2 Barnsley's Idee und Modell zur Bildkompression

Das Ziel dieses Kapitels ist eine Darstellung der grundlegenden Ideen von Barnsley auf der Basis der Theorie iterierter Funktionensysteme (IFS = *iterated function system*). Dies umfaßt die Beschreibung des Hausdorf-Raumes $\mathcal{H}$, kontrahierender Abbildungen auf $\mathcal{H}$ und die Definition eines IFS, sowie die Anwendung von IFS-Fraktalen zu Approximation von sogenannten *real world images*. Aufgrund des Übersichtscharakters des Kapitels wird auf die ausführlichen Beweise in [Barnsley88a] und [Barnsley93] verwiesen.

Die Darstellung von Barnsley's Modell geschieht primär unter dem Gesichtspunkt einer möglichen Implementierung. Aus diesem Grunde stellt diese Darstellung eine Aufarbeitung des Modells in der Form dar, daß für eine mögliche Implementierung relevante Aspekte des Modells integriert wurden, während andere Aspekte in diesem Kapitel keine Berücksichtigung finden. Den Abschluß des Kapitel bildet eine Bewertung des Ansatzes in Bezug auf Anwendbarkeit und Leistungsfähigkeit des Modells.

1. Bilderraum - Hausdorff Metrik

Die Betrachtungen von Barnsley beschränken sich auf die Menge der kompakten Teilmengen $\mathcal{H}(X)$ eines vollständigen metrischen Raumes (X,d). $\mathcal{H}(X)$ wird mit einer Metrik h versehen, so daß diese Menge ebenfalls zu einem vollständig metrischen Raum $(\mathcal{H}(X),h)$ wird, was mit den folgenden einführenden Definitionen und Sätzen geschieht.

Definition:

Es sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum.

Dann sei: $\mathcal{H}(X):=\{K \subset X : \emptyset \neq K \text{ kompakt}\}$

Definition: (Entfernung eines Punktes zu einer kompakten Menge)

Es sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum, $x \in X$ und $B \in \mathcal{H}(X)$. Dann definiert $d(x, B) := \min(d(x, y) : y \in B)$ die Entfernung eines Punktes x zur Menge B.

Da jedes nicht leere Kompaktum ein Minimum und Maximum besitzt, ist bei beiden Definitionen die Kompaktheit der Mengen eine Voraussetzung.

Theorem: (Hausdorff-Metrik auf $\mathcal{H}$)

Es sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum, $A, B \in \mathcal{H}(X)$ und $d(A, B) := \max(d(x, B) : x \in A)$.

Dann definiert $h(A, B) := \max(d(A, B), d(B, A))$ eine Metrik auf $\mathcal{H}$, die Hausdorff-Metrik auf $\mathcal{H}$.

Das folgende Theorem zeigt die Vollständigkeit von $(\mathcal{H}(X),h)$.

Theorem: (Existenz eines Grenzwertes in $\mathcal{H}(X)$)

Mit obigen Definitionen wird $(\mathcal{H}(X),h)$ zu einem vollständigen metrischen Raum und für eine Cauchy-Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(\mathcal{H}(X),h)$ mit $A = \lim_{n \to \infty} A_n \in \mathcal{H}(X)$ gilt:

$$A = \{x \in X : \exists \text{ eine Cauchy-Folge } \{x_n \in A_n\} \text{ mit } \lim_{n \to \infty} x_n = x\}$$

Im Folgenden wird (X,d) immer als vollständiger metrischer Raum vorausgesetzt.

2. Kontrahierende Abbildungen in $\mathcal{H}$

Für einen Einsatz der IFS-Fraktale zur Kodierung von Bildern ist neben der reinen Existenz vor allem die Konstruktion und Bestimmung eines IFS-Fraktals von Interesse. Dies führt direkt zu kontrahierenden Abbildungen in $\mathcal{H}$.

Definition: (Kontrahierende Abbildung mit Lipschitz-Faktor s)

Eine Abbildung $\omega : X \to X$ heißt kontrahierend mit Lipschitz-Faktor s, falls es eine reelle Zahl s mit $0 \le s < 1$ gibt, so daß $d(\omega(x), \omega(y)) \le s \cdot d(x, y)$ für alle $x, y \in X$ gilt.

Lemma:

Jede eine kontrahierende Abbildung $\omega : X \to X$ in einem vollständigen metrischen Raum (X,d) ist stetig.

Lemma: (Abgeschlossenheit von $\mathcal{H}(X)$)

Es sei $\omega : X \to X$ eine stetige Abbildung in (X,d). Dann ist $\mathcal{H}(X)$ abgeschlossen in Bezug auf $\omega : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$, definiert durch $\omega(B) := \{\omega(x) : x \in B\}$ für alle $B \in \mathcal{H}(X)$.

Das folgende Lemma erlaubt die Konstruktion einer kontrahierenden Abbildung auf $(\mathcal{H}(X),h)$ aus einer vorhandenen kontrahierenden Abbildung auf (X,d).

Lemma: (Konstruktion einer kontrahierenden Abbildung auf $\mathcal{H}(X)$)

Es sei $\omega : X \to X$ eine kontrahierende Abbildung in (X,d) mit Lipschitz-Faktor s. Dann ist auch $\omega : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$, definiert durch $\omega(B) := \{\omega(x) : x \in B\}$, für alle $B \in \mathcal{H}(X)$, eine kontrahierende Abbildung auf $(\mathcal{H}(X),h)$ mit Lipschitz-Faktor s.

Das folgende Lemma erweist sich als sehr nützlich, da es die Konstruktion von kontrahierenden Abbildungen als Komposition existierender kontrahierender Abbildungen erlaubt.

Lemma: (Komposition kontrahierender Abbildungen)

$\{\omega_n : n = 1, 2, \ldots N\}$ seien kontrahierende Abbildungen auf $(\mathcal{H}(X),h)$ mit entsprechenden Lipschitz-Faktoren s_n für $n = 1, 2, \ldots N$.

Dann ist $W : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$ mit $W(B) := \bigcup_{n=1}^{N} \omega_n(B)$ für alle $B \in \mathcal{H}(X)$ eine kontrahierende Abbildung mit dem Lipschitz-Faktor $s = \max(s_n : n = 1, 2, \ldots N)$.

3. Iterierte Funktionen-Systeme

Auf Grundlage der vorangegangenen Abschnitte läßt sich nun der Begriff des IFS definieren und dessen Eigenschaften beschreiben.

Definition: (IFS)

$\{\omega_n : n = 1, 2, \ldots N\}$ seien kontrahierende Abbildungen auf $(\mathcal{H}(X),h)$ mit Lipschitz-Faktoren s_n für $n = 1, 2, \ldots N$.

Das Paar $(X, (\omega_n)_{n \le N})$ heißt IFS (*Iterated Function System*) mit Lipschitz-Faktor $s = \max(s_n : n = 1, 2, \ldots N)$.

In der Literatur und vorallem von Barnsley wird ein IFS in der Form $\{X;\omega_n : n = 1, 2, \ldots N\}$ geschrieben, so daß im folgenden auch diese Form benutzt werden soll. Das folgende Theorem faßt die Haupteigenschaften eines IFS zusammen.

Theorem: (IFS-Theorem)

Für ein IFS $\{X;\omega_n : n = 1, 2, \ldots N\}$ besitzt die Abbildung $W : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$ einen durch $A = \lim_{n \to \infty} W^n(B)$, für beliebiges $B \in \mathcal{H}(X)$, eindeutig bestimmten Fixpunkt $A \in \mathcal{H}(X)$.

Dieses Theorem stellt eine direkte Folgerung aus dem Theorem *Existenz eines Grenzwertes in* $\mathcal{H}(X)$ auf Seite 48 dar und ist einen Spezialfall des Banachschen Fixpunktsatzes.

Definition: (Attraktor)

Der Fixpunkt A eines IFS heißt auch Attraktor.

Unter dem Gesichtspunkt der Implementierung ist eine Konstruktion von kontrahierenden Abbildungen mit Hilfe einer Abbildung ω_0 mit Lipschitz-Faktor 0, einer sogenannten *condensation*-Abbildung, eine weitere interessante Variante. Dies motiviert auch die beiden folgenden Definitionen.

Definition: (*condensation*-Abbildung)

Für ein $C \in \mathcal{H}(X)$ wird die konstante Abbildung $\omega_0 : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$ mit $\omega_0(B) = C$ für $B \in \mathcal{H}(X)$ *condensation*-Abbildung genannt und C heißt die zugehörige *condensation*-Menge.

Definition: (IFS mit *condensation*)

Es sei $\{X;\omega_n : n = 1, 2, \ldots N\}$ ein IFS und $\omega_0 : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$ eine *condensation*-Abbildung. $\{X;\omega_n : n = 0, 1, \ldots N\}$ bezeichnet dann ein IFS mit *condensation* und Lipschitz-Faktor s.

Diese beiden Definitionen machen allerdings auch deutlich, daß sich das obige IFS-Theorem direkt auf ein IFS mit *condensation* übertragen läßt. Die analoge Formulierung des IFS-Theorems wird in der Literatur auch als IFS-Condensation-Theorem geführt.

Gemäß dem IFS- bzw. dem IFS-Condensation-Theorem besitzt man nun Möglichkeiten zur Konstruktion und Berechnung eines IFS. Ausgehend von einer kompakten Teilmenge $A_0 \subset \mathbb{R}^2$ und einem IFS $\{\mathbb{R}^2;\omega_n : n = 0, 1, \ldots N\}$ läßt sich $A_n = W^n(A)$ gemäß $A_{n+1} = \bigcup_{j=0}^{N} \omega_j(A_n)$ sukzessiv berechnen. Dies ist gleichbedeutend mit der Berechnung bzw. Konstruktion der Folge $\{A_n : n = 0, 1, \ldots\} \subset \mathcal{H}(X)$. Gemäß dem IFS-Theorem konvergiert diese Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen einen Attraktor, so daß das beschriebene Verfahren eine Methode zur approximativen Berechnung des Attaktors darstellt.

4. Collage Theorem

Das nachfolgende Theorem trifft eine Aussage über die Güte der Approximation und ist eines der zentralen, wenn nicht sogar das zentrale Theorem der fraktalen Bildkodierung.

Collage Theorem: ([Barnsley88a])

Es seien $T \in \mathcal{H}(x)$, $\varepsilon \geq 0$ und ein IFS $\{X;\omega_n : n = 1, 2, \ldots N\}$ so gegeben, daß $h(T,\bigcup_{n=1}^{N} \omega_n(T)) \leq \varepsilon$ gilt. A sei der Attraktor des IFS.

Dann gilt:

$$h(T,A) \leq (1-s)^{-1} \cdot h(T,\bigcup_{n=1}^{N} \omega_N(T)) \text{ für alle } T \in \mathcal{H}(x).$$

Daraus folgt:

$$h(T,A) \leq \frac{\varepsilon}{1-s}$$

Zur Bestimmung eines IFS finden, dessen Attraktor einer gegebenen Menge gleicht, muß man gemäß dem Collage Theorem somit eine Menge von kontrahierenden Abbildungen und passenden Mengen berechnen, so daß die Vereinigung der Abbilder, die "Collage", die gegebene Menge möglichst gut approximiert bzw. exakt beschreibt. Der Grad der Approximation wird mit Hilfe der Hausdorff-Metrik gemessen. Das Collage Theorem gibt also nur ein Abschätzung dafür an, wie gut T den Attraktor A approximiert. Das Theorem ist allerdings nicht konstruktiv, so daß keine Aussagen getroffen werden, wie die kontrahierenden Abbildungen bestimmt werden.
Das Ziel der fraktalen Bildkodierung ist somit die Bestimmung bzw. das Finden eines auflösungsunabhängigen mathematischen Modells in Form einer Menge von kontrahierenden Abbildungen für ein gegebenes *real world image*. Läßt sich das gefundene mathematische Modell kompakt speichern, so erhält man damit ein Modell zur fraktalen Bildkodierung. Für einen realen Einsatz dieser Idee und auch für eine Bewertung der möglichen Kompressionsraten ist allerdings zuerst noch eine Betrachtung der von Barnsley sogenannten *real world images* notwendig.

5. Repräsentation von Bildern

Eine zentrale Rolle in Barnsley's Modell zur fraktalen Bildkodierung spielen die von ihm so genannten *real world images* und die damit verbundene Modellbildung für die zu kodierenden Bilder. Eine direkte Übersetzung des Begriffes ins Deutsche kommt dem, was Barnsley darunter versteht, schon sehr nahe. Barnsley definiert, oder besser charakterisiert, die Menge der *real world images* über ihre Eigenschaften. Als charakteristisch für ein Element $\mathfrak{I}$ der Menge $\mathfrak{R}$ aller *real world images* sieht er die folgenden fünf Eigenschaften an:

1. Jedes *real world image* $\mathfrak{I} \in \mathfrak{R}$ besitzt einen Definitions-Bereich und eine physikalische Ausdehnung. Der Definitions-Bereich, oder *support*, eines $\mathfrak{I}$ wird mit $\square$ bezeichnet und ist eine Teilmenge der euklidischen Ebene: $\square \subseteq \mathbb{R}^2$.
2. Jedes $\mathfrak{I} \in \mathfrak{R}$ besitzt chromatische Eigenschaften, wie Farbe und Lichtintensität. Diese Eigenschaften lassen sich durch kontinuierliche Funktionen oder Borel-Maße auf dem Definitions-Bereich modellieren.
3. Jedes $\mathfrak{I} \in \mathfrak{R}$ ist auflösungsunabhängig und wird deshalb von Barnsley in seinem Modell als "kontinuierliches" Bild behandelt.
4. Die Menge $\mathfrak{R}$ ist in Bezug auf Clipping-Operationen abgeschlossen.
5. Die Menge $\mathfrak{R}$ ist in Bezug auf die Anwendung affiner Transformationen abgeschlossen.

Diese Eigenschaften von $\mathfrak{R}$ erlauben nun die Definition einer Ordnungsrelation auf $\mathfrak{R}$, die Bestimmung von Äquivalenzklassen sowie die Ausnutzung verschiedener mathematischer Modelle für *real world images*.

Die konkrete Wahl eines speziellen mathematischen Modells ist für die folgenden Betrachtungen nicht notwendig. Wird diese Wahl dennoch vorgenommen, so dient sie im allgemeinen mehr der Veranschaulichung des Sachverhaltes. Auch aus diesem Grunde bezieht Barnsley seine Aussagen und Formulierungen meist auf die Darstellung von Bildern als Funktionen, weshalb das entsprechende Modell hier kurz diskutiert werden soll.

Die Menge $\mathfrak{R}$ der *real world images* wird in diesem Falle mit Hilfe von Funktionen $f : \square \to I$ modelliert. $\square$ stellt den Definitionsbereich und $I \subset \mathbb{R}$ den Wertebereich dar, welcher den Bereich der möglichen Graustufen des Bildes festlegt. Die Festlegung der Betrachtung auf Graustufenbilder stellt keine Restriktion des Modells dar, sondern dient nur der Übersichtlichkeit. Der Funktionswert $f(x, y)$ gibt dann den Graustufenwert des Bildes an der Stelle (x,y) wieder.

An die Funktionen f und damit auch an das Modell werden Anforderungen gestellt, die das Arbeiten mit dem Modell vereinfachen sollen. Je nach Modell kann so z.B. gefordert werden, daß $f \in l^1(\square)$, $l^2(\square)$ oder auch $l^\infty(\square)$ ist. Inwieweit diese Forderungen den realen Gegebenheiten der digitalen Bildverarbeitung entsprechen, wird in diesem Kontext nicht betrachtet. Ein *real world image* aus der Menge $\mathfrak{R}$ ist dann durch die Angabe des Definitionsbereichs $\square$ und der Funktion f eindeutig bestimmt. Andererseits bestimmt dann auch jede Funktion f, welche die Bedingungen des Modells erfüllt, eindeutig ein Element aus $\mathfrak{R}$.

Für eine endliche Approximation eines $\mathfrak{I} \in \mathfrak{R}$ besitzt man dann auch wieder verschiedene Möglichkeiten. Barnsley schlägt die Zuweisung von

$$f(P) := \left(\int_P f(x)dx\right) \Big/ \left(\int_P dx\right)$$

für jedes Pixel $P \in \square$ vor.

Den Abstand zwischen zwei Bildern $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{K}$ aus $\mathfrak{R}$ mit demselben Definitionsbereich läßt sich durch die entsprechende Abstandsfunktion des gewählten Funkionenraums messen, wie z.B.:

$$d(\mathfrak{I}, \mathfrak{K}) = \int_{\square} |f(x) - g(x)|\,dx \text{ für } f, g \in l^1(\square)$$

Geht man von den oben genannten Eigenschaften für ein *real world image* aus, so lassen sich damit also verschiedene mathematische Modelle für die Darstellung von Bildern angeben, wie die erwähnte Darstellung mit Hilfe einer Funktion $f \in L^1$, $f \in L^2$, $f \in L^\infty$ oder auch mit Hilfe von Borel-Maßen. All diesen Modellen ist allerdings eigen, daß sie die Daten (Bilder) als reellwertig annehmen. Für eindimensionale Daten, wie z.B. Audio-Daten, kann der Frequenzverlauf des Signals als Funktion über einer Zeitachse ausgedrückt werden. Bei zweidimensionalen Bilddaten trägt man die das Bild darstellende Funktion in Bezug auf die beiden räumlichen Koordinaten ab.

Diese Vorgehensweise bei der Darstellung von zu verarbeitenden Daten ist für die Bildung eines mathematischen Modells für deren Verarbeitung sehr vorteilhaft, da sich mathematische Methoden direkt anwenden lassen. So wundert es nicht, daß Barnsley für sein Modell zur fraktalen Bildkodierung sich eines solchen Modells zur Darstellung von Bildern bedient. Bei einer Anwendung seines Modells zur fraktalen Bildkodierung auf digitale Bilder stößt man dann allerdings schon beim Modell zur Bilddarstellung auf Probleme, da die digitalen Bilder kein Element der Menge $\mathfrak{R}$ der *real world images* sind. Für eine Anwendung des Modells von Barnsley benötigt man deshalb auch noch eine Abbildung von der Menge $\mathfrak{R}$ in die Menge der digitalen Bilder, so wie sie z.B. auch von einem Scanner vorgenommen wird. Inwieweit diese Abbildung in die Menge der digitalen Bilder auch die Eigenschaften eines Bildes $\mathfrak{I} \in \mathfrak{R}$ erhält, darüber wird in Barnsley's Modell keine befriedigende Aussage getroffen. Die Definitionen und Theoreme des Modells werden ausschließlich für Elemente aus $\mathfrak{R}$ getroffen.

Dies steht im Gegensatz zur Problemstellung der digitalen Bildverarbeitung, die, wie der Name schon sagt, auf der Menge der digitalen Bilder arbeitet. Die Verwendung von digitalen bzw. diskreten Modellen zur Bearbeitung von Bildern, legt dann auch die Entwicklung eines diskreten Modells zur fraktalen Bildkodierung nahe. Anhand eines diskreten Modells lassen sich die Kompressionsraten und Bildqualitäten einer fraktalen Bildkodierung mit anderen Kompressionsverfahren für digitale Bilder vergleichen und einordnen.

6. Lokale IFS

Basierend auf den bisherigen Ausführungen ist eine sinnvolle Umsetzung der Idee zur fraktalen Bildkodierung noch nicht möglich, unabhängig von der Problematik des "analogen" Bildmodells. Dies beruht im wesentlichen auf der Tatsache, daß bis jetzt immer davon ausgegangen wird, daß für ein Bild $\mathfrak{I} \in \mathfrak{R}$ ein IFS mit dem entsprechenden At-

traktor zur Beschreibung des gesamten Bildes gefunden werden muß. Auch wenn die Theorie ein solches Vorgehen nahelegt, so ist diese Vorgabe für eine praktische Anwendung aufgrund der Komplexität des Verfahrens i.a. nicht akzeptabel und in dieser Form nur für Spezialfälle anwendbar.

Um eine praktische Anwendung des Verfahrens zu ermöglichen, wird im Folgenden nicht mehr die Kodierung des gesamten Bildes $\Im$ mit einem IFS diskutiert, sondern die Kodierung kompakter Teilmengen von $\Im$ mit je einem IFS. Diese Anwendung hat zur Folge, daß für die Kodierung des Gesamtbildes mehrere IFS verwendet werden müssen. Da somit nicht nur die Daten für ein IFS, sondern für mehrere IFS gespeichert werden müssen, bedeutet dies natürlich eine schlechtere Kompressionsrate, das Verfahren ist dafür allerdings praktikabler.

Definition: (Lokal kontrahierende Abbildung)

R sei eine nichtleere Teilmenge von X und $s \in \mathbb{R}$ mit $0 \le s < 1$.

Eine Abbildung $\omega : R \to X$ mit der Eigenschaft $d(\omega(x), \omega(y)) \le s \cdot d(x, y)$ für alle $x, y \in R$ heißt lokal kontrahierende Abbildung auf (X,d).

s heißt Lipschitz-Faktor von ω.

Definition: (Lokales IFS)

Die Abbildungen $\omega_i : R_i \to X$ seien lokal kontrahierende Abbildungen auf (X,d) mit Lipschitz-Faktor s_i für $i = 1, 2, \ldots, N$.

Dann heißt $\{\omega_i : R_i \to X : i = 1, 2, \ldots N\}$ ein lokales IFS (LIFS) mit dem Lipschitz-Faktor $s = \max(s_n : n = 1, 2, \ldots N)$

Analog zum IFS-Theorem und zum Collage-Theorem für IFS lassen sich nun auch ein LIFS-Theorem und ein Collage-Theorem für LIFS formulieren. Diese Formulierungen sind jedoch im wesentlichen nur technische Änderungen an den schon bekannten Theoremen, so daß man LIFS im Großen und Ganzen wie IFS betrachten kann, auch wenn LIFS für die praktische Anwendung des Verfahrens die wichtigere Rolle spielen. Vor diesem Hintergrund läßt sich der Einsatz der IFS-Theorie zur Kompression von Bilddaten allgemein beschreiben.

7. Einsatz von IFS zur Bildkompression

Wie man den bisherigen Abschnitten dieses Kapitels entnehmen kann, besitzt man bei der Formulierung bzw. Definition eines Systems zur fraktalen Bildkodierung verschiedene Möglichkeiten in Bezug auf die Wahl der mathematischen Hilfsmittel. Unter dem Aspekt einer möglichen Implementierung schränkt sich diese Auswahl aufgrund von Überlegungen zur Komplexität des Systems natürlich ein. Im Sinne der Entwicklung,

der Vergleichbarkeit und der Bewertung von verschiedenen Verfahren ist die Entwicklung und Verwendung einer allgemeinen Methodik natürlich ein Vorteil und eine Notwendigkeit.

Ziel des folgenden Abschnittes ist deshalb eine allgemeine Beschreibung der Methodik für eine fraktale Bildkodierung, anhand derer verschiedene Varianten entwickelt und formuliert werden können. Für die Entwicklung und Beschreibung eines Verfahrens zur fraktalen Bildkompression werden für die folgenden Bereiche Modelle bzw. Methoden als Voraussetzung benötigt:

1. Ein Modell Y für die Menge $\Re$ der *real world images*.
2. Eine Metrik d auf Y, so daß (Y,d) ein vollständiger metrischer Raum ist.
3. Einen kontrahierenden Operator O auf Y mit
   $d(O(\phi), O(\psi)) \leq s \cdot d(\phi, \psi)$ für alle $\phi, \psi \in Y$ und $s \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq s < 1$.

Für ein System bestehend aus diesen drei Komponenten lassen sich die im Folgenden aufgelisteten Eigenschaften nachweisen.

Existenz eines Attraktors

Da der Operator O kontrahierend und (Y,d) ein vollständiger metrischer Raum ist, existiert ein eindeutiges Bild $\phi \in Y$ so, daß $O(\phi) = \phi$ gilt.

Berechnung des Attraktors

Zur Berechnung des Attraktors ϕ benutzt man die Tatsache, daß für ein $\psi \in Y$ die wiederholte Anwendung des Operators O auf ψ gegen ϕ konvergiert:

$$\lim_{n \to \infty} O^n = \phi$$

Für den Fall, daß eine Konstante C existiert mit $d(\phi_1, \phi_2) < C$ für alle $\phi_1, \phi_2 \in Y$, besitzt man sogar eine Fehlerabschätzung der Form

$$d(O^n(\psi), \phi) \leq s^n C .$$

Mit Hilfe dieser Ungleichung erhält man einerseits einen Weg zur Berechnung von ϕ, dem invarianten Bild des Operators O, und andererseits läßt sich mit ihrer Hilfe die Anzahl der Iterationen abschätzen, die für eine gewünschte Qualität bei der Kodierung notwendig ist.

Collage Theorem

Die Entfernung zwischen $\psi \in Y$ und dem Attraktor ϕ des Operators O ist beschränkt durch

$$d(\phi, \psi) \leq \frac{d(\psi, O(\psi))}{(1 - s)} .$$

Die Menge $O(\psi)$ ist die Collage und $d(\psi, O(\psi))$ ist der Collage-Fehler.

Für das Finden bzw. Berechnen eines Operators O und dessen Attraktor, der das Bild ψ möglichst exakt beschreiben soll, beschreibt das Collage-Theorem damit das zu lösende Problem in der Form, daß ein Operator O bestimmt werden muß, dessen Anwendung das Bild ψ nach Möglichkeit nur minimal ändert. Wie der Operator O bestimmt werden kann, läßt sich aus dem Collage-Theorem allerdings nicht ablesen. In Abhängigkeit des Modells Y für die Menge $\Re$ der *real world images* und der Metrik d kann die Kontraktion des Operators O und damit die Änderung am Bild ψ auf die räumliche Ausdehnung, die Intensität oder auch auf maßtheoretische Aspekte von ψ beziehen.

8. Die Fraktale Transformation

Betrachtet man die bisherigen Ausführungen zu Barnsley's Modell für die fraktale Bildkodierung, so stellt sich die Frage, an welcher Stelle Barnsley für seine erfolgreiche Patentanmeldung angesetzt hat, da die verwendete Methodik allgemeine mathematische Methoden verwendet, die sich i.a. nicht patentieren lassen. Das Ziel dieses Abschnittes ist somit die Darstellung der Anwendung der vorgestellten Methodik in der Art von Barnsley und die Darstellung seines U.S. Patents #5,065,447.

Unter Verwendung der allgemeinen Methodik aus dem vorangegangenen Abschnitt stellt sich die fraktale Bildkodierung von Barnsley für Graustufenbilder folgendermaßen dar.

Modell Y für die Menge $\Re$ der *real world images*

Als Modell für die Bilder $\Re$ wählt er den Raum Y aller reellwertigen Funktionen $\phi : \square \to I$ mit $\square \subseteq \mathbb{R}^2$ und $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$. Diese Funktionen sollen die Verteilung der Grauwerte des Bildes darstellen.

Metrik d auf Y

Die Metrik, die Barnsley auf Y definiert, ist die l^∞-Metrik:

$$d(\phi_1, \phi_2) = \sup(|\phi_1(x, y) - \phi_2(x, y)| : (x,y) \in \square) \text{ für alle } \phi_1, \phi_2 \in Y$$

Wie Barnsley selbst zu bedenken gibt, ist diese Metrik nicht speziell für die Bestimmung von Entfernungen zwischen Bildern gedacht. Sie wurde von ihm primär deshalb gewählt, weil sich mit ihr die Beweise und Formulierungen vereinfachen.

Kontrahierender Operator F

$\mathcal{D}$ sei eine endliche Partitionierung von $\square$:

$$\square = \bigcup_{i=1}^{M} D_i \text{ mit } D_i \subset \square \text{ und } D_i \cap D_j = \emptyset \text{ für } i \neq j$$

Für jedes i sei $f_i : D_i \to \square$ mit $f_i(D_i) = R_i$ eine Abbildung und $v_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine kontrahierende Transformation mit Lipschitz-Faktor s mit $0 \leq s < 1$:

$$|v_i(z_1) - v_i(z_2)| \leq s \cdot |z_1 - z_2| \text{ für alle } z_1, z_2 \in \mathbb{R} \text{ und } i = 1, 2, \ldots, M$$

Dann sei der Operator $F : Y \to Y$ definiert durch:

$$(F\psi)(x, y) := v_i(\psi(f_i(x, y))) \text{ für } x, y \in D_i$$

F heißt Fraktale Transformation (*fractal transform operator*).

Theorem: (Konvergenz der Fraktalen Transformation)
Der vollständige metrische Raum (Y, d) und der Operator $F : Y \to Y$ seien wie oben beschrieben definiert. Dann ist F eine kontrahierende Abbildung auf Y:

$$d(F(\phi_1), F(\phi_2)) \leq s \cdot d(\phi_1, \phi_2) \text{ für alle } \phi_1, \phi_2 \in L^{\infty}(\square)$$

F besitzt den Lipschitz-Faktor s.

Aus diesem Theorem und den vorangegangenen Abschnitten folgt nun die Existenz des Attraktors $\phi \in Y$ mit $F(\phi) = \phi$ und durch die wiederholte Anwendung des Operators F auf ein beliebiges $\psi \in Y$ kann dieser berechnet werden, da $\lim_{n \to \infty} F^n(\psi) = \phi$ gilt. Desweiteren besitzt man eine Fehlerabschätzung

$$|F^n(\psi)(x, y) - \phi(x, y)| \leq s^n |b - a| \text{ für } (x, y) \in \square \text{ und } I = [a,b]$$

und die Entfernung von $\psi \in Y$ zum Attraktor des Operators F ist begrenzt durch:

$$d(\phi, \psi) \leq \frac{d(\psi, F(\psi))}{(1 - s)}$$

Dies ist ein Collage-Theorem für den Operator F.

Fraktale Transformation und LIFS

Interessant wird die Betrachtung dieses Operators zusammen mit der Idee der LIFS. Für diese Betrachtungen benötigt man zusätzlich noch die Voraussetzung, daß die Funktionen f_i invertierbar sind.

Es seien die Funktionen $\boldsymbol{w}_i : \boldsymbol{R}_i \to \boldsymbol{X}$ mit $\boldsymbol{X} = \square \times [a,b]$ und $\boldsymbol{R}_i = R_i \times [a,b]$ definiert durch:

$$\boldsymbol{w}_i(x, y, z) := (w_i(x, y), v_i(z))$$

$$\text{für alle } (x, y, z) \in \boldsymbol{R}_i \text{ und } w_i(x, y) = f_i^{-1}(x, y) \text{ für } i = 1, 2, \ldots, N$$

Damit erhält man das folgende LIFS:

$$\{X, \boldsymbol{w}_i : \boldsymbol{R}_i \to X : (i = 1, 2, \ldots, N)\}$$

Durch die Verwendung der euklidischen Metrik für d wird (X, d) zu einem vollständigen metrischen Raum. Sind nun alle w_i kontrahierend mit einem Lipschitz-Faktor s, so ist das LIFS mit demselben Lipschitz-Faktor kontrahierend.

Mit $Y = \mathcal{H}(X)$ werde $W_{\text{lokal}} : Y \to Y$ definiert durch

$$W_{\text{lokal}}(B) = \bigcup \boldsymbol{w}_i(\boldsymbol{R}_i \cap B) \text{ für } B \in Y$$

so daß

$$W_{\text{lokal}}(\{(x, y, \psi(x, y)) : (x, y) \in \square\}) = \{(x, y, F(\psi)(x, y)) : (x, y) \in \square\}$$

gilt. W_{lokal} bildet also den Graphen von $\psi \in Y$ auf den Graphen von $F(\psi)$ ab. Somit ist der Fixpunkt ϕ von F der Attraktor von W_{lokal}:

$$W_{\text{lokal}}(A) = A \text{ mit } A = \{(x, y, \phi(x, y)) : (x, y) \in \square\}$$

9. Zusammenfassung, Bewertung und Schlußfolgerungen

Barnsley's Idee besteht also aus der Kodierung eines Bildes als Menge von Fixpunkten kontrahierender Abbildungen. Die Existenz eines solchen Fixpunktes für gegebene kontrahierende Abbildungen läßt sich mit Hilfe der mathematischen Methoden aus Barnsley's Modell auch nachweisen. Das Problem bei einer Kodierung von gegebenen Bildern mit Hilfe von kontrahierenden Abbildungen ist somit das Berechnen jener Abbildungen, deren Fixpunkte das gegebene Bild möglichst exakt beschreiben. So gesehen ist das Kodierungsproblem genau invers zum Nachweis der Existenz und zur Berechnung der Fixpunkte. Die Berechnung der Fixpunkte entspricht der Dekodierung eines fraktal kodierten Bildes.

Diese beiden Probleme sind in Bezug auf ihre Komplexität allerdings nicht symmetrisch. Während die Berechnung der Fixpunkte bei gegebenen Abbildungen relativ einfach ist, gestaltet sich die Bestimmung der kontrahierenden Abbildungen bei einem gegebenen Bild. also die Kodierung, als ungemein schwieriger. Zur Lösung dieses Problems formulierte Barnsley das Collage Theorem, mit dessen Hilfe die Bestimmung der Abbildungen möglich wird.

Die Idee des Collage Theorems ist die Konstruktion einer Approximation oder Collage des Originalbildes mit Hilfe von kontrahierenden Abbildungen. Das Collage Theorem liefert dann eine Aussage darüber, wie gut die Fixpunkte der kontrahierenden Abbildungen für die Collage das Originalbild approximieren. Dies ist Barnsley's

grundlegende Idee für die Kodierung von Bildern, nämlich die Bestimmung von kontrahierenden Abbildungen für eine Collage des Originalbildes zur Approximation mit einem möglichst geringem Fehler.

Das Problem bei Barnsley's Modell ist nicht die theoretische Aufarbeitung des Sachverhaltes, denn für diesen Zweck benutzt er allgemeine mathematische Sachverhalte, wie die Darstellung seines Modells in diesem Kapitel zeigt. Sondern bei der Bildung und Darstellung seines Modells geht er nur selten auf die Berechenbarkeit und damit auf eine mögliche Implementierung seines Modells ein. Innerhalb seines Modells zur fraktalen Bildkodierung äußert sich dies z.B. bei der Wahl eines Modells für die Menge der Bilder, wie es in Unterkapitel 5. auf Seite 51 beschrieben wird.

Diese Tatsachen, verbunden mit seinen bis heute nur in Spezialfällen nachgewiesenen Behauptungen, Kompressionsraten von bis zu 1000:1 zu erreichen, haben lange Zweifel an der Verwendbarkeit einer fraktalen Kodierung zur Kompression von Bildern aufkommen lassen. Dazu trug mit Sicherheit auch bei, daß sich Barnsley's Teile seines Modells in der Form eines Patentes hat schützen lassen [U.S. Patent #5,065,447] und Auskünfte über sein System mit Hinweis auf dieses Patent verweigerte.

Erste öffentliche Implementierungen von Systemen zur fraktalen Bildkodierung durch Jacquin [Jacquin89] sowie Jacobs und Boss [Boss89] wiesen die Berechenbarkeit nach und erlaubten eine erste Beurteilung der Leistungsfähigkeit solcher Systeme. Diese Arbeiten und eigene Versuche motivierten die Formulierung eines diskreten Modells zur fraktalen Bildkodierung und führten zu einer Implementierung auf der Basis dieses Modells, so wie es in den folgenden Kapiteln 3 bis 5 beschrieben wird. Die Entwicklung des diskreten Modells in Kapitel 3 folgt somit der Notwendigkeit nach diskreten Methoden zur Formulierung eines Systems zu fraktalen Bildkodierung, wie sie eine Implementierung fordert.