\, {l_1}^3\,\pi\, t^3}{\alpha^3} - \frac{2401}{25}\,\frac{\varepsilon\,\sigma^4\,{l_1}^4\,\pi^2\, t^4}{\alpha^5}, + O.(\, t^5\,)$$
$$\lambda = l_1\, t, + O.(\, t^2\,)$$

Test durch Einsetzen in F und Taylorentw. bis zum Grad 4 bzgl. t ergibt :

$$[\, \mathrm{O}(\, t^5\,), \mathrm{O}(\, t^5\,)\,]$$

$$\textit{Hoechste angewandte Ordnung } = \textit{ 4}$$

$$\textit{Die Loesungen lauten}, \left[[z_1 = 0, z_2 = 0, \lambda = l_1\, t]\,, \right.$$
$$\left. \left[z_1 = \frac{49}{5}\,\frac{\sigma^2\, {l_1}^2\,\pi\, t^2}{\alpha^2}, z_2 = -\,\frac{49}{5}\,\frac{\sigma^3\, {l_1}^3\,\pi\, t^3}{\alpha^3} - \frac{2401}{25}\,\frac{\varepsilon\,\sigma^4\,{l_1}^4\,\pi^2\, t^4}{\alpha^5}, \lambda = l_1\, t \right] \right]$$

>

Anhang C

Erkennung von äquivalenten Approximationen

In diesem Kapitel wird ein Maple V, Release 3 Programm vorgestellt, das in der Lage ist, äquivalente Kurvenapproximationen zu erkennen. Dazu wird, wenn möglich, explizit eine geeignete Parametertransformation $\beta(t)$ berechnet, die nach Definition 2.5.2, Seite 53, die erste Kurve, bis auf Terme höherer Ordnung, in die zweite Kurve überführt.

Kann keine Parametertransformation $\beta(t)$ für die erste Komponente gefunden werden, so wird ausgegeben

Die Kurven sind nicht aequivalent

Es gibt keine Parametrisierung fuer die erste Kompenente

Falls eine Parametertransformation $\beta(t)$ für die erste Komponente gefunden werden konnte, aber die zweite Komponente nicht übereinstimmt, so wird ausgegeben:

Die Kurven sind nicht aequivalent

Die zweite Komponente stimmt nicht ueberein

Maple V / Release 3 - Prozedurbeschreibungen:

Die deutschen Buchstaben ä, ü, ö, Ä, Ö, Ü sind aus programmtechnischen Gründen durch ae, ue, oe, Ae, Oe, Ue ersetzt worden. Ebenso sind die überflüssigen Kommas und Punkte zwischen Formeln und Textteilen in der Ausgabe auf Maple zurückzuführen. Hier ist es nicht möglich, Strings und mathematische Ausdrücke ohne Punkte oder Kommas getrennt auszugeben.

'aequivalent' ueberprueft, ob die Kurven 'l1' und 'l2' aequivalent sind.

Falls l1 zu l2 transformiert werden kann, so wird die Parametertransformation ausgegeben.

```
> aequivalent:=proc(l1,l2)
> local i,l1b,beta;
>   l1b := subs(t=sum(beta[i]*t^i,i=1..max(degree(l2[1],t),degree(l2[2],t))),l
> 1[1]);
>   l1b := convert(series(l1b,t,degree(l2[1],t)+1),polynom);
>   if match(l2[1]=l1b,t,'s') then
>     subs(t=sum(beta[i]*t^i,i=1..degree(l2[2],t)),l1[2]);
>     subs(s,");
>     convert(series(",t,degree(l2[2])+1),polynom);
>     if match(l2[2]=",t,'s2') then
>       print(`Die Kurven sind aequivalent.`);
>       print(`Die Parametrisierung lautet: b(t)=`,subs({(beta[r]=0)$r=1..100}
> ,subs(s2,subs(s,sum(beta[i]*t^i,i=1..degree(l2[2],t)+1)))));
>       RETURN(true);
>     else
>       print(`Die Kurven sind nicht aequivalent.`);
>       print(`Die zweite Komponente stimmt nicht ueberein.`);
>       RETURN(false);
>     fi;
>   else
>     print(`Die Kurven sind nicht aequivalent.`);
>     print(`Es gibt keine Parametrisierung fuer die erste Kompenente.`);
>     RETURN(false);
>   fi;
> end:
```

Approximationen der Kurven von: $(z-l)^2 - z^4 = 0$

```
> aequivalent([t,t-t^2],[t-t^2,t]);
> aequivalent([t,t+t^2],[t+t^2,t]);
```

Die Kurven sind aequivalent

Die Parametrisierung lautet : $b(t) =, t - t^2$

true

Die Kurven sind aequivalent

Die Parametrisierung lautet : $b(t) =, t + t^2$

true

Approximationen der Kurven von: $(z-l)^2 - z^3 = 0$

```
> aequivalent([t^2,t^2+t^3],[t^2+t^3,t^2]);
```

Die Kurven sind aequivalent

Die Parametrisierung lautet : $b(t) =, -t - \frac{1}{2}t^2$

true

Approximationen der Kurven von: $z - l = 0$

```
> aequivalent([t,t],[t^2,t^2]);
```

Die Kurven sind aequivalent

Die Parametrisierung lautet : $b(t) =, t^2$

true

Zwei nicht aequivalente Approximationen

```
> aequivalent([t^2+t^4,t^3],[t^2,-t^3+t^4]);
```

Die Kurven sind aequivalent

Die Parametrisierung lautet : $b(t) =, -t + \frac{1}{3}t^2$

true

Zwei aequivalente Approximationen

```
> aequivalent([2*t,t-t^2],[t,t-t^2]);
```

Die Kurven sind nicht aequivalent

Die zweite Komponente stimmt nicht ueberein

false

Zwei aequivalente Approximationen

```
> aequivalent([t^2,t],[t^3,t]);
```

Die Kurven sind nicht aequivalent

Es gibt keine Parametrisierung fuer die erste Kompenente

false

```
>
```

Abbildungsverzeichnis

1.2.1 Newtonscher Knoten 14

2.1.1 Transkritische Verzweigung 26

2.1.2 Doppeltangente 27

2.4.3 Umkehrpunkt: Normalform $\pm z^2 \pm \lambda$ 43

2.4.4 Transkritische Verzweigung: Normalform $\pm z^2 \pm \lambda z$ 45

2.4.5 Pitchfork Verzweigung: Normalform $\pm z^3 \pm \lambda z$ 46

2.4.6 Asymmetrische Kuspe / Neilsche Parabel: Normalform $\pm z^2 \pm \lambda^3$ 48

2.4.7 Singularität $z^7 + z^4\lambda + z^2\lambda^3 + z\lambda^5 + \lambda^9$ 52

3.1.1 Regulärer Punkt: Normalform z 58

3.1.2 Umkehrpunkt: Normalform $\pm z^2 \pm \lambda$ 59

3.1.3 Transkritisch oder isolierter Punkt: Normalform $\pm z^2 \pm \lambda^2$ 60

3.1.4 Hysteresis Punkt: Normalform $\pm z^3 \pm \lambda$ 62

3.1.5 Hysteresis: Normalform $\pm z^{2m+1} \pm \lambda,\ m \in \mathbb{N}$ 63

3.1.6 Umkehrpunkt: Normalform $\pm z^{2m} \pm \lambda,\ m \in \mathbb{N}$ 63

3.1.7 Pitchfork Verzweigung: Normalform $\pm z^3 \pm \lambda z$ 65

3.1.8 Kuspe: Normalform $\pm z^3 \pm \lambda^2$ 66

3.1.9 Dreifache Verzweigung: Normalform $z(z^2 - \lambda^2)$ 67

3.1.10 Asymmetrische Kuspe / Neilsche Parabel: Normalform $\pm z^2 \pm \lambda^3$ 68

3.1.11 Normalform $\pm z^2 \pm \lambda^4$ 69

3.1.12 Normalform $\pm z^4 \pm \lambda z$ 70

3.2.13 Normalform $z(z^2 + \lambda^2)$ 78

3.2.14 Normalform $z(z^2 - \lambda^2)$ 78

3.2.15 Normalform $z^5 + 2mz^3\lambda + d\lambda^2 z$ 80

3.2.16 Normalform $z^3 \pm \lambda^3 z$ 81

3.2.17 Normalform $z^3 + \lambda^4 z$ 82

3.2.18 Normalform $z^3 - \lambda^4 z$ 82

3.2.19 Normalform $-z^7 + z^5 - 2d\lambda z^3 \pm \lambda^2 z$ 86

3.2.20 Normalform $z^7 + z^5 - 2d\lambda z^3 \pm \lambda^2 z$ 87

3.2.21 Normalform $z^7 + \lambda z^3 \pm \lambda^2 z$ 88

3.2.22 Normalform $z^5 + \lambda z^3 + \lambda^3 z$ 89

3.2.23 Normalform $z^5 + \lambda z^3 - \lambda^3 z$ 89

4.3.1 Lösungsstruktur eines 2-dimensionalen Gleichungssystems 109

6.3.1 Eigenwerteverteilung für $\lambda = 270,\ \alpha = 10,\ n = 10$ 161

6.3.2 Einschließende Ellipse für $\lambda = 270,\ \alpha = 10,\ n = 10$ 161

6.3.3 Höhenlinien des Tschebyscheff-Polynoms für $\lambda = 270,\ \alpha = 10,\ n = 10$ . . 163

6.3.4 Eigen- und Ritz-Werte: $\triangle u + \alpha u_x + \lambda u,\ \alpha = 10,\ \lambda = 270$ 178

6.3.5 Konturlinien (log10) von R: $\triangle u + \alpha u_x + \lambda u,\ \alpha = 10,\ \lambda = 270$ 178

6.3.6 Eigen- und Ritz-Werte: West0132 180

6.3.7 Konturlinien (log10) von R: West0132 181

6.3.8 Konturlinien (log10) von R_g mit $g = 10$: West0132 181

6.3.9 Eigen- und Ritz-Werte: West0381 182

6.3.10 Konturlinien (log10) von R: West0381 183

6.3.11 Konturlinien (log10) von R_g mit $g = 2,5$: West0381 183

6.3.12 Eigen- und Ritz-Werte: West0479 185

6.3.13 Konturlinien (log10) von R: West0479 186

6.3.14 Konturlinien (log10) von R_g mit $g = 50$: West0479 186

6.3.15 Eigen- und Ritz-Werte: Gre115 187

6.3.16 Konturlinien (log10) von R: Gre115 188

6.3.17 Konturlinien (log10) von R_g mit $g = 0.8$: Gre115 188

6.3.18 Eigen- und Ritz-Werte: Gre1107 189

6.3.19 Konturlinien (log10) von R: Gre1107 190

6.3.20 Konturlinien (log10) von R_g mit $g = 0.8$: Gre1107 190

7.2.1 Lösungskurve (y_1, λ)-Ansicht 209

7.2.2 Lösungskurve (y_2, λ)-Ansicht 209

7.2.3 Lösungskurve 3D-Ansicht 210

7.2.4 Testfunktion der Lösungskurve 210

7.2.5 Ausschnitt der Testfunktion 211

7.2.6 Ausschnitt der Testfunktion 211

7.2.7 Imaginärteil der Eigenwerte 212

7.2.8 Realteil der Eigenwerte 212

7.2.9 Realteil der Eigenwerte (Ausschnitt) 213

7.2.10 Realteil der Eigenwerte 216

7.2.11 Realteil der Eigenwerte (Ausschnitt) 216

7.2.12 Imaginärteil der Eigenwerte 218

7.2.13 Rechenzeit für Eigenwerte / Krylovdimension 218

Tabellenverzeichnis

3.1.1 Singularitätenordnung ohne vorgegebene Symmetrie, λ-orientiert 73

3.2.2 Singularitätenordnung mit $\mathbb{Z}_2$-Symmetrie, λ-orientiert 90

6.3.1 Bezeichnungen in den Tabellen 176

6.3.2 Beispiel $\triangle u + \alpha u_x + \lambda u = 0$ mit $\alpha = 10$, Grenze $g = -12$, #EWg variiert 176

6.3.3 Trennung der Eigenwerte 180

6.3.4 Beispiel <West0132>, Grenze $g = 10$, #EWg variiert 182

6.3.5 Beispiel <West0381>, Grenze $g = 2,5$, #EWg variiert 185

6.3.6 Beispiel <West0479>, Grenze $g = 50$, #EWg variiert 187

6.3.7 Beispiel <Gre115>, Grenze $g = 0.8$, #EWg variiert 189

6.3.8 Beispiel <Gre1107>, Grenze $g = 0.8$, #EWg variiert 192

6.3.9 Variation der Schranke r_ϵ 192

6.3.10 Variation der Krylov-Dimension m 193

7.2.1 Singuläre Punkte 208

7.2.2 Singuläre Punkte 215

Index

B_j, 35, 98, 115
$D_\lambda F_0$, 111
$D_z F_0$, 111
F_0', 111
Q, 112
R, 165, 167, 168
R_g, 172
T_j, 28, 92
$V(f)$, 10
$\mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$, 14
$\mathbb{C}\langle x \rangle$, 16
$\hat{F}_j$, 115
$\mathcal{M}^k$, 16
$\hat{Q}$, 112
Σ, 164
Θ, 164, 165, 167, 168
Θ_g, 172
$\tilde{f}_j$, 32, 96
λ-bestimmt, 42, 103, 104
ϕ_j, 111
$\hat{\phi}_j$, 111
τ_1, 202
φ^i, 92
φ^i_j, 92
$f + g$, 15
$f \cdot g$, 15
$f^{(k)}$, 15
$f_{(d)}$, 15
$ord\, f$, 15
x_n-allgemein, 18
x_n-allgemein von der Ordnung k, 18
ψ, 23
φ, 23
$k_{i,j}$, 98
k_j, 29
k_j, l_j, 35
l_j, 29

Adaptive λ-Skalierung von Keimen, 41
Adaptive λ-Skalierung von Keimen in $n+1$ Dimensionen, 103
Adaptive λ-Skalierung von Keimen in Banachräumen, 119
Adaptive Skalierung von Keimen, 36
Adaptive Skalierung von Keimen in $n+1$ Dimensionen, 99
äquivalent, 21, 54
affin-algebraische Kurve, 11
affin-algebraischen Kurven, 11
algebraische Komponenten, 12
Algorithmen:
    τ_1, 202
    Adaptive λ-Skalierung von Keimen, 41
    Adaptive λ-Skalierung von Keimen in $n+1$ Dimensionen, 103
    Adaptive λ-Skalierung von Keimen in Banachräumen, 119
    Adaptive Skalierung von Keimen, 36
    Adaptive Skalierung von Keimen in $n+1$ Dimensionen, 99
    Arnoldi, 145
    Arnoldi-Prozeß mit iterativer Verbes-

serung, 145
Arnoldi-Prozeß, 144
Arnoldi-Verfahren, 147
Arnoldi-Verfahren für Eigenwerte , 147
Arnoldi-Verfahren-EW, 147
Berechnung von $p_l(A)v_0$, 152
Berechnung von $R(A)v$, 170
Fortsetzungsverfahren mit Testfunktion, 204
Grenze, 174
Impliziter-Arnoldi-Neustart-A, 157
Impliziter-Arnoldi-Neustart-B, 157
Iter-Ritz-Poly, 167
Iter-Ritz-Poly-0, 165
Iter-Ritz-Poly-stab, 168
Iteriertes Arnoldi-Verfahren, 148
Iteriertes Arnoldi-Verfahren mit Tschebyscheff Beschleunigung, 153
R, 170
Rayleigh-Ritz, 146
Rayleigh-Ritz Verfahren, 146
Rayleigh-Ritz Verfahren für Eigenwerte, 146
Ritz-Iter, 197
Ritz-Iterationsschritt, 197
Ritz-Kond-Poly, 172
Schur-Rayleigh-Ritz Schritt, 153
Sort-inv-Ritz-Werte, 197
SRR, 153
Testfunktion τ, 202
Tschebyscheff-Arnoldi Verfahren, 154
Algorthmen:
Iteriertes-Arnoldi-Verfahren-TB, 153
Arnoldi, 145
Arnoldi-Faber-Methoden, 197
Arnoldi-Prozeß mit iterativer Verbesserung, 145
Arnoldi-Prozeß, 144
Arnoldi-Verfahren, 147
Arnoldi-Verfahren für Eigenwerte , 147
Arnoldi-Verfahren-EW, 147
Arnoldi-Zerlegung, 145
asymmetrische Kuspe, 7, 48, 68, 133

Berechnung von $p_l(A)v_0$, 152
Berechnung von $R(A)v$, 170
bestimmt, 37, 42, 99, 104
Bifurkations-Parameter, 40
Blowing-up, 7

Cauchy-Folge, 16

Deflation, 153
Diskriminante, 34
Drei-Term-Rekursion für Tschebyscheff-Polynome, 151

Elliptische Differentialgleichungen, 5

Faber-Polynome, 194
Feste Parameter, 40
formal konvergent, 16
formale Parametrisierung, 23
Fortsetzungsverfahren, 4
Fortsetzungsverfahren mit Testfunktion, 204
Fréchet-Ableitung, 4
Fredholm-Operator, 111
Funktional-Differentialgleichungen, 5

Gewöhnliche Differentialgleichungen, 5
Ginzburg-Landau-Gleichung, 5
Grenze, 174

Hilfsparameter, 40
homogene Bestandteil, 15

Homotopieverfahren, 5
Hopf-Punkt, 201
Hysteresis, 61, 126

Impliziter-Arnoldi-Neustart-A, 157
Impliziter-Arnoldi-Neustart-B, 157
Integritätsring, 16
irrediziblen Komponenten, 22
irreduzibel, 12
isolierter Punkt, 60, 124
Iter-Ritz-Poly, 167
Iter-Ritz-Poly-0, 165
Iter-Ritz-Poly-stab, 168
iterative Lyapunov-Schmidt-Methode, 6
Iteriertes Arnoldi-Verfahren, 148
Iteriertes Arnoldi-Verfahren
mit Tschebyscheff
Beschleunigung, 153
Iteriertes-Arnoldi-Verfahren-TB, 153

k-Bestimmtheit, 41
Keime, 20
Kodimension, 56
Komponenten, 12
Kontroll-Parameter, 40
konvergente Potenzreihe, 13, 16
Konvergenz, 16
konvergenzbestimmender Faktor, 159
Krull-Topologie, 16
Krylov-Verfahren, 9
Kurvenkeim, 21
Kuspe, 65, 131, 224

Lemma von Study, 11
Lemma von Study für Mengenkeime, 22
Locking, 153
LSR, 110
Lyapunov-Schmidt-Methode, 6
Lyapunov-Schmidt-Reduktion, 110

Mengenkeim, 21
minimal, 22
Minimalpolynom, 13
Modalparameter, 79
Multiindizes, 14
multiple Verzweigung, 66, 225

Navier-Stokes-Gleichungen, 5
Neilsche Parabel, 7, 48, 68
Newtonscher Knoten, 13
nichtlineare Integralgleichungen, 5
nichtlineare Randwertprobleme, 5

optimale Ellipse, 152
Ordnung eines Keims, 22

Parabolische Differentialgleichungen, 5
Parabolische
Differentialgleichungssysteme, 5
Parametrisierungsvariable, 28
Pitchfork, 64, 75, 129, 130, 134
Pitchfork Verzweigung, 46, 224
Polynomen, 13
polynomiale Bestandteil, 15
polynomiale Iterationsmethoden, 194
Potenzreihen, 13
Prädiktor-Korrektor-Verfahren, 4
Präkonditionierungsfunktion, 159
prinzipal-analytisch, 21
Puiseux-Reihen, 23

quadratische Gleichungen, 34

R, 170
Rayleigh-Ritz, 146
Rayleigh-Ritz Verfahren, 146
Rayleigh-Ritz Verfahren für Eigenwerte,
146
reduzibel, 12, 22
reduzierte Verzweigungsgleichung, 6, 112

Referenzpunkt, 151
regulärer Punkt, 58
Relaxations-Parameter, 195
Residuen-Norm, 148
Residuen-Polynom, 195
Ring der formalen Potenzreihen, 14
Ritz-Iter, 197
Ritz-Iteration, 196
Ritz-Iterationsschritt, 197
Ritz-Kond-Poly, 172
Ritz-Konditionierungs-Polynome, 174
Ritz-Vektoren, 146
Ritz-Werte, 146
RRV, 146
RRV-EW, 146

Satz über implizite Funktionen, 4, 20
Scherung, 18
Schur-Rayleigh-Ritz Schritt, 153
singulärer Punkt, 200
Singularitäten, 201
Singularität, 56
Sort-inv-Ritz-Werte, 197
Spektralumgebung, 164
SRR, 153
dq atsverhalten, 200
Substitutionshomomorphismus, 17

Testfunktion, 201
Testfunktion τ, 202
Theorem über die Puiseux-Reihe, 24
transkritisch, 60, 124, 132
transkritische Verzweigung, 26, 34, 45, 224
Translationsinvarianz des Arnoldi-Verfahrens, 149
Tschebyscheff-Arnoldi Verfahren, 154

Umkehrpunkt, 4, 42, 59, 123, 224
Umkehrpunkt vierter Ordnung, 49

van der Pol-Gleichung, 5
Variationsprobleme, 5
Variationsungleichungen, 5
Varietät, 10
verallgemeinerte Lyapunov-Schmidt-Methode, 6
Verzweigungsparameter, 207
Verzweigungspunkt, 4
Verzweigungstheorie, 4

Weierstraßpolynom, 19
Weierstraßscher Vorbereitungssatz, 19

zusätzliche Parameter, 40
Zustandsvariablen, 4, 40

Literaturverzeichnis

[AABM93] E. L. Allgower, P. Ashwin, K. Böhmer, and Z. Mei. Liapunov-Schmidt reduction for a bifurcation problem with periodic boundary conditions on a square domain. In E.L. Allgower, K. Georg, and R. Miranda, editors, *Exploiting Symmetry in Applied and Numerical Analysis*, Lectures in Applied Mathematics, pages 11–22. AMS Providence, 1993.

[AB88] E.L. Allgower and K. Böhmer. Resolving singular nonlinear equations. *Rocky Mountain J. Math.*, pages 225–268, 1988.

[ABGM92] E.L. Allgower, K. Böhmer, K. Georg, and R. Miranda:. Exploiting symmetry in boundary element methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, pages 534–552, 1992.

[ABHJ] E.L. Allgower, K. Böhmer, A. Hoy, and V. Janovsky. On a class of direct methods for solving nonlinear equations. eingereicht bei SIAM J. Numer. Anal.

[ABM90a] E.L. Allgower, K. Böhmer, and Z. Mei. A generalized equibranching lemma with application to $D_4 \times Z_2$ symmetric elliptic problems. Preprint 9, University of Marburg, 1990.

[ABM90b] G. Allgower, K. Böhmer, and Z. Mei. Branch switching at a corank-4 bifurcation point of semi-linear elliptic problems with symmetry. Preprint, Mathematics Dept, University of Marburg, 1990.

[ABM91a] E.L. Allgower, K. Böhmer, and Z. Mei. A complete bifurcation scenario for the 2d-nonlinear Laplacian with Neumann boundary conditions on the unit square. In R. Seydel, F.W. Schneider, T. Küpper, and H. Troger, editors, *Bifurcation and Chaos: Analysis, Algorithms, Applications*, volume 97 of *ISNM*, pages 1–18, Basel, 1991. Birkhäuser Verlag.

[ABM91b] E.L. Allgower, K. Böhmer, and Z. Mei. On a problem decomposition for semi-linear nearly symmetric elliptic problems. In W. Hackbusch, editor,

Parallel Algorithms for Partial Differential Equations, pages 1–17, Braunschweig, 1991. Viesweg Verlag.

[ABM91c] E.L. Allgower, K. Böhmer, and Z. Mei. On new bifurcation results for semilinear elliptic equations with symmetries. In J.R. Whiteman, editor, *The Mathematics of Finite Elements and Applications VII*, pages 487–494, London, New York, 1991. Academic Press Ld.

[ABM92a] E.L. Allgower, K. Böhmer, and Z. Mei. Exploiting equivariance in the reduced bifurcation equations. In E.L. Allgower, K. Böhmer, and M. Golubitsky, editors, *Bifurcation and Symmetry: Cross Influence and Application*, volume 104 of *ISNM*, pages 1–10, Basel, 1992. Birkhäuser Verlag.

[ABM92b] E.L. Allgower, K. Böhmer, and Z. Mei. An extended equivariant branching theory. *Math. Meth. in Appl. Sci.*, pages 433–451, 1992.

[ABM93a] E.L. Allgower, K. Böhmer, and Z. Mei. Bifurcations of a semilinear elliptic problem with mixed boundary conditions on the unit square. Technical report, University of Marburg, 1993.

[ABM93b] E.L. Allgower, K. Böhmer, and Z. Mei. Branch switching at a corank-4 bifurcation point of semi-linear elliptic problems with symmetry. *IMA J. Numer. Anal.*, pages 161–183, 1993.

[ABM93c] P. Ashwin, K. Böhmer, and Z. Mei. A numerical Liapunov-Schmidt method for finitely determined problems. In E.L. Allgower, K. Georg, and R. Miranda, editors, *Exploiting Symmetry in Applied and Numerical Analysis*, Lectures in Applied Mathematics, pages 49–69, Providence, 1993. AMS.

[ABM95] P. Ashwin, K. Böhmer, and Z. Mei. A numerical Liapunov-Schmidt method with applications to Hopf bifurcation on a square. *Math. Comp.*, 1995. to appear.

[AG90] E.L. Allgower and K. Georg. *Numerical Continuation Methods: An Introduction*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1990.

[AKS90] P. Ashwin, G. King, and J.W. Swift. Three identical oscillators with symmetry. *Nonlinearity*, pages 585–603, 1990.

[AM92] P. Ashwin and Z. Mei. Liapunov-Schmidt reduction at Hopf bifurcation of the Brusselator equations on a square. Technical report, University of Warwick, 1992.

[AP92] D. K. Arrowsmith and C. M. Place. *Dynamical Systems*. Chapman and Hall Mathematics Series. Chapman & Hall, London, 1992.

[Arn51] W.E. Arnoldi. The principle of minimized iteration in the solution of matrix eigenvalue problems. *Appl. Math*, 9:17–29, 1951.

[Arn83] V. I. Arnold. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1983.

[Ash90] P. Ashwin. Symmetric chaos in systems of three and four identical oscillators. *Nonlinearity*, pages 604–618, 1990.

[Ash91] P. Ashwin. *Application of dynamical systems with symmetry*. Ph.D. Thesis. P. Ashwin, Maths Institute, University of Warwick, 1991.

[Ash92] P. Ashwin. High corank mode interactions on a rectangle. In E.L. Allgower, K. Böhmer, and M. Golubitsky, editors, *Bifurcation and Symmetry*, volume 104 of *ISNM*, pages 23–33, Basel, 1992. Birkhäuser.

[Ast91] P.J. Aston. Analysis and computation of symmetry-breaking bifurcation and scaling laws using group theoretic methods. *SIAM J. Math. Anal.*, pages 181–212, 1991.

[Ber77] M. Berger. *Nonlinearity and Functional Analysis*. Academic Press, New York, 1977.

[Bey84] W.J. Beyn. Defining equations for singular solutions and numerical applications. In T. Küpper, H. D. Mittelmann, and H. Weber, editors, *Numerical Methods for Bifurcation Problems*, volume 70 of *ISNM*, pages 42–56, Basel, 1984. Birkhäuser Verlag.

[BGJ96] K. Böhmer, W. Govaerts, and V. Janovsky. Numerical detection of symmetry breaking bifurcation points with nonlinear degeneracies. Preprint 18/96, Schwerpunktprogramm der DFG,Dynamik: Analysis, effiziente Simulation und Ergodentheorie, 1996.

[BK81] E. Brieskorn and H. Knörrer. *Ebene algebraische Kurven*. Birkhäuser Boston Inc., 1981.

[BM89] K. Böhmer and Z. Mei. Regularization and computation of a bifurcation problem with corank-2. *Computing*, pages 307–316, 1989.

[BM90] K. Böhmer and Z. Mei. On a numerical Lyapunov-Schmidt method. In E.L. Allgower and K. Georg, editors, *Computational Solutions of Nonlinear Systems of Equations*, volume 26 of *Lectures in Applied Mathematics*, pages 79–98, Providence, 1990. AMS.

[BM91] K. Böhmer and Z. Mei. Branch switching and path following of a simplified buckling problem at a corank-4 bifurcation point. *ZAMM*, pages T748–T751, 1991.

[BM92] K. Böhmer and Z. Mei. Mode interactions of an elliptic system on the square. In E.L. Allgower and K. Böhmerand M. Golubitsky, editors, *Bifurcation and Symmetry*, volume 104 of *ISNM*, pages 49–58, Basel, 1992. Birkhäuser Verlag.

[BMS83] M. Buchner, J. Marsden, and S. Schecter. Applications of the Blowing-Up Construction and Algebraic Geometry to Bifurcation Problems. *Journal of Differential Equations*, 48:404–433, 1983.

[Böh89] K. Böhmer. On a numerical Lyapunov-Schmidt method for operator equations. Technical Report 2, Philipps-Universität Marburg, Fachbereich Mathematik, 1989.

[Böh93] K. Böhmer. On a numerical Lyapunov-Schmidt method for operator equations. *Computing 51*, pages 237–269, 1993.

[Bra93] T. Braconnier. The Arnoldi-Tchebycheff algorithm for solving large nonsymmetric eigenproblems. Technical report, Tech Rep. TR/PA/93/95, CERFACS, Toulouse, France, 1993.

[Cha93] F. Chatelin. Eigenvalues of Matrices. New York, Wiley, 1993.

[CPS94] M. Crouzeix, B. Philippe, and M. Sadkane. The Davidson Method. *SIAM J. Sci. Comput*, 15(1):62–76, 1994.

[DGKS76] J. Daniel, W. B. Gragg, L. Kaufmann, and G. W. Stewart. Reorthogonalization and stable algorithms for updating the Gram-Schmidt QR factorization. *Math. Comput.*, 30:772–795, 1976.

[DGL92] I. S. Duff, R. G. Grimes, and J. G. Lewis. User's guide for the Harwell-Boing sparse matrix collection (release 1). Tech. Rep. RAL 92-086, Rutherford Appleton Laboratory, Oxon, U.K., 1992.

[DK80a] D.W. Decker and H.B. Keller. Multiple limit point bifurcation. *J. Math. Anal. App.*, 75:417–430, 1980.

[DK80b] D.W. Decker and H.B. Keller. Solution branching - A constructive technique. *SIAM*, Phila. Pa.:53–69, 1980.

[DK81] D.W. Decker and H.B. Keller. Path Following Near Bifurcation. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, XXXIV:149–175, 1981.

[Dri95] T. A. Driscoll. Algorithm 756: A MATLAB Toolbox for Schwarz-Christoffel Mapping. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 22(2):168–186, 1995.

[DS93] I. S. Duff and J. Scott. Computing selected eigenvalues of Sparse Unsymmetric Matrices Using Subspace Iteration. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 19(2):137–159, 1993.

[ER80] T. Ericsson and A. Ruhe. The spectral transformation Lanczos method for the numerical solution of large sparse generalized symmetric eigenvalue problems. *Math. Comp.*, 35:1251–1268, 1980.

[Fis91] B. Fischer. Chebyshev Polynomials Are Not Always Optimal. *Journal of Approximation Theory*, 65:261–272, 1991.

[Fis94] G. Fischer. *Ebene algebraische Kurven.* Advanced Lectures in Mathematics. Vieweg studium, 1994.

[Gar91] T. J. Garratt. The numerical detection of Hopf bifurcation in large systems arising in fluid mechanics. Ph.D. Thesis, Univ. of Bath, 1991.

[GH83] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields.* App. Math. Sci. 42. Springer, New York, 1983.

[GMS91] T. J. Garratt, G. Moore, and A. Spence. Two methods for the numerical detection of Hopf bifurcations. In R. Seydel, F.W. Schneider, T. Küpper, and H. Troger, editors, *Bifurcations and Chaos: Analysis, Algorithms, Applications*, pages 129–148, Basel, 1991. Birkhäuser Verlag.

[Gov91] W. Govaerts. Computation of singularities in large nonlinear systems. Preprint, University of Gent, 1991.

[GR83] A. Griewank and G.W. Reddien. The calculation of Hopf bifurcation points by a direct method. *IMA J. Numer. Anal.*, pages 295–303, 1983.

[GR84] A. Griewank and G.W. Reddien. Characterization and computation of generalized turning points. *SIAM J.Numer. Anal.*, pages 176–185, 1984.

[GRD96] C. Geiger, J. D. Rodriguez, and G. Dangelmayr. Near-onset convection patterns in the spherical Bénard problem with l=2 critical. submitted to Physica D., 1996.

[GS86] M. Golubitsky and D. Schaeffer. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory Volume 1*, volume 51 of *App. Math. Sci.* Springer, New York, 1986.

[GSS88] M. Golubitsky, I.N. Stewart, and D. Schaeffer. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory Volume 2*, volume 69 of *App. Math. Sci.* Springer, New York, 1988.

[GV61] G. H. Golub and R. S. Varga. Chebyshev semiiterative methods, successive overrelaxation iterative metods, and second order Richardson iterative methods. *Numer. Math.*, 3:147–168, 1961.

[GvL89] G. H. Golub and C. F. van Loan. *Matrix Computations.* John Hopkins University Press, Baltimore, 1989.

[HCB90] D. Ho, F. Chatelin, and M. Bennani. Arnoldi-Tchebychev procedure for large scale nonsymmetric matrices. *Math. Model. Num. Anal.*, 24:53–65, 1990.

[Hea88a] T.J. Healey. Global bifurcation and continuation in the presence of symmetry with an application to solid mechanics. *SIAM J. Math. Anal.*, pages 824–840, 1988.

[Hea88b] T.J. Healey. A group-theoretic approach to computational bifurcation problems with symmetry. *Comput. Meths. in Appl. Mech. Engrg.*, pages 257–295, 1988.

[HK90] T.J. Healey and H. Kielhöfer. Positivity of global branches of fully nonlinear elliptic boundary value problems. Preprint, University of Augsburg, 1990.

[HK91] T.J. Healey and H. Kielhöfer. Symmetry and nodal properties in global bifurcation analysis of quasi-linear elliptic equations. *Arch. Rational Mech. Anal.*, pages 299–311, 1991.

[HK92] T. Healey and H. Kielhofer. Hidden symmetry of fully nonlinear boundary conditions in elliptic equations: global bifurcation and nodal structure. *Results Math.*, 21:83–92, 1992.

[Ho90] D. Ho. Tchebychev acceeleration technique for large scale nonsymmetric matrices. *Numerische Math.*, 56:721–734, 1990.

[Hon91] B. Hong. Computational methods for bifurcation problems with symmetries on the manifolds. Preprint, University of Pittsburgh, 1991.

[JD86] A.D. Jepson and A.W. Decker. Convergence cones near bifurcation. *SIAM J. Numer. Anal.*, pages 959–975, 1986.

[JS81] A. Jennings and W. J. Stewart. A simultaneous iteration algorithm for real matrices. *Trans. Math. Software*, 7:184–198, 1981.

[JS89] A.D. Jepson and A. Spence. On a reduction process for nonlinear equations. *SIAM J. Math. Anal.*, pages 39–56, 1989.

[Kel77] H.B. Keller. Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems. In P.H. Rabinowitz, editor, *Application of Bifurcation Theory*, pages 359–384, New York, 1877. Academic Press.

[KL72] H.B. Keller and W. F. Langford. Iterations, pertubations and multiplicities for nonlinear bifurcation problems. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 48:83–108, 1972.

[Leh95] R. B. Lehoucq. Analysis and implementation of an implicitly restarted Arnoldi iteration. Ph.D. Thesis, Rice University, Houston, TX, USA, 1995.

[LM93] K.T. Li and Z. Mei. A splitting iteration method for a simple corank-2 bifurcation bifurcation problem. *J. Comp. Math.*, pages 261–275, 1993.

[LMZ86a] K.T. Li, Z. Mei, and C.D. Zhang. The approximation of branch solution of the Navier-Stokes equations. In *Collection: International workshop on applied differential equations*, pages 276–288, Singapore, 1986. World Sci. Publishing.

[LMZ86b] K.T. Li, Z. Mei, and C.D. Zhang. Numerical approximations of bifurcation problems of nonlinear equations. *J. Comp. Math.*, pages 21–37, 1986.

[LS96] R. B. Lehoucq and D. C. Sorenson. Deflation techniques within an implicitly restarted Arnoldi iteration. *SIAM J. Matrix Anal. Applic.*, 17(4):789–821, 1996.

[LSVY94] R. B. Lehoucq, D. C. Sorenson, P. Vu, and C. Yang. ARPACK: An implementation of the implicitly re-started Arnoldi iteration that computes some of the eigenvalues and eigenvectors of a large sparse matrix. Available from NETLIB@ORNL.GOV under the directory SCALAPACK, 1994.

[Man77] T. Manteuffel. The Tchebyshev iteration for nonsymmetric linear systems. *Numer. Math.*, 28:307–327, 1977.

[Man78] T. Manteuffel. Adaptive procedure for estimating parameters for the nonsymmetric Tchebychev iteration. *Numer. Math.*, 31:183–208, 1978.

[Mei89a] Z. Mei. A numerical approximation for the simple bifurcation problems. *Numer. Func. Anal. Optimiz.*, pages 383–400, 1989.

[Mei89b] Z. Mei. Numerical Approximations of Corank-2 Bifurcation Problems. Dissertation at Department of Mathematics, University of Marburg, 1989.

[Mei89c] Z. Mei. Numerical approximations of simple bifurcation points with a splitting iteration method. In K.T. Li, J.E. Marsden, M. Golubitsky, and G. Iooss, editors, *Proceeding of International Conference on Bifurcation Theory and its Numerical Analysis*, pages 368–377, Xian, 1989. Xi'an Jiaotong University Press.

[Mei89d] Z. Mei. Splitting iteration method for simple singular points and simple bifurcation points. *Computing*, pages 87–96, 1989.

[Mei90a] Z. Mei. An efficient computation of the simple bifurcation points of large sparse nonlinear problems. *ZAMM*, pages T542–T544, 1990.

[Mei90b] Z. Mei. A Newton-like method for simple bifurcation problems with application to large sparse systems. In D. Roose, B. De Dier, and A. Spence, editors, *Continuation and Bifurcations: Numerical Techniques and Applications*, volume C313 of *NATO ASI Series*, pages 247–260. Kluwer Academic Publishers, 1990.

[Mei90c] Z. Mei. A special extended system and a Newton-like method for simple singular nonlinear equations. *Computing*, pages 157–167, 1990.

[Mei91a] Z. Mei. An efficient quadratic approximation of simple singular solutions. *J. Engin. Math.*, pages 103–118, 1991.

[Mei91b] Z. Mei. Path following around corank-2 bifurcation points of a semi-linear elliptic problem with symmetry. *Computing*, pages 492–508, 1991.

[Mei91c] Z. Mei. Solution branches at corank-2 bifurcation points with symmetry. In R. Seydel, F.W. Schneider, T. Küpper, and H. Troger, editors, *Bifurcation and Chaos: Analysis, Algorithms, Applications*, pages 251–255, Basel, 1991. Birkhäuser Verlag.

[Mei92a] Z. Mei. Solution branches of a semilinear elliptic problem at corank-2 bifurcation points. *Manuscripta Mathematica*, pages 395–409, 1992.

[Mei92b] Z. Mei. Utilization of scaling laws and symmetries in the path following of a semilinear elliptic problem. In E.L. Allgower, K. Böhmer, and M. Golubitsky, editors, *Bifurcation and Symmetry*, volume 104 of *ISNM*, pages 263–173, Basel, 1992. Birkhäuser Verlag.

[Mei93] Z. Mei. Solution branches of a semilinear elliptic problem at corank-2 bifurcation points with Neumann boundary conditions. *The royal society of Edinburgh proceedings A*, pages 479–495, 1993.

[MGS90] G. Moore, T.J. Garratt, and A. Spence. The numerical detection of Hopf bifurcation points. In D. Roose, B. De Dier, and A. Spence, editors, *Continuation and Bifurcations: Numerical Techniques and Applications*, volume C313 of *NATO ASI Series*, pages 227–246. Kluwer Academic Publishers, 1990.

[MI91] K. Murota and K. Ikeda. Computational use of group theory in bifurcation analysis of symmetric structures. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, pages 273–293, 1991.

[ML90] Z. Mei and K.T. Li. Numerical determination of turning point bifurcation. *J. Engin. Math.*, pages 77–90, 1990.

[MLZ85] Z. Mei, K.T. Li, and C.D. Zhang. The approximations of branch solutions of the Navier-Stokes equations. In *Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow, Part 2*, pages 1811–1821, Pineridge, Swansea, 1985.

[Moo96] M. Moog. Fortsetzungverfahren für singuläre Lösungen großer nichtinearer Systeme. Diplomarbeit, Fachbereich Mathematik der Universität Marburg, 1996.

[Mor92] R. B. Morgan. Generalizations of Davidson's method for computing eigenvalues of large nonsymmetric matrices. *J. Comput. Phys.*, 101:287–291, 1992.

[Mor96] Ronald B. Morgan. On restarting the Arnoldi method for large nonsmmetric eigenvalue problems. *Math. of Comput.*, 65(215):1213–1230, 1996.

[MR96] Karl Meerbergen and Dirk Roose. Matrix transformations for computing rightmost eigenvalues of large sparse non-symmetric eigenvalue problems. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 16:297–346, 1996.

[MS80] G. Moore and A. Spence. The calculation of turning points of nonlinear equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, pages 567–576, 1980.

[MS86] Ronald B. Morgan and David S. Scott. Generalizations of Davidson's Method for computing eigenvalues of sparse symmetric matrices. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 7(3):817–825, 1986.

[MS96] Z. Mei and A. Schwarzer. Scaling Solution Branches of Bifurcation Problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 204:404–433, 1996.

[MSV95] T. A. Manteuffel, G. Starke, and R. S. Varga. Adaptive k-step iterative methods for nonsymmetric systems of linear equations. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 3:50–65, 1995.

[Mur89] J.D. Murray. *Mathematical Biology*, volume 13 of *Biomathematics*. Springer, Berlin, 1989.

[NOP83] B. Nour-Omid and B. N. Parlett. Lanczos versus subspace iteration for solution of eigenvalue problems. *Inter. J. Num. Meth. Eng.*, 19:859–871, 1983.

[NRT92] N. M. Nachtigal, L. Reichel, and L. N. Trefethon. A hybrid GMRES algorithm for nonsymmetric matrix iterations. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 13:796–825, 1992.

[Par80] B. N. Parlett. The Symmetric Eigenvalue Problem (Prentice Hall Series in Computational Mathematics). Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1980.

[PG71] I. Prigogine and P. Glansdorff. *Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations.* Wiley-Interscience, London, 1971.

[PS87] B. N. Parlett and Y. Saad. Complex shift and invert strategies for real matrices. *Linear Algebra Appl.*, 88/89:575–595, 1987.

[PTL85] B. N. Parlett, D. R. Taylor, and Z. A. Liu. A look-ahead Lanczos algorithm for unsymmetric matrices. *Math. Comp.*, 44:105–124, 1985.

[RG] L. Reichel and W. B. Gragg. Fortran subroutines for updating the QR decomposition of a matrix. ACM Trans. Math Software, to appear.

[Ruh83] A. Ruhe. Matrix pencils. *Lecture Notes in Mathematics, No. 973, Springer Verlag, New York*, pages 104–120, 1983.

[Ruh84] A. Ruhe. Rational Krylov sequence methods for eigenvalue computation. *Linear Alg. Appl.*, 58:391–405, 1984.

[Ruh93] A. Ruhe. Rational Krylov algorithms for nonsymmetric eigenvalue problems. In G. Golub, A. Greenbaum, and M. Luskin, editors, *IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, Recent Advances in Iterative Methofds, pages 149–164. Berlin: Springer, 1993.

[Ruh94a] A. Ruhe. The Rational Krylov algorithm for nonsymmetric eigenvalue problems, III: complex shifts for real matrices. *BIT*, 34:165–176, 1994.

[Ruh94b] A. Ruhe. Rational Krylov algorithms for nonsymmetric eigenvalue problems, II: matrix pairs. *Linear Alg. Appl.*, 197/198:283–296, 1994.

[Ruh95] A. Ruhe. Rational Krylov, a practical algorithm for large sparse nonsymmetric matrics pencils. Technical report ucb/csd-95-871, Computer Science Division, Univerity of California, Berkeley, CA, USA, 1995.

[Rut69] H. Rutishauser. Computational aspects of F. L. Bauer's simultaneous iteration method. *Numer. Math.*, 31:4–13, 1969.

[Saa80] Y. Saad. Variations on Arnoldi's Method for computing eigenelements of large unsymmetric matrices. *Lin. Alg. Apl.*, 34:269–295, 1980.

[Saa84] Y. Saad. Chebyshev acceleration techniques for solving nonsymmetric eigenvalue problems. *Math. Comput.*, 42:567–588, 1984.

[Saa89] Y. Saad. Numerical solution of large nonsymmetric eigenvalue problems. *Comput. Phys. Comm.*, 53:71–90, 1989.

[Saa92] Y. Saad. *Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems.* Algorithms and Architectures for Advanced Scientific Computing. Manchester University Press, Manchester, 1992.

[Sad91a] M. Sadkane. A block Arnoldi-Chebychev method for computing the leading eigenpairs of large sparse unsymmetric matrices. Technical report, Tech Rep. TR/PA/91/146, CERFACS, Toulouse, France, 1991.

[Sad91b] M. Sadkane. On the solution of large scale unsymmetric eigenproblems. Technical report, Tech Rep. TR/PA/91/147, CERFACS, Toulouse, France, 1991.

[Sad93] M. Sadkane. Block-Arnoldi and Davidson methods for unsymmetric large eigenvalue problems. *Numer. Math.*, 64:195–211, 1993.

[SBFvdV95] L. G. Sleijpen, G. L. Booten, D. R. Fokkema, and van der Vorst. Jacobi-Davidson type methods for generalized eigenproblems and polynomial eigenproblems: part I. Preprint nr. 923, Department of Methematics, Universiteit Utrecht, Utrecht, The Netherlands,, 1995.

[Sch93] A. Schwarzer. Verzweigungsverhalten der nichtlinearen Laplace-Gleichung auf dem Hexagon. Diplomarbeit, Fachbereich Mathematik der Philipps-Universität Marburg, 1993.

[Sco95] J. Scott. An Arnoldi Code for Computing Selected Eigenvalues of Sparse, Real, Unsymmetric Matrices. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 21(4):43–475, 1995.

[Seb91] R. Sebastian. Anwendung von verallgemeinerten konjugierten Gradientenverfahren auf Verzweigungsprobleme mit Symmetrie. Diplomarbeit, Fachbereich Mathematik der Universität Marburg, 1991.

[Seb92] R. Sebastian. A version of GMRES for nearly symmetric linear systems. In E.L. Allgower, K. Böhmer, and M. Golubitsky, editors, *Bifurcation and Symmetry*, volume 104 of *ISNM*, pages 295–304, Basel, 1992. Birkhäuser Verlag.

[Seb95] R. Sebastian. Anwendung von Krylov-Verfahren auf Verzweigungs- und Fortsetzungsprobleme. Dissertation am Fachbereich Mathematik, Universität Marburg, 1995.

[Sey88] R. Seydel. *From Equilibrium to Chaos, Praktikal Bifurcation and Stability Analysis.* Elsevier Science Publishing Co., Inc., 1988.

[Sim75] R. B. Simpson. A method for the numerical determination of bifurcation states of nonlinear systems of equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 12:439–451, 1975.

[SJ82] A. Spence and A. Jepson. Folds in Solutions of two Parameter Systems and their Calculation, Part I. *SIAM, Journal of Numerical Analysis*, 22, No. 2:347–368, 1982.

[SJ84] A. Spence and A. D. Jepson. Singular points and their computation. In T. Küpper, H.D. Mittelmann, and H. Weber, editors, *Numerical Methods for Bifurcation Problems*, ISNM, Basel, 1984. Birkhäuser Verlag.

[SJ85] A. Spence and A. D. Jepson. The numerical solution of nonlinear equations having several parametrs. Part I: Scalar equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 22(5):736–759, 1985.

[SJ91] A. Spence and A. D. Jepson. The numerical solution of nonlinear equations having several parameters. Part III: Equations with Test $\mathbb{Z}_2$-Symmetrie. *SIAM J. Numer. Anal.*, 28(3):809–832, 1991.

[SKN88] J.C. Scovel, I.G. Kevrekidis, and B. Nicolaenko. Scaling laws and the prediction of bifurcations in systems modelling pattern formation. *Phys. Letter. A*, pages 73–80, 1988.

[Sor92] D. C. Sorenson. Implicit application of polynomial filters in a k-step Arnoldi method. *SIAM J. matrix Anal. Appl.*, 13:357–385, 1992.

[SS82] D. C. Smolarksi and P. E. Saylor. Optimum parameters for the solution of linear equations by Richardson' Iteration. unpublished paper, 1982.

[Sta71] I. Stackgold. Branching of solutions of nonlinear equations. *SIAM Review*, 13:289–332, 1971.

[Ste76] G.W. Stewart. Simultaneous Iteration for Computing Invariant Subspaces of Non-Hermitian Matrices. *Numerische Mathmatik*, 25:123–136, 1976.

[SV93] G. Starke and R. S. Varga. A hybrid Arnoldi-Faber iterative method for nonsymmetric systems of linear equations. *Numer. Math.*, 64:213–240, 1993.

[SvdV94] L. G. Sleijpen and van der Vorst. A Jacobi-Davidson iteration method for linear eigenvalue problems. Preprint 856, Department of Methematics, Universiteit Utrecht, Utrecht, The Netherlands, To appear in SIAM J. Matrix Anal. Appl., 1994.

[Van82] A. Vanderbauwhede. *Local Bifurcation and Symmetry*, volume 75 of *Res. Notes in Math.* Pitman, Boston, 1982.

[vSuF91] H.W.Broer/F. Dumortier/S.J. van Strien und F.Takens. Structues in Dynamics. In E. van Groesen und E.M. de Jager, editor, *Finite Dimensional Deterministic Studies*, Studies in Mathematical Physics. North Holland, 1991.

[Wat93] David S. Watkins. Some perspectives of the eigenvalue problem. *SIAM Rev.*, 35(2):430–471, 1993.

[Wil65] J. H. Wilkinson. The Algebraic Eigenvalue Problem. Clarendon Press, Oxford, 1965.

[WJ91] B. Werner and V. Janovsky. Computation of Hopf branches bifurcating from Takens Bogdanov points for problems with symmetries. In R. Seydel, F. W. Schneider, T. Küpper, and H. Troger, editors, *Bifurcations and Chaos: Analysis, Algorithms, Applications*, Internat. Ser. Numer. Math., 97, pages 377–388. Birkhauser, Basel, 1991.

[Yan96] L. Yang. Definierende Gleichungen für Verzweigungen. Dissertation am Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg, 1996.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all jenen bedanken, die mir bei der Erstellung dieser Arbeit geholfen haben.

Prof. Dr. K. Böhmer möchte ich dafür danken, daß er mir immer mit gutem Rat zur Seite stand und auch in schwierigen Situationen stets die richtigen Worte fand, um mir neuen Ansporn zur Fortsetzung dieser Arbeit zu geben. Besonders möchte ich mich für seine Toleranz und Mithilfe bei Problemen bedanken, die meine Familie betrafen.

Weiterhin möchte ich mich bei Dr. Zhen Mei bedanken, der mir besonders bei den Skalierungstechniken eine große Hilfe war und stets hilfreiche Ratschläge parat hatte.

Bei Prof. Dr. B. Schmitt möchte ich mich für die vielen guten Ratschläge im Zusammenhang mit den Krylov-Techniken bedanken. Seine Einsichten haben mir an entscheidenden Stellen die geeigneten Ideen geliefert.

Dr. Ralph Sebastian, dessen Arbeiten über Krylov-Techniken ich in dieser Arbeit weitergeführt habe, möchte ich für die geduldige Einführung in die Thematik und seine $C++$-Programme danken, die er mir freundlicherweise überlassen hat.

Besonderer Dank gilt auch der Deutschen Forschungsgemeinschaft, die mir von Februar 1994 bis August 1995 eine halbe Forschungsstelle zur Verfügung stellte. Dadurch wurde mir wichtige Zeit für meine Forschungen gegeben.

Nicht zuletzt möchte ich mich ganz besonders bei meiner Frau und meinen Kindern bedanken, ohne deren Nachsicht gegenüber langen Arbeitstagen, Beistand und Hilfe diese Arbeit nicht möglich gewesen wäre.

Lebenslauf

Name		Andreas Schwarzer
Geburtsdatum		17. Juli 1969
Geburtsort		Wiesbaden
Familienstand		verheiratet, 2 Kinder
Schulen	1975-1979	Grundschule Wiesbaden-Kohlheck
	1979-1988	Elly-Heuss-Gymnasium Wiesbaden
	Juni 1988	Abitur
Wehrdienst	Juli 1988 - Aug. 1988	Verletzungsbedingte Ausmusterung
Studium	Okt. 1988 - Jan. 1994	Diplomstudiengang Mathematik an der Philipps-Universität Marburg
	Oktober 1990	Vordiplom
Praktika	1989	Softwarefirma PCP (Entwurf eines Verwaltungsprogramms)
	1990	Softwarefirma PCP (Modula 2 Compiler)
Berufstätigkeit	Feb. 1994-Aug. 1995	Wissenschaftliche Hilfskraft an der Philipps-Universität Marburg unter Finanzierung durch verschiedene DFG-Projekte
	seit Mitte Aug. 1995	Wissenschaftlicher Mitarbeiter der Philipps-Universität Marburg
Kinder	August 1991	Geburt meines Sohnes Adrian
	März 1993	Geburt meiner Tochter Theresa
Heirat	September 1993	Heirat mit Gabriele Becker